Chapitre IV

CARACTERISTIQUES DU MODELE RHEOLOGIQUE DU FLUAGE DYNAMIQUE DU BETON

IV.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre on donne certaines caractéristiques du modèle rhéologique relatif a l'étude uniaxial du fluage dynamique exposé dans les travaux [L. A] , et ce dans le but de l'utiliser par la suite pour l'étude du fluage dynamique des poutres.

IV.2. MODÈLE RHÉOLOGIQUE

Le modèle rhéologique utilisé est analogue à celui de Kelvin –Voigt. La différence fondamentale entre ces deux modèles est que le nombre de liaisons élastiques et visqueuses du modèle proposé dépend de l'état de vibration du matériau. On postule que la composante vibratoire de la charge provoque un endommagement interne de la structure du matériau. Cet endommagement est exprimé par la diminution du nombre d'élément élastique et visqueux.

En conséquence les valeurs normales des termes μ, λ (respectivement coefficients de rigidité et de viscosité) diminueront jusqu'aux valeurs μ^d , λ^d .

Lors de l'interruption des vibrations, les éléments rompus se rétablissent et les coefficients μ, λ reprennent leurs valeurs initiales.

Le passage du modèle d'un état à un autre est considéré comme étant instantané.

Il est important de noter que les valeurs μ^d , λ^d sont des fonctions (et non des fonctionnelles) de l'état de vibration du matériau. elles sont complètement déterminées en fonction des valeurs des paramètres de la charge, l'histoire de chargement n'influe en aucune manière sur ces valeurs .

IV.3. ÉTUDE DU MODÈLE

Le modèle permet d'envisager un régime quelconque de chargement (charges dynamiques à paramètres variables). Le cas présentant un intérêt d'étude de première importance est celui de la charge stationnaire dont l'allure est exprimée par:

$$\sigma_t^d = \sigma + \Delta\sigma \sin \omega t \quad \text{………………………………………………….. (IV.1)}$$

Dans ce cas les paramètres rhéologique du modèle (μ^d , λ^d) ne dépendent pas du temps (puisque $\Delta\sigma$, ω sont constants), on parle alors de déformation visco -élastique définie par l'équation rhéologique suivante:

$$\lambda^d \dot{\varepsilon}_t^d + \mu^d \varepsilon_t^d = \sigma_t^d \quad , \quad \varepsilon_0^d = 0 \quad \text{………………………………….. (IV.2)}$$

dont la solution est:

$\varepsilon_t^d = \varepsilon_t + \Delta\varepsilon \sin\omega t$ avec $\varepsilon_t = \dfrac{\sigma}{\mu^d} - \left(A + \dfrac{\sigma}{\mu^d}\right)e^{-\gamma t}$, $\Delta\varepsilon = \sqrt{A^2 + B^2}$

$\varphi = arctg\left(A/B\right)$, $B = -\dfrac{\gamma}{\omega}A$ et $\gamma = \dfrac{\mu^d}{\lambda^d}$

Par les déformations du fluage dynamique, il serait commode de considérer les déformations moyennes du cycle $\varepsilon_t \equiv \varepsilon_t^{fd}$ et non toutes les déformations dynamiques ε_t pour les valeurs intéressantes en pratique de σ, on trouve que:

A << σ / μ^d Par conséquent $\varepsilon_t = \dfrac{\sigma}{\mu^d}\left(1 - e^{-\gamma t}\right)$ ……………………… (IV.3)

Avec $\mu^d = \mu^{st} e^{-K\Delta\sigma}$, $\mu^{st} = C_\infty^{-1}$, $\dfrac{\mu^{st}}{\lambda^{st}} = \dfrac{\mu^d}{\lambda^d} = \dfrac{\mu}{\lambda} = \gamma = cte$

Cette équation est la solution de l'équation rhéologique (IV. 2) ainsi, pour déterminer les déformations du fluage dynamique ε_t^{fd} et les contraintes ainsi que leur relations on utilise le modèle en question avec les paramètres dynamiques μ^d, λ^d et la charge statique σ.

On remarque que le seul paramètre de la charge influant sur les caractéristiques rhéologique du modèle est l'amplitude de la contrainte.

