
4

Commande Multi-Contrôleurs Linéaires

4.1. Introduction.....	73
4.2. Représentation d'un modèle flou de Takagi-Sugeno incertain par un ensemble de systèmes incertain.....	73
4.3. Structure de la commande multi-contrôleurs.....	74
4.3.1. Condition de recouvrement de stabilité	76
4.3.2. Nombre de contrôleurs	76
4.4. Stabilisation par retour d'état.....	77
4.4.1. Stabilité globale	80
4.5. Maximisation de la marge de stabilité quadratique.....	85
4.5.1. Marge de stabilité quadratique d'un sous système flou incertain.....	86
4.5.2. Synthèse de loi de commande.....	87
4.6. Stabilisation par retour de sortie	93
4.7. Commande avec observateur	96
4.8. Conclusion	107

4.1. Introduction

Dans les parties précédentes, la loi de commande a été obtenue par interpolation des lois de commande linéaires locales dont le nombre de ces lois de commande locales est égal au nombre de règles. Dans ce chapitre, nous introduisons une autre méthode de la synthèse de commande dite multi-contrôleur pour les modèles flous TS incertain, où la loi de commande globale est obtenue par commutation entre des lois de commande locales.

4.2. Représentation d'un modèle flou de Takagi-Sugeno incertain par un ensemble de systèmes incertains

Pour surmonter les difficultés d'analyse et de commande résultants des interactions non linéaires entre les règles de modèle flou TS (3.2), on peut représenté le modèle flou de TS incertain par un ensemble de systèmes linéaires incertains. L'espace d'état global $S \in R^n$ est peut être décomposé en r sous espaces, chaque sous espace est défini comme :

$$S_l = \{S \mid h_l(z(t)) > 0, \quad l = 1, \dots, r\} \quad (4.1)$$

Ces sous espaces ont les propriétés suivantes :

$$\bigcup_{i=1}^r S_i = S \quad (4.2)$$

Si les règles i et j peuvent être actives en même temps, alors :

$$S_i \cap S_j \neq \emptyset \quad (4.3)$$

Si les règles i et j ne peuvent pas être actives en même temps, alors :

$$S_i \cap S_j = \emptyset \quad (4.4)$$

Dans chaque sous espace, le modèle de TS incertain (3.2) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left\{ A_l + \Delta A_l + \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h_i(z(t))(A_i - A_l + \Delta A_i - \Delta A_l) \right\} x(t) \\ \quad + \left\{ B_l + \Delta B_l + \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h_i(z(t))(B_i - B_l + \Delta B_i - \Delta B_l) \right\} u(t) \\ y(t) = \left\{ C_l + \Delta C_l + \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h_i(z(t))(C_i - C_l + \Delta C_i - \Delta C_l) \right\} x(t) \end{cases} \quad (4.5)$$

avec :

$$\sum_{R_l \in \mathfrak{R}_l} h_l(z(t)) = 1 - h_l(z(t)) \quad (4.6)$$

et $\mathfrak{R}_l, l = 1, 2, \dots, r$, est un sous ensemble de $\mathfrak{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_r\}$ contenant les règles qui peuvent être actives en même temps avec la règle R_l .

$$\mathfrak{R}_l = \{R_l, \exists t, h_l(z(t))h_l(z(t)) \neq 0\} \quad (4.7)$$

On peut réécrire (4.5) sous la forme [17] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \left\{ A_l + \Delta A_l + (1 - h_l(z(t))) (\Delta \bar{A}_l + \Delta \tilde{A}_l) \right\} x(t) \\ \quad + \left\{ B_l + \Delta B_l + (1 - h_l(z(t))) (\Delta \bar{B}_l + \Delta \tilde{B}_l) \right\} u(t) \\ y(t) = \left\{ C_l + \Delta C_l + (1 - h_l(z(t))) (\Delta \bar{C}_l + \Delta \tilde{C}_l) \right\} x(t) \end{cases} \quad (4.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{A}_l &= \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) (A_i - A_l), & \Delta \tilde{A}_l &= \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) (\Delta A_i - \Delta A_l) \\ \Delta \bar{B}_l &= \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) (B_i - B_l), & \Delta \tilde{B}_l &= \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) (\Delta B_i - \Delta B_l) \\ \Delta \bar{C}_l &= \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) (C_i - C_l), & \Delta \tilde{C}_l &= \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) (\Delta C_i - \Delta C_l) \end{aligned}$$

et

$$h'_i(z(t)) = \frac{h_i(z(t))}{1 - h_l(z(t))} \quad \text{avec} \quad \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) = 1$$

4.3. Structure de la commande multi-contrôleurs

Dans les deux chapitres précédents, nous avons utilisé un contrôleur flou dont la sortie est obtenue par l'agrégation des lois de commande locales. Dans ce chapitre, on suppose que le système flou TS (3.2) est localement contrôlable, et l'approche utilisé est basée sur l'utilisation d'un contrôleur à chaque région de l'espace d'état, le signal de commande est obtenu par commutation entre les différents contrôleurs comme illustré dans la figure 4.1.

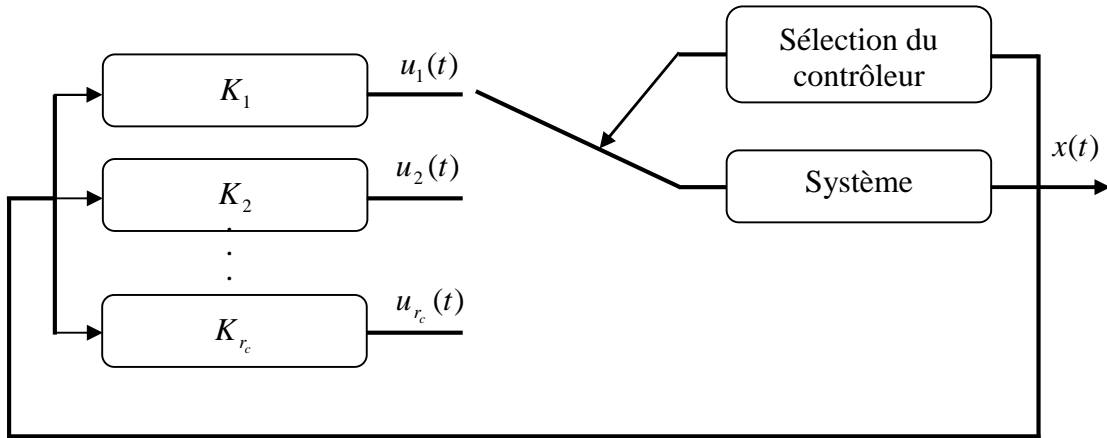


Figure 4.1 : Structure de la commande multi-contrôleurs

La loi de commande multi-contrôleurs peut être décrite par [8]:

$$u(t) = -\sum_{l=1}^{r_c} \alpha_l(z(t)) K_l x(t) \quad (4.9)$$

avec:

$$\sum_{l=1}^{r_c} \alpha_l(z(t)) = 1, \quad \alpha_l(z(t)) = \begin{cases} 1 & x(t) \in S_l^c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (4.10)$$

avec $S_l^c \in S_l$ est la sous région dans laquelle la commande est générée en utilisant le retour d'état local K_l à concevoir.

Remarque 4.1 : On peut remarquer que (4.9) est une combinaison linéaire de r_c retours d'états linéaires, le nombre de contrôleurs r_c peut être différent du nombre de règles r . A chaque instant, seulement un des retours d'états linéaires est sélectionné pour générer le signal de commande.

4.3.1. Condition de recouvrement de stabilité

Définition 4.1 : soient $S \subseteq R^n$ l'espace d'état et la valeur minimale $\underline{h}_l : \{ \forall t \ h_l(z(t)) \geq \underline{h}_l \}$,

on définit la sous région S_l comme :

$$S_l = \{ S \mid h_l(z(t)) > 0, \quad l = 1, \dots, r \}$$

et $S_l^s \subseteq S_l$ est :

$$S_l^s = \{ S \mid h_l(z(t)) \geq \underline{h}_l, \quad l = 1, \dots, r \}$$

On dit que la condition de recouvrement de stabilité [5] est satisfaite si :

$$\bigcup_{l=1}^r S_l^s = S \quad (4.11)$$

4.3.2. Nombre de contrôleurs

On peut distinguer trois cas possibles comme le montre la figure 4.2

- Le premier cas où plusieurs ou toutes les valeurs minimales $\underline{h}_l : l = 1, 2, \dots, r$ sont nulles, le nombre de sous régions qui vérifient la condition de recouvrement de stabilité (4.11) peut être plus petit que celui des règles, dans ce cas le nombre de contrôleurs est inférieur au nombre de règles.
- Le nombre de sous régions nécessaires pour vérifier la condition de recouvrement de stabilité (4.11) est le même que celui des règles ($r_c = r$), dans ce cas le nombre de contrôleurs est égal au nombre de règles.
- la condition de recouvrement de stabilité (4.11) n'est pas satisfaite, ($r_c > r$), le système globale peut être instable, dans ce cas deux solutions sont possibles, soit on utilise un autre modèle flou de Takagi-Sugeno avec un nombre plus élevé de règles, soit on ajoute de nouveaux contrôleurs sans changer de modèle, dans ce cas le nombre de contrôleurs est supérieur au nombre de règles.

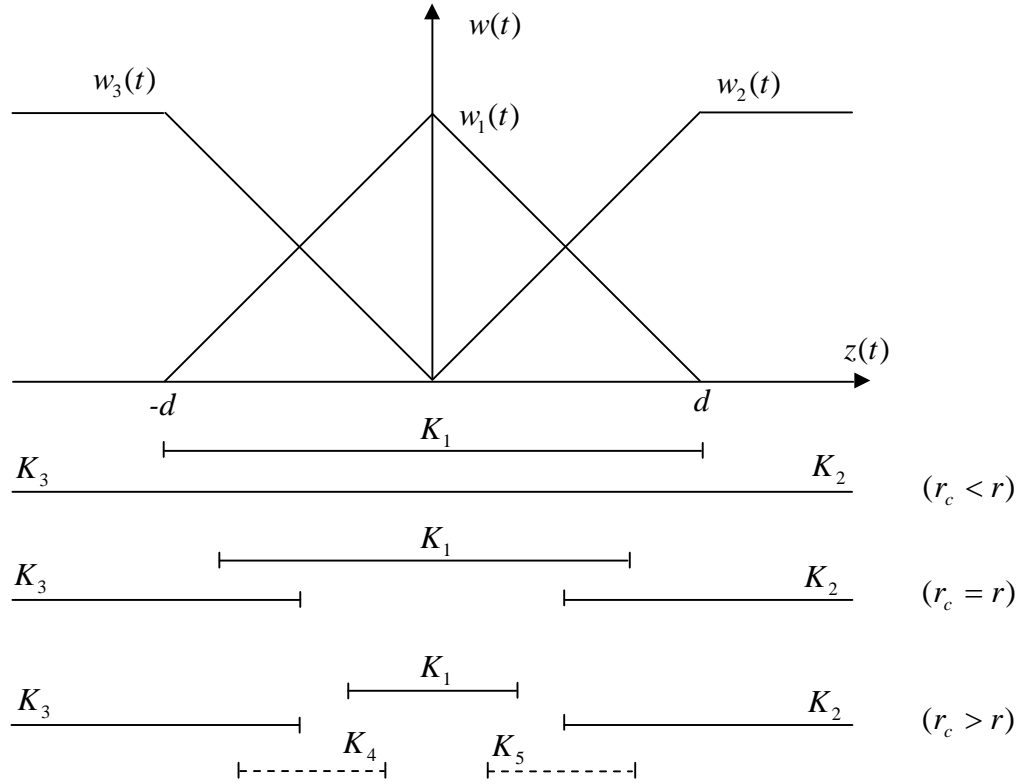


Figure 4.2 : Cas possibles du nombre de contrôleurs

4.4. Stabilisation par retour d'état

On peut réécrire (4.8) sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \left\{ A_l + H_l \Delta_l(t) E a_l + (1 - h_l(z(t))) (\bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) \bar{E} a_l + \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) \tilde{E} a_l) \right\} x(t) + \left\{ B_l + H_l \Delta_l(t) E b_l + (1 - h_l(z(t))) (\bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) \bar{E} b_l + \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) \tilde{E} b_l) \right\} u(t) \quad (4.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} [\Delta A_l(z(t)) \quad \Delta B_l(z(t))] &= H_l \Delta_l(t) [E a_l \quad E b_l] \\ [\bar{\Delta} A_l(z(t)) \quad \bar{\Delta} B_l(z(t))] &= \bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) [\bar{E} a_l \quad \bar{E} b_l] \\ [\tilde{\Delta} A_l(z(t)) \quad \tilde{\Delta} B_l(z(t))] &= \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) [\tilde{E} a_l \quad \tilde{E} b_l] \end{aligned} \quad (4.13)$$

