

Chapitre VIII

APPROCHE THEORIQUE A L'ETUDE DU RESSAUT HYDRAULIQUE DE TYPE A FORCE PAR MARCHE POSITIVE

VIII.1 Introduction

L'étude théorique du ressaut hydraulique de type A forcé par marche positive évoluant dans un canal de section droite triangulaire, montre que le phénomène de ce type de ressaut est régi par trois paramètres que l'on peut exprimer sous la forme d'une relation fonctionnelle $f(F_1, Y, S) = 0$, où F_1 représente le nombre de Froude de l'écoulement incident dans la section du pied du ressaut, Y représente le rapport des hauteurs conjuguées h_2/h_1 (h_1 et h_2 les hauteurs du ressaut respectivement à l'amont et à l'aval) et $S=s/h_1$ est la hauteur relative de la marche positive (s la hauteur absolue de la marche).

L'objectif principal de cette étude est d'établir d'une manière pratique la relation fonctionnelle $f(F_1, Y, S) = 0$, en utilisant l'équation de la quantité de mouvement entre les sections amont et aval du ressaut. La relation établie devra faire l'objet d'une comparaison à celle obtenue pour le cas du ressaut hydraulique classique évoluant dans un canal triangulaire en posant $S = 0$.

VIII.2 Equation de la quantité de mouvement

Nous avons montré dans l'étude bibliographique que le ressaut hydraulique est régi par l'équation de la quantité de mouvement appliquée entre ses sections initiale et finale. Dans notre cas, il s'agit d'appliquer l'équation de la quantité de mouvement pour un ressaut hydraulique de type A forcé par marche positive évoluant dans un canal de section droite triangulaire comme le montre la (Figure 8.1). La section transversale de la marche est donc de forme triangulaire caractérisée par sa hauteur s . La face latérale de la marche forme donc un obstacle constituant le siège d'une réaction opposée au sens de l'écoulement. Celle-ci résulte de la pression agissant sur la face latérale de la marche. Cette pression sera étudiée en tant qu'une pression agissant sur une surface plane verticale de forme géométrique triangulaire. La réaction créée par la présence de la marche donnera une force de pression F_s appliquée au centre de gravité. Cette force sera ajoutée aux forces extérieures assurant l'équilibre entre les sections amont et aval du ressaut lors de l'application de l'équation de la quantité de mouvement.

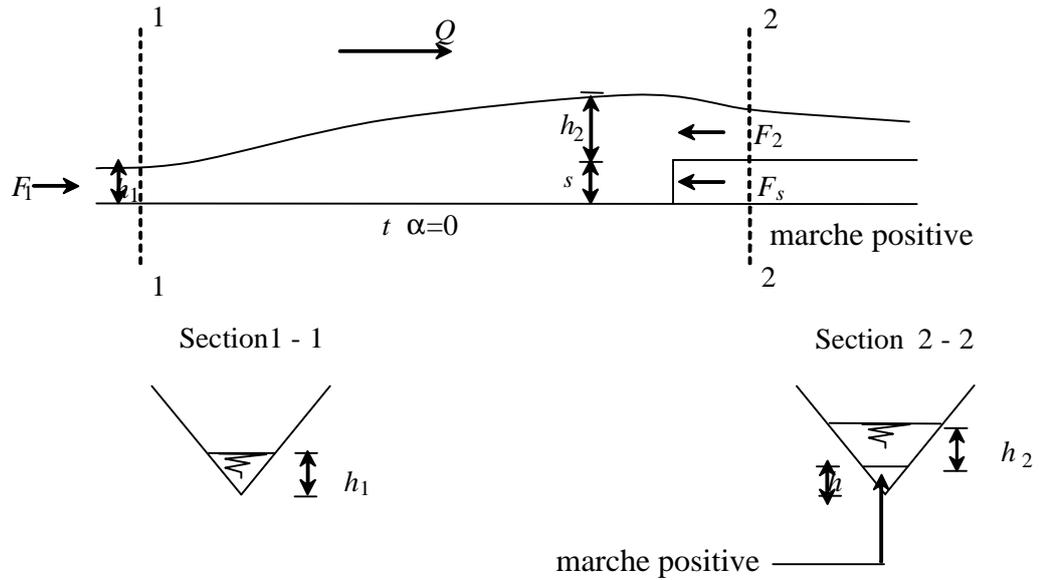


Figure 8.1 : Ressaut hydraulique de type A forcé par marche positive dans un canal triangulaire.

L'équation de la quantité de mouvement sera appliquée en tenant compte des hypothèses simplificatrices suivantes :

- La distribution des pressions sur les sections amont et aval du ressaut est supposée hydrostatique ;
- La vitesse au niveau des deux sections du ressaut est supposée uniforme ;
- la résistance de l'aire est négligée ;
- les pertes de charges par frottement sont négligées.

Tenant compte de toutes ces considérations, l'équation de la quantité de mouvement appliquée entre les sections 1-1 et 2-2 s'écrit :

$$\rho Q \ddot{V}_1 - \rho Q \ddot{V}_2 = \Sigma \ddot{F}_{ext} \quad (8.1)$$

$\Sigma \ddot{F}_{ext}$: représente la somme des forces extérieures. Ces forces sont :

- la force F_1 appliquée à la section 1-1.
- la force F_2 appliquée au dessus de la marche à la section 2-2.
- la réaction F_s engendrée par la présence de la marche à la section 2-2.

Par conséquent la relation (8.1) s'écrit :

$$\rho Q V_1 + F_1 = \rho Q V_2 + F_2 + F_s \quad (8.2)$$

Notons que le point d'application de chacune de ces forces coïncide avec le centre de gravité de la section considérée. La force F_1 est appliquée, d'après la figure 8.1, sur une section triangulaire, de même pour la force de réaction F_s ; tandis que, la force F_2 est appliquée sur

une section trapézoïdale, ceci est expliqué par la présence de la marche positive au dessous de l'écoulement à la section aval du ressaut où se trouve le point d'application de la force F_2 . Les forces de pression F_1 et F_2 ainsi que la force de réaction F_s peuvent être exprimées, en appliquant les lois de l'hydrostatique : $F_1 = \omega \bar{h}_1 A_1$, $F_2 = \omega \bar{h}_2 A_2$ et $F_s = \omega \bar{s} A_s$.

Où : ω représente le poids volumique du liquide en écoulement, \bar{h}_1 , \bar{h}_2 et \bar{s} représentent respectivement la distance entre le centre de gravité de la section transversale 1, 2 et s et la face supérieure de l'écoulement (surface libre de l'écoulement) et A_1, A_2 ou A_s est l'aire de la section mouillée 1, 2 ou s.

En remplaçant les expressions de F_1, F_2 et F_s dans la relation (8.2), on obtient :

$$\rho Q V_1 + \omega \bar{h}_1 A_1 = \rho Q V_2 + \omega \bar{h}_2 A_2 + \omega \bar{s} A_s \quad (8.3)$$

En faisant appel à l'équation de continuité, la vitesse moyenne de l'écoulement s'écrit, en fonction du débit volume Q et de l'aire de la section mouillée A : $V = Q/A$. Ainsi, les vitesses moyennes de l'écoulement V_1 et V_2 respectivement aux sections amont et aval du ressaut s'expriment : $V_1 = Q/A_1$ et $V_2 = Q/A_2$. En tenant compte de ces dernières considérations et sachant que $\omega = \rho g$, la relation (8.3) peut s'écrire, en divisant tous ses membres par ρg :

$$\frac{Q^2}{g A_1} + \bar{h}_1 A_1 = \frac{Q^2}{g A_2} + \bar{h}_2 A_2 + \bar{s} A_s \quad (8.4)$$

On peut déterminer aisément les expressions de $A_1, A_2, A_s, \bar{h}_1, \bar{h}_2$ et \bar{s} en se basant sur la figure 8.2.

