CHAPITRE I

ECOULEMENT DE L'EAU A TRAVERS UN MILIEU POREUX

I.1 Introduction

L'étude des écoulements dans les massifs de sol fait partie d'un domaine de recherche très vaste, constitué par l'étude des mouvements des fluides dans les milieux poreux.

Dans le cas d'une application à la mécanique des sols et des roches, le milieu poreux étudié est un massif de sol naturel (diffusion de polluants, infiltration, écoulement et rabattement de nappe, etc.). L'étude des mouvements d'eau dans les milieux poreux est donc un problème important pour le géotechnicien et l'hydraulicien, car ces mouvements peuvent modifier au cours du temps la distribution des pressions interstitielles exercées dans les massifs de sol, tant de point de vue mécanique (modification du poids des massifs et soulèvement hydrostatique dus aux remontées ou descentes de la surface libre de la nappe) que de point de vue hydraulique (évolution des forces hydrauliques). La détermination du champ de pressions interstitielles dans les massifs au cours du temps, ainsi la détermination du réseau d'écoulement (lignes équipotentielles et lignes de courant) et par conséquent le débit d'exhaure, est donc une donnée dont il faut tenir compte dans le calcul.

Le mouvement de l'eau à travers ces milieux poreux est régit par une équation différentielle de second ordre (équation de Laplace), dont la résolution analytique est une tache rarement possible. Les équations aux dérivées partielles de la physique ne permettent d'obtenir des solutions exactes que dans quelques cas particuliers, c'est pourquoi des méthodes de calculs numériques ont été développées.

Dans le but d'aboutir à l'étude de l'écoulement à travers un milieu poreux, et en particulier les écoulements autour des écrans étanches, il convient tout d'abord de présenter les différents paramètres caractérisant ces milieux. C'est pourquoi nous rappellerons ici brièvement les lois et relations qui décrivent les écoulements permanents de l'eau dans le sol saturé.

I.2 Généralités sur les milieux poreux

A côté de la mécanique des milieux continus et lui empruntant de larges extraits, la mécanique des sols tire son originalité de l'aspect granulaire de ses constituants. Le sol est un matériau discontinu à l'échelle microscopique mais le nombre de ses constituants est tel que le concept de continuité peut le plus souvent être conservé : pour donner un ordre de grandeur, un dé à coudre rempli de sable fin contient environ un million de grains. A la structure granulaire du sol est associée une porosité qui correspond au volume libre entre les grains. Ce volume est rempli d'un fluide, liquide ou gaz, eau ou aire. A la déformation du squelette est donc liée l'apparition de pression dans le fluide et des mouvements hydrodynamiques se présentent.

Le problème de l'identification des sols consiste à caractériser les matériaux d'une façon suffisamment nette pour qu'on puisse comparer des matériaux différents sur lesquels des constructions analogues ont été placées ou encore pour comparer les états déférents d'un même matériau. En dehors de l'identification immédiate (couleur, odeur, état), il existe une série d'essais de laboratoire qui permet d'y parvenir avec précision (HABIB. P [1997]).

I.2.1 Définition et morphologie des pores

Un milieu poreux est un milieu constitué de granulométrie varié où les pores interstitiels et les fissures sont interconnectés entre eux.

Les pores sont des vides plus au moins sphériques, de petites dimensions (ordre de grandeur millimétrique), ménagés entre les particules solides ou grains qui ne sont jamais jointifs. Les dimensions des vides sont étroitement liées à celles des grains dont la mesure est plus directement accessible (Castany [1982]).

La catégorie des terrains poreux comprend en premier lieu toutes les alluvions fluviatiles ou glacières les masses d'éboulis et tous les remblais artificiels. On peut également y rattacher les formations gréseuses et conglomérats perméables.

Ces terrains sont formés de grains cimentés ou non entre eux. Ils sont parcourus par un réseau très dense de canaux interstitiels.

On représente un milieu poreux sous forme d'un corps solide avec à l'intérieur de très petites cavités appelées *pores*.

Lorsque le volume des pores ne bouge pas, le milieu poreux est considéré comme *indéformable*. Le mouvement d'un fluide dans le milieu poreux est considérablement différent du mouvement du fluide dans les conduites fermées ; les parois rugueuses opposent une très grande résistance au déplacement du fluide. C'est ce qui explique la très faible vitesse de déplacement du fluide dans le milieu poreux par rapport à la vitesse de déplacement dans les conduites. La forme irrégulière des canicules leurs dimensions variées rendent impossible l'étude du mouvement des particules du fluide dans tous ses passages. C'est pourquoi on utilise les modèles du milieu poreux pour l'étude du mouvement des fluides (V. Metreveli).

I.2.2 Interconnections des pores et milieu continu

Les pores communiquent entre eux, dans le sens de l'écoulement de l'eau souterraine, permettant le déplacement des particules d'eau. Celles-ci suivent des trajets ou trajectoires plus ou moins compliqués, identifiant les lignes du courant. Cet agencement caractérise la continuité du milieu poreux qui est une des conditions de base pour la validité des lois de l'hydrodynamique souterraine.

I.2.3 Etude granulométrique du milieu poreux

On définit la granulométrie comme étant l'ensemble des techniques de laboratoire, permettant de déterminer les caractéristiques physiques, pétrographiques et géométriques d'un milieu. Un milieu poreux est constitué d'un assemblage de particules solides ou grains. Leurs caractéristiques géométriques sont : le diamètre et la surface (Castany [1982]).

L'analyse granulométrique a pour but :

- La mesure des diamètres des grains par des diamètres granulométriques.
- Accéder aux caractéristiques des vides par celles des grains.
- Classer quantitativement les roches meubles.
- Calculer les paramètres granulométriques.

Les particules d'eau en écoulement dans un milieu poreux tel qu'un terrain granuleux naturel suivent des trajectoires tortueuses, elles sont déterminées par la grosseur, la forme et l'arrangement des grains minéraux qui doivent être considérées comme des grandeurs aléatoires .

L'analyse granulométrique d'un sol permet de définir une courbe granulométrique qui a deux caractéristiques : sa position dans le diagramme et sa pente.

I.2.4 Caractéristiques physiques du milieu perméable

Ø ***Les notions d'homogénéité, d'isotropie et d'anisotropie***

La notion ***d'homogénéité*** correspond à une hypothèse indispensable, sans laquelle aucune théorie de l'écoulement souterrain ne serait possible.

Il y' a de nombreuses nuances en ce qui concerne l'homogénéité des terrains naturels. Certains sols, comme les sables fins, ont une excellente homogénéité, même à petite échelle alors que pour la plupart des alluvions fluviatiles, par exemple, l'homogénéité n'existe souvent qu'à partir d'une certaine échelle à cause de l'irrégularité des dépôts et de la gamme étendue des différents éléments (limons, sable, graviers et galets).