et

$$\begin{aligned} \bar{H}_l &= [\bar{H}_{l_1} \quad \dots \quad \bar{H}_{l_r}], \quad \bar{\Delta}_l(t) = \text{diag}[h_{l_1} \bar{\Delta}_{l_1}(t) \quad \dots \quad h_{l_r} \bar{\Delta}_{l_r}(t)], \quad \bar{E} a_l = [\bar{E} a_{l_1} \quad \dots \quad \bar{E} a_{l_r}] \\ \tilde{H}_l &= [\tilde{H}_{l_1} \quad \dots \quad \tilde{H}_{l_r}], \quad \tilde{\Delta}_l(t) = \text{diag}[h_{l_1} \tilde{\Delta}_{l_1}(t) \quad \dots \quad h_{l_r} \tilde{\Delta}_{l_r}(t)], \quad \tilde{E} a_l = [\tilde{E} a_{l_1} \quad \dots \quad \tilde{E} a_{l_r}] \\ \bar{E} b_l &= [\bar{E} b_{l_1} \quad \dots \quad \bar{E} b_{l_r}], \quad \tilde{E} b_l = [\tilde{E} b_{l_1} \quad \dots \quad \tilde{E} b_{l_r}] \end{aligned} \quad (4.14)$$

Avec $\bar{\Delta}_l(t)$ et $\tilde{\Delta}_l(t)$ ayants les mêmes propriétés que (3.5).

En utilisant une loi de commande floue multi-contrôleurs (4.9), pour $x(t) \in S_l$ la boucle fermée du système devient :

$$\dot{x}(t) = \left\{ A_l - B_l K_l + H_l \Delta_l(t) (E a_l - E b_l K_l) + (1 - h_l(z(t))) \left[\bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) (\bar{E} a_l - \bar{E} b_l K_l) + \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) (\tilde{E} a_l - \tilde{E} b_l K_l) \right] \right\} x(t) \quad (4.15)$$

Théorème 4.1 [17] : Le modèle flou TS incertain (4.15) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice symétrique définie positive $X_l = P_l^{-1} > 0$, et des scalaires positives $\varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l$, et $0 \leq \underline{h}_l < 1$ tels que l'inégalité matricielle suivante est satisfait :

$$\begin{bmatrix} \phi_l & * & * & * \\ E a_l X_l - E b_l M_l & -\varepsilon_l I & 0 & 0 \\ \bar{E} a_l X_l - \bar{E} b_l M_l & 0 & -\frac{\bar{\varepsilon}_l}{1 - \underline{h}_l} I & 0 \\ \tilde{E} a_l X_l - \tilde{E} b_l M_l & 0 & 0 & -\frac{\tilde{\varepsilon}_l}{1 - \underline{h}_l} I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

avec :

$$\phi_l = X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + \varepsilon_l H_l H_l^T + (1 - \underline{h}_l) \left[\bar{\varepsilon}_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T + \tilde{\varepsilon}_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T \right]$$

et

La valeur minimale $\underline{h}_l : \{ \forall t \ h_l(z(t)) \geq \underline{h}_l \}$ peut être déterminée par le programme de minimisation suivant :

Minimiser \underline{h}_l
 $X_l, M_l, \varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l$

Pour $P_l = P_l^T > 0, \ \varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l > 0, \ l = 1, 2, \dots, r$

LMI (4.16)

Preuve :

Pour prouver ce théorème, on utilise la fonction candidate de Lyapunov :

$$V_l(x(t)) = x^T(t) P_l x(t) \quad (4.17)$$

avec $P_l, \ l = 1, 2, \dots, r$ est une matrice symétrique définie positive.

Pour assurer la stabilité asymptotique formulée dans le théorème 4.1, la dérivée, par rapport au temps de la fonction de Lyapunov (4.17) est strictement négative. Ce qui revient à vérifier que :

$$\dot{x}^T(t)P_l x(t) + x^T(t)P_l \dot{x}(t) < 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x^T(t) \left\{ A_l - B_l K_l + H_l \Delta_l(t) (Ea_l - Eb_l K_l) + (1-h_l) \left[\bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l) \right] \right\}^T P_l x(t) + x^T(t) P_l \left\{ A_l - B_l K_l + H_l \Delta_l(t) (Ea_l - Eb_l K_l) \right. \\ &\quad \left. + (1-h_l) \left[\bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l) + \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l) \right] \right\} x(t) \\ &= x^T(t) \left\{ (A_l - B_l K_l)^T P_l + P_l (A_l - B_l K_l) + (Ea_l - Eb_l K_l)^T \Delta_l^T(t) H_l^T P_l \right. \\ &\quad \left. + P_l H_l \Delta_l(t) (Ea_l - Eb_l K_l) + (1-h_l) \left[(\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l)^T \bar{\Delta}_l^T(t) \bar{H}_l^T P_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + P_l \bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l) + (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l)^T \tilde{\Delta}_l^T(t) \tilde{H}_l^T P_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + P_l \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l) \right] \right\} x(t) \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.6 (la propriété (1.34)) et en considérant les bornes (3.5) :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq x^T(t) \left\{ (A_l - B_l K_l)^T P_l + P_l (A_l - B_l K_l) + \varepsilon_l P_l H_l H_l^T P_l \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_l^{-1} (Ea_l - Eb_l K_l)^T (Ea_l - Eb_l K_l) + (1-h_l) \left[\bar{\varepsilon}_l P_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T P_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \bar{\varepsilon}_l^{-1} (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l)^T (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l) + \tilde{\varepsilon}_l P_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T P_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tilde{\varepsilon}_l^{-1} (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l)^T (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l) \right] \right\} x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) < 0 \Rightarrow (A_l - B_l K_l)^T P_l + P_l (A_l - B_l K_l) + \varepsilon_l P_l H_l H_l^T P_l + \varepsilon_l^{-1} (Ea_l - Eb_l K_l)^T (Ea_l - Eb_l K_l) \\ + (1-h_l) \left[\bar{\varepsilon}_l P_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T P_l + \bar{\varepsilon}_l^{-1} (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l)^T (\bar{E}a_l - \bar{E}b_l K_l) + \tilde{\varepsilon}_l P_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T P_l \right. \\ \left. + \tilde{\varepsilon}_l^{-1} (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l)^T (\tilde{E}a_l - \tilde{E}b_l K_l) \right] < 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

Après la congruence avec P_l^{-1} , on fait le changement de variable $X_l = P_l^{-1} x$ puis $M_l = K_l X_l$

(4.18) s'écrit :

$$\begin{aligned} X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + \varepsilon_l H_l H_l^T + (1-h_l) \left[\bar{\varepsilon}_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T + \tilde{\varepsilon}_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T \right] \\ + \varepsilon_l^{-1} (Ea_l X_l - Eb_l M_l)^T (Ea_l X_l - Eb_l M_l) + (1-h_l) \left[\bar{\varepsilon}_l^{-1} (\bar{E}a_l X_l - \bar{E}b_l M_l)^T (\bar{E}a_l X_l - \bar{E}b_l M_l) \right. \\ \left. + \tilde{\varepsilon}_l^{-1} (\tilde{E}a_l X_l - \tilde{E}b_l M_l)^T (\tilde{E}a_l X_l - \tilde{E}b_l M_l) \right] < 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

En appliquant la propriété de complément de Shur sur (4.19), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \phi_l & * & * & * \\ Ea_l X_l - Eb_l M_l & -\varepsilon_l I & 0 & 0 \\ \bar{E}a_l X_l - \bar{E}b_l M_l & 0 & -\frac{\bar{\varepsilon}_l}{1-h_l} I & 0 \\ \tilde{E}a_l X_l - \tilde{E}b_l M_l & 0 & 0 & -\frac{\tilde{\varepsilon}_l I}{1-h_l} I \end{bmatrix} < 0$$

avec :

$$\phi_l = X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + \varepsilon_l H_l H_l^T + (1-h_l) [\bar{\varepsilon}_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T + \tilde{\varepsilon}_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T]$$

Alors si le système local incertain $(A_l + \Delta A_l, B_l + \Delta B_l)$ est contrôlable, il existe une valeur minimale \underline{h}_l tel que pour $\underline{h}_l \leq h_l(z(t)) \leq 1$ et la LMI (4.16) est toujours faisable.

4.4.1. Stabilité globale

On définit une nouvelle partition de l'espace d'état comme :

$$S_l^c = \{S_l \mid h_l(z(t)) \leq h_l^c\}, \quad h_l^c \geq \underline{h}_l, \quad l \in \iota_c$$

et

$$\bigcup_{l \in \iota_c} S_l^c = S$$

avec $l \in \iota_c = \{1, 2, \dots, r\}$ est un ensemble contenant les indices des sous régions sélectionnées pour former la nouvelle partition de l'espace d'état, $S_l^c \subseteq S_l^s$ est la sous région dans laquelle la commande est générée en utilisant le retour d'état local K_l à concevoir et $h_l^c \geq \underline{h}_l$ définit les frontières de chaque sous région S_l^c associée au retour d'état linéaire K_l :

$$\partial S_l^c = \{S_l^c \mid h_l(z(t)) = h_l^c\}, \quad l \in \iota_c$$

Remarque 4.2 [17] : les valeurs de h_l^c et $l \in \iota_c$ sont choisies tel que la condition de recouvrement de stabilité (4.11) soit vérifiée et n'importe quelles sous régions adjacentes S_i^c et S_j^c vérifient la condition suivante :

$$S_i^c \cap S_j^c = \partial S_i^c \cap \partial S_j^c$$

Soient $\tau_i, i = 1, 2, \dots, N$ les instants pendant lesquels l'état du système atteint la frontière d'une sous région $S_l^c, l \in \iota_c$.

Théorème 4.2 [17] : On suppose que l'état du système est continu pendant les instants de transition $\tau_i, i = 1, 2, \dots, N$:

$$x(\tau_i^-) = x(\tau_i) = x(\tau_i^+)$$

Alors, le système flou TS incertain (4.5) est globalement asymptotiquement stable si le nombre de transition est finie et la condition de recouvrement de stabilité est vérifiée.

A partir le théorème 4.2, le théorème suivant permet de tester la stabilité globale du système flou (4.15).

