
3

Stabilisation des modèles flous de Takagi-Sugeno incertains

3.1. Introduction.....	43
3.2. Modèle flou de Takagi-Sugeno incertain.....	43
3.3. Stabilisation des modèles TS incertains.....	44
3.4. Autres conditions de stabilité.....	48
3.5. Stabilisation avec taux de décroissance prédéfini	52
3.6. Placement de pôles dans des régions LMI pour des modèles TS Incertains.....	55
3.7. Commande avec observateur.....	64
3.8. Conclusion.....	72

3.1. Introduction

Théoriquement il est toujours possible de représenter la dynamique d'un système non linéaire par un système flou. En pratique cette représentation peut aboutir à l'obtention d'un très grand nombre de règles floues. Une extension possible du modèle flou permettant de réduire le nombre de règles floues est de prendre en compte certaines non linéarités du modèle au sein d'incertitudes inhérentes à la modélisation, on se place alors dans le cas de la modélisation par des systèmes flous TS incertains. L'objectif est d'obtenir un modèle flou comportant un nombre fini et raisonnable de règles fixé a priori.

Dans ce chapitre nous présentons les modèles flous TS incertains et leur stabilisation en utilisant la loi de commande PDC. Ensuite nous présentons les performances de stabilisation à travers le taux de décroissance et le placement des pôles des sous modèles linéaires bouclés. Finalement on s'intéresse au problème de la commande en utilisant un observateur flou.

3.2. Modèle flou de Takagi-Sugeno incertain

Le modèle flou de Takagi-Sugeno incertain est obtenu par l'agrégation d'un ensemble de systèmes linéaires incertains. Dans [18] les modèles TS incertains ont été utilisés avec deux buts différents. Le premier but est évidemment la prise en compte des incertitudes de modélisation elles-mêmes et d'améliorer les résultats existants dans la littérature. Le deuxième, et peut-être le plus important, est d'utiliser les incertitudes pour réduire le nombre de règles du modèle.

Le modèle TS avec incertitudes paramétriques s'écrit d'une manière générale comme suit [33]:

$$R^i : \text{Si } z_1(t) \text{ est } F_1^i \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } F_p^i$$

$$\text{Alors } \begin{cases} \delta x(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) & i = 1, 2, \dots, r \\ y(t) = (C_i + \Delta C_i)x(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

On peut écrire (3.1) sous la forme:

$$\begin{cases} \delta x(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{ (A_i + \Delta A_i)x(t) + (B_i + \Delta B_i)u(t) \} \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (C_i + \Delta C_i)x(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

On peut réduire (3.2) comme suite :

$$\begin{cases} \delta x(t) = (A_h + \Delta A_h)x(t) + (B_h + \Delta B_h)u(t) \\ y(t) = (C_h + \Delta C_h)x(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_h &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))A_i, & B_h &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))B_i, & C_h &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))C_i \\ \Delta A_h &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\Delta A_i, & \Delta B_h &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\Delta B_i, & \Delta C_h &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))\Delta C_i \end{aligned}$$

3.3. Stabilisation des modèles TS incertains

On suppose que les matrices des incertitudes ΔA_i et ΔB_i sont bornées avec la structure :

$$\Delta A_i = H a_i \Delta a_i(t) E a_i, \quad \Delta B_i = H b_i \Delta b_i(t) E b_i, \quad \Delta C_i = H c_i \Delta c_i(t) E c_i \quad (3.4)$$

où les matrices constantes $H a_i, H b_i, H c_i, E a_i, E b_i, E c_i$ de dimensions appropriées sont prédéterminées, et les incertitudes $\Delta a_i(t), \Delta b_i(t)$, et $\Delta c_i(t)$ sont bornées dans le temps de la façon suivante :

$$\Delta a_i^T(t) \Delta a_i(t) \leq I, \quad \Delta b_i^T(t) \Delta b_i(t) \leq I, \quad \Delta c_i^T(t) \Delta c_i(t) \leq I, \quad (3.5)$$

En utilisant une loi de commande floue de type PDC (2.32), la boucle fermée du système devient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j\} x(t) \quad (3.6)$$

Dans la suite de ce travail, on utilise les notations suivantes :

$$\Sigma^+(A) = A + A^T, \quad \Sigma^-(A) = A^T - A \quad (3.7)$$

Théorème 3.1 [15] : *Le modèle flou TS incertain (3.2) est globalement asymptotiquement stabilisable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T > 0$ et des scalaires $\varepsilon a_{ij} > 0$ et $\varepsilon b_{ij} > 0$ tels que :*

$$\gamma_{ii} < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \quad (3.8)$$

$$\gamma_{ij} + \gamma_{ji} < 0 \quad i < j \leq r \quad (3.9)$$

avec :

$$\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \Sigma^+ (A_i X - B_i M_j) + \varepsilon a_{ij} H a_i H a_i^T + \varepsilon b_{ij} H b_i H b_i^T & * & * \\ E a_i X & -\varepsilon a_{ij} I & 0 \\ E b_i M_j & 0 & -\varepsilon b_{ij} I \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$X = P^{-1}$ et $M_i = K_i P^{-1}$, où le symbole * indique la quantité transposée dans une matrice symétrique.

Preuve :

Soit la fonction candidate de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) \quad (3.11)$$

La stabilité de la boucle fermée est assurée si sa dérivée le long des trajectoires du modèle TS incertain (3.2) est strictement négative. Ce qui revient à vérifier que :

$$(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_i)^T P + P (A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_i) < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (3.12)$$

avec la loi de commande PDC :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) K_i x(t) = -K_h x(t) \quad (3.13)$$

Après la congruence avec P^{-1} , on fait le changement de variable $X = P^{-1}$ puis $M_i = K_i X$ (3.12) s'écrit :

$$X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - M_i B_i + X \Delta A_i^T + \Delta A_i X - M_i^T \Delta B_i^T - \Delta B_i M_i < 0 \quad (3.14)$$

En remplaçant (3.4) dans (3.14) on obtient :

$$\begin{aligned} X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - M_i B_i + X E a_i^T \Delta a_i^T(t) H a_i^T + H a_i \Delta a_i(t) E a_i X \\ - M_i^T E b_i^T \Delta b_i^T(t) H b_i^T - H b_i \Delta b_i(t) E b_i M_i < 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

En appliquant la propriété (1.34) et en considérant les bornes des incertitudes (3.5) une condition suffisante pour que (3.15) soit vérifiée est :

$$\begin{aligned} X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - M_i B_i + \varepsilon a_{ii} H a H a^T + \varepsilon a_{ii}^{-1} X E a_i^T E a_i X \\ + \varepsilon b_{ii} H b H b^T + \varepsilon b_{ii}^{-1} M_i^T E b_i^T E b_i M_i < 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

En utilisant le complément de Schur pour les termes : $\varepsilon a_{ii}^{-1} X E a_i^T E a_i X$, $\varepsilon b_{ii}^{-1} M_i^T E b_i^T E b_i M_i$ on obtient l'expression $\gamma_{ii} < 0$, avec :

$$\gamma_{ii} = \begin{bmatrix} X A_i^T + A_i X - M_i^T B_i^T - B_i M_i + \varepsilon a_{ii} H a H a^T + \varepsilon b_{ii} H b H b^T & * & * \\ E a_i X & -\varepsilon a_{ii} I & 0 \\ E b_i M_i & 0 & -\varepsilon b_{ii} I \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Exemple 3.1 : Soit l'exemple 1.1 présenté précédemment dans le chapitre 1. On ajoute des incertitudes bornées $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t)$ et $\Delta_3(t) \in [-1, 1]$ dans la matrice d'état :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 + 2 \cdot \Delta_3(t) & -12 & 2 \cdot \Delta_1(t) \\ 0 & -\frac{2}{1 + x_1^2(t) + x_2^2(t)} - 8 & 1 \\ -\frac{2}{1 + x_1^2(t)} + 1 + 2 \cdot \Delta_3(t) & 0 & -5 + 2 \cdot \Delta_1(t) + \Delta_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \cdot \left(\frac{2}{1 + x_1^2(t)} + 1 \right) \\ 4 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.18)$$

On suppose que ces incertitudes sont identiques pour tous les 4 sous modèles TS :

$$Ha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta a(t) = \begin{bmatrix} \Delta_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3(t) \end{bmatrix}, \quad Ea = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Pour illustrer l'intérêt de la prise en compte de ces incertitudes dans la synthèse de la loi de commande, on utilise la loi de commande obtenue à l'aide du théorème 2.6 (synthétisée sans incertitude). Il en résulte que certaines incertitudes provoquent la divergence du modèle en boucle fermée (figure 3-1).

Les conditions du théorème 3.1 sont donc utilisées afin de prendre en compte les incertitudes du modèle dans la synthèse de la loi de commande. La matrice définie positive et les gains obtenus en utilisant ces conditions sont :

$$P = \begin{bmatrix} 1.9587 & 1.2346 & -0.4810 \\ 1.2346 & 5.5034 & -0.8156 \\ -0.4810 & -0.8156 & 1.7000 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [0.1218 \quad -1.5846 \quad 1.6103], \quad K_2 = [0.1023 \quad -1.7086 \quad 1.6136]$$

$$K_3 = [0.5962 \quad 0.3020 \quad 1.3702], \quad K_4 = [0.5962 \quad 0.3020 \quad 1.3702]$$

Les résultats de simulation sont représentés dans les figures de 3.1 à 3.4, avec les conditions initiales $x(0) = [8, 8, 8]^T$ et les incertitudes sont constantes pendant toute la simulation : $\Delta_1(t) = 1$, $\Delta_2(t) = 0.1$ et $\Delta_3(t) = 0.9$

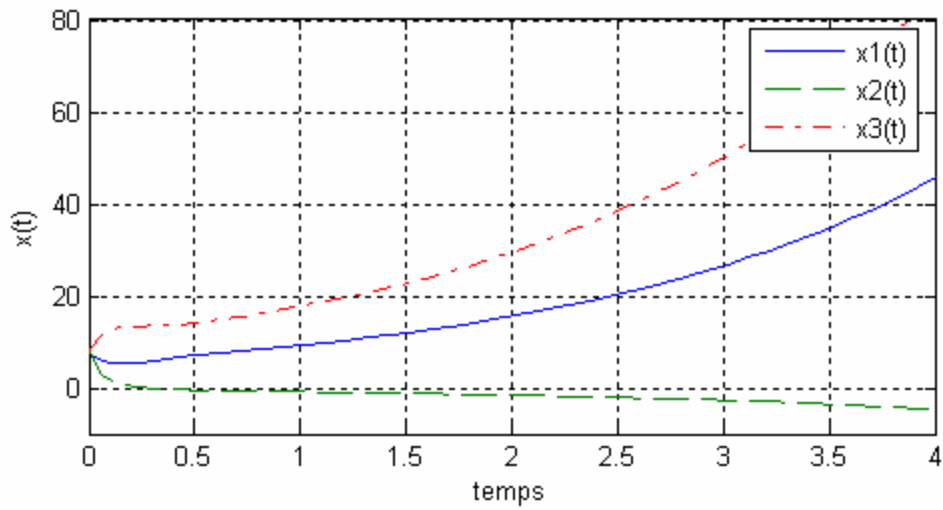


Figure 3.1 : Les états du modèle incertain sans prise en compte de l'incertitude dans la synthèse de loi de commande

