
Stabilité et stabilisation des modèles flous de Takagi-Sugeno

2.1. Introduction.....	20
2.2. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno.....	20
2.2.1. Stabilité quadratique.....	20
2.2.2. Stabilité non quadratique.....	22
2.3. Stabilisation des modèles Takagi-Tugeno.....	25
2.3.1. Stabilisation des modèles TS continus.....	25
2.3.2. Stabilisation des modèles TS discrets.....	30
2.3.3. Conditions de stabilité relâchées.....	31
2.4. Observateurs flous de Takagi-Sugeno.....	34
2.4.1. Cas des variables de prémisse mesurables.....	35
2.4.2. Cas des variables de prémisse non mesurables.....	36
2.5. Conclusion.....	42

2.1. Introduction

Depuis plusieurs années de nombreux travaux se sont intéressés à la stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires décrits par des modèles flous de Takagi-Sugeno. L'analyse de stabilité des modèles flous est souvent étudiée par la technique de Lyapunov quadratique qui impose des exigences restrictives et donne des conditions de stabilité suffisantes. La stabilité dépend de l'existence d'une matrice commune, symétrique et définie positive, qui garantit la stabilité de tous les modèles locaux. Ces conditions de stabilité peuvent être exprimées en utilisant des inégalités linéaires matricielles (LMI).

Dans ce chapitre, nous présentons quelques théorèmes donnant les conditions suffisantes de stabilité et stabilisation des modèles flous de Takagi-Sugeno. L'approche proposée tout au long de ce chapitre repose sur les fonctions de Lyapunov. Il s'agit de chercher une matrice symétrique et définie positive et sa fonction de Lyapunov associée telles que certaines conditions simples garantissent les propriétés de stabilité.

2.2. Stabilité des modèles Takagi-Sugeno

L'étude de la stabilité des modèles Takagi-Sugeno s'effectue principalement en utilisant la méthode directe de Lyapunov. Cette méthode implique le choix d'une fonction candidate de Lyapunov qui est le premier élément dans l'étude de la stabilité.

2.2.1. Stabilité quadratique

Les modèles flous de Takagi-Sugeno sont composés d'un ensemble de modèles linéaires interconnectés par des fonctions non linéaires vérifiant la propriété de somme convexe. Ils peuvent s'écrire en boucle ouverte sous la forme suivante :

$$\delta x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (2.1)$$

Dans cette section, nous présentons les conditions suffisantes de stabilité quadratique utilisant l'approche de Lyapunov.

La fonction candidate de Lyapunov la plus couramment utilisée est définie par :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t), \quad P = P^T > 0 \quad (2.2)$$

a) Cas des modèles TS continu

Le modèle de Takagi-Sugeno en régime libre dans le cas continu est :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (2.3)$$

La stabilité quadratique s'étudie en calculant la dérivée de la fonction (2.2) :

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) = \frac{d}{dt} (x^T(t) P x(t)) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) \quad (2.4)$$

De (2.3) et (2.4) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x(t)) &= \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right)^T P x(t) + x^T(t) P \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right) \\ &= x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ A_i^T P + P A_i \} \right) x(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Puisque les fonctions h_i sont toujours positives, l'étude de la stabilité quadratique revient donc à résoudre le problème résumé dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 : *Le modèle flou continu (2.3) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T > 0$ qui satisfait la condition suivante :*

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (2.6)$$

b) Cas modèles TS discret

Le modèle de Takagi-Sugeno en régime libre dans le cas discret est :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \quad (2.7)$$

La stabilité quadratique s'étudie en calculant la variation de la fonction (2.2)

$$\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t)) = x^T(t+1) P x(t+1) - x^T(t) P x(t) \quad (2.8)$$

De (2.7) et (2.8) on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t)) &= \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right)^T P \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i x(t) \right) - x^T(t) P x(t) \\ &= x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) A_i^T P A_i - P \right) x(t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'étude de la stabilité quadratique revient à résoudre le problème résumé dans le théorème suivant :

Théorème 2.2 : *Le modèle flou discret (2.7) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T > 0$ qui satisfait la condition suivante :*

$$A_i^T P A_i - P < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (2.10)$$

2.2.2. Stabilité non quadratique

Les conditions nécessaires (2.6) sur l'existence d'une matrice symétrique définie positive P commune aux r modèles locaux montre clairement le conservatisme de la méthode. C'est la raison pour laquelle certains systèmes sont stables alors qu'il n'existe pas de matrice symétrique définie positive commune.

Dans cette section nous étudions la stabilité d'un système TS par l'approche non quadratique où la fonction de Lyapunov du modèle global, construite par agrégation de fonctions de Lyapunov quadratiques relatives à chaque modèle local, est dépendante de l'état.

Un certain nombre de travaux [25] [27] proposent également des fonction de Lyapunov non quadratique (dite aussi polyquadratique) de la forme :

$$V(x(t)) = x^T(t) P(x(t)) x(t) \quad (2.11)$$

avec la matrice symétrique définie positive.

$$P(x(t)) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) P_i, \quad P_i = P_i^T > 0 \quad (2.12)$$

et $h_i(z(t))$ a les mêmes propriétés des fonctions d'activation (1.7), et aussi continûment dérivable.

On peut vérifier que la fonction (2.11) est une fonction candidate de Lyapunov :

$$c_1 \|x(t)\|^2 \leq V(x(t)) \leq c_2 \|x(t)\|^2 \quad (2.13)$$

avec

$$c_1 = \max_{i=1,r} (\lambda_{\min}(P_i)) > 0, \quad c_2 = \min_{i=1,r} (\lambda_{\max}(P_i)) > 0 \quad (2.14)$$

On note que l'utilisation de ce type de fonctions suppose que les fonctions d'appartenance du modèle TS sont dérivables et que leurs dérivées sont bornées.

Considérons la dérivée, par rapport au temps, de la fonction candidate de Lyapunov (2.11) :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P(x(t)) x(t) + x^T(t) P(x(t)) \dot{x}(t) + x^T(t) \dot{P}(x(t)) x(t) \quad (2.15)$$

On a :

$$\dot{P}(x(t)) = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho}(z(t))P_{\rho}, \quad P_{\rho} = P_{\rho}^T > 0 \quad (2.16)$$

En remplaçant (2.15) dans (2.16).

$$\dot{V}(x(t)) = \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho}(z(t))x^T(t)P_{\rho}x(t) + \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\{\dot{x}^T(t)P_i x(t) + x^T(t)P_i \dot{x}(t)\} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho}(z(t))x^T(t)P_{\rho}x(t) \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)\{A_j^T P_i + P_i A_j\}x(t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

On peut écrire (2.18) comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho}(z(t))x^T(t)P_{\rho}x(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t)\{A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i\}x(t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Supposons que les dérivées des fonctions d'appartenance sont bornées par :

$$\|\dot{h}_{\rho}(z(t))\| \leq \phi_{\rho}, \quad \rho = 1, 2, \dots, r \quad (2.20)$$

L'inégalité (2.20) implique que :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^T(t) \\ &\times \left\{ \sum_{\rho=1}^r \phi_{\rho} P_{\rho} + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) \right\} x(t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le théorème 2.3 donne les conditions assurant la stabilité du système TS (2.3).