Théorème 4.3: s'il existe une matrice symétrique définie positive $X_l = P_l^{-1} > 0$, et des scalaires positives $\varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l, l \in \mathcal{L}_c$, et $\underline{h}_l \leq h_l^c < 1$ tels que :

1- La condition de recouvrement de stabilité est vérifiée:

$$\bigcup_{l \in \mathcal{L}_c} S_l^c = S$$

$$2- \begin{bmatrix} \phi_l & * & * & * \\ Ea_l X_l - Eb_l M_l & -\varepsilon_l I & 0 & 0 \\ \bar{E}a_l X_l - \bar{E}b_l M_l & 0 & -\frac{\bar{\varepsilon}_l}{1-h_l^c} I & 0 \\ \tilde{E}a_l X_l - \tilde{E}b_l M_l & 0 & 0 & -\frac{\tilde{\varepsilon}_l}{1-h_l^c} I \end{bmatrix} < 0$$

avec :

$$\phi_l = X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + \varepsilon_l H_l H_l^T + (1-h_l^c) \left[\bar{\varepsilon}_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T + \tilde{\varepsilon}_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T \right]$$

3- $P_i \leq P_j$, pour toutes les transitions d'états $x(\tau^-) \in S_j, x(\tau^+) \in S_i$

Alors le modèle flou TS incertain (4.15) est globalement asymptotiquement stable

Exemple 4.1 :

Cette méthode a été appliquée pour la stabilisation du système chaotique de Lorenz de l'exemple 3.2, prenant $w_1(x_1(t))$ et $w_2(x_1(t))$ comme des fonctions d'appartenance figure 4.3.

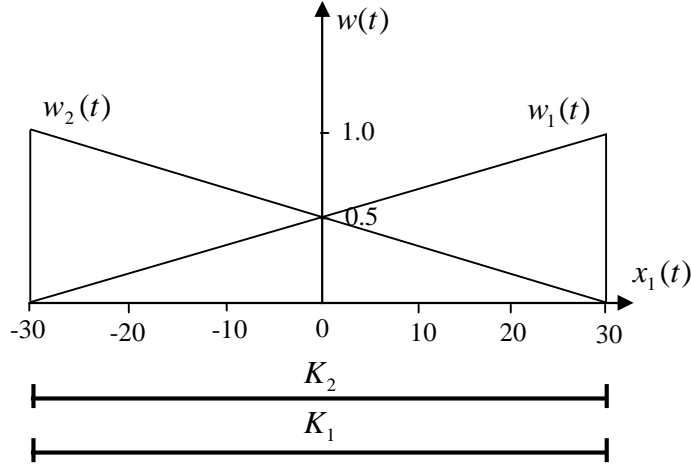


Figure 4.3 : Fonctions d'appartenance

Le système chaotique de Lorenz incertain peut être décrit par le modèle TS incertain suivant :

Règle1: Si $x_1(t)$ est autour de M_1 Alors $\dot{x}(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + (B_1 + \Delta B_1)u(t)$

Règle2: Si $x_1(t)$ est autour de M_2 Alors $\dot{x}(t) = (A_2 + \Delta A_2)x(t) + (B_2 + \Delta B_2)u(t)$

Le modèle flou peut être décomposé en deux sous systèmes :

➤ Sous système 1 :

$$\dot{x}(t) = \{A_1 + \Delta A_1 + (1 - h_1(t))(\Delta \bar{A}_1 + \Delta \tilde{A}_1)\}x(t) + \{B_1 + \Delta B_1 + (1 - h_1(t))(\Delta \bar{B}_1 + \Delta \tilde{B}_1)\}u(t)$$

$$\Delta \bar{A}_1 = h'_2(t)(A_2 - A_1), \quad \Delta \bar{B}_1 = h'_2(t)(B_2 - B_1)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & -30 \\ 0 & 30 & -2.67 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 30 \\ 0 & -30 & -2.67 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \bar{A}_1 = h'_2(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \\ 0 & -60 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{A}_1 = \bar{H}_1 \bar{E} a_1 \\ \Delta \bar{B}_1 = \bar{H}_1 \bar{E} b_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} a_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \\ 0 & -60 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} b_1 = 0$$

$$\Delta \tilde{A}_1 = h'_2(t)(\Delta A_2 - \Delta A_1), \quad \Delta \tilde{B}_1 = h'_2(t)(\Delta B_2 - \Delta B_1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \tilde{A}_1 = \tilde{H}_1 \tilde{\Delta}_1(t) \tilde{E} a_1 \\ \Delta \tilde{B}_1 = \tilde{H}_1 \tilde{\Delta}_1(t) \tilde{E} b_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{H}_1 = 0, \quad \tilde{E} a_1 = 0, \quad \tilde{E} b_1 = 0$$

➤ *Sous système 2 :*

$$\dot{x}(t) = \left\{ A_2 + \Delta A_2 + (1-h_1(t))(\Delta \bar{A}_2 + \Delta \tilde{A}_2) \right\} x(t) + \left\{ B_2 + \Delta B_2 + (1-h_1(t))(\Delta \bar{B}_2 + \Delta \tilde{B}_2) \right\} u(t)$$

$$\Delta \bar{A}_2 = h_1'(t)(A_1 - A_2), \quad \Delta \bar{B}_2 = h_1'(t)(B_1 - B_2)$$

$$\Delta \bar{A}_2 = h_1'(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \\ 0 & 60 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \bar{A}_2 = \bar{H}_2 \bar{E} a_2 \\ \Delta \bar{B}_2 = \bar{H}_2 \bar{E} b_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -60 \\ 0 & 60 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{E} b_2 = 0$$

$$\Delta \tilde{A}_2 = h_1'(t)(\Delta A_1 - \Delta A_2), \quad \Delta \tilde{B}_2 = h_1'(t)(\Delta B_1 - \Delta B_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \tilde{A}_2 = \tilde{H}_2 \tilde{\Delta}_2(t) \tilde{E} a_2 \\ \Delta \tilde{B}_2 = \tilde{H}_2 \tilde{\Delta}_2(t) \tilde{E} b_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{H}_2 = 0, \quad \tilde{E} a_2 = 0, \quad \tilde{E} b_2 = 0$$

Les résultats obtenus après la résolution du programme de minimisation (4.16) :

➤ *Sous système 1 :*

$$\underline{h}_1 = 0, \quad \varepsilon_1 = 547.5204, \quad \bar{\varepsilon}_1 = 4.6360 \times 10^4, \quad \tilde{\varepsilon}_1 = 1.6268 \times 10^4$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.4028 & 0.1270 & -0.0351 \\ 0.1270 & 0.0843 & -0.0066 \\ -0.0351 & -0.0066 & 0.0436 \end{bmatrix}, \quad K_1 = [205.6344 \quad 77.9079 \quad -19.1495]$$

➤ *Sous système 2 :*

$$\underline{h}_2 = 0, \quad \varepsilon_2 = 547.5204, \quad \bar{\varepsilon}_2 = 4.6360 \times 10^4, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = 1.6268 \times 10^4$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.4028 & 0.1270 & 0.0351 \\ 0.1270 & 0.0843 & 0.0066 \\ 0.0351 & 0.0066 & 0.0436 \end{bmatrix}, \quad K_2 = [205.6344 \quad 77.9079 \quad 19.1495]$$

Le système chaotique de Lorenz peut être commandé en utilisant un retour d'état seulement $u(t) = K_1 x(t)$ ou $u(t) = K_2 x(t)$. Les figures 4.4 à 4.6 représentent la trajectoire de phase, les états et la commande du système chaotique de Lorenz pour l'état initial $x(0) = [10, -10, -10]^T$. Le temps de simulation est 20s et la commande a été appliquée à $t = 10s$.