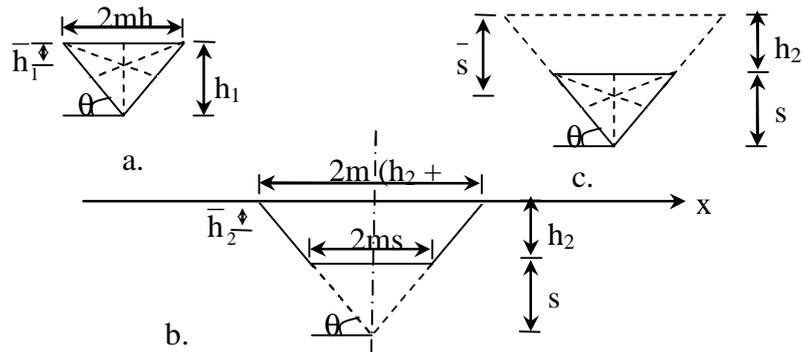


Figure 8.2 : Représentation géométrique des paramètres \bar{h}_1 , \bar{h}_2 et \bar{s} .

La figure 8.2.a montre la section au pied du ressaut. Cette section est caractérisée par sa première hauteur conjuguée h_1 et le paramètre m défini comme la cotangente de l'angle θ . L'angle θ représente l'inclinaison des parois du canal par rapport à l'horizontal. Ainsi, l'aire de la section mouillée A_1 et la distance \bar{h}_1 s'écrivent respectivement :

$$A_1 = mh_1^2 \quad (8.5)$$

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{3}h_1 \quad (8.6)$$

La figure 8.2.b représente la section aval du ressaut de type A où la fin de son rouleau se trouve à l'extrémité amont de la marche positive. A l'aval du rouleau, le liquide franchit la marche par-dessus, donc le profil liquide en écoulement au dessus de la marche positive prendra une forme trapézoïdale. Cette section est caractérisée par sa grande base $2m(h_2 + s)$, sa petite base $2ms$ et sa hauteur h_2 . Par conséquent, l'aire de la section mouillée A_2 s'écrit :

$$A_2 = mh_2(h_2 + 2s) \quad (8.7)$$

Cependant, le centre de gravité de la section trapézoïdale peut être déterminé par application du principe des moments statiques.

Avant d'entamer la démarche pour la détermination de \bar{h}_2 par le principe des moments statiques, il faut énoncer que la section trapézoïdale de la figure 8.2.b résulte de différence entre le grand triangle et celui le plus petit de la marche positive. En se référant donc à la figure 8.2.b, la somme des moments statiques par rapports à l'axe x s'écrit :

$$\bar{h}_2 A_2 = \bar{h}'_2 A'_2 - \bar{s} A_s \Rightarrow \bar{h}_2 = \frac{\bar{h}'_2 A'_2 - \bar{s} A_s}{A_2} \quad (8.8)$$

Où : A_2 , définie par la relation (8.7), est l'aire de la section du liquide franchissant la marche positive (trapézoïdale) et \bar{h}_2 est la distance entre le centre de gravité de A_2 et l'axe x et s'exprime en vertu de la relation (8.8). A'_2 est l'aire du grand triangle délimité par la surface libre de l'écoulement et les parois du canal, cette section s'exprime par $A'_2 = m(h_2 + s)^2$ et \bar{h}'_2 représente la distance entre le centre de gravité de A'_2 et l'axe x (figure 8.2.b) et telle que : $\bar{h}'_2 = \frac{1}{3}(h_2 + s)$. A_s est l'aire de la face latérale de la marche positive, cette face a une forme triangulaire et s'exprime par $A_s = ms^2$. \bar{s} représente la distance entre le centre de gravité de A_s et l'axe x (figure 8.2.b) et s'exprime par: $\bar{s} = h_2 + \frac{s}{3}$.

En tenant compte de toutes ces considérations, la relation (8.8) s'écrit :

$$\bar{h}_2 = \frac{h_2 \left(\frac{h_2}{3} + s \right)}{h_2 + 2s} \quad (8.9)$$

La relation (8.9) montre clairement que \bar{h}_2 s'exprime exclusivement en fonction de la deuxième hauteur conjuguée du ressaut h_2 et de la hauteur de la marche positive s .

La figure 8.2.c montre la géométrie de la face latérale de la marche positive, elle est de forme triangulaire. Cette face constitue le siège de la réaction de la pression, supposée hydrostatique, agissant sur la marche. Cette face est caractérisée par sa hauteur s et le paramètre m . L'aire de la section mouillée A_s et son centre de gravité \bar{s} par rapport à la surface libre de l'écoulement ont été définies lors de la détermination du paramètre \bar{h}_2 , leurs expressions s'écrivent respectivement :

$$A_s = ms^2 \quad (8.10)$$

$$\bar{s} = h_2 + \frac{s}{3} \quad (8.11)$$

Un autre paramètre qui servira de base à notre étude théorique est le nombre de Froude F_1 de l'écoulement incident à la section initiale 1-1, c'est-à-dire au pied du ressaut. Ce nombre s'exprime en règle générale par la relation 8.12 :

$$F_1^2 = \frac{Q^2}{gA_1^3} \frac{\partial A_1}{\partial h_1} \quad (8.12)$$

La relation (8.12) montre que le nombre de Froude F_1 est une fonction de quatre paramètres tels que :

- Q représente le débit volume de l'écoulement ;
- g est l'accélération de la pesanteur ;
- A_1 est l'aire de la section mouillée au pied du ressaut ;
- $\frac{\partial A_1}{\partial h_1}$ représente la dérivée partielle de l'aire de la section mouillée A_1 au pied du

ressaut par rapport à la première hauteur conjuguée h_1 . L'étude montre que cette dérivée représente la largeur du plan d'eau quelque soit la forme géométrique du profil liquide en écoulement.

Pour notre étude, il s'agit d'une section triangulaire et $\frac{\partial A_1}{\partial h_1} = 2mh_1$. Cette considération mène

à écrire la relation (8.13) telle que :

$$F_1^2 = \frac{2Q^2}{m^2gh_1^5} \quad (8.13)$$

En tenant compte des relations (8.5) à (8.7), (8.9) à (8.11) et (8.13), la relation (8.4) devient :

$$\frac{mh_1^3}{2} F_1^2 + \frac{1}{3} mh_1^3 = \frac{mh_1^5 F_1^2}{2h_2(h_2 + 2s)} + mh_2^2 \left(\frac{h_2}{3} + s \right) + ms^2 \left(h_2 + \frac{s}{3} \right) \quad (8.14)$$

En divisant les membres de la relation (8.14) par le terme $\frac{1}{3}mh_1^3$, on obtient :

$$\frac{3}{2}F_1^2 + 1 = \frac{3}{2} \frac{h_1^2 F_1^2}{h_2(h_2 + 2s)} + 3 \frac{h_2^2}{h_1^3} \left(\frac{h_2}{3} + s \right) + 3 \frac{s^2}{h_1^3} \left(h_2 + \frac{s}{3} \right) \quad (8.15)$$

L'application de l'équation de la quantité de mouvement entre deux sections délimitants un ressaut hydraulique de type A forcé par marche positive et évoluant dans un canal de section droite triangulaire mène à écrire la relation (8.15) ; cette relation montre que ce type de ressaut est régi par :

- le nombre de Froude F_1 de l'écoulement incident à la section amont du ressaut ;
- les hauteurs conjuguées h_1 et h_2 respectivement à l'amont et à l'aval du ressaut ;
- la hauteur de la marche positive s .