Théorème 2.3 : *Supposons que les dérivées des fonctions d'appartenance sont bornées par (2.20). Le modèle flou (2.3) est stable s'il existe des matrices symétriques définies positives $P_i = P_i^T > 0, i = 1, 2, \dots, r$ telles que :*

$$\sum_{\rho=1}^r \phi_{\rho} P_{\rho} + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) < 0, \quad i \leq j \quad (2.22)$$

On note qu'il est difficile de déterminer les bornes des dérivées des fonctions d'appartenance ϕ_{ρ} . Dans ce cas les conditions précédentes peuvent être relâchées en

présentant une approche étendue de stabilité en considérant la propriété des dérivées des fonctions d'appartenance suivante [27].

$$\sum_{\rho=1}^r \dot{h}_{\rho}(z(t)) = 0 \quad \forall z(t) \quad (2.23)$$

Selon la propriété, nous avons :

$$\dot{h}_r(z(t)) = -\sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_{\rho}(z(t)) \quad (2.24)$$

Alors (2.19) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_{\rho}(z(t)) x^T(t) P_{\rho} x(t) + \dot{h}_r(z(t)) x^T(t) P_r x(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \{A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i\} x(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

En remplaçant (2.24) dans (2.25) :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{\rho=1}^{r-1} \dot{h}_{\rho}(z(t)) x^T(t) (P_{\rho} - P_r) x(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \{A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i\} x(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

L'inégalité (2.20) implique que :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x^T(t) \\ &\times \left\{ \sum_{\rho=1}^{r-1} \phi_{\rho} (P_{\rho} - P_r) + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) \right\} x(t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Le théorème 2.4 [27] donne les nouvelles conditions qui assurent la stabilité du système TS (2.3).

Théorème 2.4 : Supposons que les dérivées des fonctions d'appartenance sont bornées par (2.20). Le modèle flou (2.3) est stable s'il existe des matrices symétriques définies positives $P_i = P_i^T > 0, i = 1, 2, \dots, r$ telles que :

$$P_{\rho} \geq P_r, \quad \rho = 1, 2, \dots, r-1 \quad (2.28)$$

$$\sum_{\rho=1}^{r-1} \phi_{\rho} (P_{\rho} - P_r) + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) < 0, \quad i \leq j \quad (2.29)$$

2.3. Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno

L'une des premières idées de stabilisation de modèles flous de Takagi-Sugeno consiste à utiliser des retours d'état linéaires. Ces derniers ont vite été supplantés par une loi de commande, qui permet de prendre en compte les non linéarités des modèles flous, connue sous le nom de PDC (Parallel Distributed Compensation).

Le principe de cette méthode illustrée par la Figure 2.1, est de construire un régulateur par retour d'état pour chaque modèle local. La loi de commande globale est obtenue par l'interpolation des lois de commande linéaires locales.

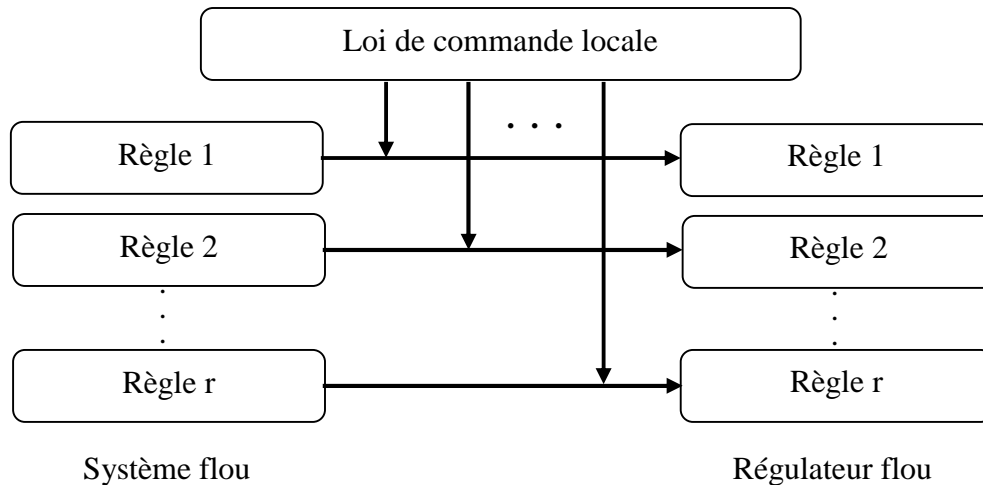


Figure 2.1 : Principe de la commande PDC

L'avantage majeur de cette loi de commande est de respecter la même structure de découpage des non linéarités que celle utilisée pour l'obtention du modèle TS. Dans le cas où le modèle TS est obtenu par découpage exact, cette loi de commande est donc valable quelque soit le point du sous espace compact de l'espace d'état [15].

2.3.1. Stabilisation des modèles TS continus

Soit le modèle TS continu suivant en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.30)$$

Les règles du contrôleur PDC peuvent être écrites sous la forme :

$$\text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et...et } z_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors } u(t) = -K_i x(t) \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.31)$$

La loi de commande PDC globale obtenue par interpolation des lois de commande linéaires locales est de la forme :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) \quad (2.32)$$

où $K_i : i = 1, \dots, r$ est le gain de retour local relatif au $i^{\text{ème}}$ modèle, avec les mêmes $h_i(z(t))$ que ceux du modèle flou.