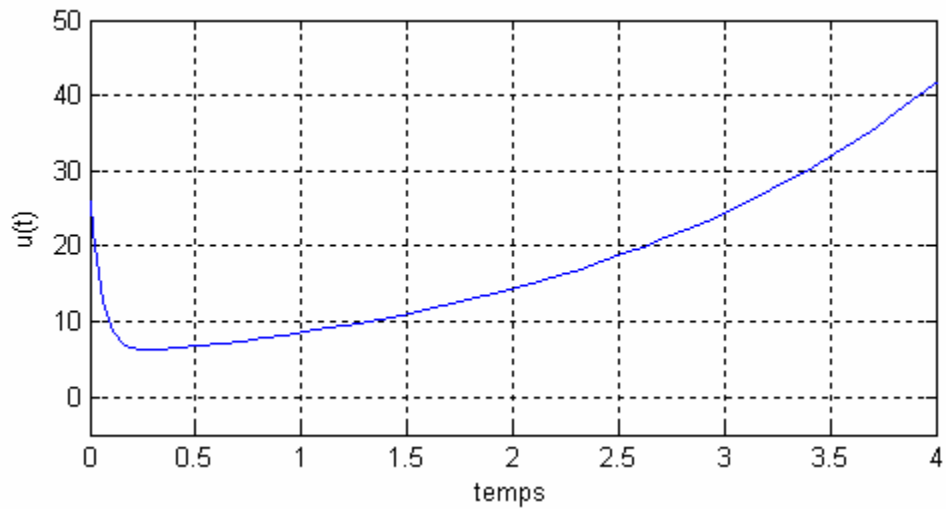


Figure 3.2 : Loi de commande sans prise en compte de l'incertitude

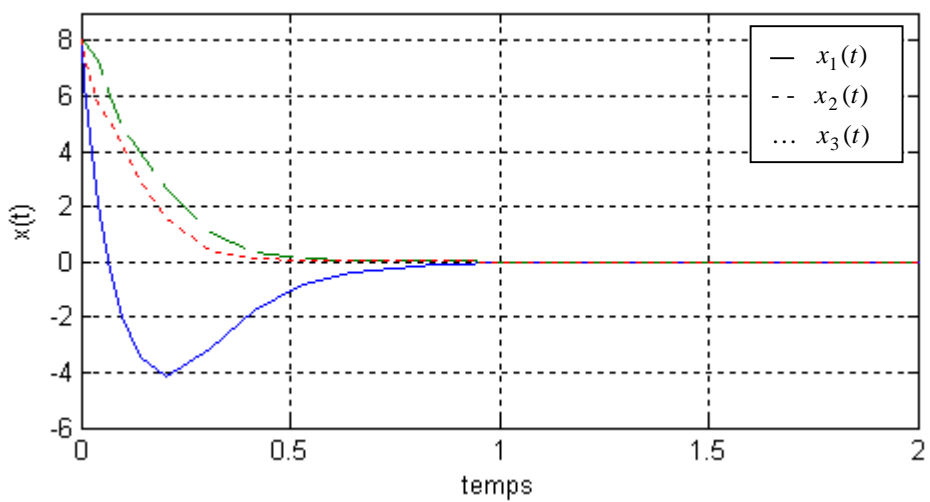


Figure 3.3 : Les états du modèle incertain

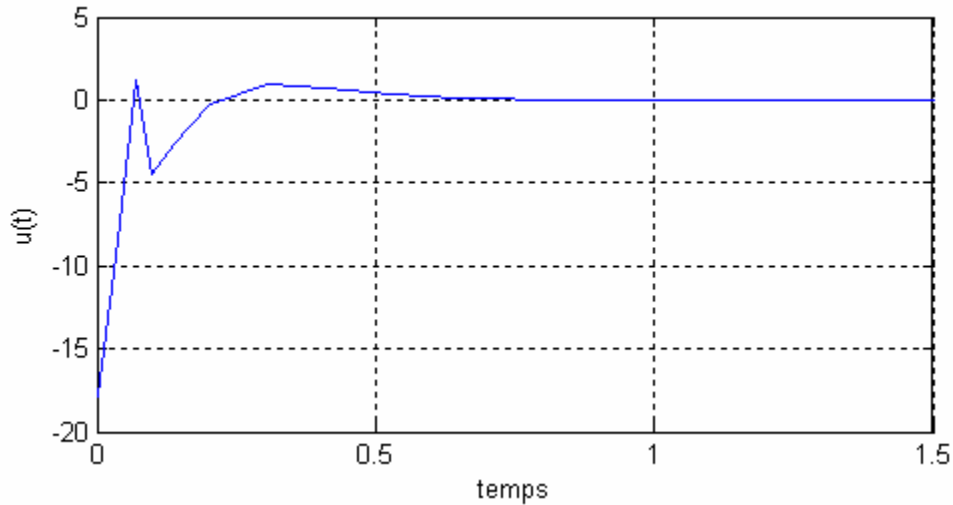


Figure 3.4 : La commande du modèle incertain

Remarque 3.1 :

Comme indiqué dans le chapitre 2, pour obtenir les conditions de la stabilité relâchées, on peut utiliser un des deux théorème 2.10 ou 2.11.

3.4. Autres conditions de stabilité

Plusieurs travaux [33]-[40], proposent des nouvelles conditions de stabilité, avec l'utilisation des différentes propriétés et transformations matricielles, en supposant que les matrices des incertitudes ΔA_i et ΔB_i sont bornées avec la structure suivante :

$$[\Delta A_i, \Delta B_i] = H_i \Delta_i(t) [E a_i, E b_i], \quad \text{avec } \Delta_i^T(t) \Delta_i(t) \leq I \quad (3.20)$$

Alors les conceptions principales pour la stabilité asymptotique globale du modèle flou TS, avec des incertitudes paramétriques, sont récapitulées dans les théorèmes suivants :

a) Cas des modèles TS continu

Théorème 3.2 [33] : Le modèle flou TS incertain (3.2) est globalement asymptotiquement stabilisable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T = X^{-1} > 0$ et des scalaires $\varepsilon_{ij}, (i, j = 1, \dots, r)$ tels que les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$1) \begin{bmatrix} \Theta_{ii} & * & * \\ E a_i X - E b_i M_i & -\varepsilon_{ii} I & * \\ H_i^T & 0 & -\varepsilon_{ii}^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.21)$$

$$2) \begin{bmatrix} \Gamma_{ij} & * & * & * & * \\ Ea_i X - Eb_i M_i & -\frac{\varepsilon_{ij}}{2} I & * & * & * \\ Ea_j X - Eb_j M_i & 0 & -\frac{\varepsilon_{ij}}{2} I & * & * \\ H_i^T & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1} I & * \\ H_j^T & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad i < j \leq r \quad (3.22)$$

avec :

$$\Theta_{ii} = \Sigma^+(A_i X) - \Sigma^+(B_i M_i) \quad (3.23)$$

$$\Gamma_{ij} = \Sigma^+((A_i + A_j)X) - \Sigma^+(B_i M_j + B_j M_i) \quad (3.24)$$

Preuve :

En remplaçant (3.20) dans (3.12) on obtient :

$$A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_i K_i + PH_i \Delta_i(t)(Ea_i - Eb_i K_i) + (Ea_i - Eb_i K_i)^T \Delta_i^T(t) H_i^T P < 0 \quad (3.25)$$

En appliquant le lemme 1.6 (la propriété (1.34)) a (3.25) :

$$\begin{aligned} A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_i K_i + \varepsilon_i PH_i H_i^T P + \varepsilon_i^{-1} (Ea_i - Eb_i K_i)^T \Delta_i^T(t) \Delta_i(t) (Ea_i - Eb_i K_i) \\ \leq A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_i K_i + \varepsilon_i PH_i H_i^T P + \varepsilon_i^{-1} (Ea_i - Eb_i K_i)^T (Ea_i - Eb_i K_i) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Alors :

$$A_i^T P + PA_i - K_i^T B_i^T P - PB_i K_i + \varepsilon_i PH_i H_i^T P + \varepsilon_i^{-1} (Ea_i - Eb_i K_i)^T (Ea_i - Eb_i K_i) < 0 \quad (3.27)$$

Après la congruence avec P^{-1} , on fait le changement de variable $X = P^{-1}$ puis $M_i = K_i X$

(3.27) s'écrit :

$$XA_i^T + A_i X - B_i M_i - M_i^T B_i^T + \varepsilon_i H_i H_i^T + \varepsilon_i^{-1} (Ea_i - Eb_i K_i)^T (Ea_i - Eb_i K_i) < 0 \quad (3.28)$$

En appliquant la propriété de complément de Shur sur (3.28), on obtient la LMI (3.21) définie dans le théorème 3.2.

La deuxième LMI peut être obtenue par le même procédé avec :

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i}{2} \right)^T P \\ + P \left(\frac{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i}{2} \right) < 0 \quad i < j \leq r \end{aligned} \quad (3.29)$$

Puis en utilisant les borne des incertitudes des matrices ΔA_i et ΔB_i définies dans (3.20) et la propriété (3.5) :

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} + [PH_i \ PH_j] \begin{bmatrix} \Delta_i(t) & 0 \\ 0 & \Delta_i(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_i(t) & 0 \\ 0 & \Delta_i(t) \end{bmatrix}^T [PH_i \ PH_j]^T < 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

avec :

$$\varphi_{ij} = A_i^T P + PA_i + A_j^T P + PA_j - K_j^T B_i^T P - PB_i K_j - K_i^T B_j^T P - PB_j K_i. \quad (3.31)$$

et :

$$\begin{bmatrix} \Delta_i(t) & 0 \\ 0 & \Delta_i(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_i(t) & 0 \\ 0 & \Delta_i(t) \end{bmatrix} \leq I \quad (3.32)$$

En appliquant le lemme 1.6 :

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} + [PH_i \ PH_j] \begin{bmatrix} \Delta_i(t) & 0 \\ 0 & \Delta_i(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta_i(t) & 0 \\ 0 & \Delta_i(t) \end{bmatrix}^T [PH_i \ PH_j]^T \\ \leq \varphi_{ij} + [PH_i \ PH_j] [PH_i \ PH_j]^T \varepsilon_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Alors :

$$\varphi_{ij} + [PH_i \ PH_j] [PH_i \ PH_j]^T \varepsilon_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Ea_i - Eb_i K_j \\ Ea_j - Eb_j K_i \end{bmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

On fait la congruence avec P^{-1} , puis on applique le complément de Shur pour trouver la deuxième LMI.

b) Cas des modèles TS discret

Dans cette section on va traiter le problème de stabilisation des modèles flous TS à temps discret avec des incertitudes paramétriques.