VIII.3 Analyse dimensionnelle

L'utilisation de la relation (8.15) pour la détermination des caractéristiques du ressaut hydraulique de type A forcé par marche positive dans un canal triangulaire n'est pas pratique en raison, d'une part de son caractère implicite vis-à-vis de h_2 et s , d'autre part, et surtout, de son caractère dimensionnel. Pour cela, on préconise d'utiliser des rapports adimensionnels pour rendre la relation (8.15) plus générale. Le principe de l'analyse dimensionnelle devient plus clair et plus justifié lorsqu'il s'agit de déterminer les caractéristiques du ressaut hydraulique par voie expérimentale sur des modèles physiques réduits, où des rapports adimensionnels doivent être fournis pour pouvoir dimensionner les bassins d'amortissement. Pour la présente étude, ces rapports adimensionnels sont le rapport des hauteurs conjuguées $Y=h_2/h_1$ et la hauteur relative ($S= s/h_1$) de la marche positive. Tenant compte de ces considérations, la relation (8.15) s'écrit :

$$F_1^2 = \frac{2}{3} \frac{Y(Y + 2S)}{Y(Y + 2S) - 1} [3YS(Y + S) + Y^3 + S^3 - 1] \quad (8.16)$$

La relation (8.16) exprime le nombre de Froude F_1 en fonction du rapport des hauteurs conjuguées Y et de la hauteur relative S de la marche positive pour le cas du ressaut hydraulique de type A forcé par marche positive, évoluant dans un canal de section droite triangulaire. Connaissant le rapport S , cette relation est proposée pour l'évaluation du rapport Y et par conséquent la hauteur h_2 .

L'approche théorique proposée pour le cas du ressaut classique montre que le nombre de Froude F_1 de l'écoulement incident dépend exclusivement du rapport des hauteurs conjuguées Y en appliquant toujours l'équation de la quantité de mouvement.

En remplaçant $S = 0$ dans la relation (8.16), on obtient :

$$F_1^2 = \frac{2}{3} Y^2 \frac{(Y^2 + Y + 1)}{(Y + 1)} \quad (8.17)$$

La relation (8.16) mène donc à la relation (8.17) exprimant les caractéristiques du ressaut classique dans un canal triangulaire.

Ce résultat nous permet donc de valider notre démarche théorique. En outre, l'approche proposée sera confrontée, en suite aux résultats expérimentaux.

VIII.4 Effet de la marche positive sur le ressaut hydraulique

La figure 8.3 montre la représentation graphique de la variation du rapport des hauteurs conjuguées Y en fonction du nombre de Froude F_1 sur un système d'axe à division cartésienne, selon la relation (8.16). Rappelons que $S = 0$ représente le cas du ressaut classique évoluant dans un canal triangulaire et la courbe correspondante est tracée selon la relation (8.17).

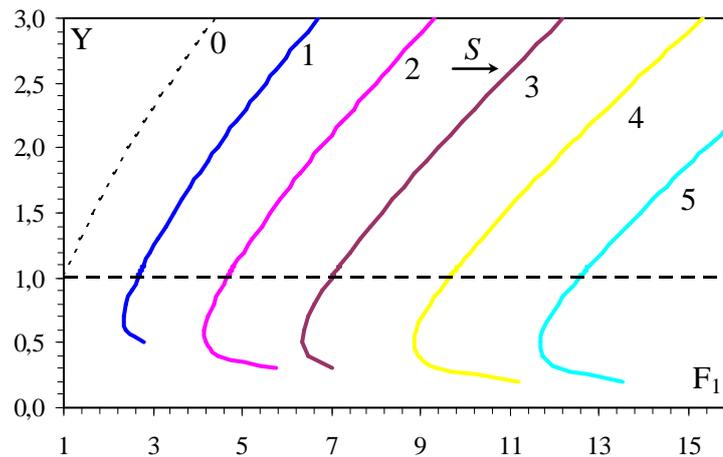


Figure 8.3 : Variation de Y en fonction de F_1 selon la relation (8.16) pour un ressaut hydraulique de type A forcé par marche positive pour différentes S . (...) Courbe correspondant au ressaut classique dans un canal triangulaire ($S=0$), selon la relation (8.17). (- - -) courbe limite d'apparition du ressaut.

Les courbes correspondant à $S = 1, 2, 3, 4$ et 5 sont tracées selon la relation (8.16) du ressaut hydraulique de type A, évoluant dans un canal triangulaire. La courbe en pointillé représente le ressaut hydraulique classique, évoluant dans un canal triangulaire.

La figure 8.3 indique clairement que plus la hauteur relative S de la marche positive augmente plus le rapport Y des hauteurs conjuguées diminue, pour un nombre de Froude F_1 fixe.

La figure 8.4 représente la distribution des points expérimentaux autour des courbes théoriques tracées selon la relation (8.16). On peut donc, remarquer que les points expérimentaux sont situés, dans leur majorité dans les intervalles théoriques des hauteurs relatives S des marches positives. Cependant, certains points expérimentaux se trouvent hors de ces intervalles théoriques. Ceci peut être attribué, en grande partie, à la justesse des hypothèses de départ, pour l'application de l'équation de quantité de mouvement.

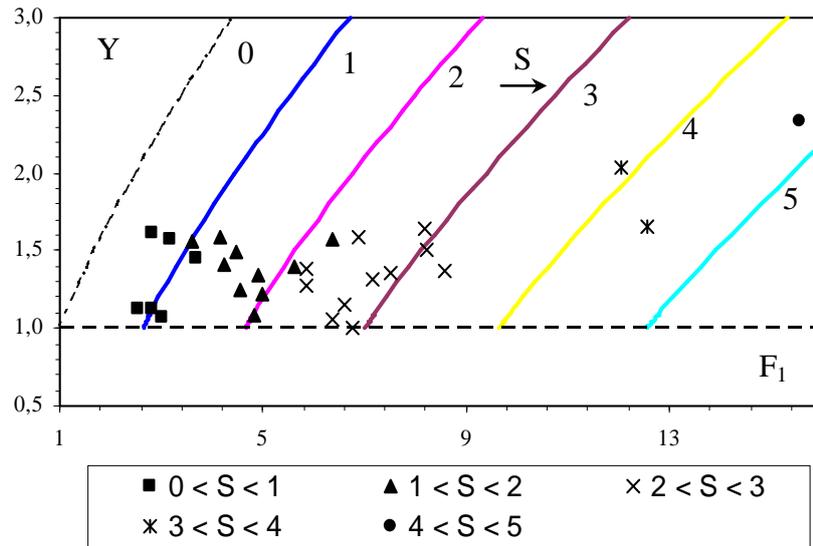


Figure 8.4 : Représentation des points expérimentaux sur les courbes théoriques Tracées selon la relation (8.16). (...) Courbe du ressaut classique dans un canal triangulaire ($S=0$), selon la relation (8.17). (- - -) Courbe limite d'apparition du ressaut ($Y>1$).

Notons que la relation (8.16) se présente sous une forme implicite vis-à-vis du rapport des hauteurs conjuguées Y et son application nécessite par conséquent l'utilisation d'un procédé itératif. Dans le paragraphe suivant nous tenterons de remplacer la relation (8.16) par une relation plus explicite, par le moyen d'un ajustement des courbes théoriques.