En combinant (2.30) et (2.32). La représentation du modèle global en boucle fermée avec une loi de commande PDC est donnée par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad (2.33)$$

Théorème 2.5 : *Le modèle flou continu (2.30) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T > 0$ qui satisfait les inégalités matricielles suivantes :*

$$(A_i - B_i K_j)^T P + P(A_i - B_i K_j) < 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, r \quad (2.34)$$

On peut écrire (2.33) comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) h_i(z(t)) G_{ii} x(t) + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) x(t) \quad (2.35)$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad i < j \leq r \quad (2.36)$$

Théorème 2.6 : *Le modèle flou continu (2.30) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T > 0$ qui satisfait les conditions suivantes :*

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.37)$$

$$\left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right)^T P + P \left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right) \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (2.38)$$

On remarque que l'inégalité du théorème 2.6 n'est pas linéaire en les variables P et K_i , en multipliant l'inégalité (2.37) et (2.38) à gauche et à droite par P^{-1} , et en définissant une nouvelle variable $X = P^{-1}$, puis en utilisant le changement de variable $M_i = K_i X$, $i = 1, \dots, r$, on obtient les LMIs suivantes par rapport aux variables X et M_i :

$$\begin{cases} X > 0 \\ XA_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0 & \forall i = 1, \dots, r \\ X(A_i + A_j)^T + (A_i + A_j)X - (B_i M_j + B_j M_i) - (B_i M_j + B_j M_i)^T < 0 & i < j \leq r \end{cases} \quad (2.39)$$

Théorème 2.7 : Soient le modèle flou continu (2.30), la loi de commande PDC (2.32). La boucle fermée est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique définie positive $X = X^T > 0$ et des matrices M_i , $i = 1, \dots, r$ telles que les LMIs définis en (2.39) soient vérifiées. Les gains de retour d'état sont donnés par :

$$K_i = M_i X^{-1}, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.40)$$

Exemple 2.1 :

On considère le système mécanique non linéaire masse-ressort-amortisseur (figure 2.2) qui peut être représenté par le système d'équations différentielles suivantes [28] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.1125x_1(t) - 0.02x_2(t) - 0.67x_2^3(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{cases} \quad (2.41)$$

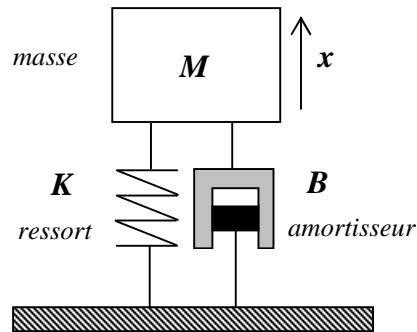


Figure 2.2 : Système masse-ressort-amortisseur

où $x_2(t)$ est le déplacement du ressort et $x_1(t) = \dot{x}_2(t)$. Le terme $-0.67x_2^3(t)$ représente la non linéarité du ressort, dans cet exemple, nous supposons que $x_2(t) \in [-1, 1.5]$, la limite inférieure est la longueur minimum que le ressort peut prendre, cette limite non linéaire peut être exprimée selon le lemme 1.1 comme suit :

$$-0.67x_2^3(t) = -w_1(x_2(t))(0 \cdot x_2(t)) - w_2(x_2(t))(1.5075 \cdot x_2(t)) \quad (2.42)$$

avec:

$$w_1(x_2(t)) = 1 - \frac{x_2^2(t)}{2.25}, \text{ et } w_2(x_2(t)) = \frac{x_2^2(t)}{2.25} \quad (2.43)$$

Le système masse-ressort-amortisseur peut être modélisé par le modèle flou de Takagi-Sugeno suivant :

Les règles du modèle :

Règle1: Si $x_1(t)$ est F_1^1 Alors $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$

Règle2: Si $x_1(t)$ est F_1^2 Alors $\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t)$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1125 & -0.02 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.1125 & -1.5275 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Pour stabiliser le système, on utilise un contrôleur PDC avec les règles suivantes :

Règle1: Si $x_1(t)$ est F_1^1 Alors $u(t) = -K_1x(t)$

Règle2: Si $x_1(t)$ est F_1^2 Alors $u(t) = -K_2x(t)$

La résolution des LMIs (2.39) pour ce système a donné les résultats suivants :

$$P = \begin{bmatrix} 7.2697 & 5.5713 \\ 5.5713 & 7.2697 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$K_1 = [3.7565 \quad 3.9451] \quad K_2 = [3.7565 \quad 2.4376] \quad (2.46)$$

Les figures 2.3, 2.4 et 2.5 présentent les réponses $x_1(t)$, $x_2(t)$ et la commande $u(t)$ du système commandé par une commande PDC pour l'état initial $x(0) = [0.8, 0]^T$.