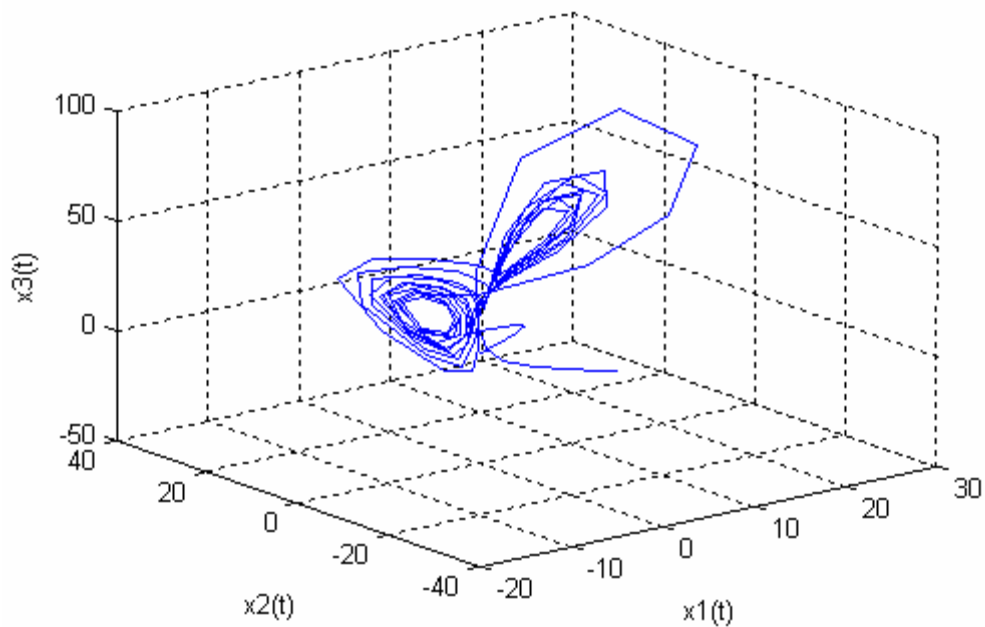


Figure 4.4 : Trajectoire de phase du système chaotique

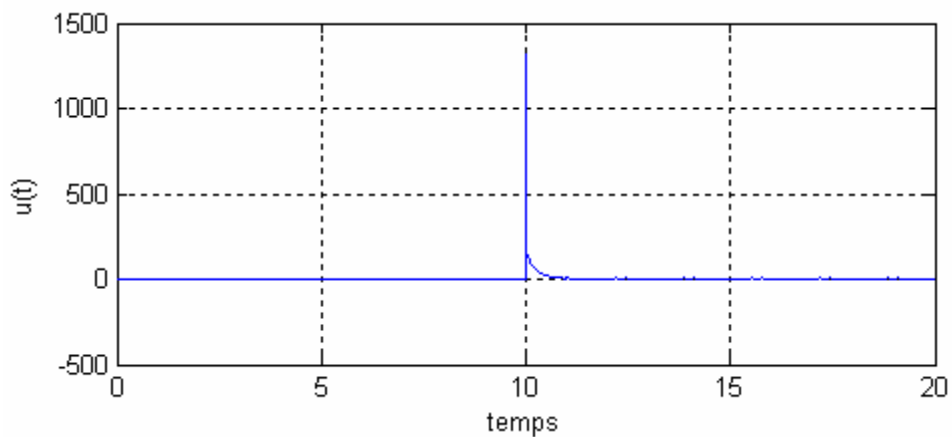


Figure 4.5 : Evolution de la commande $u(t)$

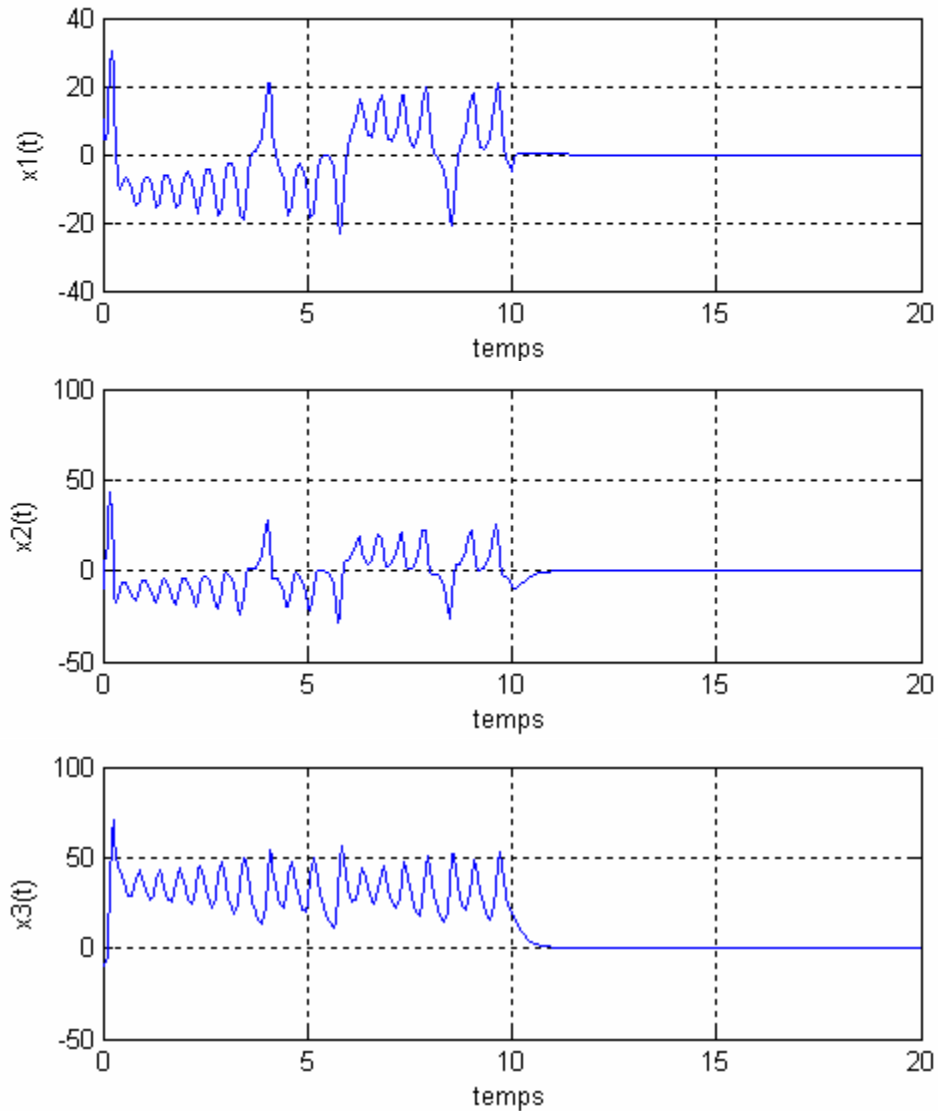


Figure 4.6 : Evolution des états

4.5. Maximisation de la marge de stabilité quadratique

L'idée essentielle proposée dans [17], est de concevoir des contrôleurs locaux assurant la maximisation de la région de stabilité quadratique de chaque modèle local en boucle fermé.

Définition 4.2 [3] : Les marges de stabilité quadratiques donnent une mesure de diffusion d'un ensemble d'incertitudes autour d'un centre dans lequel le système incertain est quadratiquement stable.

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t), \quad \Delta A(t) \in h(t)Co\{A_1, A_2, \dots, A_r\} \quad (4.20)$$

Nous définissons la marge de stabilité quadratique comme la plus grande valeur non négative de $h(t)$ pour la quelle il est quadratiquement stable. Cette valeur peut être déterminée par la résolution du problème généralisé de valeur propre GEVP (Generalized Eigen Value Problem) suivant pour P et h :

$$\begin{aligned} & \text{maximiser } h \\ & \text{pour } P = P^T > 0, h \geq 0 \\ & A^T P + PA + h(A_i^T P + PA_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.5.1. Marge de stabilité quadratique d'un sous système flou incertain

Lorsque la règle R_l est active, le système flou incertain non forcé peut être écrit sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \left\{ h_l(t)(A_l + \Delta A_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_i + \Delta A_i) \right\} x(t) \quad (4.22)$$

avec :

$$h'_i(t) = \frac{h_i(t)}{1 - h_l(t)} \quad (4.23)$$

Selon la définition 4.2, la valeur minimale \underline{h}_l pour laquelle le sous système flou (4.22) associé à la règle R_l est quadratiquement stable, peut être déterminée par la résolution du problème GEVP suivant pour P et h :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \underline{h}_l \\ & \text{pour } P_l = P_l^T > 0, \quad 0 \leq \underline{h}_l < 1 \\ & \text{tels que } \underline{h}_l \left\{ (A_l + \Delta A_l)^T P_l + P_l (A_l + \Delta A_l) \right\} + (1 - \underline{h}_l) \left\{ (A_i + \Delta A_i)^T P_i + P_i (A_i + \Delta A_i) \right\} < 0, \\ & R_i \in \mathfrak{R}_l \end{aligned} \quad (4.24)$$

Alors, la marge de stabilité quadratique est donnée par :

$$\bar{\beta}_l = 1 - \underline{h}_l \quad (4.25)$$

Le programme de minimisation (4.24) peut être mis sous la forme [17]:

$$\begin{aligned}
& \text{minimiser } \underline{h}_l \\
& \text{pour } P_l = P_l^T > 0, \quad Q_l > 0, \quad 0 \leq \underline{h}_l < 1 \\
& \text{tels que } (A_l + \Delta A_l)^T P_l + P_l (A_l + \Delta A_l) < -Q_l \\
& \quad (A_l + \Delta A_l)^T P_l + P_l (A_l + \Delta A_l) \leq \frac{\underline{h}_l}{1 - \underline{h}_l} Q_l, \quad R_l \in \mathfrak{R}_l
\end{aligned} \tag{4.26}$$

avec $Q_l \in R^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive.

4.5.2. Synthèse de loi de commande

Le sous système flou incertain associé à la règle l du système flou TS incertain (3.2), peut être représenté comme :

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = & \left\{ h_l(t)(A_l + \Delta A_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_i + \Delta A_i) \right\} x(t) \\
& + \left\{ h_l(t)(B_l + \Delta B_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(B_i + \Delta B_i) \right\} u(t)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Théorème 4.4 : S'il existe des matrices symétriques définies positives $X_l = X_l^T > 0$, $Y_l = Y_l^T > 0$, des scalaires positifs $\varepsilon_{li} > 0$, $R_l \in \mathfrak{R}_l$, et un scalaire $\mu_l > 0$ tels que les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix}
\underline{u} + Y_l & * & * \\
\varepsilon_l H_l^T & -\varepsilon_l I & 0 \\
Ea_l X_l - Eb_l M_l & 0 & -\varepsilon_l I
\end{bmatrix} < 0 \tag{4.28}$$

$$\begin{bmatrix}
\underline{u}_i - \mu_l Y_l & * & * \\
\varepsilon_i H_i^T & -\varepsilon_i I & 0 \\
Ea_i X_l - Eb_i M_l & 0 & -\varepsilon_i I
\end{bmatrix} \leq 0, \quad R_l \in \mathfrak{R}_l, \quad i \neq l \tag{4.29}$$

$$\underline{u}_i = X_l A_i^T + A_i X_l - M_l^T B_i^T - B_i M_l$$

alors le sous système flou est quadratiquement stable et le retour d'état local est donné par :

$$K_l = M_l X_l^{-1} \tag{4.30}$$

Preuve :

Soit la fonction candidate de Lyapunov :

$$V(x(t)) = x^T(t)P_l x(t) \quad (4.31)$$

La dérivée de la fonction (4.29) est alors :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^T(t) \left\{ h_l \left([A_l + \Delta A_l - B_l K_l - \Delta B_l K_l]^T P_l + P_l [A_l + \Delta A_l - B_l K_l - \Delta B_l K_l] \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - h_l) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) \left([A_i + \Delta A_i - B_i K_i - \Delta B_i K_i]^T P_l \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + P_l [A_i + \Delta A_i - B_i K_i - \Delta B_i K_i] \right) \right\} x(t) \\ &= x^T(t) \left\{ \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) \left\{ h_l \left([A_l + \Delta A_l - B_l K_l - \Delta B_l K_l]^T P_l + P_l [A_l + \Delta A_l - B_l K_l - \Delta B_l K_l] \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - h_l) \left([A_i + \Delta A_i - B_i K_i - \Delta B_i K_i]^T P_l + P_l [A_i + \Delta A_i - B_i K_i - \Delta B_i K_i] \right) \right\} \right\} x(t) \end{aligned} \quad (4.32)$$

Le système est stable s'il existe P_l telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_l) &= A_l^T P_l + P_l A_l + \Delta A_l^T P_l + P_l \Delta A_l - K_l^T B_l^T P_l - P_l B_l K_l - K_l^T \Delta B_l^T P_l - P_l \Delta B_l K_l \\ &\quad + \frac{1 - h_l}{h_l} \left(A_i^T P_l + P_l A_i + \Delta A_i^T P_l + P_l \Delta A_i - K_l^T B_i^T P_l - P_l B_i K_l - K_l^T \Delta B_i^T P_l - P_l \Delta B_i K_l \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_l) &= [A_l - B_l K_l]^T P_l + P_l [A_l - B_l K_l] + [E a_l - E b_l K_l]^T \Delta_l^T(t) H_l^T P_l \\ &\quad + P_l H_l \Delta_l(t) [E a_l - E b_l K_l] + \frac{1 - h_l}{h_l} \left\{ [A_i - B_i K_i]^T P_l + P_l [A_i - B_i K_i] \right. \\ &\quad \left. + [E a_i - E b_i K_i]^T \Delta_i^T(t) H_i^T P_l + P_l H_i \Delta_i(t) [E a_i - E b_i K_i] \right\} < 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

En appliquant le lemme 1.6 (propriété (1.34)) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_l) &\leq [A_l - B_l K_l]^T P_l + P_l [A_l - B_l K_l] + \varepsilon_l P_l H_l H_l^T P_l \\ &\quad + \varepsilon_l^{-1} [E a_l - E b_l K_l]^T \Delta_l^T(t) \Delta_l(t) [E a_l - E b_l K_l] + \frac{1 - h_l}{h_l} \left\{ [A_i - B_i K_i]^T P_l \right. \\ &\quad \left. + P_l [A_i - B_i K_i] + \varepsilon_{li} P_l H_i H_i^T P_l + \varepsilon_{li}^{-1} [E a_i - E b_i K_i]^T \Delta_i^T(t) \Delta_i(t) [E a_i - E b_i K_i] \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Puisque $\Delta_l^T(t) \Delta_l(t) < I$, (4.32) sera :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P_l) &\leq [A_l - B_l K_l]^T P_l + P_l [A_l - B_l K_l] + \varepsilon_l P_l H_l H_l^T P_l \\ &\quad + \varepsilon_l^{-1} [E a_l - E b_l K_l]^T H_l^T [E a_l - E b_l K_l] + \frac{1 - h_l}{h_l} \left\{ [A_i - B_i K_i]^T P_l + P_l [A_i - B_i K_i] \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{li} P_l H_i H_i^T P_l + \varepsilon_{li}^{-1} [E a_i - E b_i K_i]^T [E a_i - E b_i K_i] \right\} \end{aligned}$$

