

# **Chapitre - II**

## **METHODES DE RESOLUTION NUMERIQUE**

## 2.1 Introduction

La complexité du modèle physique que nous étudions, ainsi que les équations qui le représentent, rend difficile la résolution analytique du système. Une étude numérique proposée dans ce chapitre résout le problème. Cette méthode prend en compte le phénomène stationnaire seulement, qui est suffisant pour donner les caractéristiques essentielles du dispositif étudié.

Dans ce travail, on a considéré le cas d'une structure  $p^+n n^+$  au silicium irradié, lui appliquer l'ensemble des équations décrivant le mécanisme de transport (les équations de continuité pour les deux types de porteurs et l'équation de poisson). Pour la discrétisation des équations, on a utilisé la méthode des différences finies en considérant seulement le cas unidimensionnel, c'est à dire que les différentes variables recherchées ne seront fonction que de la coordonnée spatiale  $x$ . Les variables à trouver sont :  $\psi$  (potentiel électrique),  $n$  (densité des électrons libres) et  $p$  (densité des trous libres).

Pour résoudre le système des équations étudiées, deux méthodes itératives sont proposées par l'analyse numérique.

- Une méthode découplée, celle de Gummel qui est une méthode coûteuse en nombre d'itérations.
- Une méthode couplée qui est celle de Newton qui nécessite moins d'itérations. Cette dernière a été choisie pour la résolution de notre problème.

## 2.2 Equations physiques de base

Les équations de base aux dérivées partielles, non-linéaires, décrivant le comportement électrique des semi-conducteurs dans un état stationnaire pour le cas d'analyse d'une structure homogène unidimensionnelle sont présentées ci-dessous :

**a) L'équation de Poisson :**

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\frac{q}{\varepsilon} (\Gamma + p - n + N_{TD}^+ - N_{TA}^-) \quad (2.1)$$

Cette équation relie la variation du potentiel électrostatique avec les densités des charges locales.

$\psi$  : Le potentiel électrostatique,  $q$  la charge d'électron et  $\varepsilon$  la permittivité.

$n$  et  $p$  : sont les densités des porteurs de charges libres des électrons et des trous respectivement.

$\Gamma = N_d - N_a$  : La densité superficielle des dopants (le dopage est considéré comme uniforme dans la structure).

$N_{TD}^+$  : La densité des pièges donneurs vides.

$N_{TA}^-$  : La densité des pièges accepteurs occupés

**b) Les équations de continuité :**

Pour les électrons :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\partial J_n}{\partial x} + G - U = 0 \quad (2.2.a)$$

Pour les trous :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{q} \cdot \frac{\partial J_p}{\partial x} + G - U = 0 \quad (2.2.b)$$

Le flux des charges électriques est gouverné par les équations de continuité qui indiquent qu'il n'y a pas d'accumulation de charge ni spatiale ni temporelle. Ils décrivent la direction d'évolution des densités des électrons et des trous comme un résultat de trois processus : processus de transport, de génération et de recombinaison.

La structure étudiée n'est pas soumise aux excitations externes et elle ne fonctionne pas en régime de forts courants. Il en résulte que le taux de génération causé par les deux effets précédents est négligeable donc :  $G \approx 0$  . Les équations (2.2.b, c) s'écrivent :

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{\partial J_n}{\partial x} - U = 0 \quad (2.2.c)$$

$$-\frac{1}{q} \cdot \frac{\partial J_p}{\partial x} - U = 0 \quad (2.2.d)$$

**c) La densité du courant électrique :**

$$J_n = qD_n \frac{\partial n}{\partial x} - q\mu_n n \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.3.a)$$

$$J_p = -qD_p \frac{\partial p}{\partial x} - q\mu_p p \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.3.b)$$

La relation d'Einstein ( $D_{n(p)} = (kT/q) \times \mu_{n(p)}$ ) permet de mettre les équations (2.3.a) et (2.3.b) sous la forme :

$$J_n = \mu_n \left( kT \cdot \frac{\partial n}{\partial x} - q \times n \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (2.3.c)$$

$$J_p = -\mu_p \left( kT \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + q \times p \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \quad (2.3.d)$$

$\psi$  : Le potentiel.

$n$  : La densité d'électrons.

$p$  : La densité de trous.

$G$  : Le taux de génération.

$U$  : Le taux de recombinaison.

$\Gamma$  : La différence des densités d'accepteurs et donneurs superficiels ( $N_d - N_a$ ).