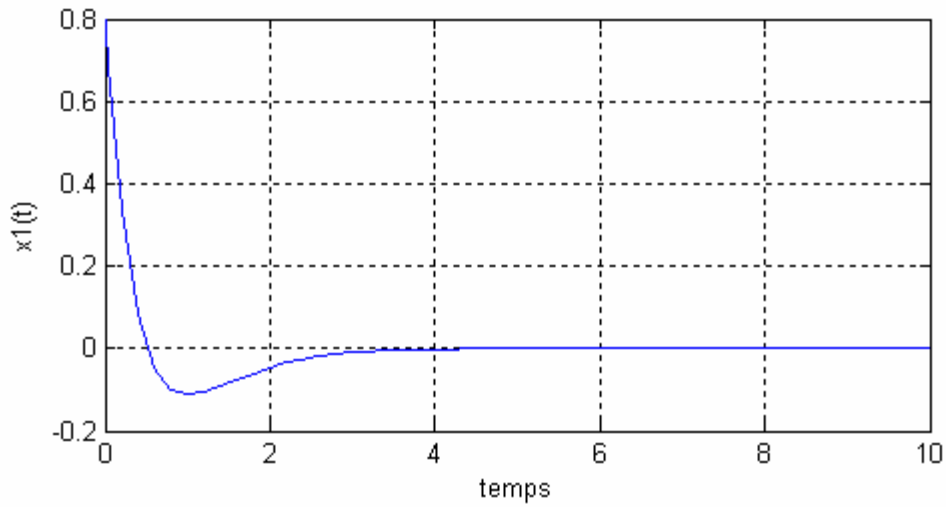


Figure 2.3 : Evolution de l'état $x_1(t)$

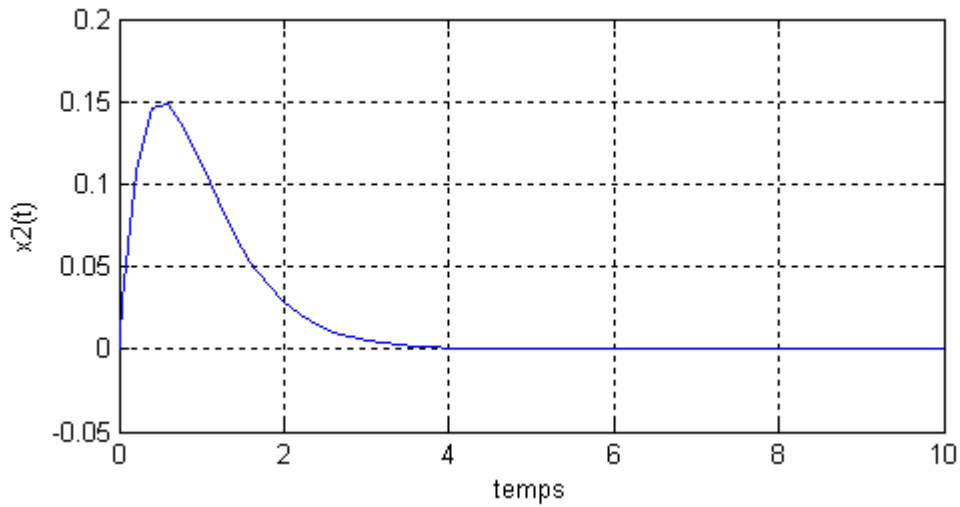


Figure 2.4 : Evolution de l'état $x_2(t)$

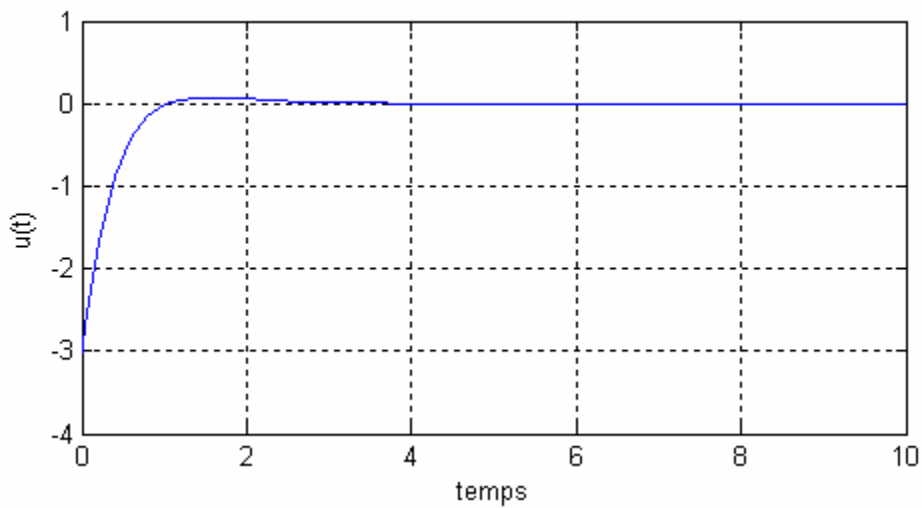


Figure 2.5 : Evolution de la commande $u(t)$

2.3.2. Stabilisation des modèles TS discrets

Soit le modèle TS discret en boucle fermée suivant :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \quad (2.47)$$

La loi de commande PDC globale est :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i x(t) \quad (2.48)$$

On remplace l'équation (2.48) dans l'équation (2.47), la représentation du modèle global en boucle fermée avec une loi de commande PDC est donnée par :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - B_i K_j)x(t) \quad (2.49)$$

Théorème 2.8 : *Le modèle flou discret (2.47) et globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.48), s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T > 0$ qui satisfait les inégalités matricielles suivants :*

$$(A_i - B_i K_j)^T P (A_i - B_i K_j) - P < 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, r \quad (2.50)$$

On peut écrire (2.49) comme suit :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t))h_i(z(t))G_{ii}x(t) + 2\sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)x(t) \quad (2.51)$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j \quad i < j \leq r \quad (2.52)$$

Théorème 2.9 : *Le modèle flou discret (2.47) et globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.48), s'il existe une matrice commune définie positive P qui satisfait les conditions suivantes :*

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.53)$$

$$\left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2}\right)^T P \left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2}\right) - P \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (2.54)$$

On utilise le même changement de variable que dans le cas des modèles continus. Les conditions de stabilité des modèles TS discrets dans le théorème 2.9 peuvent être réécrites sous forme de LMIs en utilisant le complément de Schur [29]:

$$\begin{aligned}
 & X > 0 \\
 & \begin{bmatrix} X & (A_i X - B M_i)^T \\ (A_i X - B M_i) & X \end{bmatrix} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \\
 & \begin{bmatrix} X & ((A_i + A_j)X - N_{ij})^T \\ (A_i + A_j)X - N_{ij} & X \end{bmatrix} < 0 \quad i < j \leq r
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Telle que N_{ij} est donnée par :

$$N_{ij} = B_i M_j + B_j M_i \tag{2.56}$$

Les gains de retour d'état peuvent être déterminés par :

$$K_i = M_i X^{-1} \quad i = 1, \dots, r \tag{2.57}$$

Le problème fondamental qui se pose lors de la synthèse de commande du type PDC est celui du conservatisme des conditions sur les gains de retour. Dans la section suivante, on présente des nouvelles conditions de stabilité, qui améliorent le conservatisme des résultats précédents.

2.3.3. Conditions de stabilité relâchées

Les conditions de stabilité obtenues dans les théorèmes précédents sont très conservatives puisqu'elles ne prennent pas en compte certaines caractéristiques des fonctions d'interpolation non linéaires, elles ne peuvent être que suffisantes. Aussi, pour obtenir ces conditions on cherche une solution à un problème d'optimisation en considérant que, pour qu'une somme soit négative, chacun des termes de cette somme doivent être négatifs alors que pour la somme entière cette condition n'est pas nécessaire. En effet, il est évidemment possible de chercher des solutions aux conditions $\delta V(x(t)) < 0$ qui autoriseraient certains termes de la somme à être positifs alors que l'ensemble restera négatif. Dans ce cas, on obtient des conditions de stabilité dites « relâchées », c'est-à-dire moins conservatives [30].

Par conséquent, dans le but d'avoir des résultats beaucoup moins conservatifs, des conditions de relaxation ont fait l'objet de plusieurs travaux notamment ceux développés dans

[23] où les auteurs se basent sur le nombre maximal de règles actives à chaque instant pour réduire le conservatisme de conditions de stabilisation. Les auteurs dans [6] s'inspirent de ces travaux, en introduisant des conditions supplémentaires. Dans [31], les auteurs proposent d'utiliser des fonctions de Lyapunov multiples pour rechercher plusieurs matrices définies positives au lieu de chercher une seule matrice commune, comme dans le cas de stabilisation par la fonction de Lyapunov quadratique. Parmi les résultats de relaxation utilisant une fonction de Lyapunov quadratique, nous pouvons citer des conditions de relaxations très pertinentes proposées dans [6] [23] et données dans le théorème suivant :

a) Cas des modèles TS continu

Théorème 2.10 [23] : *Le modèle flou continu (2.30) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice définie positive $P = P^T > 0$, et une matrice semi définie positive $Q = Q^T > 0$, vérifiant les inégalités suivantes :*

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + (s-1)Q < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.58)$$

$$\left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right)^T P + P \left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right) - Q \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (2.59)$$

où s est le nombre de règles qui peuvent être actives simultanément.