L'écoulement théorique étant tributaire de l'hypothèse d'homogénéité, et on conçoit aisément que tout ses détails dont l'échelle est plus fine que l'échelle d'homogénéité n'ont pas de significations réelles.

Dire d'un terrain perméable qu'il est homogène équivaut à dire qu'il présente en tout point, dans une direction donnée, la même résistance à un écoulement de filtration. Si de plus, cette résistance est la même quelle que soit la direction, le terrain est **isotrope**.

Dans le cas contraire, il est anisotrope. Dans son comportement par rapport à l'écoulement souterrain, un terrain a donc des propriétés géométriques qui se traduisent par les notions d'**isotropie** et d'**anisotropie** (Metreveli. V).

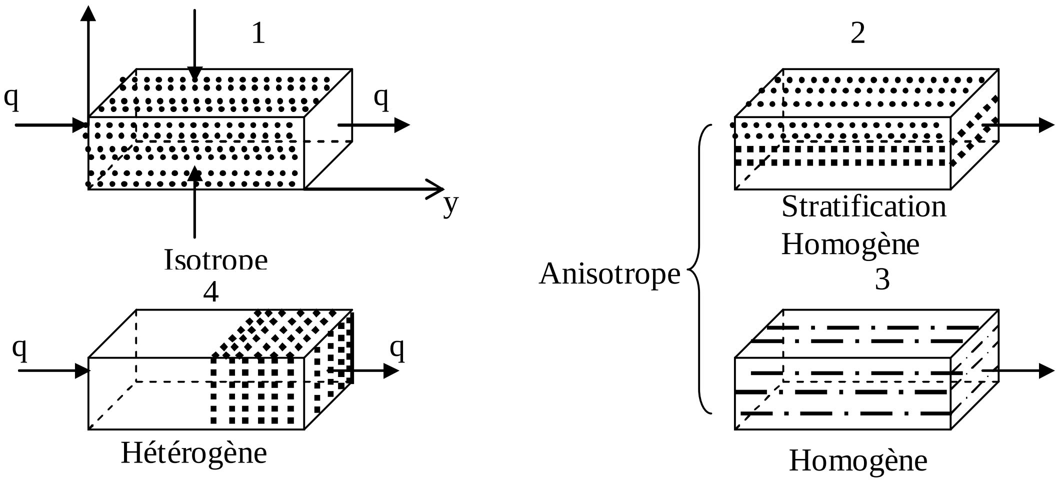

Figure I.1 : Caractéristiques physiques d'un milieu poreux.
(D'après Castany, 1982).

I.2.5 Définition et différents types de porosité

L'un des paramètres les plus importants caractérisant le milieu poreux est la porosité notée η , qui est la partie d'un volume apparent unitaire qui n'est pas occupé par la phase solide (Encyclopédie Universelle [1996]). C'est le rapport volumique des vides d'un corps au volume total.

$$\eta = \frac{V_v}{V_t}, \text{ en } \% \tag{I.1}$$

I.2.5.1 La porosité efficace η_e, coefficient de porosité

Elle se rapporte à l'eau libérée par drainage gravitaire total d'une roche saturée. C'est le volume de l'eau gravitaire, V_e, que l'échantillon peut contenir à l'état saturé, puis libéré sous l'effet d'égouttage complet, à son volume total V_t. Elle dépend essentiellement de l'arrangement de la surface spécifique des grains. Elle est donnée en pourcentage, par la formule :

$$\eta_e = \frac{V_e}{V_t} \tag{I.2}$$

I.2.5.2 La porosité effective

Appelée aussi capacité de rétention. C'est le rapport du volume de rétention V_r (eau non égoutable par gravité) au volume total apparent V_t. Elle est donnée en pourcentage, par la formule :

$$c_r = \frac{V_r}{V_t} \tag{I.3}$$

I.2.5.3 La porosité cinématique

Elle désigne le rapport de l'eau non liée aux grains, l'eau pouvant circuler et le volume total de la roche. Elle n'est pas mesurable pratiquement. Ce concept est proche de la porosité efficace, définit comme un rapport de volume (Carlier. M [1980]).

I.2.5.4 Indice des vides du milieu poreux

En mécanique des sols on utilise fréquemment la notion *d'indice des vides* (rapport du volume des vides au volume de la matière solide).

$$e = \frac{V_v}{V_g} \tag{I.4}$$

L'indice des vides et la porosité sont naturellement liés puisqu'ils expriment en fait la même propriété du terrain.
On a :

$$n = \frac{e}{1+e} \quad , \quad e = \frac{n}{1-n} \tag{I.5}$$

I.2.5.5 Densité – Poids spécifique

L'usage international a donné naissance à une terminologie peu correcte de ces termes. D'une façon générale en Statique on étudie des forces, donc des poids et des poids volumiques. En mécanique des sols on utilise cependant le terme densité dans les expressions suivantes, d'ailleurs faciles à comprendre, et avec les notations et les significations indiquées ci-après (HABIB. P [1997]) :

- densité humide : γ (poids de l'unité de volume de sol, eau comprise) ;
- densité sèche : γ_d (poids de l'unité de volume de sol, eau non comprise) ;
- poids spécifique : G (poids de l'unité de volume d'un grain solide) ;
- densité immergée : γ_i (poids de l'unité de volume d'un sol soumis à la poussée d'Archimède) ;
- densité du liquide : γ_w (poids volumique du liquide interstitiel).

On trouve immédiatement les relations suivantes :

$$\gamma = \gamma_d\,(1+w)\ ; \quad e = w_s\,\frac{G}{\gamma_w}\ ; \quad w_s = \left(\frac{1}{\gamma_d} - \frac{1}{G}\right)\gamma_w\ ; \quad e = \frac{G}{\gamma_w} - 1\ ; \quad \gamma = (1-n)G + n\gamma_w$$

$$\gamma_d = (1-n)G\ ; \quad \gamma_i = (1-n)(G-\gamma_w) = \gamma - \gamma_w .$$

I.2.6 La conductivité hydraulique ou perméabilité

I.2.6.1 Définition

La perméabilité est l'aptitude d'un milieu à se laisser traverser par l'eau, sous l'effet d'un gradient hydraulique. Elle exprime la résistance du milieu à l'écoulement du fluide (eau) qui le traverse. La perméabilité *k* dépend avant tout de la dimension des interstices (G. Castany [1982] & M. Cassan [1993]). Ce sont donc la dimension et la distribution des grains du milieu poreux qui joueront un rôle primordial sur la valeur de k.

- Si la granulométrie est uniforme : $u = \frac{d_{60}}{d_{10}} < 10$ les grains ont presque le même diamètre.
- Si la granulométrie est étendue, $u > 10$, ce sont les éléments fins qui déterminent la perméabilité.