IV.4. DÉTERMINATION DE LA RELATION ENTRE AMPLITUDE DE CONTRAINTE ET AMPLITUDE DE DÉFORMATION DU FLUAGE DYNAMIQUE

Afin de pouvoir utiliser le modèle en question pour l'étude du fluage dynamique des poutres, on doit établir une relation entre amplitude de contrainte et amplitude de déformation. La connaissance de la relation entre contrainte et déformation sur toute l'étendu de leurs domaines respectifs est d'un intérêt capital pour la conception des structures.

On a:

$$\sigma_t^T = \sigma_t + \Delta\sigma \sin\omega t$$

$$\varepsilon_t^T = \varepsilon_t + \Delta\varepsilon \sin(\omega t + \varphi)$$

L'équation rhéologique du modèle est de la forme suivante à étudier afin de déterminer les relations existantes entre contraintes et déformations:

$$\sigma_t = \mu^d \varepsilon_t + \lambda^d \dot{\varepsilon}_t \quad \text{……………………………………………………} \quad \text{(IV.4)}$$

avec $\sigma_t^T = \sigma_t + \sigma_t^d$, $\varepsilon_t^T = \varepsilon_t + \varepsilon_t^d$, $\varepsilon_t^T = \varepsilon_E + \varepsilon_\mu = \varepsilon_E + \varepsilon_\lambda$, $\sigma_E = E\varepsilon_t$, $\sigma_\lambda = \lambda^d \varepsilon_\lambda$

$\sigma_t^T = E\varepsilon_E$, $\sigma_\mu = \mu^d \varepsilon_\mu$; $\varepsilon_t^T = \dfrac{\sigma_t^T}{E} + \varepsilon_\lambda$

remplaçant dans l'équation (IV.4) on aura:

$$\sigma_t^T = \mu^d \left(\varepsilon_t^T - \frac{\sigma_t^T}{E} \right) + \lambda^d \left(\overset{\bullet}{\varepsilon}_t^T - \frac{\overset{\bullet}{\sigma}_t^T}{E} \right)$$

en développant l'équations on aboutit à un système de deux équation qui sont:

$$\begin{cases} \sigma_t^d = \lambda^d \dfrac{d}{dt}\left(\varepsilon_t^d - \dfrac{\sigma_t^d}{E} \right) + \mu^d \left(\varepsilon_t^d - \dfrac{\sigma_t^d}{E} \right) & \text{.............................. (IV.6)} \\ \sigma_t = \lambda^d \dfrac{d}{dt}\left(\varepsilon_t - \dfrac{\sigma_t}{E} \right) + \mu^d \left(\varepsilon_t - \dfrac{\sigma_t}{E} \right) & \text{.................................. (IV.7)} \end{cases}$$

L'étude de la première équation détermine la relation qui existe entre l'amplitude de la contrainte et celle de la déformation, par contre l'étude de le deuxième équation détermine la relation entre la contrainte totale et la déformation totale du modèle.

L'étude de ces deux équation concernant le comportement dynamique du fluage servant comme hypothèses et données de base à l'étude du comportement rhéologique de la flexion des poutres soumises à l'action simultanée des charges statiques et dynamiques .

a.) Étudions l'équation (IV.6) du système:

$$\sigma_t^d = \lambda^d \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_t^d - \frac{\sigma_t^d}{E} \right) + \mu^d \left(\varepsilon_t^d - \frac{\sigma_t^d}{E} \right) \quad \text{.................................. (IV.6)}$$

avec $\sigma_t^d = \Delta\sigma \sin\omega t$, $\varepsilon_t^d = \Delta\varepsilon \sin(\omega t + \varphi)$

Remplaçant dans l'équation (IV.6) on aura:

$$\sigma_t^d = \lambda^d \left(\overset{\bullet}{\varepsilon}_t^d - \frac{\overset{\bullet}{\sigma}_t^d}{E} \right) + \mu^d \left(\varepsilon_t^d - \frac{\sigma_t^d}{E} \right)$$

$$\Delta\sigma \sin\omega t = \lambda^d \left[\Delta\varepsilon\omega \cos(\omega t + \varphi) - \frac{\Delta\sigma\omega \cos\omega t}{E} \right] + \mu^d \left[\Delta\varepsilon \sin(\omega t + \varphi) - \frac{\Delta\sigma \sin\omega t}{E} \right]$$