Les conditions de théorème 2.10 se réduisent à celles de théorème 2.6 lorsque $Q = 0$.

Théorème 2.11 [6] : *Le modèle flou continu (2.30) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice définie positive $P = P^T > 0$, et des matrices symétriques $Q_{ii} = Q_{ii}^T$ et des matrices $Q_{ji} = Q_{ij}^T$, qui vérifient les inégalités suivantes :*

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + Q_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.60)$$

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} + Q_{ij} \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (2.61)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \dots & Q_{rr} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.62)$$

b) Cas des modèles TS discrets

Théorème 2.12 [23] : Le modèle flou discret (2.44) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.45), s'il existe une matrice définie positive $P = P^T > 0$, et une matrice semi définie positive $Q = Q^T > 0$, qui vérifient les inégalités suivantes :

$$G_{ii}^T P G_{ii} + (s-1)Q < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.63)$$

$$\left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right)^T P \left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2} \right) - P - Q \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (2.64)$$

Avec s est le nombre de règles qui peuvent être actives simultanément.

Les conditions de théorème 2.12 se réduisent à celles de théorème 2.9 lorsque $Q = 0$.

Théorème 2.13 [6] : Le modèle discret (2.44) est globalement asymptotiquement stable via la loi de commande PDC (2.40), s'il existe une matrice définie positive $P = P^T > 0$, et des matrices symétriques $Q_{ii} = Q_{ii}^T$ et des matrices $Q_{ji} = Q_{ij}^T$, qui vérifient les inégalités suivantes :

$$G_{ii}^T P G_{ii} - P + Q_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, \dots, r \quad (2.65)$$

$$G_{ij}^T P G_{ij} - P + Q_{ij} \leq 0 \quad i < j \leq r \quad (2.66)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \dots & Q_{rr} \end{pmatrix} > 0 \quad (2.67)$$

Remarque :

1- Pour prouver les théorèmes (2.10) et (2.12) on utilise la propriété suivante:

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) - \frac{1}{r-1} \sum_{i < j}^r 2h_i(z(t))h_j(z(t)) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1, \quad h_i(z(t)) \geq 0$$

En effet, on a :

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) - \frac{1}{r-1} \sum_{i<j}^r 2h_i(z(t))h_j(z(t)) = \frac{1}{r-1} \sum_{i<j}^r \{h_i(z(t)) - h_j(z(t))\}^2 \geq 0.$$

2- La preuve des théorèmes (2.11) et (2.13) est détaillée dans l'annexe A.

2.4. Observateurs flous de Takagi-Sugeno

Dans toutes les sections précédentes nous avons considéré que les états sont disponibles pour la mesure. Cependant, on sait que la mesure de toutes les composantes du vecteur d'état n'est pas possible dans plusieurs cas pratiques. Dans ce cas on utilise des observateurs pour estimer les valeurs des états non mesurables. Les règles de l'observateur flou sont basées sur les règles du modèle flou utilisé.

Les modèles flous utilisés sont ceux décrits par (2.30) dans le cas continu, et par (2.47) dans le cas discret, les observateurs flous continus et discrets sont définis par les règles suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Si } \hat{z}_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et...et } \hat{z}_p(t) \text{ est } F_p^i \text{ alors} \\ \left\{ \begin{array}{l} \delta \hat{x}(t) = A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C_i \hat{x}(t) \end{array} \right. \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (2.68)$$

La sortie de l'observateur peut être réécrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \hat{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) \{A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + L_i (y(t) - \hat{y}(t))\} \\ \hat{y}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) C_i \hat{x}(t) \end{array} \right. \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.69)$$

où $\hat{x}(t)$ et $\hat{z}(t)$ représentent respectivement l'état estimé de l'observateur flou et le vecteur de prémisse reconstruit, et L_i les gains de l'observateur. L'erreur d'estimation d'état est définie par l'équation suivante :

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.70)$$

On distingue deux cas, le premier est le cas particulier où toutes les variables utilisées dans les prémisses sont supposées mesurables, le deuxième cas concerne le cas général, où les variables utilisées dans les prémisses ne sont pas mesurables.

2.4.1. Cas des variables de prémisses mesurables

L'expression de la loi de commande PDC peut s'écrire dans ce cas :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t))K_i x(t) \quad (2.71)$$

A partir du régulateur flou (2.71) et de l'observateur flou (2.69), nous obtenons les équations suivantes:

Cas des modèles TS continus :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\{(A_i - B_i K_j)x(t) + B_i K_j e(t)\} \quad (2.72)$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - L_i C_j)e(t) \quad (2.73)$$

Le système complet dont le vecteur d'état se compose de l'état du système et de l'erreur d'estimation, peut être décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))G_{ij}x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))G_{ii}x_a(t) + 2\sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)x_a(t) \end{aligned} \quad (2.74)$$

avec :

$$x_a(x) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \quad G_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Cas des modèles TS discrets :

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\{(A_i - B_i K_j)x(t) + B_i K_j e(t)\} \quad (2.76)$$

$$e(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - L_i C_j)e(t) \quad (2.77)$$

Le système complet dont le vecteur d'état se compose de l'état du système et de l'erreur d'estimation, peut être décrit par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_a(t+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))G_{ij}x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t))G_{ii}x_a(t) + 2\sum_{i<j}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)x_a(t) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Ainsi, la synthèse d'un tel observateur consiste en la détermination des gains locaux L_i afin d'assurer la convergence vers zéro de la dynamique de l'erreur d'estimation. Les conditions de synthèse d'un observateur flou sont duales de celles d'un contrôleur flou.

Pour tirer les conditions de stabilité, on applique les théorèmes 2.6 et 2.9 respectivement à (2.74) et (2.78).

Etant donnée que toutes les variables de prémisse sont mesurables, on peut appliquer le principe de séparation [32] (voire l'annexe B). On peut donc déterminer les gains K_i à partir des conditions du théorème 2.6 et les gains L_i à partir des mêmes conditions appliquées au problème dual, i.e ; avec $G_{ij} = A_i^T - C_j^T L_i^T$. En effet, la propriété de séparation utilisée pour les systèmes linéaires est également valide dans le cas des modèles TS dont les variables de décision sont mesurables mais n'est pas toujours trivial à déterminer [32].