D'autres grandeurs influencent sur la valeur de *k*, mais de manière moins importante ; ce sont la porosité et la température.

La perméabilité est mesurée par deux paramètres, à savoir :

1- Le coefficient de perméabilité.

2- La perméabilité intrinsèque.

I.2.6.2 Le coefficient de perméabilité

Le coefficient de perméabilité peut être donné par l'expression suivante:

$$K = N \cdot d_{10}^{2} \cdot \frac{\gamma}{\mu} \quad \textbf{(I.6)}$$

Cette expression englobe les caractéristiques du milieu et du liquide. Elle comporte deux couples de résistances à l'écoulement correspondant à deux groupes de facteurs :

Ø Les caractéristiques du milieu fluide en mouvement ou coefficient du fluide avec deux facteurs principaux à savoir :

- La viscosité dynamique du liquide μ , qui exprime la résistance du liquide à l'écoulement.
- Le poids volumique $\gamma = \rho.g$.

Ø Les caractéristiques du milieu, avec $N \cdot d_{10}^{2}$, exprimant la perméabilité intrinsèque.

Le facteur principal est la viscosité dynamique. Elle décroît rapidement avec l'augmentation de la température. Le coefficient de perméabilité, fonction inverse, croît avec la température (**Figure.I.2**).

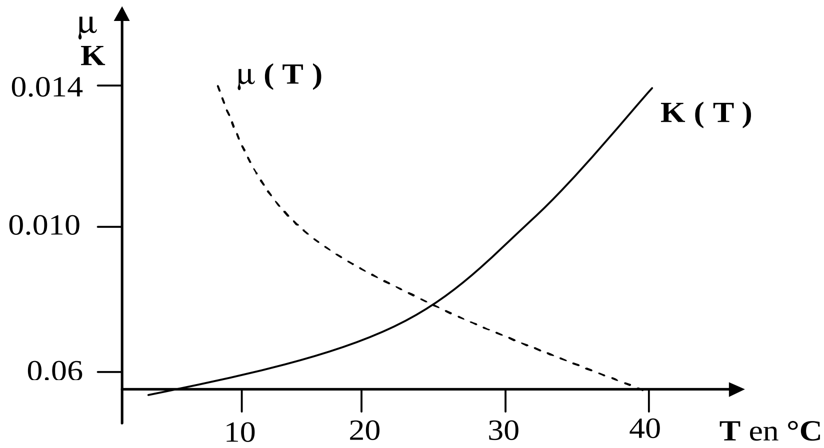

Figure I.2 : La viscosité dynamique μ et le coefficient de perméabilité *K* en fonction de la température (Castany [1982]).

On note que, la perméabilité d'un sol est liée à la dimension des pores, c'est-à-dire à la granulométrie du sol et à l'état de serrage des grains. Pour les sols grossiers comme les sables, une approximation rapide est donnée par la formule (non homogène) de HAZEN :

$$k\,(\text{cm/s}) = 100\; D_{10}^{2}\,(\text{cm}) \quad \textbf{(I.7)}$$

Où D_{10} représente le diamètre de grain tel que 10 % des éléments du sol, en poids, lui soit inférieur. Le coefficient K varie énormément d'un sol à l'autre. A titre d'exemple, K peut être compris entre 10^{-2} et 10^{-6} m/s pour les sables, entre 10^{-7} et 10^{-9} m/s pour les limons, entre 10^{-9} et 10^{-12} m/s pour les argiles, entre 10^{-9} et 10^{-16} m/s pour les roches.

I.3 Etude mécanique de l'écoulement à travers un milieu poreux

I.3.1 Loi fondamentale de l'écoulement - Loi de Darcy

L'écoulement des eaux à travers un milieu poreux est considéré comme le déplacement de particules d'eau, le long de trajectoires appelées lignes de flux ou lignes de courant. La base fondamentale du calcul de quantité d'eau souterraine ou débit traversant un milieu poreux, par l'hydrodynamique souterraine, est la loi expérimentale de DARCY (H. DARCY 1856), que nous présenterons dans cette partie. Nous allons établir les équations régissant le mouvement de l'eau à travers un milieu poreux.

I.3.2 Dispositif expérimental de DARCY

Considérons un tube cylindrique rempli de sol à travers lequel de l'eau pénètre sous pression par une extrémité pour ressortir par l'autre ; des tubes ; appelés piézomètres, permettant la mesure de la pression de l'eau interstitielle en différents points (**Figure I.3**) ; on constate que les niveaux d'eau dans les piézomètres sont alignés sur une droite et cela quelle que soit la pression d'alimentation : les pertes de charge sont proportionnelles aux épaisseurs de terre traversée. Ceci est dû à ce que la circulation dans le sol s'effectue en régime laminaire (HABIB. P [1997]).

Soit h la perte de charge exprimée en hauteur d'eau et s le trajet parcouru. On appelle gradient hydraulique le rapport $i = h/s$ et la vitesse de percolation V est proportionnelle à i. Cette relation très importante est connue sous le nom de loi de Darcy, elle s'écrit :

$$V = Ki \qquad \textbf{(I.8)}$$

Où K est une constante liée à la nature du sol et appelée *coefficient de perméabilité.*

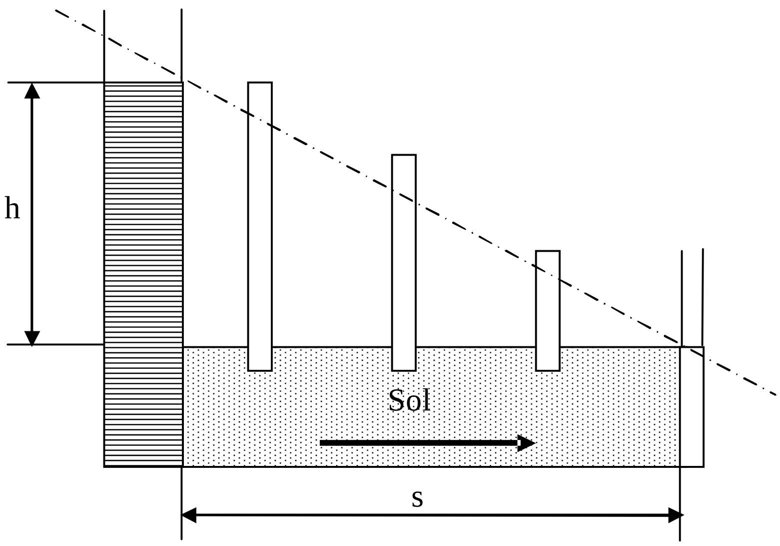

Figure I.3 : Expérience illustrant la loi de Darcy.