Développant l'équation on aboutit à l'étude d' un nouveau système à deux équation:

$$\begin{cases} \Delta\varepsilon \left(\mu^d \sin\varphi + \lambda^d \omega \cos\varphi \right) = \Delta\sigma \left(\dfrac{\lambda^d}{E} \omega \right) & \text{..................................(IV.8)} \\ \Delta\varepsilon \left(\mu^d \cos\varphi - \lambda^d \omega \sin\varphi \right) = \Delta\sigma \left(1 + \dfrac{\mu^d}{E} \right) & \text{.................................. (IV.9)} \end{cases}$$

b.) Étudions l' équation (IV.8) du système:

$$\Delta\varepsilon\left(\mu^{d}\sin\varphi+\lambda^{d}\omega\cos\varphi\right)=\Delta\sigma\left(\frac{\lambda^{d}}{E}\omega\right) \qquad \text{(IV.8)}$$

Avec : $tg\varphi=\dfrac{A}{B}$; $B=-\dfrac{\gamma}{\omega}A$, $\gamma=\dfrac{\mu}{\lambda}$

$tg\varphi\to\infty$

Après simplification on aura donc:

$$\Delta\varepsilon\cos\varphi=\frac{\Delta\sigma}{E} \qquad \text{(IV.10)}$$

c.) Étudions l' équation (IV.9) du système:

$$\Delta\varepsilon\left(\mu^{d}\cos\varphi-\lambda^{d}\omega\sin\varphi\right)=\Delta\sigma\left(1+\frac{\mu^{d}}{E}\right) \qquad \text{(IV.9)}$$

Après simplification on aboutit à un autre système de deux équations suivant:

$$\begin{cases}\Delta\varepsilon\cos\varphi=\dfrac{\Delta\sigma}{E} & \text{(IV.10)}\\[2ex] \Delta\varepsilon\sin\varphi=-\dfrac{\Delta\sigma}{\mu^{d}\omega}\gamma & \text{(IV.11)}\end{cases}$$

$tg\varphi\to 0 \quad\Rightarrow\quad \varphi=k\pi$

l'équation (IV.10) devient :

$$\Delta\varepsilon=\frac{\Delta\sigma}{E}\quad\Rightarrow\quad\Delta\sigma=E\Delta\varepsilon \qquad \text{(IV.12)}$$

d.) Étudions l'équation (IV.7) :

$$\sigma_t=\lambda^{d}\left(\dot{\varepsilon}_t-\frac{\dot{\sigma}_t}{E}\right)+\mu^{d}\left(\varepsilon_t-\frac{\sigma_t}{E}\right) \qquad \text{(IV.7)}$$

avec $\sigma_t=cte$; $\dot{\sigma}_t=0$; $\dot{\varepsilon}_t=0$.

Après simplification on aura:

$$\varepsilon_t=\sigma_t\left(\frac{1}{\mu^{d}}+\frac{1}{E}\right) \qquad \text{(IV.13)}$$

Avec $\mu^{d}=\mu^{st}e^{-K\Delta\sigma}$, $\mu^{st}=C_{\infty}^{-1}$

On aura: $\sigma_t=\varepsilon_t\left(\dfrac{E}{1+C_{\infty}^{+1}\,e^{+K\Delta\sigma}}\right)$ à $t\to\infty$ ……(IV.14)

IV.5. CONCLUSION

- On conclue que la relation entre l'amplitude des contrainte et déformation dynamique ($\Delta\sigma$ et $\Delta\varepsilon$) est une relation élastique (relation de Hook) $\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon$ ce qui permet de définir aisément l'amplitude de la contrainte à n'importe quel point de la section .

- On a aussi la non homogénéisation rhéologique des poutres, étant donné que les caractéristiques rhéologiques du matériau dépendent de l'amplitude de la contrainte qui dans le cas des poutres varie sur la longueur de la poutre et sur sa section.