La représentation dans l'espace d'état du système flou TS incertain et de son contrôleur en boucle fermée peut être décrite comme suit:

$$x(t+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j\} x(t) \quad (3.35)$$

Les conditions de stabilité sont données dans le théorème suivant :

Théorème 3.3 [35] : Le modèle flou TS incertain (3.35) est globalement asymptotiquement stabilisable, s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T = X^{-1} > 0$ et des scalaires $\varepsilon_{ij}, (i, j = 1, \dots, r)$ tels que les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$1) \begin{bmatrix} -X & * & * & * \\ A_i X - B_i M_i & -X & * & * \\ E a_i X - E b_i M_i & 0 & -\varepsilon_{ii} I & * \\ 0 & H_i & 0 & -\varepsilon_{ii}^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.36)$$

$$2) \begin{bmatrix} -4X & * & * & * & * & * \\ \begin{pmatrix} A_i X - B_i M_j \\ + A_j X - B_j M_i \end{pmatrix} & -X & * & * & * & * \\ E a_i X - E b_i M_j & 0 & -\varepsilon_{ij} I & * & * & * \\ E a_j X - E b_j M_i & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij} I & * & * \\ 0 & H_i^T & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1} I & * \\ 0 & H_j^T & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_{ij}^{-1} I \end{bmatrix} < 0, \quad i < j \leq r \quad (3.37)$$

avec : $M_i = K_i P^{-1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

Prouve :

Soit la fonction candidate de Lyapunov :

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t)$$

La variation de la fonction candidate de Lyapunov est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t)) &= V(x(t+1)) - V(x(t)) \\ &= x(t+1)^T P x(t+1) - x(t)^T P x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) h_k(z(t)) h_l(z(t)) x(t)^T \\ &\quad \times \left\{ \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j \right)^T P \left(A_k + \Delta A_k - (B_k + \Delta B_k) K_l \right) - P \right\} x(t) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \sum_{l=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) h_k(z(t)) h_l(z(t)) x(t)^T \\ &\quad \times \left\{ \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i \right)^T P \right. \\ &\quad \left. \times \left(A_k + \Delta A_k - (B_k + \Delta B_k) K_l + A_l + \Delta A_l - (B_l + \Delta B_l) K_k \right) - 4P \right\} x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta V(x(t)) &\leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T \\
&\quad \times \left\{ \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i \right)^T P \right. \\
&\quad \left. \times \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i \right) - 4P \right\} x(t) \\
&= \sum_{i=1}^r h_i^2(z(t)) x^T(t) \left\{ \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_i \right)^T P \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_i \right) - P \right\} x(t) \\
&\quad + 2 \sum_{i < j}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) x(t)^T \\
&\quad \times \left\{ \left(\frac{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i}{2} \right)^T P \right. \\
&\quad \left. \times \left(\frac{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i}{2} \right) - P \right\} x(t)
\end{aligned}$$

La stabilité de la boucle fermée est assurée si la variation de la fonction candidate de Lyapunov est négative. Ce qui revient à vérifier que :

$$\left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_i \right)^T P \left(A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_i \right) - P < 0 \quad i \leq r \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i}{2} \right)^T P \\
&\quad \times \left(\frac{A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i) K_j + A_j + \Delta A_j - (B_j + \Delta B_j) K_i}{2} \right) - P < 0 \quad i < j \leq r \quad (3.39)
\end{aligned}$$

Pour démontrer le théorème 3.3, on procède de la même façon que la démonstration précédente, en utilisant l'inégalité (3.38) pour démontrer la première LMI et l'inégalité (3.39) pour la deuxième LMI.

3.5. Stabilisation avec taux de décroissance prédéfini

Les conditions de stabilisation des théorèmes précédents permettent de prendre en compte certains types d'incertitudes intervenant sur les modèles. Cependant aucune performance de la boucle fermée n'est prise en compte dans la synthèse de la loi de commande. L'une des solutions possibles est l'utilisation d'un taux de décroissance [18] [41], qui permet d'agir sur les dynamiques (pôles) des sous-modèles en boucle fermée et consiste à imposer un taux de décroissance 2α à la décroissance de la fonction de Lyapunov. La condition de stabilité devient alors :

$$\dot{V}(x(t)) < -2\alpha V(x(t)) \quad (3.40)$$

Dans le plan complexe, cette condition revient à faire un placement arbitraire des pôles des sous-modèles dans le demi plan gauche avec les parties réelles de ces derniers qui soient inférieures ou égales à $(-\alpha)$.

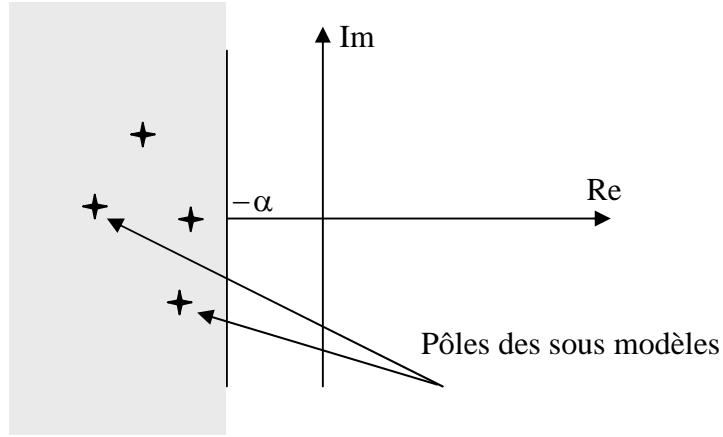


Figure 3.5 : Effet du taux de décroissance sur les pôles des sous modèles en boucle fermée

Le théorème suivant donne les conditions de stabilité du système flou TS incertain avec un taux de décroissance spécifié [18].

Théorème 3.4 : *Le modèle flou TS incertain (3.2) est globalement asymptotiquement stabilisable via la loi de commande PDC (2.32), s'il existe une matrice commune définie positive $P = P^T = X^{-1}$ et des matrices $\Phi_i, \Phi a_i, \Phi b_i, \Psi_i, \Psi a_i, \Psi b_i, Q_{ii} > 0, Q_{ij} = Q_{ij}^T$, et des scalaires $\varepsilon a_i > 0$, $\varepsilon b_i > 0$ tels que les LMI du théorème 2.11 soient vérifiées avec :*

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} Y_{ij} & * & * & * & * & * \\ -\Phi a_i^T + \Psi a_i^T H a_i^T & \varepsilon a_i I - \Psi a_i - \Psi a_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E a_i X & 0 & -\varepsilon a_i I & 0 & 0 & 0 \\ -\Phi b_i^T + \Psi b_i^T H b_i^T & 0 & 0 & \varepsilon b_i I - \Psi b_i - \Psi b_i^T & 0 & 0 \\ E b_i M_j & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon b_i I & 0 \\ X - \Phi_j^T + \Psi_j^T A_i^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Psi_j - \Psi_j^T \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$Y_{ij} = \Sigma^+ (H a_i \Phi a_i^T + H b_i \Phi b_i^T - B_i M_j) + \Phi_j A_i^T + A_i \Phi_j^T + 2\alpha X \quad (3.42)$$

où $\alpha \geq 0$ est le taux de décroissance.

Preuve :

On considère la fonction de Lyapunov (3.11) avec un taux de décroissance $\alpha \geq 0$. Pour aboutir à la stabilité asymptotique formulée dans le théorème 3.4, la dérivée, par rapport au temps, de la fonction de Lyapunov doit satisfaire la condition suivante :

$$\dot{V}(x(t)) < -2\alpha V(x(t)) \quad (3.43)$$

En utilisant une loi de commande floue de type PDC (3.13), la boucle fermée du système devient :

$$\dot{x}(t) = (A_h + \Delta A_h - B_i K_h - \Delta B_h K_h)x(t) \quad (3.44)$$

De (3.11), (3.43) et (3.44) on obtient :

$$x^T(t) \left\{ (A_h + \Delta A_h - B_h K_h - \Delta B_h K_h)^T P + 2\alpha P \right\} x(t) < 0 \quad (3.45)$$

Après la congruence avec P^{-1} , les changements de variable $X = P^{-1}$ et $M_i = K_i X$, (3.45) devient :

$$XA_h^T + A_h X - M_h^T B_h^T - B_h M_h + X\Delta A_h^T + \Delta A_h X - M_h^T \Delta B_h^T - \Delta B_h M_h + 2\alpha X < 0 \quad (3.46)$$

En remplaçant (3.4) dans (3.46) :

$$\begin{aligned} & XA_h^T + A_h X - M_h^T B_h^T - B_h M_h \\ & + XEa_h^T \Delta a_h^T Ha_h^T + Ha_h \Delta a_h Ea_h X - M_h^T Eb_h^T \Delta b_h^T Hb_h^T - Hb_h \Delta b_h Eb_h M_h + 2\alpha X < 0 \end{aligned} \quad (3.47)$$

En appliquant le lemme 1.6 (propriété (1.34)), avec $\varepsilon a_h > 0$, $\varepsilon b_h > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} & XA_h^T + A_h X - M_h^T B_h^T - B_h M_h + \varepsilon a_h^{-1} XEa_h^T \Delta a_h^T Ea_h X \\ & + \varepsilon a_h Ha_h Ha_h^T + \varepsilon b_h^{-1} M_h^T Eb_h^T \Delta b_h^T \Delta b_h Eb_h M_h + \varepsilon b_h Hb_h Hb_h^T + 2\alpha X < 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Avec $\Delta a_h^T(t) \Delta a_h(t) \leq I$ et $\Delta b_h^T(t) \Delta b_h(t) \leq I$, l'inégalité (3.48) est équivalente à :

$$\begin{aligned} & XA_h^T + A_h X - M_h^T B_h^T - B_h M_h + \varepsilon a_h^{-1} XEa_h^T Ea_h X \\ & + \varepsilon a_h Ha_h Ha_h^T + \varepsilon b_h^{-1} M_h^T Eb_h^T Eb_h M_h + \varepsilon b_h Hb_h Hb_h^T + 2\alpha X < 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

En utilisant le complément de Schur pour les termes $\varepsilon a_h^{-1} XEa_h^T Ea_h X$, $\varepsilon b_h^{-1} M_h^T Eb_h^T Eb_h M_h$, le lemme 1.4 (propriété (1.30)) pour les termes $\varepsilon a_h Ha_h Ha_h^T$ et $\varepsilon b_h Hb_h Hb_h^T$ et lemme 1.5, on obtient l'expression de $G_{hh} < 0$:

$$G_{hh} = \begin{bmatrix} Y_{hh} & * & * & * & * & * \\ -\Phi a_h^T + \Psi a_h^T H a_h^T & \varepsilon a_h I - \Psi a_h - \Psi a_h^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E a_h X & 0 & -\varepsilon a_h I & 0 & 0 & 0 \\ -\Phi b_h^T + \Psi b_h^T H b_h^T & 0 & 0 & \varepsilon b_h I - \Psi b_h - \Psi b_h^T & 0 & 0 \\ E b_h M_h & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon b_h I & 0 \\ X - \Phi_h^T + \Psi_h^T A_h^T & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Psi_h - \Psi_h^T \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

3.6. Placement de pôles dans des régions LMI pour des modèles TS Incertains.

Une extension de l'approche précédente est le placement de pôles des sous modèles linéaires, appelée D -stabilité [19], qui permet de placer les pôles des sous-modèles dans la région LMI \mathfrak{R} définie dans le chapitre 1.