A chaque nouveau débit constant on constate une perte de charge proportionnelle au débit. Dans la loi de Darcy V est la vitesse de l'eau à l'extérieur du sol. C'est-à-dire que le débit Q en un temps Δt dans un tube de section S est :

$$Q = K\, i.\, S.\, \Delta t \qquad \textbf{(I.9)}$$

Dans le sol, la vitesse moyenne est V / n, l'eau ne circulant que dans la porosité. La vitesse réelle de l'eau est un peu plus grande encore et présente un peu de dispersion, car les cheminements capillaires ne sont ni rectilignes (tortuosité) ni tous égaux.

Remarque

Dans les écoulements souterrains, la charge hydraulique $\phi = \frac{V^2}{2g} + \frac{U}{\gamma_w} + z$ peut être assimilée à la hauteur piézométrique $H = \frac{U}{\gamma_w} + z$, le terme d'énergie $\frac{V^2}{2g}$ étant toujours négligeable.

I.3.3 Conditions de validité de la loi de Darcy

La loi de Darcy établie par des expériences de laboratoire répondant à des conditions très strictes. Quatre conditions doivent être respectées (G. Castany [1982]) : continuité, isotropie, homogénéité du milieu, et écoulement laminaire. Ce dernier est caractérisé par des lignes de flux continues rectilignes, et occupant entre elles la même position relative. Les vitesses, constantes et parallèles, sont inférieures à la vitesse critique, au delà de laquelle l'écoulement devient turbulent. En outre, SHNEEBELI (1956) a montré que pour de très fortes vitesses la relation entre les débits et les pertes de charge n'est plus linéaire. Cette déviation intervient pour des nombres de Reynolds voisins de l'unité rarement atteints en pratique.

De même, la loi de DARCY n'est plus applicable pour les sols très peu perméables (argiles). HARR (1962) a suggéré dans ce cas l'existence d'un gradient initial en deçà duquel il n'y' a pas d'écoulement.

I.3.4 Généralisation de la loi de DARCY aux écoulements tridimensionnels

La loi de Darcy, établie sur des dispositifs particuliers, a été vérifiée expérimentalement en laboratoire, dans toutes les conditions possibles, c'est-à-dire :

- Toutes les directions d'écoulement.
- Tous liquides de différents poids volumiques et viscosités dynamiques.
- Tous milieux poreux continus de toutes granulométries.

La généralisation de la loi de Darcy consiste à admettre que celle-ci est valable en tout points du terrain, et dans toutes les directions.

On aura le long des trois axes de coordonnées *Ox, Oy* et *Oz*, le système :

$$\begin{cases} u = -k \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \nu = -k \dfrac{\partial \varphi}{\partial Y} \\ w = -k \dfrac{\partial \varphi}{\partial Z} \end{cases}$$

Qu'on peut l'écrire sous la forme vectorielle :

$$V = grad\,\varphi \quad \textbf{(I.10)}$$

Avec :

k : tenseur de perméabilité.

(u,ν,w) : composantes de la vitesse *V*.

Le tenseur de perméabilité s'écrit sous la forme d'une matrice symétrique :

$$[k] = \begin{bmatrix} \alpha_{\chi\chi} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{ZZ} \end{bmatrix} \quad \textbf{(I.11)}$$

La connaissance de φ et de ses vitesses, permet de déterminer en chaque point au facteur K près, les composantes de la vitesse V de filtration. Un tel écoulement est définit par le potentiel hydraulique :

$$\varphi = Z + \frac{p}{\rho g} \quad \textbf{(I.12)}$$

Dans le cas d'un écoulement plan, les équations restent valables ; toutes fois leurs nombres se réduisent à deux.

I.3.5 Application de la théorie des écoulements à potentiel des vitesses aux écoulements souterrains

On rappelle que l'écoulement peut être libre ou en charge (sous pression), et il peut être ***permanent*** ou ***non permanent***. L'écoulement filtrant est permanent si les paramètres hydrauliques ne dépendent pas du temps et ne dépendent que des coordonnées (V. Metreveli) :

$$P = f(x, y, z)\,; \quad \textbf{(I.13)}$$

$$U = f(x, y, z)\,;$$

L'écoulement filtrant est non permanent si les paramètres hydrauliques dépendent des coordonnées et du temps :

$$P = f(x, y, z, t)\,; \quad \textbf{(I.14)}$$

$$U = f(x, y, z, t)\,;$$

I.3.5.1 Existence d'un potentiel de vitesses

On a :

$$u = -\partial\varphi/\partial x\,,\; v = -\partial\varphi/\partial y \;\text{ et }\; w = -\partial\varphi/\partial z \quad \textbf{(I.15)}$$

La fonction φ est appelée le potentiel de la vitesse.

En tenant compte, que le potentiel de la vitesse est la fonction continue de *x, y, z,* t et rappellerons la non dépendance de dérivée du deuxième ordre de la fonction continue de la règle de la différentiation, nous avons :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = -\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z\,\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{cases} \qquad \textbf{(I.16)}$$

Le signe (-) signifie que le mouvement se produit du point avec le potentiel le plus élevé en direction du point de potentiel moyen.

Dans le cas général le potentiel de la vitesse peut dépendre non seulement des coordonnées x, y, z, mais aussi du temps t :

$$\varphi = f(x, y, z, t) \qquad \textbf{(I.17)}$$

Le mouvement du fluide où existe le potentiel de la vitesse s'appelle le *mouvement potentiel*, ce dernier peut être permanent ou non permanent.

I.3.5.2 Les surfaces équipotentielles

Si dans l'espace qui est occupé du courant potentiel, on a séparé les faces, qui ont les points de même potentiel, les faces considérées sont appelées les faces *équipotentielles*.

Pour lesquelles :

$$\varphi = f(x, y, z, t) = \text{constante} = \text{c} \qquad \textbf{(I.18)}$$

$$d\varphi = 0 \qquad \textbf{(I.19)}$$

D'où l'équation de la face de la même potentielle sera :

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0 \qquad \textbf{(I.20)}$$

Les différentes faces du même potentiel, sont caractérisées de différentes valeurs du constant c (c_1, c_2, ………..c_n) (**Figure I.4**).