Après la congruence avec P_l^{-1} , et le changement de variable $X_l = P^{-1}$ et $M_l = K_l X_l$, on obtient :

$$\begin{aligned} & X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + \varepsilon_l H_l H_l^T + \varepsilon_l^{-1} [E a_l X_l - E b_l M_l]^T [E a_l X_l - E b_l M_l] \\ & + \frac{1-h_l}{h_l} \left\{ X_l A_i^T + A_i X_l - M_l^T B_i^T - B_i M_l + \varepsilon_{li} H_i H_i^T \right. \\ & \left. + \varepsilon_{li}^{-1} [E a_i X_l - E b_i M_l]^T [E a_i X_l - E b_i M_l] \right\} < 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

La supposition que :

$$\begin{aligned} & X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + \varepsilon_l H_l H_l^T \\ & + \varepsilon_l^{-1} [E a_l X_l - E b_l M_l]^T [E a_l X_l - E b_l M_l] + Y_l < 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1-h_l}{h_l} \left\{ X_l A_i^T + A_i X_l - M_l^T B_i^T - B_i M_l + \varepsilon_{li} H_i H_i^T \right. \\ & \left. + \varepsilon_{li}^{-1} [E a_i X_l - E b_i M_l]^T [E a_i X_l - E b_i M_l] \right\} \leq Y_l \end{aligned} \quad (4.37)$$

On pose :

$$\mu_l = \frac{1-h_l}{h_l} \Rightarrow h_l = \frac{\mu_l}{1+\mu_l} \quad (4.38)$$

alors (4.37) devient :

$$\begin{aligned} & X_l A_i^T + A_i X_l - M_l^T B_i^T - B_i M_l + \varepsilon_{li} H_i H_i^T \\ & + \varepsilon_{li}^{-1} [E a_i X_l - E b_i M_l]^T [E a_i X_l - E b_i M_l] - \mu_l Y_l \leq 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

En appliquant le complément de Schur à (4.36) et (4.39), on obtient les LMIs données dans le théorème 4.2 :

$$\begin{bmatrix} X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l + Y_l & * & * \\ \varepsilon_l H_l^T & -\varepsilon_l I & 0 \\ E a_l X_l - E b_l M_l & 0 & -\varepsilon_l I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.40)$$

$$\begin{bmatrix} X_l A_i^T + A_i X_l - M_l^T B_i^T - B_i M_l - \mu_l Y_l & * & * \\ \varepsilon_i H_i^T & -\varepsilon_i I & 0 \\ E a_i X_l - E b_i M_l & 0 & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} \leq 0, \quad R_i \in \mathfrak{R}_l, \quad i \neq l \quad (4.41)$$

Pour déterminer le gain K_l de façon à maximiser la marge de stabilité quadratique du sous système flou incertain (4.27), on résout le programme de minimisation suivant :

Minimiser μ_l

sujet à $X_l = X_l^T > 0, Y_l > 0, \varepsilon_l > 0, \varepsilon_i > 0, \mu_l > 0$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mu_l + Y_l & * & * \\ \varepsilon_l H_l^T & -\varepsilon_l I & 0 \\ E a_l X_l - E b_l M_l & 0 & -\varepsilon_l I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} \mu_l - \mu_l Y_l & * & * \\ \varepsilon_i H_i^T & -\varepsilon_i I & 0 \\ E a_i X_l - E b_i M_l & 0 & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} \leq 0, \quad R_i \in \mathfrak{R}_l, \quad i \neq l \\ & \mu_l = X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l \end{aligned} \quad (4.42)$$

Le retour d'état local donné par :

$$K_l = M_l X_l^{-1}$$

Théorème 4.5: s'il existe des matrices symétriques définies positives $X_l = P_l^{-1} > 0$,

$Y_l = Y_l^T > 0$ et des scalaires positives $\varepsilon_{ii} > 0, l \in \iota_c$ et $\underline{h}_l \leq h_l^c < 1$ tels que :

1- La condition de recouvrement de stabilité est vérifiée:

$$\bigcup_{l \in \iota_c} S_l^c = S$$

2-

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mu_l + Y_l & * & * \\ \varepsilon_l H_l^T & -\varepsilon_l I & 0 \\ E a_l X_l - E b_l M_l & 0 & -\varepsilon_l I \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} \mu_l - \mu_l Y_l & * & * \\ \varepsilon_i H_i^T & -\varepsilon_i I & 0 \\ E a_i X_l - E b_i M_l & 0 & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} \leq 0, \quad R_i \in \mathfrak{R}_l, \quad i \neq l \end{aligned}$$

avec :

$$\mu_l = X_l A_l^T + A_l X_l - M_l^T B_l^T - B_l M_l$$

et

$$h_l^c \geq \frac{\underline{\mu}_l}{1 + \underline{\mu}_l}$$

3- $P_i \leq P_j$, pour toutes les transitions d'états $x(\tau^-) \in S_j, x(\tau^+) \in S_i$

Alors le modèle flou TS incertain (4.15) est globalement asymptotiquement stable

Exemple 4.2 :

Soit l'exemple du système chaotique de Lorenz donné dans la section précédente, les résultats obtenus après la résolution du programme de minimisation (4.42) :

➤ Sous système 1 :

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_1 = 0 &\Rightarrow \underline{h}_1 = 0, \quad \varepsilon_{11} = 2,0058, \quad \varepsilon_{12} = 1.9030 \\ P_1 &= \begin{bmatrix} 215.1648 & 3.9660 & -0.1592 \\ 3.9660 & 1.6742 & -0.0039 \\ -0.1592 & -0.0039 & 1.6063 \end{bmatrix} \\ K_1 &= \begin{bmatrix} 241.5945 & 14.7360 & -0.2955 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

➤ Sous système 2 :

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_2 = 0 &\Rightarrow \underline{h}_2 = 0, \quad \varepsilon_{21} = 2,0058, \quad \varepsilon_{22} = 1.9030 \\ P_2 &= \begin{bmatrix} 215.1648 & 3.9660 & 0.1592 \\ 3.9660 & 1.6742 & 0.0039 \\ 0.1592 & 0.0039 & 1.6063 \end{bmatrix} \\ K_2 &= \begin{bmatrix} 241.5945 & 14.7360 & 0.2955 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Les valeurs obtenues $\underline{h}_1 = \underline{h}_2 = 0$, impliquent que le système chaotique de Lorenz peut être commandé en utilisant seulement un retour d'état $u(t) = K_1 x(t)$ ou $u(t) = K_2 x(t)$. Les figures de 4.6 et 4.7 représentent la trajectoire de phase et l'évolution des états pour l'état initial $x(0) = [10, -10, -10]^T$, le temps de simulation est 20s et l'application de la commande à $t = 10s$.

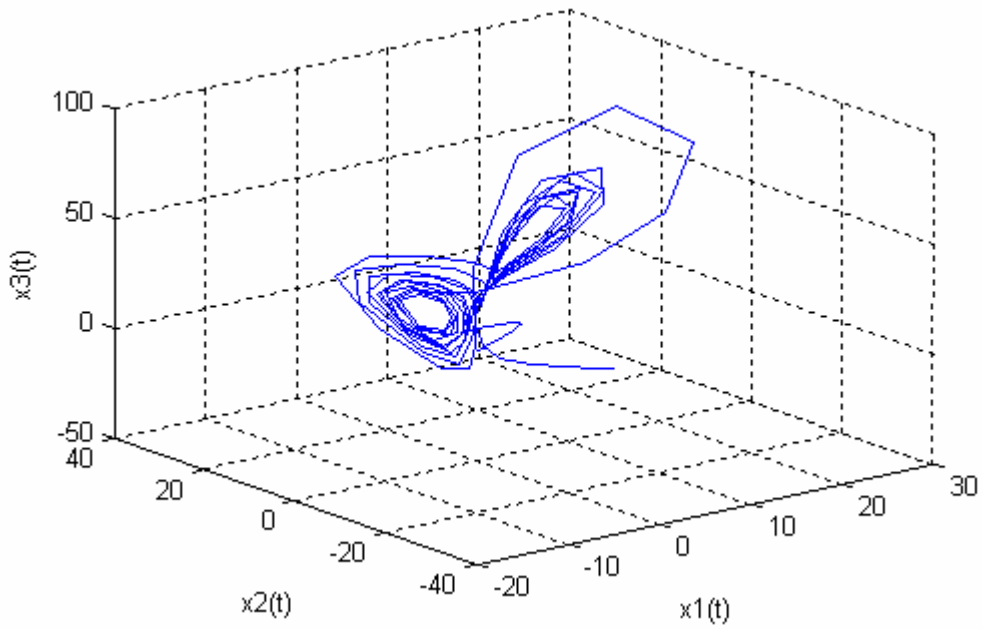


Figure 4.7 : Trajectoire de phase du système chaotique

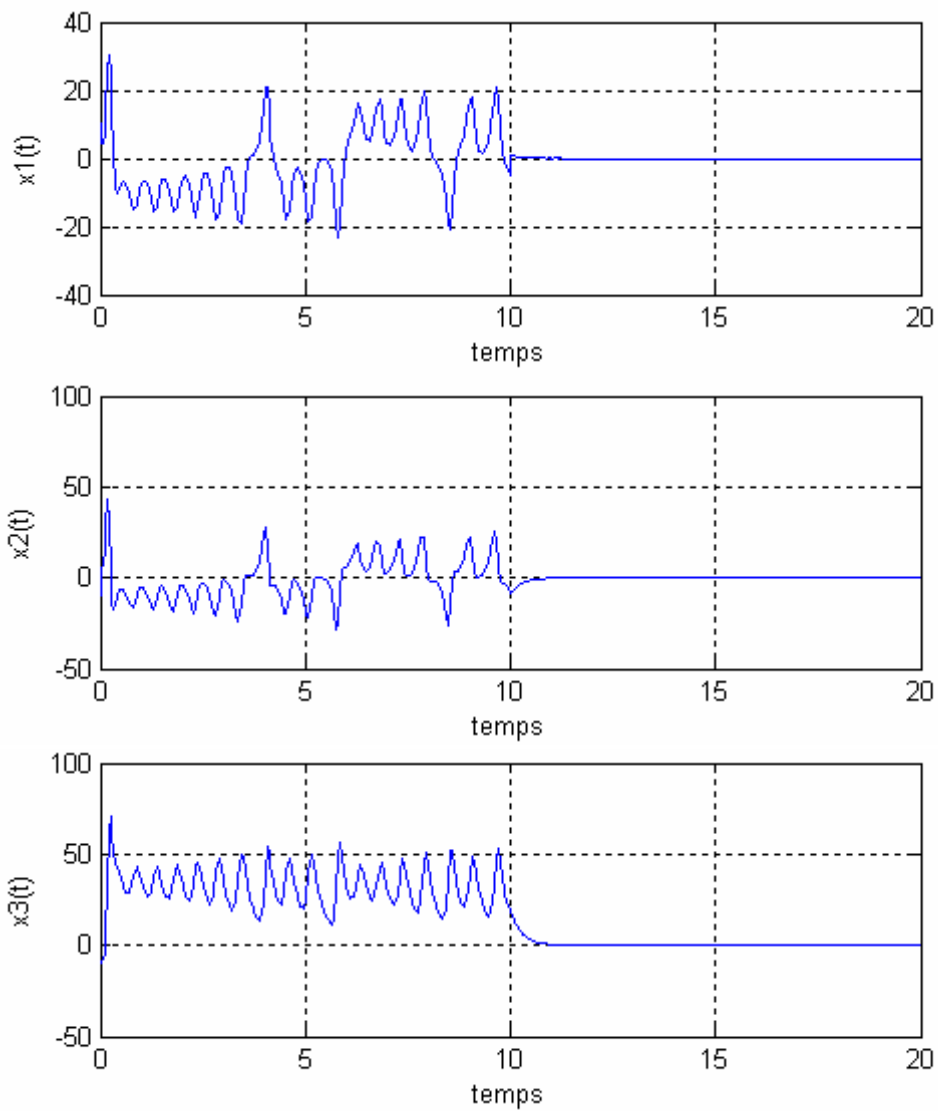


Figure 4.8 : Evolution des états

4.6. Stabilisation par retour de sortie

La commande par retour d'état suppose la disponibilité complète des variables d'état du système, ce qui n'est pas toujours possible. Nous sommes donc amenés à considérer des problèmes où la commande dépend uniquement de la sortie mesurée du système. Dans ce cas, la loi de commande multi-contrôleurs peut être donnée par :