2.4.2. Cas des variables de prémisse non mesurables

Dans ce cas $z_1(t), \dots, z_p(t)$ ne sont pas mesurables. L'expression de la loi de commande PDC peut s'écrire comme suite :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(\hat{z}(t)) K_i \hat{x}(t) \quad (2.79)$$

Le système augmenté peut être mis sous la forme :

Cas des modèles TS continus :

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) G_{ijs} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j^2(\hat{z}(t)) G_{ijj} x_a(t) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j<s}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) \left(\frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} \right) x_a(t) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Cas des modèles TS discrets :

$$\begin{aligned} x_a(t+1) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{s=1}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) G_{ijs} x_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j^2(\hat{z}(t)) G_{ijj} x_a(t) + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j<s}^r h_i(z(t)) h_j(\hat{z}(t)) h_s(\hat{z}(t)) \left(\frac{G_{ijs} + G_{isj}}{2} \right) x_a(t) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Avec :

$$x_a(x) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}, \quad G_{ijs} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_s & B_i K_s \\ S_{ijs}^1 & S_{ijs}^2 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

$$S_{ijs}^1 = (A_i - A_j) - (B_i - B_j)K_s + L_j(C_s - C_i) \quad (2.83)$$

$$S_{ijs}^2 = A_j - L_j C_s + (B_i - B_j)K_s \quad (2.84)$$

Pour tirer des conditions de stabilité, on applique les théorèmes 2.6 et 2.10 respectivement à (2.80) et (2.81).

Dans ce cas, le principe de séparation ainsi que les conditions relâchées ne sont plus utilisables, il est donc nécessaire de calculer les matrices de gains de commande et d'observation par itérations successives.

Exemple 2.2 :

Pour illustrer les résultats obtenus dans les paragraphes précédents on présente l'exemple du pendule inversé sur un chariot mobile (figure 2.6). Le modèle dynamique de l'ensemble chariot-pendule peut être décrit par les équations suivantes [32]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1.0}{[(M+m)(J+ml^2) - m^2l^2 \cos^2 x_1(t)]} [-f_1(M+m)x_2(t) \\ \quad - m^2l^2 x_2^2(t) \sin x_1(t) \cos x_1(t) + f_0 m l x_4(t) \cos x_1(t) \\ \quad + (M+m)mgl \sin x_1(t) - ml \cos x_1(t) u(t)] \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{1.0}{[(M+m)(J+ml^2) - m^2l^2 \cos^2 x_1(t)]} [f_1 m l x_2(t) \cos x_1(t) \\ \quad + (J+ml^2)m l x_2^2(t) \sin x_1(t) - f_0 (J+ml^2) x_4(t) \\ \quad - m^2 g l^2 \sin x_1(t) \cos x_1(t) + (J+ml^2) u(t)] \end{array} \right. \quad (2.85)$$

où $x_1(t)$ est l'angle (rad) du pendule, $x_2(t)$ est la vitesse angulaire (rad/s), $x_3(t)$ est le déplacement (m) du chariot, $x_4(t)$ est la vitesse (m/s) du chariot, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ est la constante de gravité, m est la masse (kg) du pendule, M est la masse (kg) du chariot, f_0 est le

coefficient de frottement (N/m/s) du chariot, f_1 est le coefficient de frottement (N/rad/s) du pendule, l est la distance (m) entre le centre de rotation et le centre de gravité de la tige, J est le moment d'inerté (kgm^2) du pendule autour de son centre de masse, et $u(t)$ la force (N) appliquée au chariot. Nous avons utilisé $M = 1.3282$ kg, $m = 0.22$ kg, $f_0 = 22.915$ N/m/s, $f_1 = 0.007056$ N/rad/s, $l = 0.304$ m, $J = 0.004963$ kgm^2 .

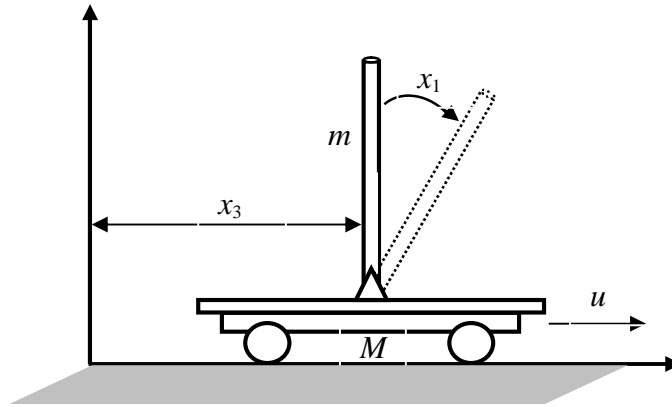


Figure 2.6 : Pendule inversé

L'objectif de la commande est d'équilibrer le pendule inversé autour de $x_1 = 0$. Pour utiliser l'approche de PDC, on doit avoir un modèle flou qui représente la dynamique du processus non linéaire. Par conséquent, nous représentons d'abord le système (2.87) par un modèle flou de Takagi-Sugeno. Pour réduire au minimum la complexité de conception, on utilise le moins de règles possibles. Nous approximons le système par les règles suivantes.

Les règles du modèle :

$$\text{R\`egle 1: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } 0 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t) \\ y_1(t) = C_1 x(t) \end{cases}$$

$$\text{R\`egle 2: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } \pm\pi/3 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t) \\ y_2(t) = C_2 x(t) \end{cases}$$

avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{43} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a'_{41} & a'_{42} & 0 & a'_{43} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ b'_2 \\ 0 \\ b'_4 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= (M+m)mgl/a, & a_{22} &= -f_1(M+m)/a, & a_{24} &= f_0ml/a \\ a_{41} &= -m^2gl^2/a, & a_{42} &= f_1ml/a, & a_{44} &= -f_0(J+ml^2)/a \\ b_2 &= -ml/a, & b_4 &= (J+ml^2)/a \\ a &= (M+m)(J+ml^2) - m^2l^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a'_{21} &= \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}(M+m)mgl/a', & a'_{22} &= -f_1(M+m)/a', & a'_{24} &= f_0ml \cos(60^\circ)/a' \\ a'_{41} &= -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}m^2gl^2 \cos(60^\circ)/a', & a'_{42} &= f_1ml \cos(60^\circ)/a', & a'_{44} &= -f_0(J+ml^2)/a' \\ b'_2 &= -ml \cos(60^\circ)/a', & b'_4 &= (J+ml^2)/a' \\ a' &= (M+m)(J+ml^2) - m^2l^2(\cos(60^\circ))^2 \end{aligned}$$