$N_{TD}^+$  : La densité de pièges donneurs ionisés.

$N_{TA}^-$  : La densité de pièges accepteurs ionisés.

$J_{n(p)}$  : Le courant d'électrons (trous).

$D_{n(p)}$  : La constante de diffusion des électrons (trous).

$\mu_{n(p)}$  : La mobilité des électrons (trous).

La mobilité est calculée au point  $x$  de la structure par la formule :

$$\mu(x) = \left( \frac{\mu_{\max} - \mu_{\min}}{1 + \left( \frac{|N(x)|}{N_{ref}} \right)^\alpha} + \mu_{\min} \right) \cdot \frac{1}{\left( 1 + \left( \frac{E(x)}{E_c} \right)^\beta \right)^{1/\beta}} \quad (2.4)$$

Avec:

$$|N(x)| = |N_d(x) - N_a(x)|$$

Les constants caractérisants la mobilité (pour le silicium) sont donnés dans le tableau 2.1.

	$\mu_p$	$\mu_n$
$N_{ref} \text{ (cm}^{-3}\text{)}$		
$\alpha$	$6.3 \times 10^{16}$	$8.5 \times 10^{16}$
$\mu_{\max} \text{ (cm}^2 / V \cdot \text{sec)}$	0.76	0.72
	495	1330
$\mu_{\min} \text{ (cm}^2 / V \cdot \text{sec)}$	47.7	65
$E_c \text{ (V/cm)}$	$1.95 \times 10^4$	$8 \times 10^3$
$\beta$	1	2

**Tableau 2.1** : Les paramètres de la mobilité

**d) Le taux de recombinaison :**

$$U = \frac{n \cdot p - n_i^2}{\tau_p \cdot (n + n_1) + \tau_n \cdot (p + p_1)} \quad (2.5)$$

$U$  : Le taux net de recombinaison

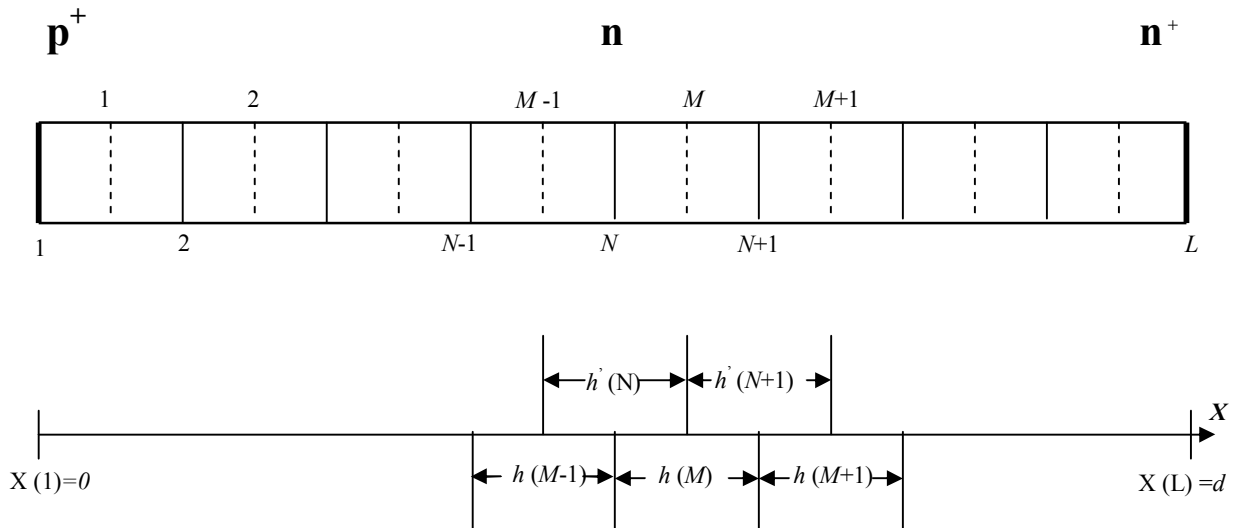
$n_1, p_1$  : Sont respectivement les densités des électrons et des trous lorsque le niveau de Fermi coïncide avec celui des centres recombinants.

$\tau_p$  : La durée de vie des trous dans un semi-conducteur de type **n** lorsque tous les centres sont occupés.

$\tau_n$  : La durée de vie des électrons dans un semi-conducteur de type **n** lorsque tous les centres sont occupés.