Nous considérons les trois régions LMI définies dans le chapitre 1, l'obtention de régions LMI pour les modèles TS incertains ce fait de façon directe, en remplaçant le modèle linéaire (1.42) par celui de (3.6). Le but est alors de pouvoir obtenir des LMIs qui garantissent la D -stabilité pour le modèle TS incertain (3.6) ; nous donnons des conditions suffisantes afin de satisfaire le placement de pôle pour le demi-plan gauche, le disque et finalement le cône issu de l'origine.

En appliquant directement les inégalités (1.43), (1.44) et (1.45) sur le modèle TS en boucle fermée (3.6), on obtient :

$$\Sigma^+(PA_h - PB_h K_h) + \Sigma^+(P\Delta A_h - P\Delta B_h K_h) + \lambda P < 0 \quad (3.51)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho P & * \\ P(A_h - B_h K_h) & -\rho P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & * \\ P(\Delta A_h - \Delta B_h K_h) & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.52)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\vartheta)\Sigma^+(PA_h - PB_h K_h) & * \\ \sin(\vartheta)\Sigma^-(PA_h - PB_h K_h) & \cos(\vartheta)\Sigma^+(PA_h - PB_h K_h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta)\Sigma^+(P\Delta A_h - P\Delta B_h K_h) & * \\ \sin(\vartheta)\Sigma^-(P\Delta A_h - P\Delta B_h K_h) & \cos(\vartheta)\Sigma^+(P\Delta A_h - P\Delta B_h K_h) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.53)$$

Pour que les inégalités (3.51) (3.52) (3.53) soient des LMI, on suit les étapes suivantes :

- Faire la congruence par $X = P^{-1}$ pour (3.51) et par $\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix}$ pour (3.52) et (3.53).

- Puis effectuer le changement de variable $M_h = K_h X$ qui rend la partie sans incertitude des expressions précédentes linéaire :

$$\Sigma^+(A_h X - B_h M_h) + \Sigma^+(\Delta A_h X - \Delta B_h M_h) + \lambda X < 0 \quad (3.54)$$

$$\begin{bmatrix} -\rho X & * \\ A_h X - B_h M_h & -\rho X \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & * \\ \Delta A_h X - \Delta B_h M_h & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.55)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\vartheta)\Sigma^+(A_h X - B_h M_h) & * \\ \sin(\vartheta)\Sigma^-(A_h X - B_h M_h) & \cos(\vartheta)\Sigma^+(A_h X - B_h M_h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta)\Sigma^+(\Delta A_h X - \Delta B_h M_h) & * \\ \sin(\vartheta)\Sigma^-(\Delta A_h X - \Delta B_h M_h) & \cos(\vartheta)\Sigma^+(\Delta A_h X - \Delta B_h M_h) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.56)$$

On remarque que les premières parties sans incertitude sont des LMIs en X et M_i $i = 1, 2, \dots, r$ et sont notées dans la suite par (\cdot) . Il reste donc à traiter les parties incertaines. En utilisant l'expression des incertitudes (3.4), les inégalités précédentes s'écrivent :

$$(\cdot) + \Sigma^+(Ha_h \Delta a_h(t) Ea_h X - Hb_h \Delta b_h(t) Eb_h M_h) < 0 \quad (3.57)$$

$$(\cdot) + \begin{bmatrix} 0 & * \\ Ha_h \Delta a_h(t) Ea_h X - Hb_h \Delta b_h(t) Eb_h M_h & 0 \end{bmatrix} < 0 \quad (3.58)$$

$$(\cdot) + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta)\Sigma^+(Ha_h \Delta a_h(t) Ea_h X) & * \\ \sin(\vartheta)\Sigma^-(Ha_h \Delta a_h(t) Ea_h X) & \cos(\vartheta)\Sigma^+(Ha_h \Delta a_h(t) Ea_h X) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta)\Sigma^+(-Hb_h \Delta b_h(t) Eb_h M_h) & * \\ \sin(\vartheta)\Sigma^-(-Hb_h \Delta b_h(t) Eb_h M_h) & \cos(\vartheta)\Sigma^+(-Hb_h \Delta b_h(t) Eb_h M_h) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.59)$$

- **Mise sous forme LMI de l'inégalité (3.57)**

En appliquant la propriété (1.34) et en considérant les bornes des incertitudes (3.5), l'inégalité (3.57) devient :

$$(\cdot) + \frac{1}{\varepsilon a_{hh}^{(1)}} X E a_h^T E a_h X + \varepsilon a_{hh}^{(1)} H a_h H a_h^T + \frac{1}{\varepsilon b_{hh}^{(1)}} M_h E b_h^T E b_h M_h + \varepsilon b_{hh}^{(1)} H b_h H b_h^T < 0 \quad (3.60)$$

En utilisant le complément de Schur pour les termes $\frac{1}{\varepsilon a_{hh}^{(1)}} X E a_h^T E a_h X$ et $\frac{1}{\varepsilon b_{hh}^{(1)}} M_h E b_h^T E b_h M_h$ on obtient l'expression $\gamma_{hh}^{(1)} < 0$ définie dans le théorème suivant :

Théorème 3.5 : s'il existe une matrice symétrique définie positive $X = P^{-1}$, des matrices M_i et des scalaires $\varepsilon a_{ij}^{(1)} > 0$ et $\varepsilon b_{ij}^{(1)} > 0$ tels que :

$$\gamma_{ii}^{(1)} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.61)$$

$$\gamma_{ij}^{(1)} + \gamma_{ji}^{(1)} < 0 \quad i < j \leq r \quad (3.62)$$

avec :

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \begin{bmatrix} \Sigma^+(A_i X - B_i M_j) + \varepsilon a_{ij}^{(1)} H a_i H a_i^T + \varepsilon b_{ij}^{(1)} H b_i H b_i^T - \lambda X & * & * \\ E a_i X & -\varepsilon a_{ij}^{(1)} I & 0 \\ E b_i M_j & 0 & -\varepsilon b_{ij}^{(1)} I \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

alors, les pôles du système en boucle fermée (3.6) appartiennent à la région LMI définie par (1.43) et les gains de la loi de commande PDC sont donnés par: $K_i = M_i X^{-1}$

➤ **Mise sous forme LMI de l'inégalité (3.58)**

En utilisant l'inégalité (1.34) les bornes des incertitudes (3.5), l'inégalité (3.58) devient :

$$\begin{bmatrix} (\cdot) + \frac{1}{\varepsilon a_{hh}^{(2)}} X E a_h^T E a_h X + \frac{1}{\varepsilon b_{hh}^{(2)}} M_h E b_h^T E b_h M_h & 0 \\ 0 & \varepsilon a_{hh}^{(2)} H a H a^T + \varepsilon b_{hh}^{(2)} H b H b^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.64)$$

L'utilisation du complément de Schur pour les termes $\frac{1}{\varepsilon a_{hh}^{(1)}} X E a_h^T E a_h X$, $\frac{1}{\varepsilon b_{hh}^{(1)}} M_h E b_h^T E b_h M_h$ permet d'obtenir l'expression linéaire $\gamma_{ii}^{(2)} < 0$ définie dans le théorème suivant :

Théorème 3.6 : s'il existe une matrice symétrique définie positive $X = P^{-1}$, des matrices M_i et des scalaires $\varepsilon a_{ij}^{(2)} > 0$ et $\varepsilon b_{ij}^{(2)} > 0$ tels que :

$$\gamma_{ii}^{(2)} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3.65)$$

$$\gamma_{ij}^{(2)} + \gamma_{ji}^{(2)} < 0 \quad i < j \leq r \quad (3.66)$$

avec :

$$\gamma_{ij}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\rho X & * & * & * \\ A_i X - B_i M_j & -\rho X + \varepsilon a_{ij}^{(2)} H a_i H a_i^T + \varepsilon b_{ij}^{(2)} H b_i H b_i^T & 0 & 0 \\ E a_i X & 0 & -\varepsilon a_{ij}^{(2)} I & 0 \\ E b_i M_j & 0 & 0 & -\varepsilon b_{ij}^{(2)} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.67)$$

alors, les pôles du système en boucle fermée (3.6) appartiennent à la région LMI définie par (1.44) et les gains de la loi de commande PDC sont donnés par : $K_i = M_i X^{-1}$.

➤ **Mise sous forme LMI de l'inégalité (3.59)**

L'inégalité (3.61) peut être écrite de la forme [15]:

$$\begin{aligned}
(\cdot)_+ & \begin{bmatrix} Ha_h \Delta a_h(t) & 0 \\ 0 & Ha_h \Delta a_h(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) Ea_h X & \sin(\vartheta) Ea_h X \\ -\sin(\vartheta) Ea_h X & \cos(\vartheta) Ea_h X \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) X Ea_h^T & \sin(\vartheta) X Ea_h^T \\ \sin(\vartheta) X Ea_h^T & \cos(\vartheta) X Ea_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_h^T(t) Ha_h^T & 0 \\ 0 & \Delta a_h^T(t) Ha_h^T \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} Hb_h \Delta b_h(t) & 0 \\ 0 & Hb_h \Delta b_h(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos(\vartheta) Eb_h M_h & -\sin(\vartheta) Eb_h M_h \\ \sin(\vartheta) Eb_h M_h & -\cos(\vartheta) Eb_h M_h \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} -\cos(\vartheta) M_h^T Eb_h^T & \sin(\vartheta) M_h^T Eb_h^T \\ -\sin(\vartheta) M_h^T Eb_h^T & -\cos(\vartheta) M_h^T Eb_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_h^T(t) Hb_h^T & 0 \\ 0 & \Delta b_h^T(t) Hb_h^T \end{bmatrix} < 0 \quad (3.68)
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété (1.34) et en considérant les bornes des incertitudes (3.5), l'inégalité (3.68) devient :

$$\begin{aligned}
(\cdot)_+ & \varepsilon a_{hh}^{(3)} \begin{bmatrix} Ha_h Ha_h^T & 0 \\ 0 & Ha_h Ha_h^T \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon a_{hh}^{(3)}} \begin{bmatrix} X Ea_h^T Ea_h X & 0 \\ 0 & X Ea_h^T Ea_h X \end{bmatrix} \\
& + \varepsilon b_{hh}^{(3)} \begin{bmatrix} Hb_h Hb_h^T & 0 \\ 0 & Hb_h Hb_h^T \end{bmatrix} + \frac{1}{\varepsilon b_{hh}^{(3)}} \begin{bmatrix} M_h^T Ea_h^T Ea_h M_h & 0 \\ 0 & M_h^T Ea_h^T Ea_h M_h \end{bmatrix} < 0 \quad (3.69)
\end{aligned}$$