VIII.5 Ajustement de la relation théorique

L'analyse de la figure 8.4 montre, que les courbes situées au-dessus de la courbe limite sont relativement linéaires et peuvent être remplacées, par des droites sécantes comme le montre la figure 8.5.

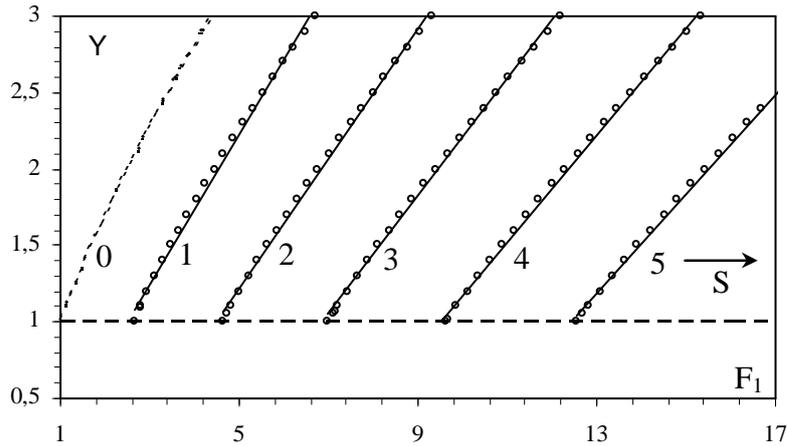


Figure 8.5 : Variation $Y = f(F_1)$. (○○○) courbe théorique selon la relation (8.16). (—) Droites d'ajustements.

Les droites représentées dans la figure (8.5) sont donc de type linéaire et suivent la forme suivante :

$$Y = a F_1 - b \quad (8.18)$$

Les paramètres a et b varient en fonction de la hauteur relative de la marche positive selon le tableau 8.1.

Tableau 8.1 : Valeurs des paramètres a et b de la relation (8.18)

| S | a | b |
|----------|----------|----------|
| 1 | 0,50 | 0,28 |
| 2 | 0,44 | 0,99 |
| 3 | 0,39 | 1,7 |
| 4 | 0,36 | 2,4 |
| 5 | 0,33 | 3,11 |

La figure 8.6 montre la variation de a en fonction de la hauteur relative S de la marche.

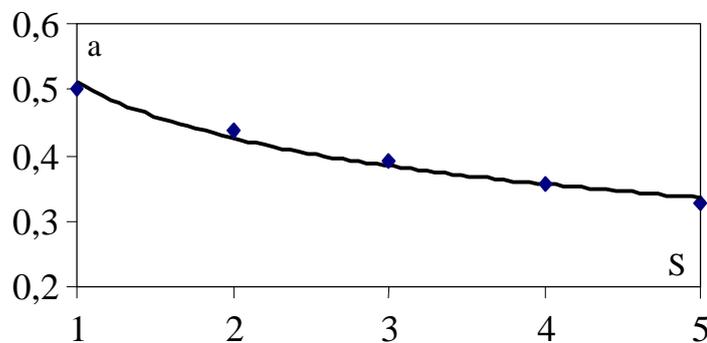


Figure 8.6 : Variation de ' a ' en fonction de S selon le tableau 8.1.

La courbe tracée dans la figure 8.6 montre que la variation du paramètre a en fonction de S suit une loi puissance que l'on peut exprimer par la relation suivante :

$$a = \frac{0,51}{S^{0,26}} \quad , \quad R = 0,99 \quad (8.19)$$

Cette dernière relation présente une excellente approximation de la fonction $a = f(S)$.

La figure 8.7 montre à son tour la variation du paramètre b de la relation (8.18) en fonction de la hauteur relative S de la marche positive selon le tableau 8.1.

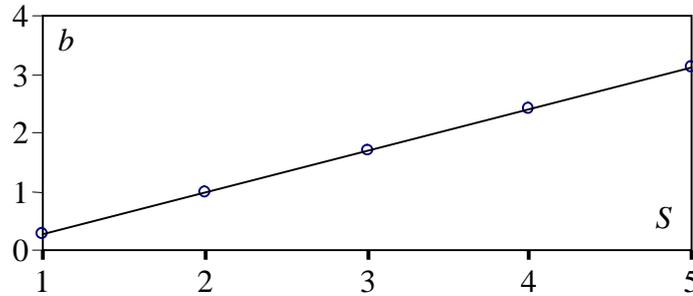


Figure 8.7 : Variation de ' b ' en fonction de S selon le tableau 8.1.

La figure 8.7 montre clairement que la variation de ' b ' en fonction de S suit parfaitement une loi linéaire selon la relation suivante :

$$b = 0,706S - 0,421 \quad , \quad R = 1 \quad (8.20)$$

Remplaçant les relations (8.19) et (8.20) dans la relation (8.18), on obtient :

$$Y = \frac{0,51}{S^{0,26}} F_1 - 0,706S + 0,421 \quad (8.21)$$

La relation explicite (8.21) nous fournit un moyen simple pour la détermination du rapport des hauteurs conjuguées Y tout en connaissant le nombre de Froude F_1 incident ainsi que la hauteur relative S de la marche positive. Cette relation est donc proposée en remplacement de la relation implicite (8.16). En plus, il est à noter que la relation (8.21) s'applique pour des nombres de Froude F_1 variant entre 2,66 et 18,7. Quant à la précision du calcul, la relation (8.21) occasionne des écarts relatifs, dans leur majorité, inférieurs à 5 % par rapport à la relation implicite (8.16), seul quelques valeurs de F_1 donnent des écarts relatifs $\Delta Y/Y$ compris entre 5 et 7 %. Le tableau 8.2 illustre ces constatations.

Tableau 8.2 : *Ecart relatifs entre Y_t issu par la relation (8.16) et Y_{app} calculés par la relation approchée (8.21).*