### 2.3 Discrétisation spatiale de la structure [p<sup>+</sup>n n<sup>+</sup>]

Afin d'appliquer une méthode d'analyse numérique sur les équations fondamentaux qui régissent le phénomène de transport, ces équations sont transformées en d'autres équations où les variables sont définies en fonction du nombre fini de points de la structure étudiée. Pour cela, la structure **p<sup>+</sup>n n<sup>+</sup>** considérée est divisée sur sa longueur  $d$  en un nombre  $L$  de cellules. Une autre division auxiliaire est introduite au milieu de chaque cellule. La figure (2.1) montre la discrétisation considérée où une double notation  $(h, h')$  est utilisée pour pouvoir distinguer les variables primitives  $n, p$  et  $\psi$  qui sont reliées aux nœuds principaux notés par  $N$ , et donc dépendantes du pas  $h$ , alors que les variables dérivées sont reliées aux nœuds secondaires situés au milieu des tranches et notés par  $M$ , et donc dépendantes du pas  $h'$ .



**Fig.2.1:** Discrétisation spatiale de la structure p<sup>+</sup>n n<sup>+</sup> suivant la méthode des différences finies

## 2.4. Discrétisation des équations de base

La méthode de calcul de  $p$ ,  $n$  et  $\psi$  est proposée en détail par Kurata (1982). Cette méthode est basée sur la théorie des différences finies vu la géométrie simple du domaine d'étude.

La dérivée partielle de la fonction à plusieurs variables  $f(n, p, E, \dots)$  est donnée par la relation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(N+1) - f(N)}{x(N+1) - x(N)}$$

En pose :  $h(M) = x(N+1) - x(N)$  et  $h'(N) = \frac{1}{2}(h(M-1) + h(M))$

$h$  (Le pas de discrétisation)

Les dérivées de  $n$ ,  $p$  et  $\psi$  sont données par les relations :

$$\frac{\partial n}{\partial x}(M) = \frac{n(N+1) - n(N)}{x(N+1) - x(N)} \quad (2.6.a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(M) = \frac{p(N+1) - p(N)}{x(N+1) - x(N)} \quad (2.6.b)$$

$$E = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\psi(N) - \psi(N+1)}{x(N) - x(N+1)} \quad (2.6.c)$$

L'équation de Poisson (2.1) se transforme à l'équation discrète suivante:

$$\gamma_1(N)\psi(N-1) + \gamma_2(N)\psi(N) + \gamma_3(N)\psi(N+1) = -\frac{q}{\varepsilon} \left[ \Gamma(N) + p(N) + N_{TD}^+(N) - n(N) - N_{TA}^-(N) \right] \quad (2.7)$$

Avec:

$$\gamma_1(N) = \frac{1}{h(M-1)h'(N)}$$

$$\gamma_2(N) = -\frac{1}{h'(N)} \left( \frac{1}{h(M-1)} + \frac{1}{h(M)} \right)$$

$$\gamma_3(N) = \frac{1}{h(M)h'(N)}$$

La discrétisation des équations (2.2.c) et (2.2.d) par la méthode des différences finies pose le problème de la non singularité dans la résolution du système d'équations (2.1, 2.2.c et d). Pour cette raison, une méthode est proposée par Scherfetter et Gummel (1969) pour éviter ce problème. La méthode consiste à intégrer les équations (2.3.c) et (2.3.d) en considérant constant : Le champ électrique, la mobilité et la densité du courant entre les points  $N$  ( $x=0$ ) et  $N+1$  ( $x=h$ ).

Les équations considérées sont transformées en une autre forme, qui s'écrit :

$$J_p = -\frac{q\mu_p E}{1 - e^{\theta Ex}} \cdot (p(0) \cdot e^{\theta Ex} - p(x)) \quad (2.8.a)$$

$$J_n = -\frac{q\mu_n E}{1 - e^{-\theta Ex}} \cdot (n(0) \cdot e^{-\theta Ex} - n(x)) \quad (2.8.b)$$

Avec:  $\theta = \frac{q}{kT}$

Les équations (2.8.a) et (2.8.b) sont équivalentes aux formes discrétisées données par :

$$J_n(M) = \frac{q}{h(M)} [\lambda_{n1}(M)n(N) + \lambda_{n2}(M)n(N+1)] \quad (2.9.a)$$

$$J_p(M) = \frac{q}{h(M)} [\lambda_{p1}(M)p(N) + \lambda_{p2}(M)p(N+1)] \quad (2.9.b)$$