Les règles du contrôleur PDC :

Règle1: Si $x_1(t)$ est Autour de 0 Alors $u(t) = -K_1x(t)$

Règle2: Si $x_1(t)$ est Autour de $\pm\pi/3$ Alors $u(t) = -K_2x(t)$

Les règles de l'observateur :

Règle1: Si $x_1(t)$ est Autour de 0 Alors $\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_1\hat{x}(t) + B_1u(t) + L_1(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}_1(t) = C_1\hat{x}(t) \end{cases}$

Règle2: Si $x_1(t)$ est Autour de $\pm\pi/3$ Alors $\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_2\hat{x}(t) + B_2u(t) + L_2(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}_2(t) = C_2\hat{x}(t) \end{cases}$

Les fonctions d'appartenances représentées sur la figure 2.7 des règles sont :

$$w_1(x_1(t)) = \left\{ 1 - \frac{1}{1 + e^{-7(x_1(t) - \pi/6)}} \right\} \frac{1}{1 + e^{-7(x_1(t) + \pi/6)}}$$

$$w_2(x_1(t)) = 1 - h_1(x_1(t))$$

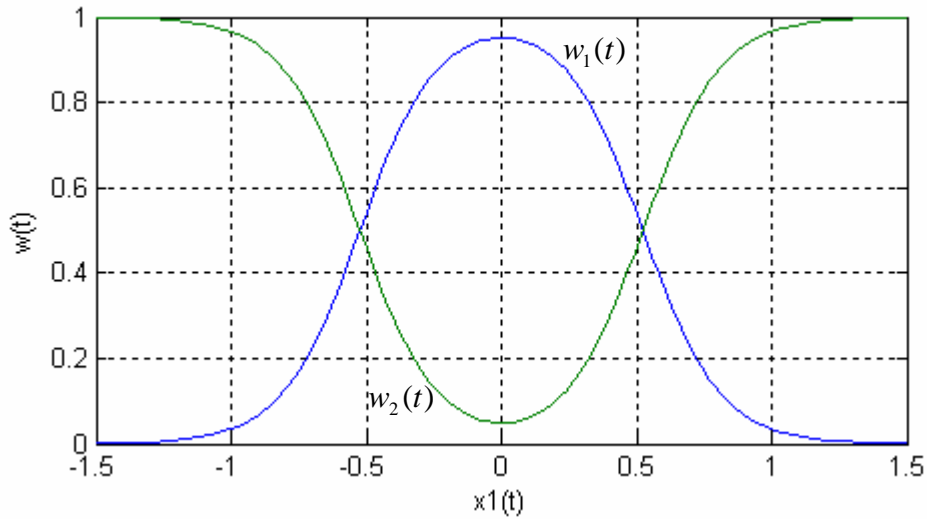


Figure 2.7 : fonction d'appartenance

La résolution des LMIs a donné les résultats suivants :

$$P_c = \begin{bmatrix} 0.3546 & 0.0697 & 0.0211 & 0.0468 \\ 0.0697 & 0.0186 & 0.0045 & 0.0124 \\ 0.0211 & 0.0045 & 0.0034 & 0.0036 \\ 0.0468 & 0.0124 & 0.0036 & 0.0110 \end{bmatrix}$$

$$P_o = \begin{bmatrix} 0.3251 & -0.0948 & 0.0087 & -0.1304 \\ -0.0948 & 0.0494 & -0.0050 & 0.0727 \\ 0.0087 & -0.0050 & 0.1334 & -0.0096 \\ -0.1304 & 0.0727 & -0.0096 & 0.3590 \end{bmatrix}$$

Les gains du contrôleur et de l'observateur sont :

$$K_1 = [-72.3182 \quad -10.6766 \quad -2.9444 \quad -29.5252]$$

$$K_2 = [-111.8125 \quad -16.7902 \quad -4.6353 \quad -33.1695]$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 44.9759 & 0.8388 \\ 139.7733 & 5.2982 \\ -0.1026 & 42.5937 \\ -12.8838 & 0.5685 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 44.4168 & 2.6327 \\ 119.0838 & 8.2127 \\ -1.9283 & 42.6123 \\ -3.8024 & 0.9267 \end{bmatrix}$$

Les figures 2.8 à 2.12 représentent les états et les états estimés $(x_1(t), \hat{x}_1(t))$, $(x_2(t), \hat{x}_2(t))$, $(x_3(t), \hat{x}_3(t))$, $(x_4(t), \hat{x}_4(t))$, et la commande $u(t)$ respectivement, avec les conditions initiales $x(0) = [-60, 0, 0, 0]^T$ et $\hat{x}(0) = [0, 0, 0, 0]^T$.