| Y_t | S = 1 | | | S = 2 | | | S = 3 | | |
|-------|-------|-----------|------------------------------|-------|-----------|------------------------------|-------|-----------|------------------------------|
| | F_1 | Y_{app} | $(Y_t - Y_{app})/Y_t$ (%) | F_1 | Y_{app} | $(Y_t - Y_{app})/Y_t$ (%) | F_1 | Y_{app} | $(Y_t - Y_{app})/Y_t$ (%) |
| 1,01 | 2,66 | 1,07 | 6,13 | 4,67 | 1,00 | 1,01 | 7,02 | 1,00 | 1,46 |
| 1,05 | 2,72 | 1,10 | 4,87 | 4,74 | 1,03 | 1,93 | 7,10 | 1,03 | 2,23 |
| 1,1 | 2,79 | 1,14 | 3,56 | 4,83 | 1,07 | 2,87 | 7,23 | 1,07 | 3,03 |
| 1,2 | 2,95 | 1,22 | 1,63 | 5,02 | 1,15 | 4,26 | 7,42 | 1,15 | 4,18 |
| 1,3 | 3,12 | 1,30 | 0,35 | 5,22 | 1,23 | 5,14 | 7,65 | 1,24 | 4,90 |
| 1,4 | 3,29 | 1,39 | 0,47 | 5,42 | 1,32 | 5,68 | 7,88 | 1,33 | 5,32 |
| 1,5 | 3,47 | 1,46 | 0,97 | 5,64 | 1,41 | 5,96 | 8,12 | 1,42 | 5,52 |
| 1,6 | 3,66 | 1,58 | 1,22 | 5,85 | 1,50 | 6,06 | 8,37 | 1,51 | 5,56 |
| 1,7 | 3,85 | 1,68 | 1,28 | 6,06 | 1,60 | 6,02 | 8,62 | 1,67 | 5,48 |
| 1,8 | 4,04 | 1,78 | 1,20 | 6,30 | 1,69 | 5,87 | 8,87 | 1,70 | 5,32 |
| 1,9 | 4,25 | 1,88 | 1,01 | 6,53 | 1,79 | 5,64 | 9,13 | 1,80 | 5,08 |
| 2 | 4,45 | 1,99 | 0,72 | 6,77 | 1,89 | 5,34 | 9,39 | 1,90 | 4,80 |
| 2,1 | 4,66 | 2,09 | 0,37 | 7,01 | 1,96 | 5,00 | 9,66 | 2,01 | 4,47 |
| 2,2 | 4,87 | 2,20 | 0,05 | 7,25 | 2,10 | 4,61 | 9,93 | 2,11 | 4,11 |
| 2,3 | 5,09 | 2,31 | 0,51 | 7,48 | 2,20 | 4,19 | 10,20 | 2,21 | 3,72 |
| 2,4 | 5,31 | 2,42 | 1,02 | 7,75 | 2,31 | 3,74 | 10,48 | 2,32 | 3,32 |
| 2,5 | 5,54 | 2,54 | 1,55 | 8,00 | 2,42 | 3,27 | 10,76 | 2,43 | 2,89 |
| 2,6 | 5,76 | 2,66 | 2,12 | 8,26 | 2,53 | 2,76 | 11,04 | 2,53 | 2,46 |
| 2,7 | 5,99 | 2,77 | 2,70 | 8,52 | 2,64 | 2,28 | 11,32 | 2,65 | 2,01 |
| 2,8 | 6,23 | 2,89 | 3,31 | 8,78 | 2,75 | 1,77 | 11,61 | 2,76 | 1,55 |
| 2,9 | 6,47 | 3,01 | 3,93 | 9,05 | 2,86 | 1,25 | 11,91 | 2,87 | 1,09 |
| 3 | 6,71 | 3,14 | 4,57 | 9,32 | 2,98 | 0,72 | 12,20 | 2,98 | 0,62 |

Tableau 8.2 (Suite et fin): Ecarts relatifs entre Y_t déterminés par la relation (8.16) et Y_{app} calculés par la relation approchée (8.21)

| Y_t | S = 4 | | | S = 5 | | |
|-------|-------|-----------|------------------------------|-------|-----------|------------------------------|
| | F_1 | Y_{app} | $(Y_t - Y_{app})/Y_t$ (%) | F_1 | Y_{app} | $(Y_t - Y_{app})/Y_t$ (%) |
| 1,01 | 9,67 | 1,04 | 2,69 | | | |
| 1,05 | 9,76 | 1,07 | 1,87 | | | |
| 1,1 | 9,87 | 1,11 | 1,03 | | | |
| 1,2 | 10,12 | 1,20 | 0,22 | 13,07 | 1,28 | 6,82 |
| 1,3 | 10,37 | 1,29 | 1,04 | 13,35 | 1,37 | 5,66 |
| 1,4 | 10,62 | 1,38 | 1,56 | 13,63 | 1,47 | 4,85 |
| 1,5 | 10,89 | 1,47 | 1,85 | 13,92 | 1,56 | 4,29 |
| 1,6 | 11,16 | 1,57 | 1,99 | 14,21 | 1,66 | 3,91 |
| 1,7 | 11,43 | 1,67 | 2,01 | 14,51 | 1,76 | 3,68 |
| 1,8 | 11,71 | 1,77 | 1,93 | 14,81 | 1,86 | 3,55 |
| 1,9 | 12,00 | 1,87 | 1,79 | 15,11 | 1,97 | 3,51 |
| 2 | 12,28 | 1,97 | 1,59 | 15,42 | 2,07 | 3,54 |
| 2,1 | 12,57 | 2,07 | 1,35 | 15,74 | 2,18 | 3,63 |
| 2,2 | 12,87 | 2,18 | 1,07 | 16,06 | 2,28 | 3,76 |
| 2,3 | 13,17 | 2,28 | 0,77 | 16,38 | 2,39 | 3,92 |
| 2,4 | 13,47 | 2,39 | 0,44 | 16,70 | 2,50 | 4,11 |
| 2,5 | 13,77 | 2,50 | 0,10 | 17,03 | 2,61 | 4,33 |
| 2,6 | 14,08 | 2,61 | 0,26 | 17,35 | 2,72 | 4,57 |
| 2,7 | 14,39 | 2,72 | 0,63 | 17,69 | 2,83 | 4,83 |
| 2,8 | 14,70 | 2,83 | 1,01 | 18,02 | 2,94 | 5,10 |
| 2,9 | 15,02 | 2,94 | 1,39 | 18,36 | 3,06 | 5,38 |
| 3 | 15,33 | 3,05 | 1,78 | 18,70 | 3,17 | 5,67 |

VIII.6 Validation de l'approche théorique

Ce sous chapitre s'intéresse à la validation de notre approche théorique en utilisant les résultats expérimentaux. Ceci peut être rendu possible par la comparaison des nombres de Froude F_1 théoriques déterminés par la relation théorique (8.16) d'une part, et ceux expérimentaux déterminés par la relation universelle (8.13). Ainsi, pour pouvoir conclure à la validité et à la fiabilité de la relation générale proposée (8.16), la condition suivante doit être satisfaite :

$$F_{1thé} = F_{1exp} \quad (8.22)$$

Tel que $F_{1thé}$ désigne le nombre de Froude théorique calculé par la relation (8.16) et F_{1exp} désigne le nombre de Froude expérimental calculé par la relation universelle (8.13). Rappelons que ces deux relations s'écrivent respectivement :

$$F_{1\text{thé}}^2 = \frac{2}{3} \frac{Y(Y+2S)}{Y(Y+2S)-1} [3YS(Y+S) + Y^3 + S^3 - 1] \quad (8.16)$$

$$F_{1\text{exp}}^2 = \frac{2Q^2}{m^2 gh_1^5} \quad (8.13)$$

VIII.6.1 Calcul d'erreurs

Les essais expérimentaux sont toujours entachés d'erreurs de mesures. Ces erreurs sont occasionnées par l'incertitude des appareils utilisés et également de l'incertitude de la lecture de l'utilisateur de ces appareils. Pour tenir compte de ces considérations, un calcul d'erreur est donc nécessaire. L'erreur relative commise sur l'évaluation du nombre de Froude expérimental $F_{1\text{exp}}$ sera désignée par : $\Delta F_{1\text{exp}}/F_{1\text{exp}}$.