Avec:

$$\lambda_{n1}(M) = \mu_n(M) \frac{\psi(N) - \psi(N+1)}{1 - e^{\beta(M)}}$$

$$\lambda_{n2}(M) = \mu_n(M) \frac{\psi(N) - \psi(N+1)}{1 - e^{-\beta(M)}}$$

$$\lambda_{p1}(M) = \mu_p(M) \frac{\psi(N) - \psi(N+1)}{1 - e^{-\beta(M)}}$$

$$\lambda_{p2}(M) = \mu_p(M) \frac{\psi(N) - \psi(N+1)}{1 - e^{\beta(M)}}$$

$$\beta(M) = \frac{q}{kT} (\psi(N) - \psi(N+1))$$



De la même façon, la discrétisation des équations (2.2.c) et (2.2.d) donne :

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{J_n(M) - J_n(M-1)}{h'(N)} - U(N) = 0 \quad (2.10.a)$$

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{J_p(M) - J_p(M-1)}{h'(N)} + U(N) = 0 \quad (2.10.b)$$

Puisque les quantités  $J_n$ ,  $J_p$ ,  $U$ ,  $N_{TD}^+$  et  $N_{TA}^-$  dans les équations précédentes sont non linéaires en fonction des variables  $p$ ,  $n$  et  $\psi$ . Alors ils sont linéarisés par le développement de Taylor, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1 :

$$J_n(M) \approx J_n^0(M) + \frac{\partial J_n^0(M)}{\partial n(N)} \delta n(N) + \frac{\partial J_n^0(M)}{\partial n(N+1)} \delta n(N+1) + \frac{\partial J_n^0(M)}{\partial \psi(N)} \delta \psi(N) + \frac{\partial J_n^0(M)}{\partial \psi(N+1)} \delta \psi(N+1) \quad (2.11.a)$$

$$J_p(M) \approx J_p^0(M) + \frac{\partial J_p^0(M)}{\partial p(N)} \delta p(N) + \frac{\partial J_p^0(M)}{\partial p(N+1)} \delta p(N+1) + \frac{\partial J_p^0(M)}{\partial \psi(N)} \delta \psi(N) + \frac{\partial J_p^0(M)}{\partial \psi(N+1)} \delta \psi(N+1) \quad (2.11.b)$$

$$U(N) = U^0(N) + \frac{\partial U^0(N)}{\partial p(N)} \delta p(N) + \frac{\partial U^0(N)}{\partial n(N)} \delta n(N) \quad (2.11.c)$$

$$N_{TD}^+(N) = N_{TD}^{+0}(N) + \frac{\partial N_{TD}^{+0}(N)}{\partial p(N)} \delta p(N) \quad (2.11.d)$$

$$N_{TA}^-(N) = N_{TA}^{-0}(N) + \frac{\partial N_{TA}^{-0}(N)}{\partial n(N)} \delta n(N) \quad (2.11.e)$$

Les termes  $J_n^0$ ,  $J_p^0$ ,  $U^0$ ,  $N_{TD}^{+0}$  et  $N_{TA}^{-0}$  sont déterminés en fonction des conditions initiales:

$n_0$ ,  $p_0$  et  $\psi_0$ . Les variables principales peuvent être écrites comme suit:

$$p(N) = p^0(N) + \delta p(N) ; n(N) = n^0(N) + \delta n(N) ; \psi(N) = \psi^0(N) + \delta \psi(N) .$$

Si on remplace les équations (2.11.a, b, c, d et e) dans les équations (2.10.a et b) et avec l'équation (2.7) on obtient un système d'équations de trois variables de la forme :

$$A(N)\delta y(N-1) + B(N)\delta y(N) + C(N)\delta y(N+1) = F(N) \quad (2.12)$$

$2 \leq N \leq L-1$ , C'est à dire que les points '1' et 'L' sont des conditions de type Dirichlet.