L'utilisation du complément de Schur permet d'obtenir l'expression linéaire $\gamma_{ii}^{(3)} < 0$ définie dans le théorème 3.7:

Théorème 3.7 : s'il existe une matrice symétrique définie positive $X = P^{-1}$, des matrices M_i

et des scalaires $\varepsilon a_{ij}^{(3)} > 0$ et $\varepsilon b_{ij}^{(3)} > 0$ tels que :

$$\begin{aligned}
\gamma_{ii}^{(3)} & < 0 & i = 1, 2, \dots, r \\
\gamma_{ij}^{(3)} + \gamma_{ji}^{(3)} & < 0 & i < j \leq r
\end{aligned}$$

avec :

$$\gamma_{ij}^{(3)} = \begin{bmatrix} S_{ij} & XEa_i^T & M_j^T Eb_i^T & \Pi_{ij} & 0 & 0 \\ Ea_i X & -\varepsilon a_{ij}^{(3)} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Eb_i M_j & 0 & -\varepsilon b_{ij}^{(3)} I & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{ij} & 0 & 0 & S_{ij} & XEa_i^T & M_j^T Eb_i^T \\ 0 & 0 & 0 & Ea_i X & -\varepsilon a_{ij}^{(3)} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Eb_i M_j & 0 & -\varepsilon b_{ij}^{(3)} I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.70)$$

avec

$$S_{ij} = \cos(\vartheta) \Sigma^+ (A_i X - B_i M_j) + \varepsilon a_{ij}^{(3)} Ha_i Ha_i^T + \varepsilon b_{ij}^{(3)} Hb_i Hb_i^T$$

$$\Pi_{ij} = \sin(\vartheta) \Sigma^- (A_i X - B_i M_j)$$

alors, les pôles du système en boucle fermé (3.6) appartiennent à la région LMI définie par (1.45) et les gains de la loi de commande PDC sont donnés par: $K_i = M_i X^{-1}$

Le théorème 3.8 donne les conditions de stabilité du système TS (3.6) pour que tous les pôles des sous-modèles TS soient situés dans la région LMI \mathfrak{R} définie dans le chapitre 1.

Théorème 3.8 [41] : Le modèle TS (3.6) est quadratiquement stable et a tous les pôles des sous-modèles TS situés dans la région LMI \mathfrak{R} , s'il existe une matrice symétrique définie positive $X = P^{-1}$, des matrices M_i et des scalaires $\varepsilon a_{ij}^{(k)} > 0$ et $\varepsilon b_{ij}^{(k)} > 0$ tels que :

$$\begin{aligned} \gamma_{ii}^{(k)} &< 0 & i = 1, 2, \dots, r \\ \gamma_{ij}^{(k)} + \gamma_{ji}^{(k)} &< 0 & i < j \leq r \\ k &\in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

Les gains de la loi de commande PDC sont donnés par: $K_i = M_i X^{-1}$

Exemple 3.2 :

Le système chaotique de Lorenz peut être décrit par les équations suivantes [17].

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma x_1(t) + \sigma x_2(t) \\ r x_1(t) - x_2(t) - x_1(t)x_3(t) \\ x_1(t)x_2(t) - b x_3(t) \end{bmatrix}$$

Les valeurs nominales (σ, r, b) sont $(10, 28, 8/3)$, le système chaotique de Lorenz peut être écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -x_1(t) \\ 0 & x_1(t) & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Si on suppose que $x_1(t) \in [-d, d]$, Alors $x_1(t)$ peut être écrit sous la forme :

$$x_1(t) = d \left(\frac{x_1(t) + d}{2d} \right) - d \left(\frac{d - x_1(t)}{2d} \right)$$

Le système (3.71) peut être écrit comme :

$$\dot{x}(t) = w_1(x_1(t))A_1x(t) + w_2(x_1(t))A_2x(t)$$

avec :

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]^T$$

et

$$M_1(x_1(t)) = \frac{x_1(t)}{2d} + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad M_2(x_1(t)) = \frac{1}{2} - \frac{x_1(t)}{2d}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & -d \\ 0 & d & -b \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & d \\ 0 & -d & -b \end{bmatrix}$$

Prenant $M_1(x_1(t))$ et $M_2(x_1(t))$ comme des fonctions d'appartenance (figure3.6), le système chaotique de Lorenz peut être représenté exactement par le modèle flou de Takagi-Sugeno suivant :

Règle1 : Si $x_1(t)$ est autour de M_1 Alors $\dot{x}(t) = A_1x(t)$

Règle2 : Si $x_1(t)$ est autour de M_2 Alors $\dot{x}(t) = A_2x(t)$

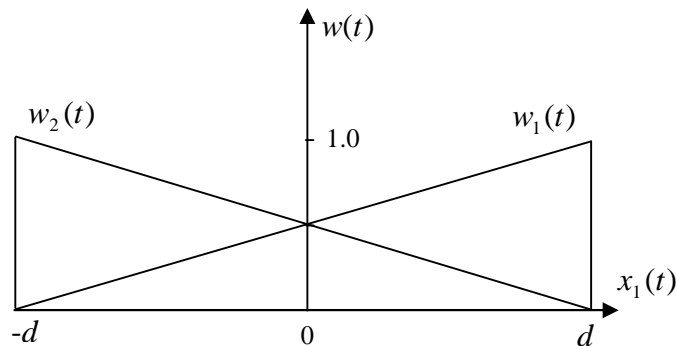


Figure 3.6 : Fonctions d'appartenance

On suppose que les paramètres (σ, r, b) sont incertains, varient autour de leurs valeurs nominales (σ_0, r_0, b_0) avec :

$$\sigma = \sigma_0 + \Delta\sigma, \quad r = r_0 + \Delta r, \quad b = b_0 + \Delta b$$

où :

$$\Delta\sigma = \mu(t)\sigma_0, \quad \Delta r = \mu(t)r_0, \quad \Delta b = \mu(t)b_0$$

et :

$$|\mu(t)| \leq 0.5$$

On utilise la matrice d'entrée incertaine B avec :

$$B = B_0 + \Delta B$$

avec :

$$B_0 = [1, 0, 0]^T, \quad \Delta B = \mu(t)B_0$$

Le système chaotique de Lorenz incertain peut être décrit par le modèle TS incertain suivant :

Règle 1: Si $x_1(t)$ est autour de M_1 Alors $\dot{x}(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + (B_1 + \Delta B_1)u(t)$

Règle 2: Si $x_1(t)$ est autour de M_2 Alors $\dot{x}(t) = (A_2 + \Delta A_2)x(t) + (B_2 + \Delta B_2)u(t)$

avec :

$$\Delta A_1 = \Delta A_2 = \begin{bmatrix} -\Delta\sigma & \Delta\sigma & 0 \\ \Delta r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Delta b \end{bmatrix}$$

$\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta B_1$ et ΔB_2 peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta A_1 &= Ha_1 \Delta a_1(t) Ea_1, & \Delta A_2 &= Ha_2 \Delta a_2(t) Ea_2 \\ \Delta B_1 &= Hb_1 \Delta b_1(t) Eb_1, & \Delta B_2 &= Hb_2 \Delta b_2(t) Eb_2 \end{aligned}$$

avec :

$$Ha_1 = Ha_2 = Hb_1 = Hb_2 = 0.3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta a_1(t) = \Delta a_2(t) = \Delta b_1(t) = \Delta b_2(t) = 0.2 \begin{bmatrix} \mu(t) & 0 & 0 \\ 0 & \mu(t) & 0 \\ 0 & 0 & \mu(t) \end{bmatrix}$$

$$Ea_1 = Ea_2 = \begin{bmatrix} -\sigma_0 & \sigma_0 & 0 \\ r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_0 \end{bmatrix}, \quad Eb_1 = Eb_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le but de la synthèse de la commande de cet exemple est de placer les pôles en boucle fermée dans la région LMI définie par : $\lambda = 1.5$, $\rho = 45$, $\vartheta = 1.3 \text{ rad}$. La matrice définie positive et les gains obtenus en utilisant le théorème 3.8 sont :

$$P = \begin{bmatrix} 4.4992 & 0.8695 & 0.0000 \\ 0.8695 & 0.9938 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.9036 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = [11.7566 \quad 15.9562 \quad -3.6030]$$

$$K_2 = [11.7566 \quad 15.9562 \quad 3.6030]$$

Les figures de 3.7 à 3.9 représentent la trajectoire de phase, les repenses et la commande PDC du système chaotique de Lorenz avec placement de pôles dans des régions LMI. Pour les conditions initiales $x(0) = [10, -10, -10]^T$. La commande est appliquée à $t = 10 \text{ s}$, pour $t \in [0, 10]$ le système est en régime libre. On remarque que le comportement est chaotique avant l'application de la commande et dès l'application de la commande les états du système stabilisent et convergent vers zéro.