$$u(t) = -\sum_{l=1}^{r_c} \alpha_l(z(t)) K_l y(t) = -\sum_{l=1}^{r_c} \alpha_l(z(t)) K_l C x(t) \quad (4.43)$$

avec:

$$\sum_{l=1}^{r_c} \alpha_l(z(t)) = 1, \quad \alpha_l(z(t)) = \begin{cases} 1 & x(t) \in S_l^c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(4.12) peut être réécrite sous la forme :

$$\dot{x}(t) = \left\{ A_l - B_l K_l C + H_l \Delta_l(t) (E a_l - E b_l K_l C) + (1 - h_l(z(t))) \left[\bar{H}_l \bar{\Delta}_l(t) (\bar{E} a_l - \bar{E} b_l K_l C) + \tilde{H}_l \tilde{\Delta}_l(t) (\tilde{E} a_l - \tilde{E} b_l K_l C) \right] \right\} x(t) \quad (4.44)$$

Théorème 4.6 : *Le modèle flou TS incertain (4.44) est asymptotiquement stable, s'il existe une matrice symétrique définie positive $X_l = P_l^{-1}$, une matrice $W_l = K_l C X_l$, et des scalaires positives $\varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l$, et $0 \leq \underline{h}_l < 1$ tels que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} \Lambda_l & * & * & * \\ E a_l X_l - E b_l W_l & -\varepsilon_l I & 0 & 0 \\ \bar{E} a_l X_l - \bar{E} b_l W_l & 0 & -\frac{\bar{\varepsilon}_l}{1 - \underline{h}_l} I & 0 \\ \tilde{E} a_l X_l - \tilde{E} b_l W_l & 0 & 0 & -\frac{\tilde{\varepsilon}_l}{1 - \underline{h}_l} I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.45)$$

avec :

$$\Lambda_l = X_l A_l^T + A_l X_l - W_l^T B_l^T - B_l W_l + \varepsilon_l H_l H_l^T + (1 - \underline{h}_l) \left[\bar{\varepsilon}_l \bar{H}_l \bar{H}_l^T + \tilde{\varepsilon}_l \tilde{H}_l \tilde{H}_l^T \right]$$

et

La valeur minimale $\underline{h}_l : \{ \forall t h_l(z(t)) \geq \underline{h}_l \}$ peut être déterminée par le programme de minimisation suivant :

$$\text{Minimiser } \underline{h}_l \\ X_l, W_l, \varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l$$

Pour $P_l = P_l^T > 0$, $\varepsilon_l, \bar{\varepsilon}_l, \tilde{\varepsilon}_l > 0$, $l = 1, 2, \dots, r$

LMI (4.45)

Exemple 4.3 :

Considérons l'exemple du système chaotique de Lorenz illustré dans l'exemple 3.2, on suppose que seul l'état $x_2(t)$ est mesurable, Le système chaotique de Lorenz incertain peut être décrit par le modèle TS incertain suivant :

$$\text{Règle 1: Si } x_1(t) \text{ est autour de } M_1 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = (A_1 + \Delta A_1)x(t) + (B_1 + \Delta B_1)u(t) \\ y(t) = C_1 x(t) \end{cases}$$

$$\text{Règle 2: Si } x_1(t) \text{ est autour de } M_2 \text{ Alors } \begin{cases} \dot{x}(t) = (A_2 + \Delta A_2)x(t) + (B_2 + \Delta B_2)u(t) \\ y(t) = C_2 x(t) \end{cases}$$

avec $A_1, A_2, B_1, B_2, \Delta A_1, \Delta A_2, \Delta B_1$ et ΔB_2 sont données dans l'exemple 3.2 et

$$C_1 = C_2 = [0 \ 1 \ 0]$$

Les résultats obtenus après la résolution du programme de minimisation (4.45):

➤ Sous système 1 :

$$\underline{h}_1 = 0, \quad \varepsilon_1 = 18.0519, \quad \bar{\varepsilon}_1 = 2.9803 \times 10^3, \quad \tilde{\varepsilon}_1 = 641.0313$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 6.2912 & 1.1184 & -0.5179 \\ 1.1184 & 0.9830 & -0.0587 \\ -0.5179 & -0.0587 & 0.7802 \end{bmatrix}, \quad K_1 = [13.5415 \ 15.3454 \ -2.0036]$$

➤ Sous système 2 :

$$\underline{h}_2 = 0, \quad \varepsilon_2 = 18.0519, \quad \bar{\varepsilon}_2 = 2.9803 \times 10^3, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = 641.0313$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 6.2912 & 1.1184 & 0.5179 \\ 1.1184 & 0.9830 & 0.0587 \\ 0.5179 & 0.0587 & 0.7802 \end{bmatrix}, \quad K_2 = [13.5415 \ 15.3454 \ 2.0036]$$

Les figures 4.9 et 4.10 représentent la trajectoire de phase et les états du système chaotique de Lorenz pour l'état initial $x(0) = [10, -10, -10]^T$, le temps de simulation est 20s et l'application de la commande à $t = 10$ s.

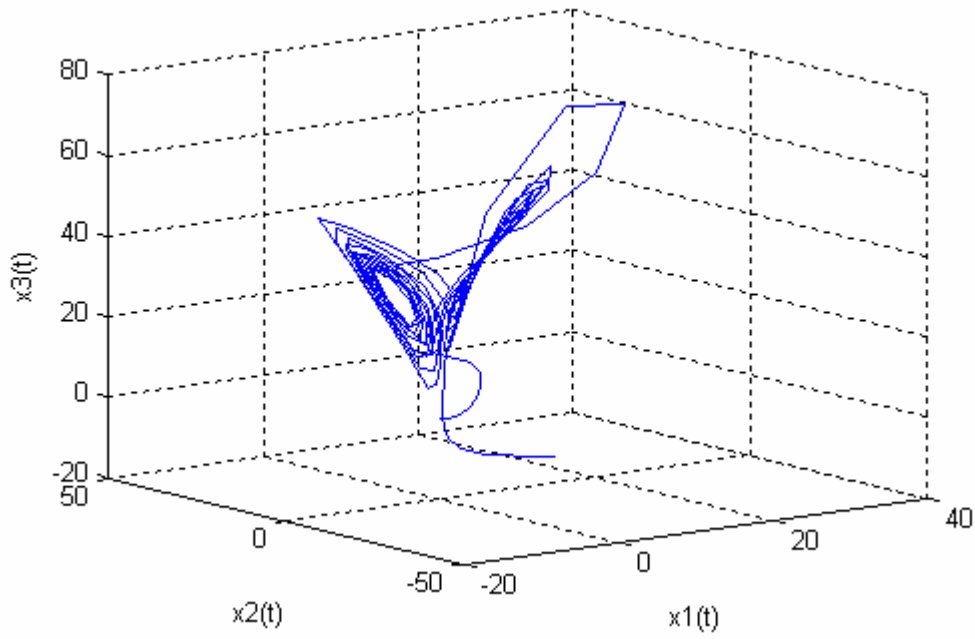


Figure 4.9: Trajectoire de phase du système chaotique de Lorenz

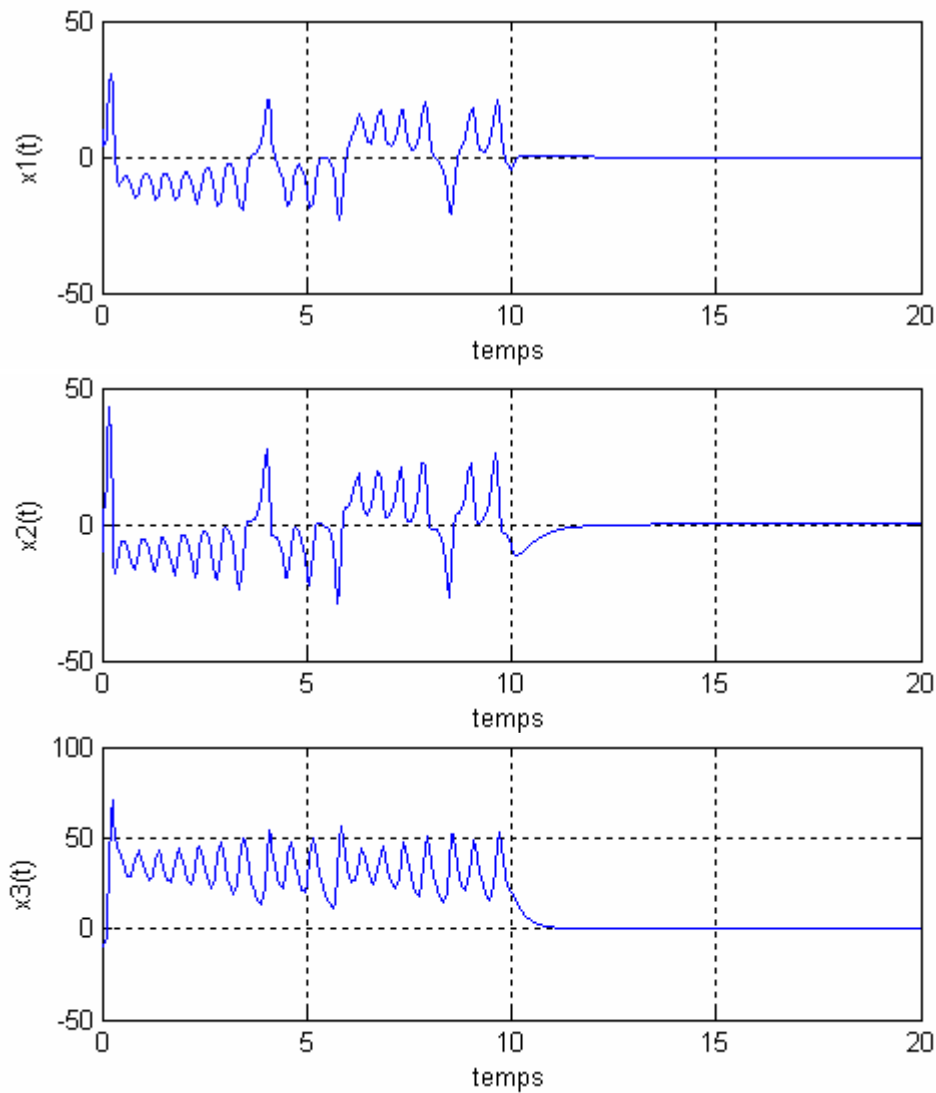


Figure 4.10 : Evolution des états

4.7. Commande avec observateur

La dynamique globale du système avec observateur peut être écrite sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \left\{ h_l(t)(A_l + \Delta A_l - B_l K_l - \Delta B_l K_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_i + \Delta A_i - B_i K_l - \Delta B_i K_l) \right\} x(t) \\ \quad + \left\{ h_l(t)(B_l + \Delta B_l) K_l + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(B_i + \Delta B_i) K_l \right\} e(t) \\ \dot{e}(t) = \left\{ h_l(t)(\Delta A_l - \Delta B_l K_l + L_l \Delta C_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(\Delta A_i - \Delta B_i K_l + L_l \Delta C_i) \right\} x(t) \\ \quad + \left\{ h_l(t)(A_l + L_l C_l + \Delta B_l K_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_i + L_l C_i + \Delta B_i K_l) \right\} e(t) \end{array} \right. \quad (4.46)$$

avec : L_l est le gain d'observateur local.