$A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices de dimension  $3 \times 3$ .  $F$  est un vecteur de dimension  $3 \times 1$ . Leurs définitions sont données si dessous :

- pour la matrice  $A$  :

$$A(1,2) = A(2,1) = A(3,1) = A(3,2) = 0$$

$$A(1,1) = -\frac{1}{qh'(N)} \cdot \frac{\partial J_p^0(M-1)}{\partial p(N-1)}$$

$$A(1,3) = -\frac{1}{qh'(N)} \cdot \frac{\partial J_p^0(M-1)}{\partial \psi(N-1)}$$

$$A(2,2) = -\frac{1}{qh'(N)} \cdot \frac{\partial J_n^0(M-1)}{\partial n(N-1)}$$

$$A(2,3) = -\frac{1}{qh'(N)} \cdot \frac{\partial J_n^0(M-1)}{\partial \psi(N-1)}$$

$$A(3,3) = \frac{1}{h(M-1)h'(N)}$$

- pour la matrice  $B$  :

$$B(1,1) = \frac{1}{qh'(N)} \left[ \frac{\partial J_p^0(M)}{\partial p(N)} - \frac{\partial J_p^0(M-1)}{\partial p(N)} \right] + \frac{\partial U^0(N)}{\partial p(N)}$$

$$B(1,2) = \frac{\partial U^0(N)}{\partial n(N)}$$

$$B(1,3) = \frac{1}{qh'(N)} \left[ \frac{\partial J_p^0(M)}{\partial \psi(N)} - \frac{\partial J_p^0(M-1)}{\partial \psi(N)} \right]$$

$$B(2,1) = -\frac{\partial U^0(N)}{\partial p(N)}$$

$$B(2,2) = \frac{1}{qh'(N)} \left[ \frac{\partial J_n^0(M)}{\partial n(N)} - \frac{\partial J_n^0(M-1)}{\partial n(N)} \right] - \frac{\partial U^0(N)}{\partial n(N)} ;$$

$$B(2,3) = \frac{1}{qh'(N)} \left[ \frac{\partial J_n^0(M)}{\partial \psi(N)} - \frac{\partial J_n^0(M-1)}{\partial \psi(N)} \right]$$

$$B(3,1) = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \left( 1 + \frac{\partial N_{TD}^{+0}}{\partial p(N)} \right)$$

$$B(3,2) = \frac{-q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \left( 1 + \frac{\partial N_{TA}^{-0}}{\partial p(N)} \right)$$

$$B(3,3) = -\frac{1}{h'(N)} \left( \frac{1}{h(M-1)} + \frac{1}{h(M)} \right)$$

• **pour la matrice C :**

$$C(1,2) = C(2,1) = C(3,1) = C(3,2) = 0$$

$$C(1,1) = \frac{1}{qh'(N)} \cdot \frac{\partial J_p^0(M)}{\partial p(N+1)}$$

$$C(1,3) = \frac{1}{qh'(N)} \cdot \frac{\partial J_p^0(M)}{\partial \psi(N+1)}$$

$$C(2,2) = \frac{1}{qh'(N)} \cdot \frac{\partial J_n^0(M)}{\partial n(N+1)}$$

$$C(2,3) = \frac{1}{qh'(N)} \cdot \frac{\partial J_n^0(M)}{\partial \psi(N+1)}$$

$$C(3,3) = \frac{1}{h(M)h'(N)}$$

• **Pour le vecteur F :**

$$F(1) = -\frac{1}{qh'(N)} \cdot [J_p^0(M) - J_p^0(M-1)] - U^0(N)$$

$$F(2) = -\frac{1}{qh'(N)} \cdot [J_n^0(M) - J_n^0(M-1)] + U^0(N)$$

$$F(3) = \frac{-q}{\varepsilon} \left[ \Gamma(N) + p^0(N) - n^0(N) + N_{TD}^{+(0)}(N) - N_{TA}^{-(0)}(N) \right] - \gamma_1(N)\psi^0(N-1) \\ - \gamma_2(N)\psi^0(N) - \gamma_3(N)\psi^0(N+1)$$

$y(N) = [p(N), n(N), \psi(N)]^T$  et  $\delta y(N) = [\delta p(N), \delta n(N), \delta \psi(N)]^T$  sont respectivement l'inconnu à déterminer et l'erreur sur celui ci.

## 2.5 Définition des conditions initiales et des conditions aux limites :

La résolution simultanée de ces trois équations,  $\psi(x), p(x), n(x)$ , nécessite des valeurs initiales et aussi des conditions aux limites. L'utilisation des bonnes conditions initiales permet une convergence rapide dans le calcul.

### 2.5.1 Les valeurs initiales

Les valeurs initiales sont généralement correspondantes à l'équilibre thermique (pas de polarisation appliquée sur le dispositif).