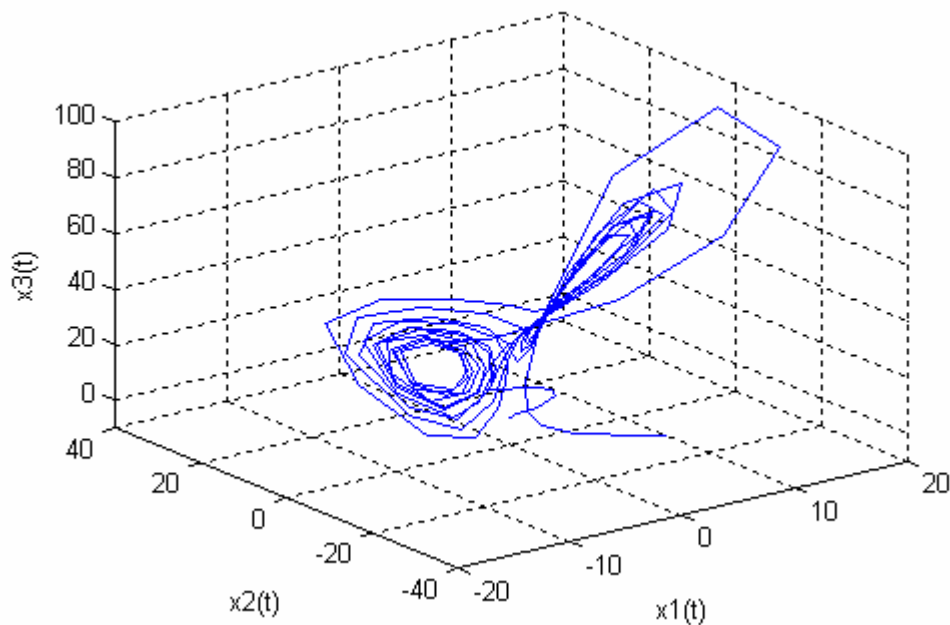


Figure 3.7 : Trajectoire de phase du système chaotique

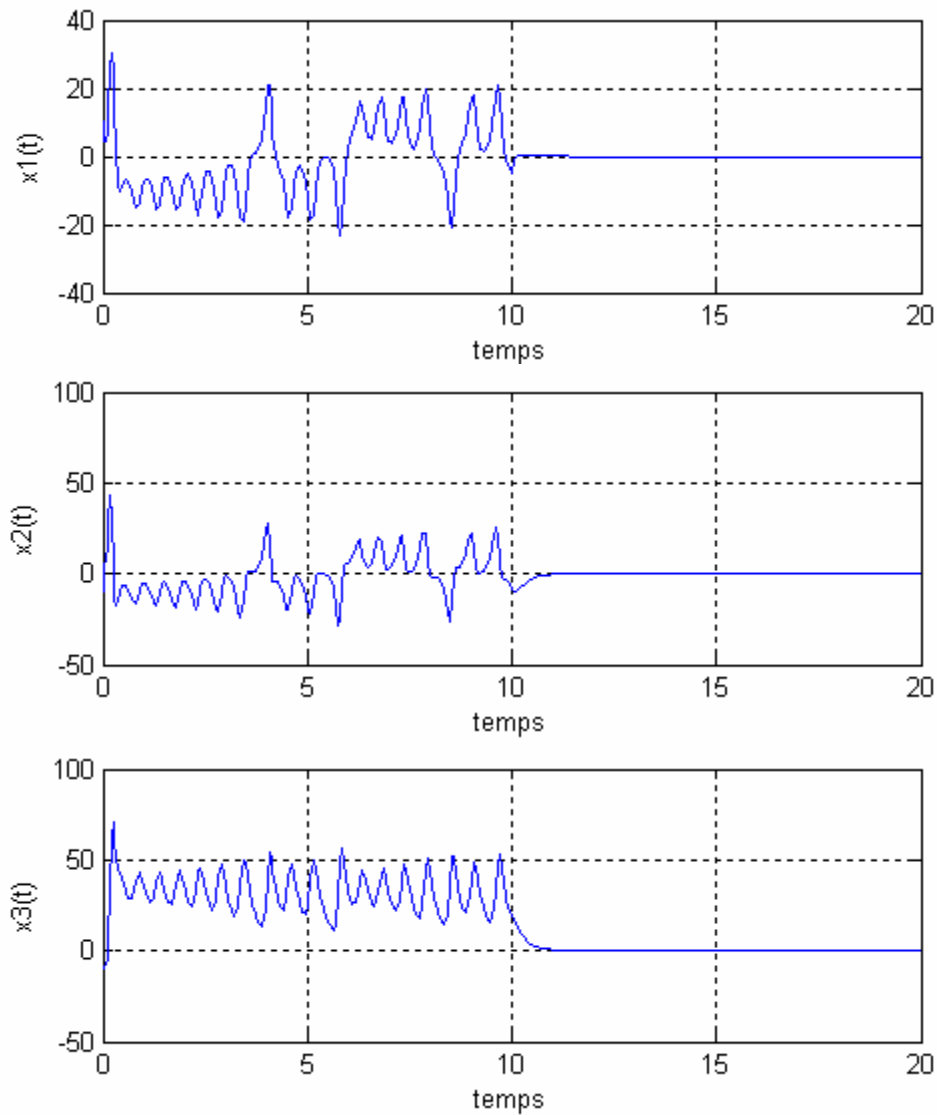


Figure 3.8 : Evolution des états $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$

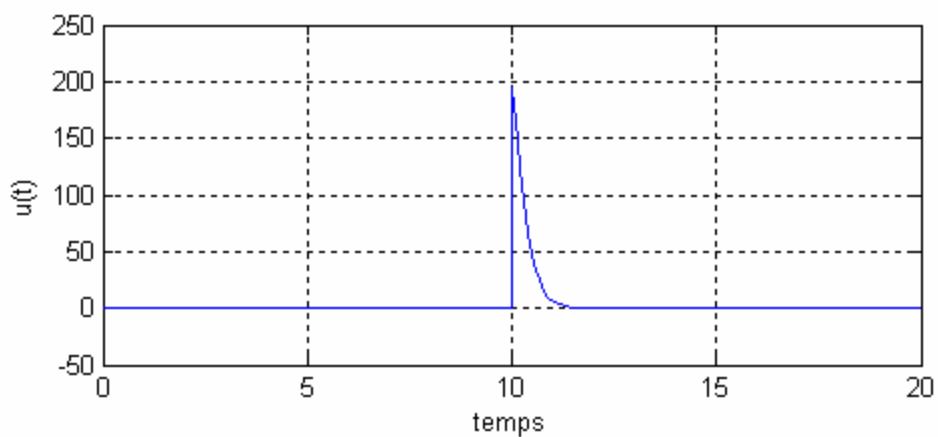


Figure 3.9 : Evolution de la commande $u(t)$

3.7. Commande avec observateur

Le principe de synthèse de commande dans le cas des modèles flous TS incertains est basé sur l'application de la loi de commande (2.32) au système (3.2) avec l'observateur flou (2.69), les variables de prémisses sont supposées mesurables. En considérant la dynamique de l'erreur d'estimation (2.70), le problème revient alors à stabiliser le système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t)) \begin{bmatrix} A_i + \Delta A_i - (B_i + \Delta B_i)K_j & (B_i + \Delta B_i)K_j \\ \Delta A_i + L_i \Delta C_j - \Delta B_i K_j & A_i - L_i C_j + \Delta B_i K_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Les incertitudes sont décrites de la même façon que précédemment (3.5).

Ainsi, en ce qui concerne la commande avec observateur flou pour les modèles TS incertains et en se plaçant dans le cas où le théorème de séparation [32] est applicable, dans le cas contraire dans [18] on introduit les non linéarités qui dépendent des variables de prémisses non mesurables dans les matrices contenant les incertitudes. Dans [18] une méthode basée sur le couplage des parties commande et observateur est proposée, puis le problème est résolu d'une façon séquentielle grâce à deux problèmes LMI.

Théorème 3.9 [18] : Soient le modèle flou TS incertain (3.2), la loi de commande PDC (2.32) et l'observateur flou (2.69), le système augmenté (3.72) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe des matrices définies positives P_c et P_o , des matrices K_i et L_i , et des scalaires positives $\varepsilon a_i, \varepsilon b_i, \varepsilon c_i, \mu_i, \tau$, $i = 1, \dots, r$ tels que :

$$\begin{aligned} \Sigma^+ (P_c A_h - P_c B_h K_h) + 2\varepsilon a_h E a_h^T E a_h + \varepsilon b_h (1 + \tau^{-1}) K_h^T E b_h^T E b_h K_h \\ + \varepsilon c_h E c_h^T E c_h + P_c (\varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T + \mu_h^{-1} I) P_c < 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^+ (P_o A_h - P_o L_h C_h) + K_h^T (\varepsilon b_h (1 + \tau) E b_h^T E b_h + \mu_h B_h^T B_h) K_h \\ + P_o (\varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T + \varepsilon c_h^{-1} L_h H c_h H c_h^T L_h^T) P_o < 0 \end{aligned} \quad (3.74)$$

Preuve :

Le système augmenté (3.72) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = (\tilde{A}_{hh} + \tilde{\Delta}_{hh}) \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

avec :

$$\tilde{A}_{hh} = \begin{bmatrix} A_h - B_h K_h & B_h K_h \\ 0 & A_h - L_h C_h \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{\Delta}_{hh} = \begin{bmatrix} \Delta A_h - \Delta B_h K_h & \Delta B_h K_h \\ \Delta A_h + L_h \Delta C_h - \Delta B_h K_h & \Delta B_h K_h \end{bmatrix}$$

Notons que $\tilde{\Delta}_{hh}$ peuvent être écrites sous la forme :

$$\tilde{\Delta}_{hh} = \begin{bmatrix} \Delta A_h & 0 \\ \Delta A_h & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_h \\ \Delta B_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_h & K_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -L_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_h & 0 \end{bmatrix}$$

Soit la fonction candidate de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(X(t)) = X^T(t) \tilde{P} X(t) \quad (3.76)$$

avec :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{P} = \tilde{P}^T = \begin{bmatrix} P_c & 0 \\ 0 & P_o \end{bmatrix} > 0 \quad (3.77)$$

La stabilité du système augmenté (3.72) est assurée si la dérivée de la fonction candidate de Lyapunov est négative. Alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &= \dot{X}^T \tilde{P} X + X^T \tilde{P} \dot{X} \\ &= X^T \left\{ (\tilde{A}_{hh} + \tilde{\Delta}_{hh})^T \tilde{P} + \tilde{P} (\tilde{A}_{hh} + \tilde{\Delta}_{hh}) \right\} X \\ &= X^T \left\{ \tilde{A}_{hh}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{hh} + \begin{bmatrix} \Delta A_h^T & \Delta A_h^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} \Delta A_h & 0 \\ \Delta A_h & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_h^T \\ K_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta B_h^T & \Delta B_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{P} \begin{bmatrix} \Delta B_h \\ \Delta B_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_h & K_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta C_h^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -L_h \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 \\ -L_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_h & 0 \end{bmatrix} \right\} X \end{aligned} \quad (3.78)$$