VIII.6.1.1 Erreurs relatives commises sur la mesure des débits

Les débits volume Q sont déterminés par la relation suivante :

$$Q = 0,3794 \sqrt{2gB} \beta \left(1 + 0,1649 \beta^{2,0716}\right)^{3/2} h^{3/2}, \quad \beta = \frac{b}{B} < 0,45 \quad (7.1)$$

Les termes figurants dans cette relation sont définis dans le chapitre VII de l'étude expérimentale. Cette relation, comme nous l'avons déjà indiqué auparavant, est issue de l'étude d'un déversoir rectangulaire sans hauteur de pelle avec contraction latérale réalisé et testé au laboratoire LARHYSS par Hachemi Rachedi L. (2006). La relation (7.1) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$Q = a h^{3/2} \quad (8.23)$$

$$a = 0,3794 \sqrt{2gB} \beta \left(1 + 0,1649 \beta^{2,0716}\right)^{3/2} \quad (8.24)$$

Selon le théorème des erreurs relatives, l'erreur relative commise sur la mesure des débits $\Delta Q/Q$ s'écrit :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{3}{2} \frac{\Delta h}{h} \quad (8.25)$$

Les parois du déversoir sont réalisées en fixant dans un canal rectangulaire deux plaques minces. Les dimensions de ces plaques sont déterminées avec une précision suffisante à l'aide d'une règle graduée ; ceci nous a permis de minimiser les erreurs au maximum sur l'évaluation des paramètres b et B , pour les considérées comme négligeables. Quant à la hauteur déversante h , nous avons enregistré des fluctuations plus ou moins importantes sur la surface libre de l'écoulement franchissant le déversoir, ce qui a rendu difficile l'évaluation de la hauteur déversante h surtout pour les faibles débits Q . On a estimé alors l'erreur absolue

commise sur la mesure de h de l'ordre de 1 à 2 mm. Par conséquent, l'erreur relative commise sur la mesure du débit ne sera fonction que de celle commise sur la mesure de la hauteur déversante. La relation (8.26) s'écrit alors :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \frac{3}{2} \frac{\Delta h}{h} \quad (8.26)$$

VIII.6.1.2 Erreurs relatives commises sur la mesure de m

Le paramètre m étant la cotangente de l'angle θ d'inclinaison de la paroi du canal triangulaire par rapport à l'horizontal. La figure 8.8 montre les caractéristiques géométriques permettant le calcul de ce paramètre.

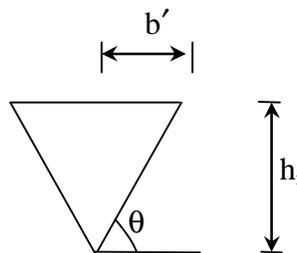


Figure 8.8 : Détermination du paramètre $m = \cotg \theta$.

m s'exprime, d'après la figure 8.8 comme suit :

$$m = \cotg \theta = \frac{b'}{h_i} \quad (8.27)$$

En s'appuyant sur la relation (8.27) et en vertu du théorème des erreurs relatives, l'erreur relative $\Delta m/m$ commise sur la mesure de m s'écrit :

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta b'}{b'} + \frac{\Delta h_i}{h_i} \quad (8.28)$$

La relation (8.28) montre que l'erreur relative commise sur la mesure de m est fonction des erreurs relatives commises sur la mesure des paramètres géométriques b' et h_i . Or ces deux derniers paramètres géométriques ont été mesurés avec soin et leurs erreurs absolues sont insignifiantes. Pour cela les erreurs relatives commises sur ce paramètre ont été négligées.

VIII.6.1.3 Erreurs relatives commises sur la mesure de la hauteur initiale h_i du ressaut

La hauteur initiale h_i du ressaut a été considérée comme la hauteur de l'ouverture du convergent. Or, nous avons constaté lors du déroulement des essais que le pied du ressaut ne se trouve pas juste à l'ouverture du convergent, mais il se trouve à une distance de 5 à 10 cm

de l'ouverture du convergent. Ce qui nous a conduit à admettre une erreur absolue $\Delta h_1 = 1$ mm sur h_1 .

VIII.6.1.4 Erreurs relatives commises sur le calcul du nombre de Froude

En s'appuyant sur la relation universelle (8.13) et en vertu du théorème des erreurs relatives, l'erreur relative commise sur le calcul du nombre de Froude expérimental s'écrit :

$$\frac{\Delta F_{1\text{exp}}}{F_{1\text{exp}}} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{5}{2} \frac{\Delta h_1}{h_1} \quad (8.29)$$

En remplaçant la relation (8.26) dans la relation (8.29) et en négligeant le paramètre $\Delta m/m$, pour les raisons citées plus haut, on obtient :

$$\frac{\Delta F_{1\text{exp}}}{F_{1\text{exp}}} = \frac{1}{2} \left(3 \frac{\Delta h}{h} + 5 \frac{\Delta h_1}{h_1} \right) \quad (8.30)$$

Ainsi, il apparaît donc que l'erreur relative commise sur l'évaluation expérimentale du nombre de Froude $F_{1\text{exp}}$ est fonction de deux paramètres ainsi que leurs erreurs absolues. Ces paramètres sont la hauteur initiale du ressaut h_1 et la hauteur déversante h de l'écoulement franchissant le déversoir.

Les hauteurs h_1 utilisées dans les mesures sont 2,5 ; 3,4 ; 4 ; 4,4 et 5 cm. Donc, les erreurs relatives commises sur h_1 sont respectivement : $\Delta h_1/h_1 = 4 ; 2,94 ; 2,5 ; 2,27$ et 2 %. Les erreurs relatives commises sur la mesure de la hauteur h sont représentées dans le tableau 8.3. Le tableau 8.3 montre les valeurs des erreurs relatives commises sur le calcul des nombres de Froude $F_{1\text{exp}}$ pour chaque hauteur initiale h_1 et ainsi que pour chaque hauteur déversante h . Ce tableau indique que l'erreur relative commise sur $F_{1\text{exp}}$ est telle que :

$$8,52 \% < \Delta F_{1\text{exp}}/F_{1\text{exp}} < 16,88 \%$$

Tableau 8.3 : Valeurs de l'erreur relative $\Delta F_{1exp}/F_{1exp}$ en (%)

| h_1 (cm) | $\Delta h_1/h_1$ (%) | h (cm) | $\Delta h/h$ (%) | $\Delta F_{1exp}/F_{1exp}$ (%) | h_1 (cm) | $\Delta h_1/h_1$ (%) | h (cm) | $\Delta h/h$ (%) | $\Delta F_{1exp}/F_{1exp}$ (%) |
|------------|----------------------|----------|------------------|--------------------------------|------------|----------------------|----------|------------------|--------------------------------|
| 5 | 2 | 4,13 | 4,85 | 12,27 | 4 | 2,5 | 4,84 | 4,13 | 12,44 |
| 5 | 2 | 4,43 | 4,51 | 11,77 | 4,4 | 2,27 | 5,83 | 3,43 | 10,83 |
| 4,4 | 2,27 | 3,59 | 5,57 | 14,03 | 5 | 2 | 7,21 | 2,77 | 9,16 |
| 5 | 2 | 4,62 | 4,33 | 11,49 | 4 | 2,5 | 5,25 | 3,81 | 11,97 |
| 5 | 2 | 4,73 | 4,23 | 11,35 | 5 | 2 | 7,64 | 2,62 | 8,93 |
| 4,4 | 2,27 | 3,86 | 5,18 | 13,46 | 5 | 2 | 7,83 | 2,55 | 8,83 |
| 5 | 2 | 5,12 | 3,91 | 10,86 | 5 | 2 | 7,92 | 2,52 | 8,79 |
| 4,4 | 2,27 | 4,21 | 4,75 | 12,80 | 4 | 2,5 | 5,53 | 3,62 | 11,68 |
| 4 | 2,5 | 3,64 | 5,49 | 14,49 | 4,4 | 2,27 | 6,65 | 3,01 | 10,19 |
| 5 | 2 | 5,32 | 3,76 | 10,63 | 5 | 2 | 8,51 | 2,35 | 8,52 |
| 4,4 | 2,27 | 4,63 | 4,32 | 12,16 | 4,4 | 2,27 | 7,28 | 2,75 | 9,80 |
| 4 | 2,5 | 4,02 | 4,98 | 13,72 | 4 | 2,5 | 6,23 | 3,21 | 11,06 |
| 4 | 2,5 | 4,15 | 4,82 | 13,49 | 4 | 2,5 | 6,42 | 3,12 | 10,92 |
| 4,4 | 2,27 | 4,94 | 4,05 | 11,75 | 4 | 2,5 | 8,04 | 2,49 | 9,98 |
| 5 | 2 | 6,35 | 3,15 | 9,73 | 3,4 | 2,94 | 6,31 | 3,17 | 12,10 |
| 4 | 2,5 | 4,42 | 4,52 | 13,03 | 2,5 | 4 | 4,36 | 4,59 | 16,88 |
| 4,4 | 2,27 | 5,25 | 3,81 | 11,40 | | | | | |

Le tableau 8.4 représenté ci-dessous montre que la gamme des nombres de Froude incident expérimentale est suffisamment large tel que $2,53 < F_{1exp} < 15,58$.