- **Pour la concentration des porteurs libres :**

Pour la région p  $p^0 = -\Gamma, n^0 = -n_i^2 / \Gamma$  (2.13.a)

Pour la région n  $n^0 = \Gamma, p^0 = n_i^2 / \Gamma$  (2.13.b)

- **Pour le potentiel :**

Pour la région p  $\psi^0 = \psi_1 = \frac{1}{\theta} \cdot \ln \left[ -\frac{n_i}{\Gamma} \right]$  (2.14.a)

Pour la région n  $\psi^0 = \psi_1 = \frac{1}{\theta} \cdot \ln \left[ +\frac{\Gamma}{n_i} \right]$  (2.14.b)

Si la tension appliquée est différente de zéro (polarisation appliquée sur le dispositif),  $\psi^0$  est donnée par :

$$\psi^0(N) = \left( 1 - \frac{V_G}{\psi_1(1) - \psi_1(L)} \right) \cdot \psi_1(N) + \frac{V_G}{\psi_1(1) - \psi_1(L)} \cdot \psi_1(L) \quad (2.15)$$

### 2.5.2 Les conditions aux limites

Les conditions aux limites sont déterminées de la même façon :

- **Pour les concentrations des porteurs libres :**

$$p(1) = -\Gamma(1) \quad ; \quad n(1) = n_i^2 / p(1)$$

$$n(L) = \Gamma(L) \quad ; \quad p(L) = n_i^2 / n(L)$$

- **Pour le potentiel:**

$$\psi(1) = V_G - \frac{1}{\theta} \ln \left[ + \frac{p(1)}{n_i} \right] \quad ; \quad \psi(L) = \frac{1}{\theta} \ln \left[ + \frac{n(L)}{n_i} \right]$$

## 2.6 Résolution du système d'équations par la méthode récursive :

La résolution du système d'équation (2.12) se fait en deux étapes :

Premièrement, le système d'équations (2.12) est transformé à un nouveau système contenant les variables inconnues en deux points seulement 'N' et 'N+1', cette nouvelle équation est donnée par:

$$\delta y(N) = B'(N)^{-1} F'(N) - B'(N)^{-1} C'(N) \delta y(N+1) \quad (2.16)$$

Avec:

$$\begin{cases} B'(2) = B(2) \\ C'(2) = C(2) \\ F'(2) = F(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B'(N) = B(N) - A(N)B'(N-1)^{-1}C'(N-1) \\ C'(N) = C(N) \\ F'(N) = F(N) - A(N)B'(N-1)^{-1}F'(N-1) \end{cases} \quad ; \quad 3 \leq N \leq L-1$$

Alors, dans cette étape on détermine les matrices  $B'(N)$ ,  $C'(N)$  et le vecteur  $F'(N)$  pour  $N$  variant entre 3 et  $L-1$ .

Deuxièmement, à partir de l'équation (2.16), les  $\delta y(N)$  sont calculés pour  $N$  variant entre  $L-1$  et 2, et comme point de départ :  $\delta y(L) = 0$  (aussi :  $\delta y(1) = 0$ ).

## 2.7 Algorithme de calcul :

L'algorithme de calcul est représenté sur la figure 2.2. Les paramètres de calcul et de la structure sont définis: la tension appliquée ( $V_G = \psi(L) - \psi(1)$ ), la précision de calcul (*erreur*), nombre d'itération (*ITRE*), les durées de vies des porteurs ( $\tau_i$ ), la section de la diode (A) l'épaisseur de la diode (W), le niveau d'énergie du piège ( $E_i$ ), la concentration des pièges ( $N_{TD}$  ou  $N_{TA}$ ).

La solution initiale  $y = y_0 = [p^0, n^0, \psi^0]^T$  est ensuite proposée. L'étape suivante consiste à calculer  $\delta y$  pour l'ajouter ensuite à  $y_0$ , tester la convergence par rapport à la précision donnée. Si la condition  $|\delta y / y| \leq \text{erreur}$  est réalisée alors le calcul des variables principales ( $p$ ,  $n$  et  $\psi$ ) est terminé. Si non il est répété jusqu'à où le nombre d'itération est dépassé, et par conséquent pas de convergence.

## 2.8 Calcul du courant :

### 2.8.1 Introduction:

La résolution numérique des équations de transport donne la distribution spatiale du potentiel et de la densité des électrons et des trous pour une tension appliquée. L'étude des propriétés électriques nécessite une évaluation du courant de diffusion et de conduction, de la capacité et du champ électrique au long de la structure.