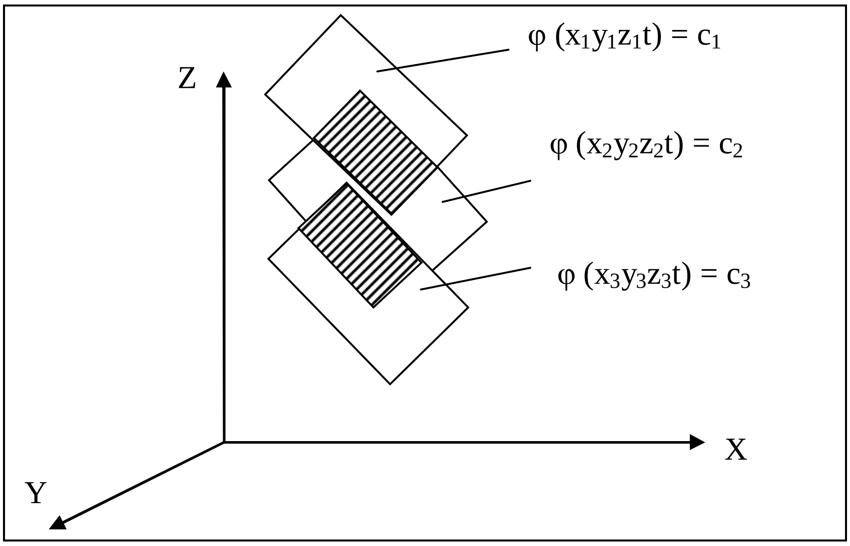

Figure I.4 : Représentation des faces équipotentielles dans l'espace.

I.3.6 Equations des écoulements en régime permanent

I.3.6.1 Equation de continuité

Elle exprime que le fluide est continu, c'est-à-dire qu'il ne peut y avoir dans aucune partie du fluide, ni apport extérieur, ni prélèvement de matière. Donc la masse se conserve au cours de l'écoulement (M.H. HARR & M. CARLIER).

Pour un liquide incompressible (à densité constante), l'équation de continuité est obtenue en exprimant la constante du poids du liquide, à chaque instant, au point de passage *x, y, z,* dans l'élément de volume parallélépipédique de dimensions *dx, dy, dz* donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad \textbf{(I.21)}$$

En notation vectorielle, l'équation de continuité s'écrit :

$$div\ U = 0 \qquad \textbf{(I.22)}$$

Avec *x, y, z* directions principales de la perméabilité.

C'est l'équation de ***continuité*** d'un écoulement ***permanent tridimensionnel***.

où :

*u***,** *v* et *w* **:**sont des composantes de la vitesse *V* au point considéré.

Pour le cas d'un écoulement plan, la composante *w* est nulle, donc l'équation **(I.21)** devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad \textbf{(I.23)}$$

C'est l'équation de continuité pour un écoulement ***permanent plan***.

I.3.6.2 Equation de Laplace

La vitesse U (u, v, w) au potentiel de vitesse s'exprime de la manière suivante (METREVEILI. V) :

$$U=\sqrt{\left[\frac{(\partial\varphi)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{(\partial\varphi)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{(\partial\varphi)}{\partial z}\right]^2} \qquad \textbf{(I.24)}$$

Les projections de la vitesse pendant le mouvement potentiel doivent satisfaire non seulement l'équation **(I.15),** mais aussi l'équation de continuité de fluide incompressible (**Equation I.21).**

On introduit le terme de potentiel φ, défini comme suit :

$$\Phi\,(x, y, z) = -k\left(\frac{p}{\gamma_w}+z\right)+c=-kh+c \qquad \textbf{(I.25)}$$

Où : *c* est arbitrairement constant. Ainsi :

$$u = \partial\varphi/\partial x \quad \text{et} \quad v = \partial\varphi/\partial y \ \text{ et } w = \partial\varphi/\partial z \qquad \textbf{(I.26)}$$

Tenant compte de la loi de filtration, on obtient les dérivées partielles de l'écoulement :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0 \qquad \textbf{(I.27)}$$

En remplaçant l'équation **(I.15)** dans l'équation de la continuité **(I.21)**, on obtient l'équation de *Laplace* lorsque le sol est homogène et isotrope :

$$\nabla^2 \varphi = K \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) = 0 \qquad \textbf{(I.28)}$$

Soit : $\Delta\varphi = 0$.

Dans le cas particulier d'un écoulement ***axisymétrique***, la relation **(I.27)** s'écrit dans le système d'axes (r, z) :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, k_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0 \qquad \textbf{(I.29)}$$

Les équations **(I.27)** et **(I.29)** indiquent que pour les conditions d'un écoulement permanent, laminaire, la forme du mouvement des eaux souterraines peut être complètement déterminée en résolvant ces équations, avec les conditions aux limites du domaine d'écoulement.

Nous savons que, pour représenter le mouvement du fluide, il faut savoir la valeur de *u*, *v*, *w* et la pression *p* dans tous les points d'espace ou au lieu du mouvement considéré.

Pour cela, il faut avoir quatre équations : trois équations **(I.15)** et l'équation de continuité. L'équation de *Laplace* insère les quatre équations, en sachant le potentiel des vitesses pour quelques cas et en appliquant le principe de superposition, on peut trouver la résolution pour quelques cas complexes du mouvement (Metrevili. V).

Déterminons de quelle manière, pendant le mouvement potentiel, les lignes de courant sont disposées par rapport aux faces de même potentiel.

Prenant sur une face de même potentiel le point *A* (**Figure I.5**). La vitesse du mouvement de particule au point *A*, est *U* avec projection *u, v, w.* soit *T* la tangente à la face équipotentielle, et soit *ds* le segment tangent donc *dx, dy dz* sont des projections sur l'axe correspondant.

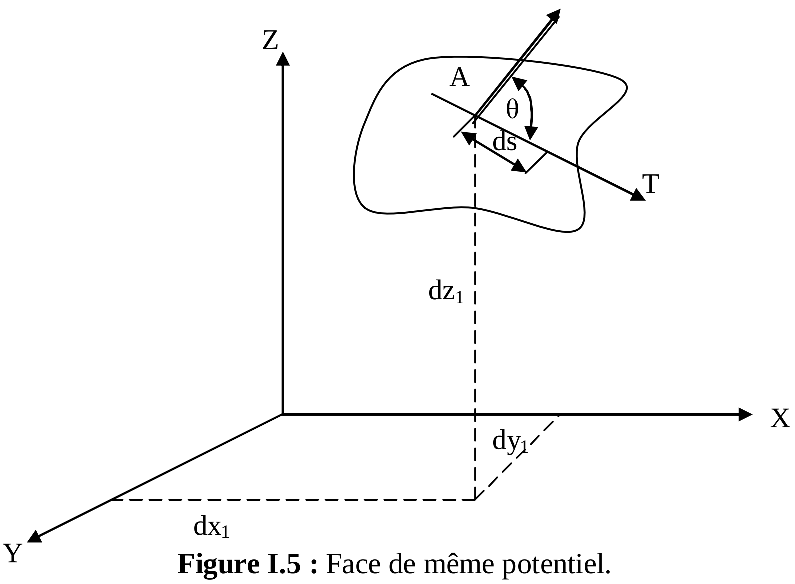

Figure I.5 : Face de même potentiel.