$e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ est l'erreur d'observation

La théorème 4.7 permet de déterminer les contrôleur K_l et les gains d'observateur locaux L_l de façon à maximiser la marge de stabilité quadratique du sous système flou incertain avec observateur (4.46) :

Théorème 4.7 : *Le modèle flou TS incertain complet (4.46) est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices symétriques définies positives $X_{lc} = P_{lc}^{-1}$, $X_{lo} = P_{lo}^{-1}$, Y_{lc} et Y_{lo} , et des matrices $M_l = K_l X_{lc}$ et $N_l = P_{lo} L_l$, et des scalaires positives $\varepsilon a_l, \varepsilon b_l, \varepsilon c_l, \varepsilon a_i, \varepsilon b_i, \varepsilon c_i, \xi_l, \tau, \mu_l$ tels que l'inégalité matricielle suivante est vérifiée :*

$$\left[\begin{array}{cccc} \left(\begin{array}{c} \Sigma^+(A_l X_{lc} - B_l M_l) + \varepsilon a_l H a_l H a_l^T \\ + \varepsilon b_l H b_l H b_l^T + \xi_l^{-1} I + Y_{lc} \end{array} \right) & * & * & * \\ E a_l X_{lc} & -\varepsilon a_l I & 0 & 0 \\ E b_l M_l & 0 & -\varepsilon b_l \left(\frac{\tau}{\tau + 1} \right) I & 0 \\ E c_l X_{lc} & 0 & 0 & -\varepsilon c_l I \end{array} \right] < 0 \quad (4.47)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma^+(P_o A_l - N_l C_l) + Y_{lo} & * & * & * & * & * \\ Ha_l^T P_{lo} & -\varepsilon a_l I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Hb_l^T P_{lo} & 0 & -\varepsilon b_l I & 0 & 0 & 0 \\ Hc_l^T N_l^T & 0 & 0 & -\varepsilon c_l I & 0 & 0 \\ Eb_l K_l & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon b_l^{-1}}{1+\tau} I & 0 \\ B_l K_l & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_l^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.48)$$

$$\begin{bmatrix} \left(\Sigma^+(A_i X_{lc} - B_i M_l) + \varepsilon a_i Ha_i Ha_i^T \right. \\ \left. + \varepsilon b_i Hb_i Hb_i^T + \xi_i^{-1} I - \mu_l Y_{lc} \right) & * & * & * \\ Ea_i X_{lc} & -\varepsilon a_i I & 0 & 0 \\ Eb_i M_l & 0 & -\varepsilon b_i \left(\frac{\tau}{\tau+1} \right) I & 0 \\ Ec_i X_{lc} & 0 & 0 & -\varepsilon c_i I \end{bmatrix} < 0 \quad R_i \in \mathfrak{R}_l \quad (4.49)$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma^+(P_o A_i - N_l C_i) - \mu_l Y_{lo} & * & * & * & * & * \\ Ha_i^T P_{lo} & -\varepsilon a_i I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Hb_i^T P_{lo} & 0 & -\varepsilon b_i I & 0 & 0 & 0 \\ Hc_i^T N_l^T & 0 & 0 & -\varepsilon c_i I & 0 & 0 \\ Eb_i K_l & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon b_i^{-1}}{1+\tau} I & 0 \\ B_i K_l & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_i^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad R_i \in \mathfrak{R}_l \quad (4.50)$$

et

La valeur minimale $\underline{h}_l = \frac{\underline{\mu}_l}{1 + \underline{\mu}_l} : \{ \forall t \ h_l(z(t)) \geq \underline{h}_l \}$ peut être déterminée par le

programme de minimisation suivant :

Minimiser \underline{h}_l
 $X_l, Y_l, \varepsilon a, \varepsilon b, \varepsilon c, \xi, \tau$

Pour les matrices symétriques définies positives $X_{lc}, X_{lo}, Y_{lc}, Y_{lo}$ et des scalaires positives

$\varepsilon a_l, \varepsilon b_l, \varepsilon c_l, \varepsilon a_i, \varepsilon b_i, \varepsilon c_i, \xi_l, \tau,$

LMI (4.47)-(4.50)

Le retour d'état et le gain d'observateur local sont donnés par :

$$K_l = M_l X_{lc}^{-1} \quad (4.51)$$

$$L_l = X_{lo} N_l \quad (4.52)$$

Preuve :

Le système augmenté (4.46) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \left\{ h_l(t)(A_{ll} + \Delta_{ll}) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_{li} + \Delta_{li}) \right\} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

avec :

$$A_{ll} = \begin{bmatrix} A_l - B_l K_l & B_l K_l \\ 0 & A_l + L_l C_l \end{bmatrix}, \quad \Delta_{ll} = \begin{bmatrix} \Delta A_l - \Delta B_l K_l & \Delta B_l K_l \\ \Delta A_l - \Delta B_l K_l + L_l \Delta C_l & \Delta B_l K_l \end{bmatrix}$$

$$A_{li} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_l & B_i K_l \\ 0 & A_i + L_l C_i \end{bmatrix}, \quad \Delta_{li} = \begin{bmatrix} \Delta A_i - \Delta B_i K_l & \Delta B_i K_l \\ \Delta A_i - \Delta B_i K_l + L_l \Delta C_i & \Delta B_i K_l \end{bmatrix}$$

On peut écrire Δ_{ll} et Δ_{li} sous la forme :

$$\Delta_{ll} = \begin{bmatrix} \Delta A_l & 0 \\ \Delta A_l & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_l \\ \Delta B_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_l & K_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_l & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{li} = \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 \\ \Delta A_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta B_i \\ \Delta B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_l & K_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ L_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_i & 0 \end{bmatrix}$$

Soit la fonction candidate de Lyapunov quadratique suivante :

$$V(X(t)) = X^T(t) \tilde{P}_l X(t)$$

avec :

$$X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{P}_l = \tilde{P}_l^T = \begin{bmatrix} P_{lc} & 0 \\ 0 & P_{lo} \end{bmatrix} > 0$$

La stabilité du système augmenté (4.45) est assurée si la dérivée de la fonction candidate de Lyapunov est négative, alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) &= \dot{X}^T \tilde{P}_l X + X^T \tilde{P}_l \dot{X} \\ &= X^T \left\{ h_l(t) \Sigma^+((A_{ll} + \Delta_{ll}) \tilde{P}_l) + (1 - h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) \Sigma^+((A_{li} + \Delta_{li}) \tilde{P}_l) \right\} X \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \Sigma^+((A_{ll} + \Delta_{ll}) \tilde{P}_l) &= (A_{ll} + \Delta_{ll})^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l (A_{ll} + \Delta_{ll}) \\ \Sigma^+((A_{li} + \Delta_{li}) \tilde{P}_l) &= (A_{li} + \Delta_{li})^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l (A_{li} + \Delta_{li}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{V}(X) &= X^T \left\{ \begin{aligned} &h_l(t)(A_{ll}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l A_{ll}) + (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_{li}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l A_{li}) \\ &+ h_l(t)(\Delta_{ll}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \Delta_{ll}) + (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(\Delta_{li}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \Delta_{li}) \end{aligned} \right\} X \\
&= X^T \left\{ \begin{aligned} &h_l(t)(A_{ll}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l A_{ll}) + (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_{li}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l A_{li}) \\ &+ h_l(t) \left\{ \begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Delta A_l^T & \Delta A_l^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta A_l & 0 \\ \Delta A_l & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_l^T \\ K_l^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta B_l^T & \Delta B_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\ &+ \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta B_l \\ \Delta B_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_l & K_l \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta C_l^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & L_l \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 \\ L_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_l & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \\ &+ (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) \left\{ \begin{aligned} &\begin{bmatrix} \Delta A_i^T & \Delta A_i^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta A_i & 0 \\ \Delta A_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_i^T \\ K_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta B_i^T & \Delta B_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\ &+ \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta B_i \\ \Delta B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K_i & K_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta C_i^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & L_i \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 \\ L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta C_i & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} X \quad (4.54)
\end{aligned}$$

En considérant les bornes d'incertitude (3.4), alors (4.54) devient :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(X) &= X^T \left\{ \begin{aligned} &h_l(t)(A_{ll}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l A_{ll}) + (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t))(A_{li}^T \tilde{P}_l + \tilde{P}_l A_{li}) \\ &+ h_l(t) \left\{ \begin{aligned} &\begin{bmatrix} E a_l^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_l^T & \Delta a_l^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H a_l^T & 0 \\ 0 & H a_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta a_l & 0 \\ \Delta a_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_l & 0 \\ \Delta a_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E a_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -K_l^T E b_l^T \\ K_l^T E b_l^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_l^T & \Delta b_l^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H b_l^T & 0 \\ 0 & H b_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_l & 0 \\ 0 & H b_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_l \\ \Delta b_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E b_l K_l & E b_l K_l \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} E c_l^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_l^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & H c_l^T L_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 \\ L_l H c_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E c_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \\ &+ (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_l} h'_i(z(t)) \left\{ \begin{aligned} &\begin{bmatrix} E a_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_i^T & \Delta a_i^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H a_i^T & 0 \\ 0 & H a_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\ &+ \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta a_i & 0 \\ \Delta a_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_i & 0 \\ \Delta a_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E a_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_i^T E b_i^T \\ K_i^T E b_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_i^T & \Delta b_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H b_i^T & 0 \\ 0 & H b_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\ &+ \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_i & 0 \\ 0 & H b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_i \\ \Delta b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E b_i K_i & E b_i K_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E c_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_i^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & H c_i^T L_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\ &+ \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 \\ L_i H c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E c_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} X
\end{aligned}$$