### 2.8.3 Calcul de la densité du courant

La méthode de Gummel est utilisée pour calculer la densité du courant à partir des équations 2.3.a et 2.3.b. L'avantage de cette méthode réside dans l'utilisation d'une forme discrétisée de l'équation du courant, dans laquelle la concentration des porteurs entre deux points successifs varie de façon à conserver un courant constant entre ces deux points.

A partir des équations 2.3.a et 2.3.b, il est possible de déduire la concentration des électrons et des trous libres par intégration sur chaque intervalle élémentaire du maillage. Pour les électrons on a :

$$\frac{\delta n}{\delta x} - \frac{e}{kT} \frac{\delta \psi}{\delta x} n = \frac{J_n}{\mu_n KT} \quad (2.17)$$

La méthode d'intégration dite de 'la variation de la constante' conduit, pour solution de cette équation, à :

$$n(x) = u(x) \cdot \exp\left(\frac{e\psi}{kT}\right) \quad (2.18)$$

Avec :

$$u(x) = \int \frac{J_n}{\mu_n KT} \exp\left(\frac{-e\psi}{kT}\right) dx \quad (2.19)$$

On supposant  $j_n$  constant sur l'intervalle  $[x(I), x(I+1)]$ , on obtient la relation suivante:

$$J_n(M) = \mu_n kT \cdot \frac{u(I+1) - u(I)}{\int_{x(I)}^{x(I+1)} \exp\left(-\frac{e\psi}{kT}\right) dx} \quad (2.20)$$

Avec :

$$u(I+1) = n(I+1) \exp\left(-\frac{e\psi(I+1)}{kT}\right) \quad (2.21)$$

$$u(I) = n(I) \exp\left(-\frac{e\psi(I)}{kT}\right) \quad (2.22)$$

Le même raisonnement pour les trous donne :

$$J_p(M) = \mu_p kT \cdot \frac{u(I+1) - u(I)}{\int_{x(I)}^{x(I+1)} \exp\left(-\frac{e\psi}{kT}\right) dx} \quad (2.23)$$

$$u(I+1) = p(I+1) \exp\left(-\frac{e\psi(I+1)}{kT}\right) \quad (2.24)$$

$$u(I) = p(I) \exp\left(-\frac{e\psi(I)}{kT}\right) \quad (2.25)$$

Les formules des courants (2.20) et (2.23), reposent sur une distribution de la concentration  $n(x)$  et  $p(x)$ , à l'intérieur de chaque intervalle élémentaire  $x(i+1) - x(i)$ , telle que la valeur de chaque courant de conduction  $j_n$  et  $j_p$  reste constante sur cet intervalle.

Pour calculer l'intégrale dans le dénominateur, on considère que le potentiel est linéaire entre deux points consécutifs :

$$\psi = ax + b \quad (2.26)$$

Avec :

$$a = \frac{\psi(I+1) - \psi(I)}{x(I+1) - x(I)} \quad \text{et} \quad b = \psi(I) - ax(I) \quad (2.27)$$

On en déduit l'expression de Gummel pour les courants  $j_n$  et  $j_p$  dans l'intervalle élémentaire  $x(i+1) - x(i)$  :

$$J_n(M) = e\mu_n \frac{n(I+1) \exp\left(\frac{e(\psi(I) - \psi(I+1))}{kT}\right) - n(I)}{\exp\left(\frac{e(\psi(I) - \psi(I+1))}{kT}\right)} \frac{\psi(I) - \psi(I+1)}{x(I+1) - x(I)} \quad (2.28)$$

et

$$J_p(M) = e\mu_p \frac{p(I) \exp\left(\frac{e(\psi(I) - \psi(I+1))}{kT}\right) - p(I+1)}{\exp\left(\frac{e(\psi(I) - \psi(I+1))}{kT}\right)} \frac{\psi(I) - \psi(I+1)}{x(I+1) - x(I)} \quad (2.29)$$

Au point I, les courants  $j_n$  et  $j_p$  sont évalués par interpolation linéaire, ce qui donne :

$$J_n(I) = J_n(M-1) \cdot A_i + J_n(M) \cdot B_i \quad (2.30.a)$$

$$J_p(I) = J_p(M-1) \cdot A_i + J_p(M) \cdot B_i \quad (2.30.b)$$

Avec :

$$A_i = \frac{x(I+1) - x(I)}{x(I+1) - x(I-1)} \quad \text{est} \quad B_i = \frac{x(I) - x(I-1)}{x(I+1) - x(I-1)} \quad (2.31)$$