On a :

$$\cos\theta = \frac{u\,dx + v\,dy + ww\,dz}{U\,ds} \qquad \textbf{(I.30)}$$

Mais *ds* se trouve sur la face de même potentielle et d'après **(I.20)** :

$$\cos\theta = 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(I.31)}$$

On tient compte que les vecteurs de vitesse sont tangents aux lignes de courant, on voit que pendant le mouvement potentiel, les lignes de courant aussi bien que les vecteurs de vitesse sont normaux aux surfaces équipotentielles (**Figure I.5**).

Déterminons le potentiel de la vitesse pendant l'écoulement du fluide en milieu poreux d'après la loi de filtration de DARCY :

$$U = -k\frac{dH}{dl} = -kI \qquad \textbf{(I.32)}$$

C'est-à-dire que les projections de la vitesse locale sur l'axe des coordonnées sont égales à :

$$\begin{cases} u = -k\dfrac{dH}{dx} = -\dfrac{\partial}{\partial x}(kH) \\ v = -k\dfrac{dH}{dy} = -\dfrac{\partial}{\partial y}(kH) \\ w = -k\dfrac{dH}{dz} = -\dfrac{\partial}{\partial z}(kH) \end{cases} \qquad \textbf{(I.33)}$$

Où *H* : est l'énergie potentielle (*Charge piézométrique*) unitaire : $H = z + \dfrac{p}{\rho g}$.

En comparant entre les relations **(I.33)** et **(1.15)**, nous constatons que les mouvements du fluide en milieu poreux pendant la loi de DARCY, est le mouvement potentiel avec le potentiel de la vitesse :

$$\varphi = k.H \qquad \textbf{(I.34)}$$

I.4 Etude cinématique des écoulements à potentiel des vitesses et description du mouvement

La cinématique des écoulements, est l'étude du mouvement des liquides sans tenir compte des forces qui lui donnent naissance.

I.4.1 Système de référence

Pour étudier le mouvement d'un fluide quelconque, on peut employer deux méthodes (M. CARLIER [1980]) :

I.4.1.1 Méthode de Lagrange

Elle consiste à individualiser une particule déterminée, et à la suivre dans ses mouvements.

On exprime donc les coordonnées d'un point *M* de la masse fluide, en fonction du temps, et de la position initiale du point considéré.

$$M \begin{cases} X = f\,(x_0,y_0,z_0,t) \\ Y = \lambda\,(x_0,y_0,z_0,t) \\ Z = \delta\,(x_0,y_0,z_0,t) \end{cases}$$

X ,Y,Z, sont les variables de Lagrange.

I.4.1.2 Méthode d'Euler

Elle consiste à considérer un point fixe de l'espace et à étudier, en fonction du temps, ce qui se passe en ce point. On déterminera donc, en fonction du temps, la vitesse des particules fluides qui viennent successivement passer par ce point. La vitesse *V* est déterminée par ses trois composantes *u*, *v*, *w* sur trois axes *ox*, ou *oz*. On disposera donc des trois équations suivantes :

$$V\begin{cases} u = f\,(x, y, z, t) \\ v = \lambda\,(x, y, z, t) \\ w = \delta\,(x, y, z, t) \end{cases} \qquad \textbf{(I.35)}$$

où : *u, v* et *w* sont des variables d'Euler.

I.4.2 Ligne de courant, surface et tube de courant

Les deux systèmes, de Lagrange, et d'Euler, permettent de définir, dans la masse en mouvement**,** plusieurs types de lignes :

1- Le système d'Euler définit à chaque instant *t*, un vecteur vitesse en un point, et un champ de vitesse dans la masse fluide. Les courbes tangentes en chacun de leurs points à la vitesse *V* constituant les lignes de courant, qui sont exprimées par les équations différentielles, en exprimant que le vecteur vitesse *V (u, v)* est tangent à la ligne de courant, soit :

$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} \qquad \textbf{(I.36)}$$

d'où :

$$u\,dy - v\,dx = 0 \qquad \textbf{(I.37)}$$

On appelle surface de courant, la surface constituée par l'infinité des lignes de courant qui s'appuient à un instant donné sur une courbe donnée *C*.

Lorsque la courbe *C* est fermée, la surface devient un tube de courant, le fluide situé à l'intérieur du tube constituant, lui même, un filet de courant.

2- Le système de Lagrange permet de définir, pour une particule déterminée, une courbe qui représente les positions successives de cette particule aux différents instants. C'est la trajectoire de la particule.

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant *t* entre les trois équations donnant les coordonnées de la particule.

I.4.3 Lignes équipotentielles

Nous avons vu auparavant, qu'il existe une fonction potentielle φ (*x*, *y*, *z*) des vitesses. C'est-à-dire qu'au point (*x*, *y*, *z*), les composantes de la vitesse sont des dérivées partielles de cette fonction (VARLET. H [1966]) :

$u = \partial\varphi/\partial x$ et $v = \partial\varphi/\partial y$ et $w = \partial\varphi/\partial z$

ou sous forme vectorielle :

$$V = grad\ \varphi \qquad \textbf{(I.38)}$$

Les lignes équipotentielles sont telles que la fonction φ conserve la même valeur en tout points de chacune d'elle, leur équation est donc :

$$\varphi\ (x, y, z) = \text{constante} \qquad \textbf{(I.39)}$$

La comparaison des équations **(I.38)** et **(I.39),** montre que la vitesse en un point est dirigée suivant la normale à la ligne équipotentielle par ce point.

I.4.4 Fonction de courant

a) Définition

Considérons un déplacement infiniment petit *MM'* = *ds* le long d'une ligne de courant (**Figure I.6**). Soit *dx* et *dy*, les composantes de *ds*.

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \textbf{(I.40)}$$

d'où :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \textbf{(I.41)}$$

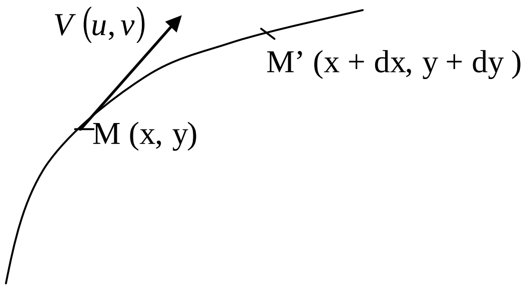

Figure I.6 : Ligne de courant.