Tableau 8.4 : Valeurs de F_{1exp} (relation 8.13) et les erreurs relatives commises sur F_{1exp} en (%) (relation 8.30).

| | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| F_{1exp} | 2,53 | 2,82 | 2,83 | 3,01 | 3,11 | 3,16 | 3,5 | 3,60 | 3,67 | 3,72 | 4,15 |
| $\Delta F_{1exp}/F_{1exp}$ (%) | 12,27 | 11,77 | 14,03 | 11,49 | 11,35 | 13,46 | 10,86 | 12,80 | 14,49 | 10,64 | 12,16 |
| F_{1exp} | 4,26 | 4,46 | 4,57 | 4,84 | 4,91 | 5,00 | 5,63 | 5,86 | 5,86 | 6,35 | 6,39 |
| $\Delta F_{1exp}/F_{1exp}$ (%) | 13,72 | 13,49 | 11,75 | 9,73 | 13,03 | 11,40 | 12,44 | 10,83 | 9,16 | 11,97 | 8,93 |
| F_{1exp} | 6,62 | 6,75 | 6,87 | 7,14 | 7,51 | 8,16 | 8,22 | 8,60 | 12,04 | 12,59 | 15,58 |
| $\Delta F_{1exp}/F_{1exp}$ (%) | 8,83 | 8,79 | 11,68 | 10,19 | 8,524 | 9,80 | 11,06 | 10,92 | 9,98 | 12,10 | 16,88 |

VIII.7 Comparaison du nombre de Froude expérimental et celui théorique

VIII.7.1 Ecart relatif entre le nombre de Froude expérimental et théorique

Les écarts relatifs entre les nombres de Froude expérimental F_{1exp} et les nombres de Froude théorique $F_{1thé}$ sont calculés afin d'examiner la validité de la relation théorique générale (8.16) issue de notre développement théorique. Les valeurs de F_{1exp} sont calculées par la relation (8.13) en se basant sur les données expérimentales. Les valeurs de $F_{1thé}$ sont calculées par la relation (8.16) en se basant sur ces mêmes données expérimentales qui ont été déjà exposés dans l'étude expérimentale.

Tableau 8.5 : Valeurs de Y et S expérimentales ayant servi de base au calcul de $F_{1thé}$ théorique selon la relation (8.16).

| | | | | | | | | | | | |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|-------|
| Y | 1,12 | 1,12 | 1,62 | 1,07 | 0,98 | 1,57 | 0,9 | 1,56 | 1,46 | 0,92 | 1,59 |
| S | 0,76 | 0,88 | 0,86 | 0,98 | 1,24 | 1 | 1,5 | 1,11 | 0,95 | 1,6 | 1,41 |
| $F_{1thé}$ | 2,38 | 2,6 | 3,42 | 2,71 | 3,06 | 3,6 | 3,45 | 3,82 | 3,292 | 3,69 | 4,49 |
| Y | 1,41 | 1,5 | 1,25 | 1,08 | 1,34 | 1,22 | 1,4 | 1,39 | 1,28 | 1,57 | 1,06 |
| S | 1,1 | 1,23 | 1,7 | 1,8 | 1,55 | 1,82 | 1,88 | 2,05 | 2,1 | 2 | 2,32 |
| $F_{1thé}$ | 3,51 | 3,92 | 4,47 | 4,36 | 4,31 | 4,66 | 5,13 | 5,5 | 5,40 | 5,79 | 5,48 |
| Y | 1,15 | 1 | 1,59 | 1,32 | 1,35 | 1,64 | 1,5 | 1,38 | 2,03 | 1,65 | 2,34 |
| S | 2,46 | 2,7 | 2,25 | 2,39 | 2,8 | 2,64 | 2,63 | 2,9 | 3,5 | 3,41 | 4,64 |
| $F_{1thé}$ | 5,99 | 6,27 | 6,44 | 6,16 | 7,26 | 7,52 | 7,16 | 7,57 | 10,89 | 9,62 | 15,31 |

Le tableau 8.5 montre les données expérimentales ayant servi de base au calcul du nombre de Froude théorique $F_{1thé}$ en se basant sur la relation (8.16). Ces données expérimentales sont : le rapport des hauteurs conjuguées Y et la hauteur relative S des marches positives.

Tableau 8.6 : écarts relatifs en (%) entre F_{1exp} expérimental et $F_{1thé}$ théorique.

| | | | | | | | | | |
|------------------------------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| F_{1exp} | 2,54 | 2,82 | 2,83 | 3,01 | 3,11 | 3,16 | 3,50 | 3,60 | 3,67 |
| $F_{1thé}$ | 2,38 | 2,60 | 3,42 | 2,71 | 3,06 | 3,60 | 3,45 | 3,82 | 3,29 |
| $(F_{1exp}-F_{1thé})/F_{1exp}(\%)$ | 6,02 | 7,89 | 20,64 | 9,89 | 1,63 | 14,14 | 1,35 | 6,00 | 10,29 |
| F_{1exp} | 3,72 | 4,15 | 4,26 | 4,46 | 4,57 | 4,84 | 4,91 | 5,00 | 5,63 |
| $F_{1thé}$ | 3,69 | 4,49 | 3,511 | 3,93 | 4,47 | 4,37 | 4,31 | 4,66 | 5,13 |
| $(F_{1exp}-F_{1thé})/F_{1exp}(\%)$ | 0,64 | 8,16 | 17,49 | 12,01 | 2,17 | 9,77 | 12,32 | 6,80 | 8,86 |
| F_{1exp} | 5,86 | 5,86 | 6,35 | 6,39 | 6,62 | 6,75 | 6,87 | 7,14 | 7,51 |
| $F_{1thé}$ | 5,50 | 5,40 | 5,79 | 5,48 | 5,99 | 6,27 | 6,44 | 6,16 | 7,26 |
| $(F_{1exp}-F_{1thé})/F_{1exp}(\%)$ | 6,04 | 7,88 | 8,84 | 14,18 | 9,57 | 7,10 | 6,28 | 13,81 | 3,32 |
| F_{1exp} | 8,18 | 8,22 | 8,60 | 12,04 | 12,59 | 15,58 | | | |
| $F_{1thé}$ | 7,52 | 7,16 | 7,57 | 10,89 | 9,62 | 15,31 | | | |
| $(F_{1exp}-F_{1thé})/F_{1exp}(\%)$ | 8,02 | 12,93 | 11,97 | 9,55 | 23,56 | 1,70 | | | |

D'après les résultats regroupés dans le tableau 8.6, on remarque que certains écarts relatifs entre les valeurs théoriques et expérimentales du nombre de Froude sont assez élevés. Ces écarts peuvent paraître excessifs, mais compte tenu des erreurs relatives regroupées au tableau 8.3, occasionnées lors des mesures expérimentales et du degré de conformité des hypothèses d'application de l'équation de la quantité de mouvement, les écarts relatifs sur le nombre de Froude F_1 nous semblent tout à fait justifiés. On peut donc conclure à la validité de la relation théorique (8.16) proposée. Cependant, celle-ci ne serait fiable que si elle est corrigée par les mesures expérimentales.