En considérant les bornes d'incertitude (3.4), alors (3.78) devient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &= X^T \left\{ \begin{aligned} &\tilde{A}_{hh}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{hh} \\ &+ \begin{bmatrix} Ea_h^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_h^T & \Delta a_h^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ha_h^T & 0 \\ 0 & Ha_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} \Delta a_h & 0 \\ \Delta a_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_h & 0 \\ \Delta A_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ea_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -K_h^T Eb_h^T \\ K_h^T Eb_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_h^T & \Delta b_h^T \\ 0 & Hb_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Hb_h^T & 0 \\ 0 & Hb_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} Hb_h & 0 \\ 0 & Hb_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_h \\ \Delta b_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Eb_h K_h & Eb_h K_h \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} Ec_h^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_h^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -Hc_h^T L_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 \\ -L_h Hc_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_h & 0 \\ \Delta c_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ec_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} X \\ &= X^T \left\{ \tilde{A}_{hh}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{hh} + \mathcal{L}(\Delta A) + \mathcal{L}(\Delta B) + \mathcal{L}(\Delta C) \right\} X \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta A) &= \begin{bmatrix} Ea_h^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_h^T & \Delta a_h^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ha_h^T & 0 \\ 0 & Ha_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} \Delta a_h & 0 \\ \Delta a_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_h & 0 \\ \Delta A_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ea_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}(\Delta B) &= \begin{bmatrix} -K_h^T Eb_h^T \\ K_h^T Eb_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_h^T & \Delta b_h^T \\ 0 & Hb_h^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Hb_h^T & 0 \\ 0 & Hb_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} Hb_h & 0 \\ 0 & Hb_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_h \\ \Delta b_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Eb_h K_h & Eb_h K_h \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}(\Delta C) &= \begin{bmatrix} Ec_h^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_h^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -Hc_h^T L_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} + \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 \\ -L_h Hc_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_h & 0 \\ \Delta c_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ec_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.6 (propriété (1.34)), avec $\varepsilon a_h > 0$, $\varepsilon b_h > 0$, $\varepsilon c_h > 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta A) &\leq \varepsilon a_h \begin{bmatrix} 2Ea_h^T \Delta a_h^T \Delta a_h Ea_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon a_h^{-1} \tilde{P} \begin{bmatrix} Ha_h Ha_h^T & 0 \\ 0 & Ha_h Ha_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} \\ \mathcal{L}(\Delta B) &\leq \varepsilon b_h \begin{bmatrix} -K_h^T Eb_h^T \\ K_h^T Eb_h^T \end{bmatrix} \Delta b_h^T \Delta b_h \begin{bmatrix} -Eb_h K_h & Eb_h K_h \end{bmatrix} + \varepsilon b_h^{-1} \tilde{P} \begin{bmatrix} Hb_h Hb_h^T & 0 \\ 0 & Hb_h Hb_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} \\ \mathcal{L}(\Delta C) &\leq \varepsilon c_h \begin{bmatrix} Ec_h^T \Delta c_h^T \Delta c_h Ec_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon c_h^{-1} \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -L_h Hc_h Hc_h^T L_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} \end{aligned}$$

Alors $\dot{V}(X) < 0$ si :

$$\begin{aligned} &\tilde{A}_{hh}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{hh} + \mathcal{L}(\Delta A) + \mathcal{L}(\Delta B) + \mathcal{L}(\Delta C) < 0 \\ \Rightarrow &\tilde{A}_{hh}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A}_{hh} + \varepsilon a_h \begin{bmatrix} 2Ea_h^T Ea_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon a_h^{-1} \tilde{P} \begin{bmatrix} Ha_h Ha_h^T & 0 \\ 0 & Ha_h Ha_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} \\ &+ \varepsilon b_h \begin{bmatrix} K_h^T Eb_h^T Eb_h K_h & -K_h^T Eb_h^T Eb_h K_h \\ -K_h^T Eb_h^T Eb_h K_h & K_h^T Eb_h^T Eb_h K_h \end{bmatrix} + \varepsilon b_h^{-1} \tilde{P} \begin{bmatrix} Hb_h Hb_h^T & 0 \\ 0 & Hb_h Hb_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} \\ &+ \varepsilon c_h \begin{bmatrix} Ec_h^T Ec_h & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon c_h^{-1} \tilde{P} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -L_h Hc_h Hc_h^T L_h^T \end{bmatrix} \tilde{P} < 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

En utilisant la supposition (3.77), la condition (3.79) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned} x^T(t)\Omega_c x(t) + e^T(t)\Omega_o e(t) + e^T(t)K_h^T B_h^T P x(t) + x^T(t)P_c B_h K_h e(t) \\ - \varepsilon b_h \left(e^T(t)K_h^T E b_h^T E b_h K_h x(t) + x^T(t)K_h^T E b_h^T E b_h K_h e(t) \right) < 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Omega_c = \Sigma^+ (P_c A_h - P_c B_h K_h) + 2\varepsilon a_h E a_h^T E a_h + \varepsilon b_h K_h^T E b_h^T E b_h K_h + \varepsilon c_h E c_h^T E c_h \\ + P_c \left(\varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T \right) P_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_o = \Sigma^+ (P_o A_h - P_o L_h C_h) + \varepsilon b_h K_h^T E b_h^T E b_h K_h \\ + P_o \left(\varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T + \varepsilon c_h^{-1} L_h H c_h H c_h^T L_h^T \right) P_o \\ x^T(t)\Omega_c x(t) + e^T(t)\Omega_o e(t) + (P_c B_h K_h e(t))^T x(t) + x^T(t)(P_c B_h K_h e(t)) \\ - \varepsilon b_h \left(\left(K_h^T E b_h^T E b_h K_h e(t) \right)^T x(t) + x^T(t) \left(K_h^T E b_h^T E b_h K_h e(t) \right) \right) < 0 \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.6 (propriété (1.34)), avec $\mu_h > 0$, $\tau > 0$, alors (3.80) est vérifiée si :

$$\begin{aligned} x^T(t) \left(\Omega_c + \mu_h^{-1} P_c^2 + \tau^{-1} \varepsilon b_h K_h^T E b_h^T E b_h K_h \right) x(t) < 0 \\ e^T(t) \left(\Omega_o + \mu_h K_h^T B_h^T B_h K_h + \tau \varepsilon b_h K_h^T E b_h^T E b_h K_h \right) e(t) < 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

On peut réécrire (3.81) sous la forme :

$$x^T(t) \left(\begin{aligned} & \left(A_h^T - K_h^T B_h^T \right) P_c + P_c \left(A_h - B_h K_h \right) + 2\varepsilon a_h E a_h^T E a_h + \varepsilon b_h \left(1 + \tau^{-1} \right) K_h^T E b_h^T E b_h K_h \\ & + \varepsilon c_h E c_h^T E c_h + P_c \left(\varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T + \mu_h^{-1} I \right) P_c \end{aligned} \right) x(t) < 0 \quad (3.82)$$

$$e^T(t) \left(\begin{aligned} & \left(A_h^T - C_h^T L_h^T \right) P_o + P_o \left(A_h - L_h C_h \right) + K_h^T \left(\varepsilon b_h \left(1 + \tau \right) E b_h^T E b_h + \mu_h B_h^T B_h \right) K_h \\ & + P_o \left(\varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T + \varepsilon c_h^{-1} L_h H c_h H c_h^T L_h^T \right) P_o \end{aligned} \right) e(t) < 0 \quad (3.83)$$

En utilisant la notation (3.7), on obtient les conditions (3.82) et (3.83) correspondants aux conditions du théorème 3.9

Remarquons que les conditions de stabilité dans le théorème 3.9 ne sont pas des LMIs, dans la suite les inégalités (3.73) et (3.74) seront mises sous forme des LMIs.

➤ **Mise sous forme LMI de l'inégalité (3.73)**

Après la congruence avec P_c^{-1} , on fait les changements de variables $X_c = P_c^{-1}$ et $M_i = K_i X_c$, $i = 1, \dots, r$, l'inégalité (3.73) s'écrit :

$$\begin{aligned} \Sigma^+(A_h X_c - B_h M_h) + \varepsilon a_h^{-1} H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h^{-1} H b_h H b_h^T + \mu_h^{-1} I + 2\varepsilon a_h X_c E a_h^T E a_h X_c \\ + \varepsilon c_h X_c E c_h^T E c_h X_c + \varepsilon b_h (1 + \tau^{-1}) M_h^T E b_h^T E b_h M_h < 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

En utilisant le complément de Schur pour les termes : $2\varepsilon a_h X_c E a_h^T E a_h X_c$, $\varepsilon c_h X_c E c_h^T E c_h X_c$ et $\varepsilon b_h (1 + \tau^{-1}) M_h^T E b_h^T E b_h M_h$, l'inégalité (3.84) peut être réécrite sous la forme :

$$\left[\begin{array}{cccc} \Sigma^+(A_h X_c - B_h M_h) + \varepsilon a_h H a_h H a_h^T + \varepsilon b_h H b_h H b_h^T + \mu_h^{-1} I & * & * & * \\ E a_h X_c & -\frac{\varepsilon a_h}{2} I & 0 & 0 \\ E b_h M_h & 0 & -\varepsilon b_h \left(\frac{\tau}{\tau + 1} \right) I & 0 \\ E c_h X_c & 0 & 0 & -2\varepsilon c_h I \end{array} \right] \quad (3.85)$$

Remarque 3.2 : On remarque que l'inégalité (3.85) est une LMI si on fixe les valeurs de τ et μ_i .

➤ **Mise sous forme LMI de l'inégalité (3.74)**

L'inégalité (3.74) s'écrit avec le changement de variables $N_i = P_o L_i$, $i = 1, \dots, r$:

$$\begin{aligned} \Sigma^+(P_o A_h - N_h C_h) + \varepsilon a_h^{-1} P_o H a_h H a_h^T P_o + \varepsilon b_h^{-1} P_o H b_h H b_h^T P_o + \varepsilon c_h^{-1} N_h H c_h H c_h^T N_h^T \\ + \varepsilon b_h (1 + \tau) K_h^T E b_h^T E b_h K_h + \mu_h K_h^T B_h^T B_h K_h < 0 \end{aligned} \quad (3.86)$$

On applique alors sur l'inégalité (3.86) le complément de Schur pour les termes : $\varepsilon a_h^{-1} P_o H a_h H a_h^T P_o$, $\varepsilon b_h^{-1} P_o H b_h H b_h^T P_o$, $\varepsilon c_h^{-1} N_h H c_h H c_h^T N_h^T$, $\varepsilon b_h (1 + \tau) K_h^T E b_h^T E b_h K_h$ et $\mu_h K_h^T B_h^T B_h K_h$:

$$\left[\begin{array}{cccccc} \Sigma^+(P_o A_h - N_h C_h) & * & * & * & * & * \\ H a_h^T P_o & -\varepsilon a_h I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H b_h^T P_o & 0 & -\varepsilon b_h I & 0 & 0 & 0 \\ H c_h^T N_h^T & 0 & 0 & -\varepsilon c_h I & 0 & 0 \\ E b_h K_h & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon b_h^{-1}}{1 + \tau} I & 0 \\ B_h K_h & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_h^{-1} I \end{array} \right] < 0 \quad (3.87)$$

Remarque 3.3 : On remarque que l'inégalité (3.87) est une LMI si on fixe les valeurs de τ , εb_i et μ_i .