La vitesse étant tangente à la ligne de courant, l'équation de continuité sera donc :

$$\frac{\partial x}{u} = \frac{\partial y}{v} \qquad \textbf{(I.42)}$$

ou :

$$u\,dy - v\,dx = 0 \qquad \textbf{(I.43)}$$

soit ψ (*x*, *y*) une fonction telle que :

$$\begin{cases} u = \partial\psi / \partial y \\ v = -\partial\psi / \partial x \end{cases} \qquad \textbf{(I.44)}$$

d'où :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dy = 0 \qquad \textbf{(I.45)}$$

soit :

$$d\psi = - v\,dx + u\,dy \qquad \textbf{(I.46)}$$

Si on considère la variation de *d*ψ de la fonction ψ lorsqu'on se déplace le long d'une ligne de courant il vient donc:

$$d\psi = 0 \qquad \textbf{(I.47)}$$

Par intégration on aura :

$$\psi\ (x, y) = \text{constante} \qquad \textbf{(I.48)}$$

La fonction ψ ainsi définie, est la fonction de courant, parce qu'elle reste constante le long d'une ligne de courant de l'écoulement.

Notons, que chaque ligne de courant correspond à une valeur constante de la fonction de courant ψ.

b) Débit circulant entre deux lignes de courant

Considérons un tube de courant compris entre deux plans *(xoy)* (**Figure I.7**), distant d'une longueur égale à l'unité, et délimité par deux lignes de courant (VARLET. H [1966]) :

ψ (x, y) = ψ_1 et ψ (x, y) = ψ_2

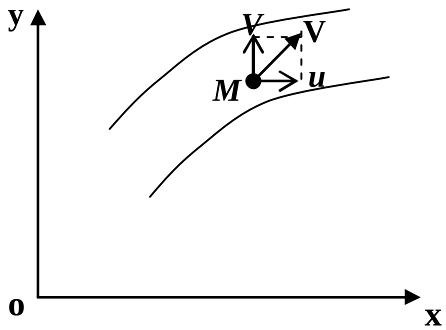

Figure I.7 : Débit dans un tube de courant.

Le débit élémentaire qui passe par ce tube est :

$$dq = u.\ dy = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\, dy \qquad \textbf{(I.49)}$$

Le débit total de la tranche d'écoulement considéré comprise entre les deux lignes de courant Ψ_1 et Ψ_2 est :

$$q = \int_{y_2}^{y_1} \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dy = \psi_2 - \psi_1 \qquad \textbf{(I.50)}$$

c) Propriétés

D'après l'équation de continuité pour un liquide incompressible, on peut écrire (VARLET. H [1966]) :

$$div\, V = 0 \qquad \textbf{(I.51)}$$

Qui peut être écrite sous la forme :

$$div\, V = div\left(grad\, \varphi\right) \qquad \textbf{(I.52)}$$

D'où :

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \textbf{(I.53)}$$

De la fonction de courant on peut écrire :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} \\ v = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} \\ w = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial z} \end{cases} \qquad \textbf{(I.54)}$$

D'où :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \textbf{(I.55)}$$

Et en introduisant la fonction φ (potentiel des vitesses), on peut aussi écrire :

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ V = \dfrac{\partial \varphi}{\partial Y} \\ W = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{cases} \quad \textbf{(I.56)}$$

Donc :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad \textbf{(I.57)}$$

Qu'on peut l'écrire encore :

$$\Delta\psi = 0 \quad \textbf{(I.58)}$$

Il en résulte donc, que la fonction de courant et la fonction du potentiel des vitesses sont des fonctions harmoniques.

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \textbf{(I.59)}$$

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad \textbf{(I.60)}$$

En résumé, un écoulement plan à potentiel de vitesses est caractérisé par deux réseaux de courbes, à savoir :

1- Les lignes de courant dont la fonction de courant ψ reste constante.

2- Les lignes équipotentielles dont le potentiel φ reste constant.

Les fonctions ψ et φ sont des fonctions harmoniques. Ce double réseau a la propriété d'être orthogonal pour un milieu isotrope puisque :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = u = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = v = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} \end{cases} \quad \textbf{(I.61)}$$

I.4.5 Conditions aux limites

La solution d'un problème d'écoulement souterrain est obtenue par l'intégration des ***équations*** **(I.27)** et **(I.29)** en tenant compte des conditions aux limites. Celles-ci peuvent être de trois types que l'on retrouve par exemple dans l'écoulement à travers une digue en terre **(Figure I.8)**.

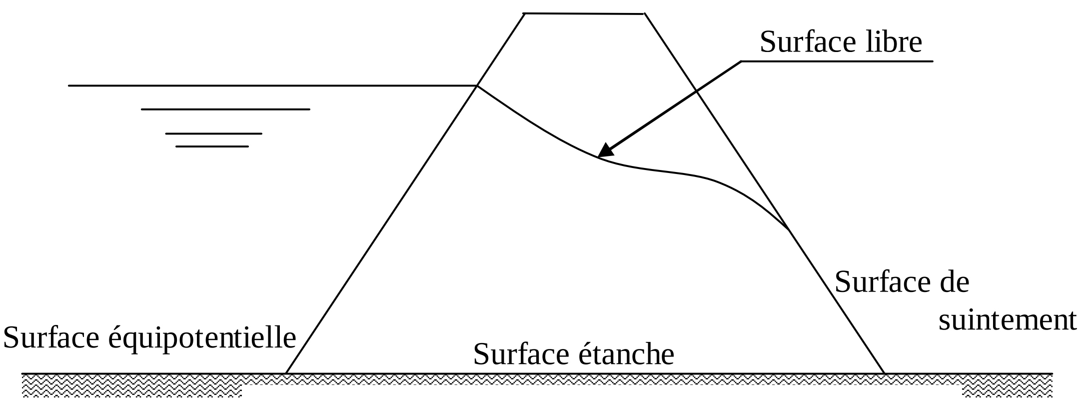

Figure I.8 : Les conditions aux limites.

a) Surface à potentiel connu (Condition de DIRECHLET)

Ce sont dans notre exemple le parement amont baigné par l'eau (surface équipotentielle) ou la surface de suintement sur le parement aval (potentiel égal à la côte).

b) Surface à flux connu (Condition de NEUMAN)

Les plus courantes sont les surfaces imperméables à travers lesquelles le flux est nul.

c) Surface libre

Non définie géométriquement, elle est caractérisée par la double connaissance du flux qui est nul et de la charge qui est égale à la côte.

I.5 Méthodes de résolution de ces équations

La détermination des réseaux d'infiltration, par la recherche des potentiels complexes *f (z),* n'est possible que dans quelques cas simples. Dès que les conditions aux limites se compliquent, les calculs deviennent extrêmement laborieux (VARLET. H [1966]).

Devant la complexité à trouver des solutions analytiques pour construire les réseaux d'écoulement, on fait souvent recours aux autres méthodes basées sur des approximations et des propriétés graphiques du réseau d'écoulement, d'analogie électrique ou par calcul numérique sur ordinateur.
Nous présenterons ici un aperçu général sur les méthodes les plus utilisées et nous développerons la méthode numérique implantée dans le code utilisé au **chapitre III**.