VIII.7.2 Correction de la relation théorique par les mesures expérimentales

La figure 8.9 représente graphiquement la variation des nombres de Froude expérimental F_{1exp} en fonction de ceux théorique $F_{1thé}$, en vertu des données du tableau 8.6. Cette figure dénote un léger décalage du nuage de points par rapport à la première bissectrice au fur et à mesure que le nombre de Froude incident augmente. Ceci a été justifié au sous titre précédent. En effet, ce décalage est attribué en grande partie à l'hypothèse de départ dans laquelle on a supposé que la répartition des pressions est hydrostatique.

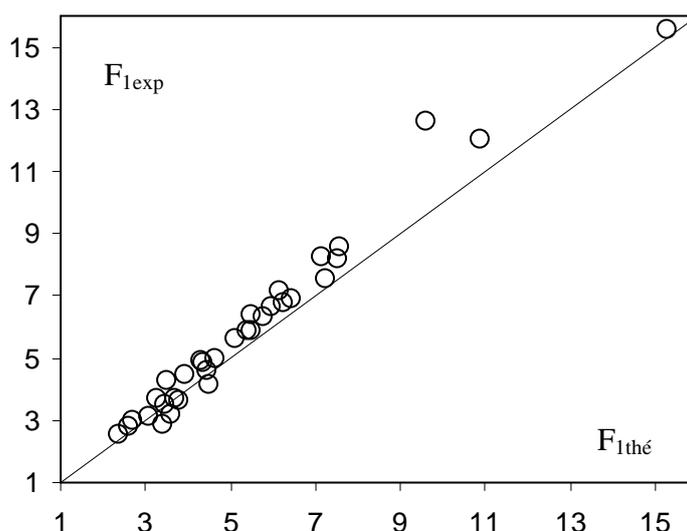


Figure 8.9 : Représentation graphique des nombres de Froude expérimental (F_{1exp}) et théorique ($F_{1thé}$). (—) Première bissectrice.

Pour palier à cet écart, nous proposons un ajustement de la relation théorique par la méthode des moindres carrés linéaires, en se basant sur les résultats expérimentaux.

La figure 8.10, montre un ajustement du nuage de points liant le nombre de Froude expérimental et celui théorique. La relation obtenue est une droite passant par l'origine de pente égale à 1,082 :

$$F_{1exp} = 1,082 F_{1thé} \quad (8.31)$$

La relation théorique (8.16) devient alors après correction :

$$F_1^2 = 0,78 \frac{Y(Y+2S)}{Y(Y+2S)-1} [3YS(Y+S) + Y^3 + S^3 - 1] \quad (8.32)$$

La relation (8.21) devient à son tour comme suit :

$$Y = \frac{0,474}{S^{0,26}} F_1 - 0,706S + 0,421 \quad (8.33)$$

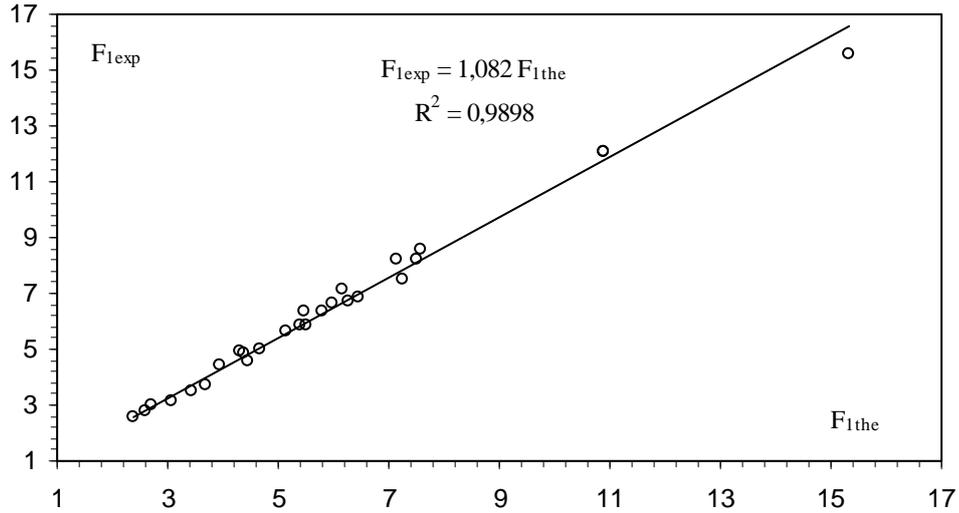


Figure 8.10 : Correction du nombre de Froude théorique par les données expérimentales.

VIII.8 Conclusion

Nous avons exposé dans cette partie de l'étude un développement théorique visant à exprimer d'une manière pratique la relation fonctionnelle $f(F_1, Y, S) = 0$ pour le ressaut hydraulique de type A forcé par marche positive évoluant dans un canal de section droite triangulaire. Cette approche a mené à établir une relation théorique. Ceci a été rendu possible par l'application de l'équation de la quantité de mouvement entre les sections aval et amont du ressaut hydraulique.

Notons que la relation obtenue (8.16) a pour but d'évaluer le rapport des hauteurs conjuguées $Y = h_2/h_1$ tout en connaissant le nombre de Froude F_1 et la hauteur relative S de la marche positive. Connaissant Y , on peut déterminer la hauteur h_2 à l'amont du ressaut puisque la hauteur du pied du ressaut h_1 est toujours connue. Pour $S = 0$, la relation (8.16) conduit à la relation (8.17) du ressaut hydraulique classique évoluant dans un canal triangulaire. Cette dernière considération confirme en quelque sorte la validité du développement théorique entrepris. Analytiquement, la relation générale (8.16) se présente sous une forme implicite vis à vis du rapport Y des hauteurs conjuguées et son application nécessite par conséquent l'utilisation d'un procédé itératif. Cette considération nous a conduit à proposer de remplacer la relation (8.16) par une relation explicite (8.21) permettant la détermination aisée du rapport des hauteurs conjuguées Y en fonction du nombre de Froude F_1 et de la hauteur relative S de la marche positive.

L'approche théorique proposée a fait l'objet d'une étude comparative avec les résultats expérimentaux obtenus sur un modèle réduit physique. En se basant sur le théorème des erreurs relatives, cette étude comparative avait pour but donc de valider l'approche théorique

proposée. Le calcul d'erreur a eu pour objectif la détermination des erreurs relatives commises sur la mesure du nombre de Froude expérimental $F_{1\text{exp}}$. Le calcul d'erreur sur $F_{1\text{exp}}$ a fait, en suite, l'objet d'une étude comparative avec les écarts relatifs entre les valeurs du nombre de Froude expérimental, déterminées par application de la relation (8.13), et les valeurs du nombre de Froude théorique, déterminées par application de la relation générale (8.16). Un léger décalage a été alors perçu. La relation (8.16) est devenue plus fiable lorsqu'elle a été corrigée par les mesures expérimentales, pour former la relation (8.32). Cette même correction a été appliquée également à la relation (8.21) pour aboutir enfin à l'expression (8.33).