Exemple 3.3 : Pour illustrer les résultats obtenus dans le théorème 3.9 on présente l'exemple du pendule inversé sur un chariot mobile présenté dans l'exemple 2.2 (figure 2.6), avec incertitude ΔA dans la matrice d'état. Alors le système incertain peut être décrit par le modèle TS incertain suivant :

Les règles du modèle :

$$\text{Règle 1: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } 0 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + B_1 u(t) \\ y_1(t) = C_1 x(t) \end{cases}$$

$$\text{Règle 2: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } \pm\pi/3 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A_2 + \Delta A_2)x(t) + B_2 u(t) \\ y_2(t) = C_2 x(t) \end{cases}$$

Les règles du contrôleur PDC :

$$\text{Règle 1: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } 0 \text{ Alors } u(t) = -K_1 \hat{x}(t)$$

$$\text{Règle 2: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } \pm\pi/3 \text{ Alors } u(t) = -K_2 \hat{x}(t)$$

Les règles de l'observateur :

$$\text{Règle 1: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } 0 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A_1 + \Delta A_1)\hat{x}(t) + B_1 u(t) + L_1(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}_1(t) = C_1 \hat{x}(t) \end{cases}$$

$$\text{Règle 2: Si } x_1(t) \text{ est Autour de } \pm\pi/3 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A_2 + \Delta A_2)\hat{x}(t) + B_2 u(t) + L_2(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}_2(t) = C_2 \hat{x}(t) \end{cases}$$

ΔA_1 et ΔA_2 représentent les incertitudes paramétriques bornées, les éléments de ΔA_1 et ΔA_2 représentent à 30% des valeurs nominales de A_1 et A_2 :

$$Ha_1 = Ha_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$Ea_1 = Ea_2 = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}, \quad Eb_1 = Eb_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La résolution des LMIs (3.85) et (3.87) nous a donné :

$$P_c = \begin{bmatrix} 0.3126 & 0.0598 & 0.0447 & 0.0707 \\ 0.0598 & 0.0116 & 0.0086 & 0.0136 \\ 0.0447 & 0.0086 & 0.0085 & 0.0105 \\ 0.0707 & 0.0136 & 0.0105 & 0.0164 \end{bmatrix}$$

$$P_o = 10^7 \begin{bmatrix} 7.7403 & -0.6015 & -0.2872 & -1.5449 \\ -0.6015 & 0.0873 & 0.0181 & 0.1912 \\ -0.2872 & 0.0181 & 3.3811 & 0.1587 \\ -1.5449 & 0.1912 & 0.1587 & 0.5838 \end{bmatrix}$$

Les gains du contrôleur et de l'observateur sont :

$$K_1 = 10^3 \begin{bmatrix} -1.0610 & -0.2050 & -0.1441 & -0.2524 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = 10^3 \begin{bmatrix} -1.0381 & -0.2007 & -0.1394 & -0.2459 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 14.8985 & 6.1804 \\ 519.3583 & 83.2311 \\ 4.6396 & 0.7001 \\ -119.5064 & -2.7686 \end{bmatrix} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 8.6078 & -5.5449 \\ 136.0979 & -142.5010 \\ -0.3687 & -1.0630 \\ -1.6042 & 28.8714 \end{bmatrix}$$

Les figures de 3.9 à 3.13 représentent les états et les états estimés ($x_1(t), \hat{x}_1(t)$), ($x_2(t), \hat{x}_2(t)$), ($x_3(t), \hat{x}_3(t)$), ($x_4(t), \hat{x}_4(t)$), et la commande $u(t)$ respectivement, avec les conditions initiales $x(0) = [-60, 0, 0, 0]^T$ et $\hat{x}(0) = [0, 0, 0, 0]^T$.

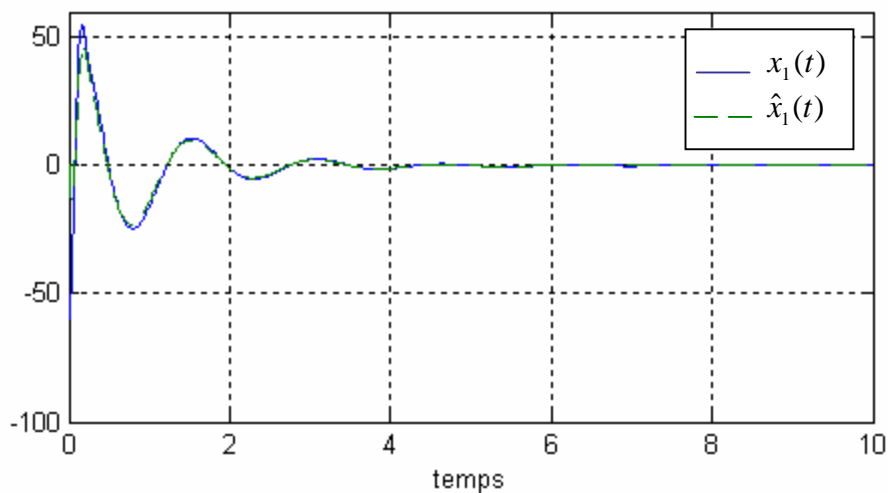


Figure 3.10 : Evolution de l'état $x_1(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_1(t)$

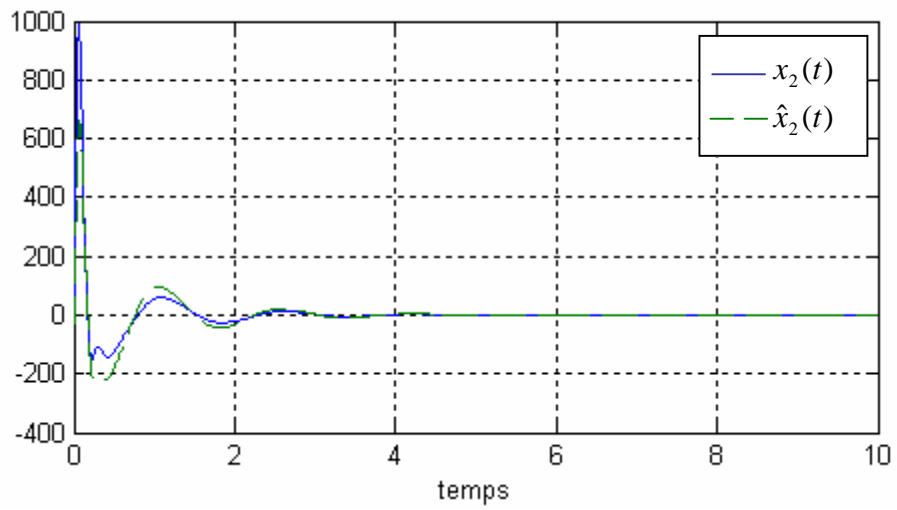


Figure 3.11 : Evolution de l'état $x_2(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_2(t)$

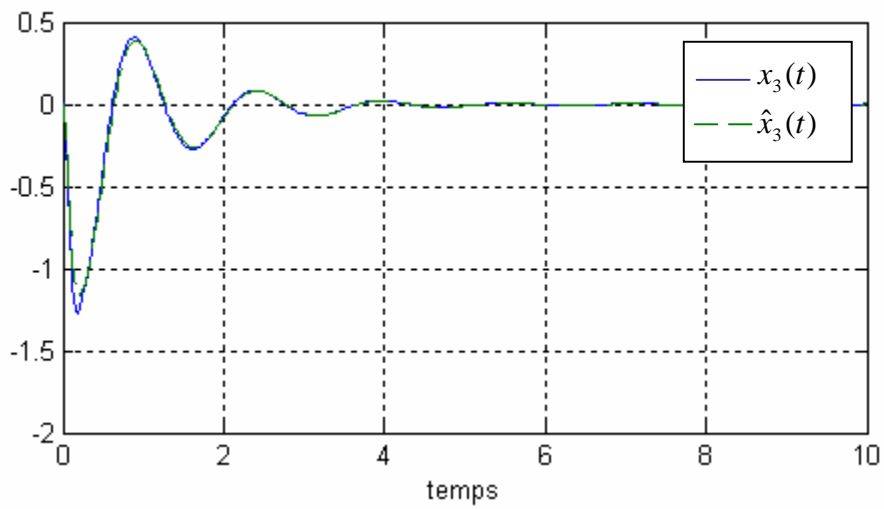


Figure 3.12 : Evolution de l'état $x_3(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_3(t)$

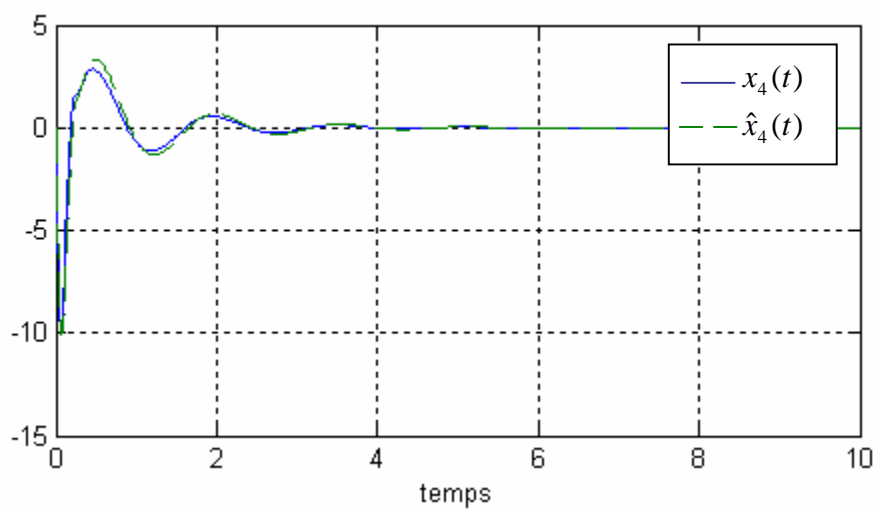


Figure 3.13 : Evolution de l'état $x_4(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_4(t)$

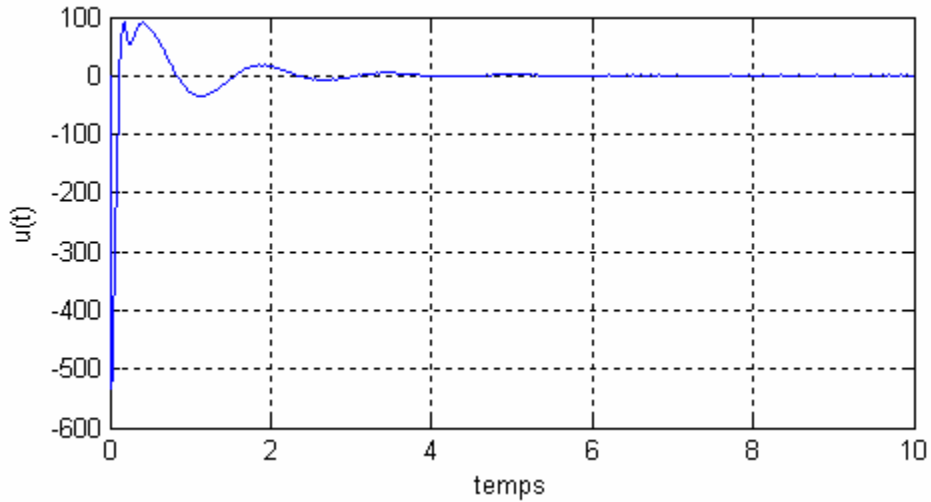


Figure 3.14 : Evolution de la commande $u(t)$

2.8. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la stabilisation par retour d'état des modèles TS incertains via la loi de commande PDC, puis nous avons présenté les performances de stabilisation à travers le taux de décroissance et le placement des pôles des sous modèles linéaires bouclés, et dans la dernière section nous avons introduit l'observateur flous pour l'estimation des états non mesurables dans le cas des variables de prémisse mesurable.