La valeur total du courant résulte de la somme des deux courants des électrons et des trous.

$$J_T(I) = J_n(I) + J_p(I) \quad (2.32)$$



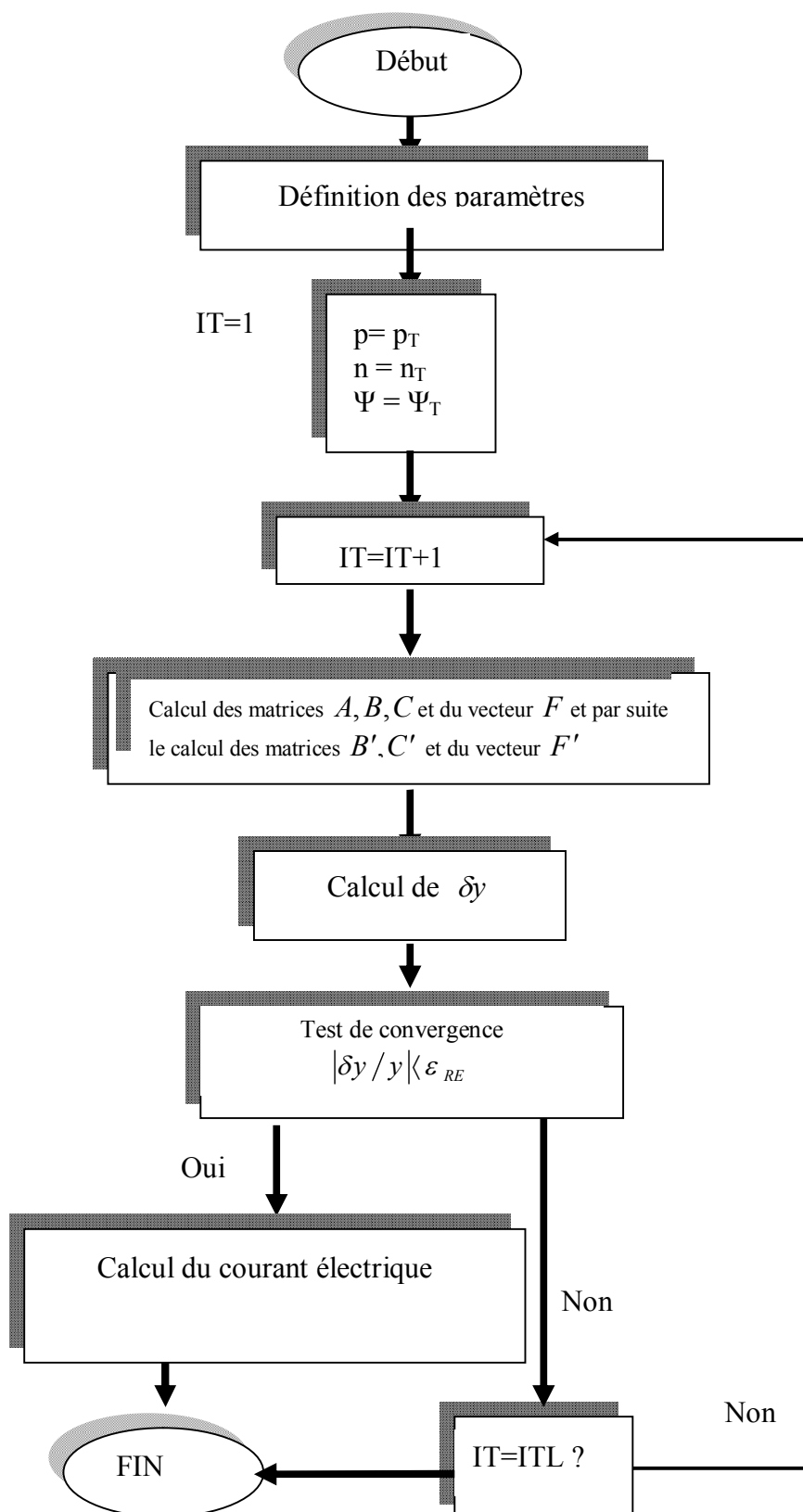


Fig. 2.2 : Organigramme de calcul des paramètres  $n$ ,  $p, \psi$  et du courant électrique.