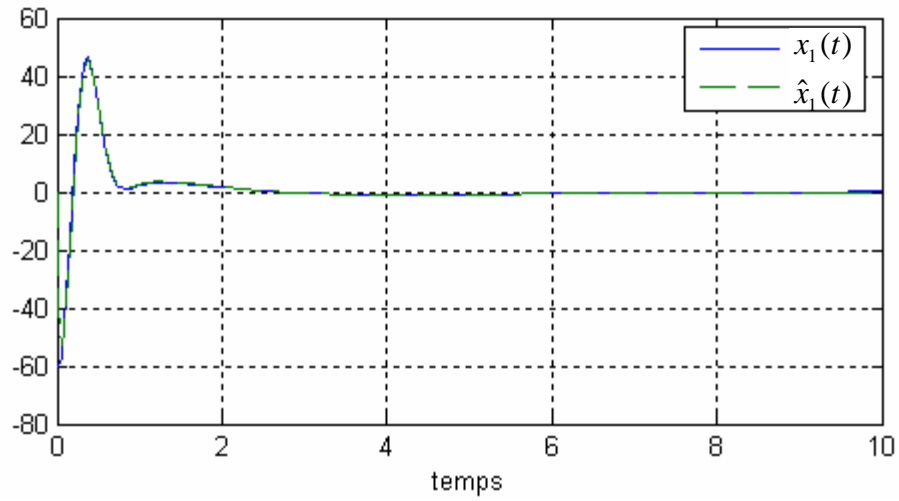


Figure 2.8 : L'état $x_1(t)$ et l'état estimé $\hat{x}_1(t)$

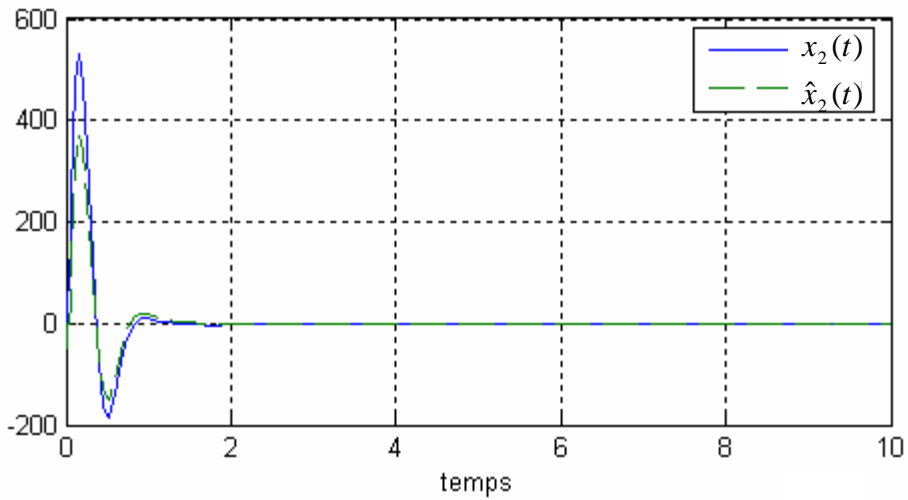


Figure 2.9 : L'état $x_2(t)$ et l'état estimé $\hat{x}_2(t)$

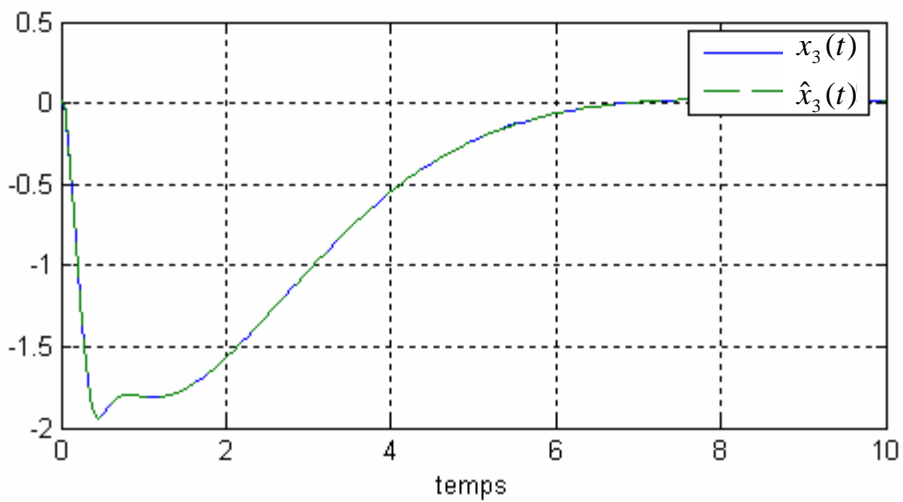
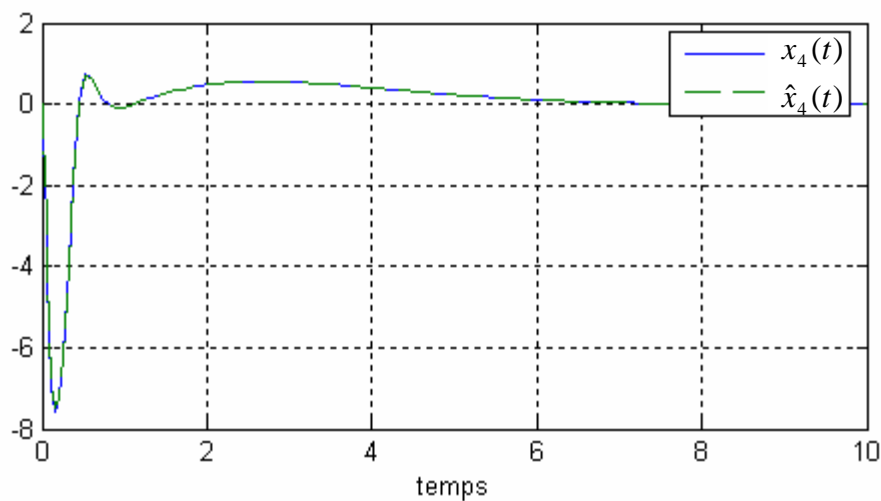
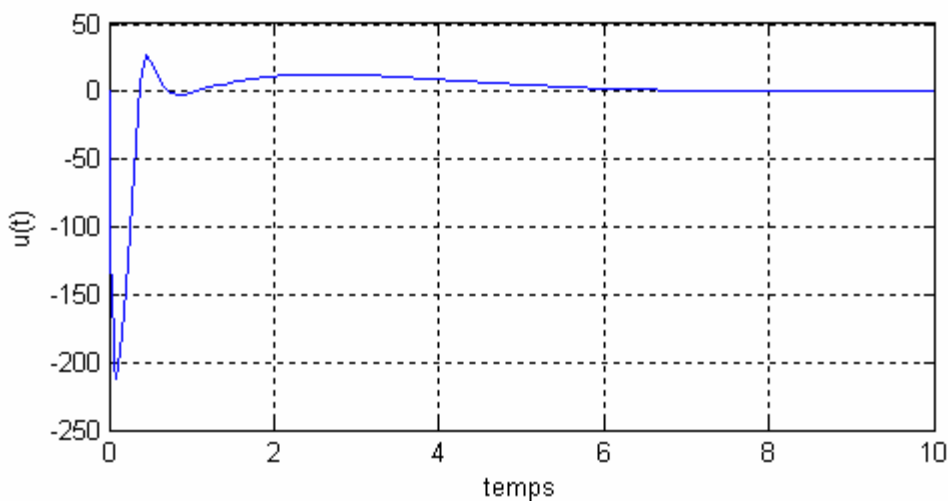


Figure 2.10 : L'état $x_3(t)$ et l'état estimé $\hat{x}_3(t)$

Figure 2.11 : L'état $x_4(t)$ et l'état estimé $\hat{x}_4(t)$ Figure 2.12 : La commande $u(t)$

2.5. Conclusion

La stabilité des modèles Takagi-Sugeno est souvent étudiée en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique en recherchant une matrice unique stabilisant simultanément chacun des modèles locaux, ce qui est souvent très conservatif.

Dans ce chapitre nous avons étudié la stabilité des modèles TS en régime libre, puis nous avons présenté les conditions de stabilisation par retour d'état via la loi de commande PDC, et dans la dernière section nous avons introduit l'observateur flou de TS pour les deux cas des variables de prémisse, mesurables et non mesurables.