On peut citer l'exemple d'un écoulement complexe qui est le cas rencontré pendant l'infiltration au dessous des constructions des ouvrages géotechniques étanches. La résolution de l'équation de Laplace a des difficultés à cause des contours souterrains d'ouvrages hydrotechniques qui est très complexe (V. Metreveli).

Dans ce cas, on fait recours aux méthodes de calcul suivantes :

- Ø méthodes analytiques ;
- Ø méthodes analogiques ;
- Ø méthodes graphiques ;
- Ø méthodes numériques.

I.5.1 La méthode analytique

La méthode analytique peut être utilisée pour des cas de problèmes simples, mais pour les contours complexes d'ouvrage hydrotechnique, elle ne peut pas être utilisée toujours.
Dans ce cas, on utilise largement les méthodes approximatives. On construit analogiquement ou bien graphiquement les réseaux hydrodynamiques à l'aide desquels on trouve les valeurs, qui caractérisent le mouvement.

Ø ***Résolution de l'équation de Laplace dans un milieu à trois dimensions***

La transformation conforme n'est, dans ce cas, plus applicable. Mais, si on connaît à priori une surface équipotentielle particulière, toutes les surfaces équipotentielles appartiendront à la même famille. On peut alors simplifier le problème en se plaçant dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales dont l'une des surfaces de coordonnées appartient à la famille des surfaces équipotentielles (M. CASSAN [1993]).

I.5.2 Méthode graphique

Cette méthode simplifiée, fait appel aux propriétés géométriques des réseaux quadratiques, ainsi qu'aux conditions auxquelles doivent satisfaire les lignes équipotentielles et celles de courant. En s'inspirant des cas théoriques analogues, on peut tracer un réseau vraisemblable de ligne de courant et de lignes équipotentielles qui en chaque point se rencontrent orthogonalement.

Le réseau hydrodynamique caractérise l'orthogonal des lignes de courant et des lignes équipotentielles et aussi les relations constantes des segments qui passent au milieu des cotés de la maille du réseau. On prend les limites habituelles : la ligne de zéro, c'est le contour souterrain de l'ouvrage hydrotechnique, la dernière ligne de courant est la couche imperméable.

I.5.3 Méthodes analogiques

Ces méthodes se basent sur le phénomène physique d'infiltration qui s'exécute dans les conditions de l'équation de Laplace, mais qui donne la possibilité de trouver plus facilement les valeurs des fonctions déterminées. Par exemple, l'étude expérimentale du changement de potentiel du champ électrique homogène est plus facile à exécuter que la détermination du potentiel aux différents points du courant de filtration.

Ø ***La méthode de l'analogie électro-hydrodynamique AEHD***

Cette méthode a été développée par N. Pavlovski en 1918. C'est la plus largement utilisée pour l'étude des problèmes d'infiltration. L'analogie entre le mouvement des courants électriques à champs homogène et du mouvement potentiel du liquide incompressible est caractérisée des données qui sont représentées au **Tableau I.1**.

N	**NOTION**	**Le mouvement du liquide**	**Le mouvement du courant électrique**
1	H	Charge	Le potentiel électrique
2	Φ	Le potentiel des vitesses	Le potentiel électrique réduit
3	Φ = const	La surface équipotentielle	La surface du même potentiel électrique
4	U = - grad Φ ; $U_x = -\frac{\partial \Phi}{d\,x}$; $U_z = \frac{\partial \Phi}{d\,z}$	Les vecteurs de la vitesse	Les vecteurs de la densité du champ électrique
5	$U_x = -\frac{\partial \Psi}{d\,z}$; $U_z = -\frac{\partial \Psi}{d\,x}$	La fonction de courant	La fonction du courant électrique
6	Ψ = const ; $\frac{\partial \Psi}{d\,n} = 0$	La ligne de courant ou bien la frontière imperméable	La ligne du courant ou bien la frontière isolée
7	K	Le coefficient de perméabilité	La conductibilité électrique spécifique

Tableau I.1 : Méthode analogique.

I.5.4 Méthodes numériques

L'utilisation des solutions analytiques, lorsqu' elles existent, semble constituer une démarche quelque peut désuète, lorsqu'on considère les puissants moyens d'investigation que représentent, à l'heure actuelle, les méthodes numériques qui ont vu le jour grâce au développement considérable de l'informatique. Elles permettent, en effet, de traiter un grand nombre de problèmes devant lesquels la théorie s'était, jusqu'à présent, avérée impuissante surtout pour les problèmes ***tridimensionnels***.

Parmi les méthodes numériques utilisées on trouve :

- Méthode des éléments finis.
- Méthode des différences finies.

La méthode des éléments finis consiste à remplacer un problème continu par un problème discret équivalent. La discrétisation se fait sur deux fronts, d'une part, le domaine géométrique est subdivisé en sous domaines de géométrie simple, appelés éléments, sur lesquels l'étude du problème peut se faire en une seule opération, et d'autre part les équations aux dérivées partielles sont remplacées par des équations algébriques à l'aide du calcul variationnel ou des méthodes de minimisation de l'erreur comme celle des résidus pondérés. La solution globale s'obtient en résolvant un système global formé par l'assemblage des équations algébriques obtenues sur tous les éléments constituant le domaine géométrique (EUVRAR 1990, FERY, F. & J. JIROUSEK, 2001)**.**

Nous allons développer au chapitre III, l'une de ces méthodes numériques qui est en fait : la méthode des différences finies (MDF) adoptée dans le code *FLAC*.

I.6 Conclusion

Le milieu poreux est identifié par ses caractéristiques et la genèse de ses vides, et pores. Les deux principaux paramètres caractérisant un milieu poreux sont : la perméabilité et la porosité. La granulométrie, technique de l'étude des roches, accède à la morphologie des vides par deux paramètres des grains, le diamètre efficace et le coefficient d'uniformité, la connaissance de ces caractéristiques est nécessaire pour accéder à l'étude des écoulements traversant des milieux poreux. Un cas particulier d'un milieu poreux est le massif de sol protégé par des écrans étanches.

► L'écoulement de l'eau à travers un milieu poreux est déterminé par trois groupes de paramètres hydrodynamiques : coefficient de perméabilité, gradient hydraulique, débit et vitesse de l'écoulement.

► La loi de Darcy, établie expérimentalement, est la base de l'hydrodynamique souterraine. Elle est applicable sur le terrain dans des conditions bien définies. L'écoulement de l'eau dans le sol ou, plus généralement la circulation d'un fluide dans un milieu poreux, est régit par une équation différentielle du second ordre (équation de Laplace), pour sa résolution nous avons recours aux méthodes numériques.

Toutes ces définitions et caractéristiques nous serviront à l'étude des écoulements ***plans*** et ***tridimensionnels*** contournant des écrans étanches, dont la résolution est obtenue par les différentes méthodes qui seront présentées dans le ***chapitre II***.