$$\dot{V}(X) = X^T \left\{ \begin{array}{l} h_l(t) \mathcal{L}_l(A_l) + (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathcal{R}_l} h'_i(z(t)) \mathcal{L}_{li}(A_{li}) \\ + h_l(t) \{ \mathcal{L}_l(\Delta A) + \mathcal{L}_l(\Delta B) + \mathcal{L}_l(\Delta C) \} \\ + (1-h_l(t)) \sum_{R_i \in \mathcal{R}_l} h'_i(z(t)) \{ \mathcal{L}_{li}(\Delta A) + \mathcal{L}_{li}(\Delta B) + \mathcal{L}_{li}(\Delta C) \} \end{array} \right\} X$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l(A_l) &= \begin{bmatrix} A_l^T - K_l^T B_l^T & 0 \\ K_l^T B_l^T & A_l^T - C_l^T L_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} A_l - B_l K_l & B_l K_l \\ 0 & A_l - L_l C_l \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_{li}(A_{li}) &= \begin{bmatrix} A_i^T - K_l^T B_i^T & 0 \\ K_l^T B_i^T & A_i^T - C_i^T L_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} A_i - B_i K_l & B_i K_l \\ 0 & A_i - L_l C_i \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_l(\Delta A) &= \begin{bmatrix} E a_l^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_l^T & \Delta a_l^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H a_l^T & 0 \\ 0 & H a_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta a_l & 0 \\ \Delta a_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_l & 0 \\ \Delta a_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E a_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_l(\Delta B) &= \begin{bmatrix} -K_l^T E b_l^T \\ K_l^T E b_l^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_l^T & \Delta b_l^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H b_l^T & 0 \\ 0 & H b_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_l & 0 \\ 0 & H b_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_l \\ \Delta b_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E b_l K_l & E b_l K_l \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_l(\Delta C) &= \begin{bmatrix} E c_l^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_l^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & H c_l^T L_l^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 \\ L_l H c_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_l & 0 \\ \Delta c_l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E c_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \mathcal{L}_{li}(\Delta A) &= \begin{bmatrix} E a_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_i^T & \Delta a_i^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H a_i^T & 0 \\ 0 & H a_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} \Delta a_i & 0 \\ \Delta a_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_i & 0 \\ \Delta a_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E a_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_{li}(\Delta B) &= \begin{bmatrix} -K_l^T E b_i^T \\ K_l^T E b_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_i^T & \Delta b_i^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H b_i^T & 0 \\ 0 & H b_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_i & 0 \\ 0 & H b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta b_i \\ \Delta b_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E b_i K_l & E b_i K_l \end{bmatrix} \\ \mathcal{L}_{li}(\Delta C) &= \begin{bmatrix} E c_i^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_i^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & H c_i^T L_l^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{P}_l + \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 \\ L_l H c_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_i & 0 \\ \Delta c_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E c_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 1.6 (propriété (1.34)), avec $\varepsilon a_l > 0$, $\varepsilon b_l > 0$, $\varepsilon c_l > 0$, $\varepsilon a_{li} > 0$, $\varepsilon b_{li} > 0$, $\varepsilon c_{li} > 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_l(\Delta A) &\leq \varepsilon a_l \begin{bmatrix} E a_l^T \Delta a_l^T \Delta a_l E a_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon a_l^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H a_l H a_l^T & 0 \\ 0 & H a_l H a_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\ &\leq \varepsilon a_l \begin{bmatrix} E a_l^T E a_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon a_l^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H a_l H a_l^T & 0 \\ 0 & H a_l H a_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_u(\Delta B) &\leq \varepsilon b_u \begin{bmatrix} -K_l^T E b_l^T \\ K_l^T E b_l^T \end{bmatrix} \Delta b_l^T \Delta b_l [-E b_l K_l \quad E b_l K_l] + \varepsilon b_u^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_l H b_l^T & 0 \\ 0 & H b_l H b_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\
&\leq \varepsilon b_u \begin{bmatrix} -K_l^T E b_l^T \\ K_l^T E b_l^T \end{bmatrix} [-E b_l K_l \quad E b_l K_l] + \varepsilon b_u^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_l H b_l^T & 0 \\ 0 & H b_l H b_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\
\mathcal{L}_u(\Delta C) &\leq \varepsilon c_u \begin{bmatrix} E c_l^T \Delta c_l^T \Delta c_l E c_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon c_u^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_l H c_l H c_l^T L_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\
&\leq \varepsilon c_u \begin{bmatrix} E c_l^T E c_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon c_u^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_l H c_l H c_l^T L_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\
\mathcal{L}_i(\Delta A) &\leq \varepsilon a_i \begin{bmatrix} E a_i^T E a_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon a_i^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H a_i H a_i^T & 0 \\ 0 & H a_i H a_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\
\mathcal{L}_i(\Delta B) &\leq \varepsilon b_i \begin{bmatrix} -K_l^T E b_i^T \\ K_l^T E b_i^T \end{bmatrix} [-E b_i K_l \quad E b_i K_l] + \varepsilon b_i^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} H b_i H b_i^T & 0 \\ 0 & H b_i H b_i^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l \\
\mathcal{L}_i(\Delta C) &\leq \varepsilon c_i \begin{bmatrix} E c_i^T E c_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon c_i^{-1} \tilde{P}_l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_l H c_i H c_i^T L_l^T \end{bmatrix} \tilde{P}_l
\end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_u(\Delta_u) &\leq \varepsilon a_u \begin{bmatrix} E a_u^T E a_u & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon b_u \begin{bmatrix} K_l^T E b_l^T E b_l K_l & -K_l^T E b_l^T E b_l K_l \\ -K_l^T E b_l^T E b_l K_l & K_l^T E b_l^T E b_l K_l \end{bmatrix} + \varepsilon c_u \begin{bmatrix} E c_l^T E c_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\tilde{P}_l \left\{ \varepsilon a_u^{-1} \begin{bmatrix} H a_u H a_u^T & 0 \\ 0 & H a_u H a_u^T \end{bmatrix} + \varepsilon b_u^{-1} \begin{bmatrix} H b_l H b_l^T & 0 \\ 0 & H b_l H b_l^T \end{bmatrix} + \varepsilon c_u^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_l H c_l H c_l^T L_l^T \end{bmatrix} \right\} \tilde{P}_l \\
\mathcal{L}_i(\Delta_i) &\leq \varepsilon a_i \begin{bmatrix} E a_i^T E a_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon b_i \begin{bmatrix} K_l^T E b_i^T E b_i K_l & -K_l^T E b_i^T E b_i K_l \\ -K_l^T E b_i^T E b_i K_l & K_l^T E b_i^T E b_i K_l \end{bmatrix} + \varepsilon c_i \begin{bmatrix} E c_l^T E c_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\tilde{P}_l \left\{ \varepsilon a_i^{-1} \begin{bmatrix} H a_i H a_i^T & 0 \\ 0 & H a_i H a_i^T \end{bmatrix} + \varepsilon b_i^{-1} \begin{bmatrix} H b_i H b_i^T & 0 \\ 0 & H b_i H b_i^T \end{bmatrix} + \varepsilon c_i^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L_l H c_i H c_i^T L_l^T \end{bmatrix} \right\} \tilde{P}_l
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_u(\Delta_u) &= \mathcal{L}_u(\Delta A) + \mathcal{L}_u(\Delta B) + \mathcal{L}_u(\Delta C) \\
\mathcal{L}_i(\Delta_i) &= \mathcal{L}_i(\Delta A) + \mathcal{L}_i(\Delta B) + \mathcal{L}_i(\Delta C)
\end{aligned}$$

Alors $\dot{V}(X) < 0$ si :

$$h_i(t) \{ \mathcal{L}_u(A_u) + \mathcal{L}_u(\Delta_u) \} + (1 - h_i(t)) \sum_{R_i \in \mathfrak{R}_i} h'_i(z(t)) \{ \mathcal{L}_i(A_i) + \mathcal{L}_u(\Delta_i) \} < 0 \quad (4.55)$$

En appliquent le programme de minimisation (4.26), l'inégalité (4.55) peut être mis sous la forme :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \underline{h}_l \\ & \text{pour } \tilde{P}_l = \tilde{P}_l^T > 0, \tilde{Y}_l > 0, 0 \leq \underline{h}_l < 1 \\ & \text{tels que } \mathcal{L}_l(A_{ll}) + \mathcal{L}_l(\Delta_{ll}) < -\tilde{Y}_l \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\mathcal{L}_i(A_{ii}) + \mathcal{L}_i(\Delta_{ii}) \leq \frac{\underline{h}_l}{1 - \underline{h}_l} \tilde{Y}_l, \quad R_i \in \mathfrak{R}_l \quad (4.57)$$

avec :

$$\tilde{Y}_l = \begin{bmatrix} Y_{lc} & 0 \\ 0 & Y_{lo} \end{bmatrix}$$

➤ *Mise sous forme LMI de l'inégalité (4.56)*

$$\begin{aligned} (4.55) \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} \varepsilon a_{ll} E a_l^T E a_l + \varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l + \varepsilon c_{ll} E c_l^T E c_l & -\varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l \\ -\varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l & \varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} P_{lc} (\varepsilon a_{ll}^{-1} H a_l H a_l^T + \varepsilon b_{ll}^{-1} H b_l H b_l^T) P_{lc} & 0 \\ 0 & P_{lo} (\varepsilon a_{ll}^{-1} H a_l H a_l^T + \varepsilon b_{ll}^{-1} H b_l H b_l^T + \varepsilon c_{ll}^{-1} L_l H c_l H c_l^T L_l^T) P_{lo} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} (A_l - B_l K_l)^T P_{lc} + P_{lc} (A_l - B_l K_l) & B_l K_l \\ K_l^T B_l^T & (A_l - L_l C_l)^T P_{lo} + P_{lo} (A_l - L_l C_l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{lc} & 0 \\ 0 & Y_{lo} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

on peut écrire (4.58) sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{21}^T \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \Theta_{11} &= (A_l - B_l K_l)^T P_{lc} + P_{lc} (A_l - B_l K_l) + P_{lc} (\varepsilon a_{ll}^{-1} H a_l H a_l^T + \varepsilon b_{ll}^{-1} H b_l H b_l^T) P_{lc} \\ & \quad + \varepsilon a_{ll} E a_l^T E a_l + \varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l + \varepsilon c_{ll} E c_l^T E c_l + Y_{lc} \\ \Theta_{21} &= K_l^T B_l^T - \varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l \\ \Theta_{22} &= (A_l - L_l C_l)^T P_{lo} + P_{lo} (A_l - L_l C_l) + \varepsilon b_{ll} K_l^T E b_l^T E b_l K_l \\ & \quad + P_{lo} (\varepsilon a_{ll}^{-1} H a_l H a_l^T + \varepsilon b_{ll}^{-1} H b_l H b_l^T + \varepsilon c_{ll}^{-1} L_l H c_l H c_l^T L_l^T) P_{lo} + Y_{lo} \end{aligned}$$

De la même manière que dans la partie de la commande avec observateur de chapitre 3, on peut réécrire l'inégalité (4.59) sous forme des LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} \Sigma^+(A_l X_{lc} - B_l M_l) + \varepsilon a_l H a_l H a_l^T \\ + \varepsilon b_l H b_l H b_l^T + \xi_l^{-1} I + Y_{lc} \end{array} \right) & * & * & * \\ E a_l X_{lc} & -\varepsilon a_l I & 0 & 0 \\ E b_l M_l & 0 & -\varepsilon b_l \left(\frac{\tau}{\tau+1} \right) I & 0 \\ E c_l X_{lc} & 0 & 0 & -\varepsilon c_l I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma^+(P_o A_l - N_l C_l) + Y_{lo} & * & * & * & * & * \\ H a_l^T P_{lo} & -\varepsilon a_l I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H b_l^T P_{lo} & 0 & -\varepsilon b_l I & 0 & 0 & 0 \\ H c_l^T N_l^T & 0 & 0 & -\varepsilon c_l I & 0 & 0 \\ E b_l K_l & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon b_l^{-1}}{1+\tau} I & 0 \\ B_l K_l & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_l^{-1} I \end{bmatrix} < 0$$

avec :

$$\xi_l > 0, \tau > 0, X_{lc} = P_{lc}^{-1}, M_l = K_l X_{lc}, N_l = P_{lo} L_l$$

➤ **Mise sous forme LMI de l'inégalité (4.57)**

De la même façon que l'inégalité (4.56) on trouve les LMIs suivantes

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{c} \Sigma^+(A_i X_{lc} - B_i M_l) + \varepsilon a_i H a_i H a_i^T \\ + \varepsilon b_i H b_i H b_i^T + \xi_i^{-1} I - \mu_l Y_{lc} \end{array} \right) & * & * & * \\ E a_i X_{lc} & -\varepsilon a_i I & 0 & 0 \\ E b_i M_l & 0 & -\varepsilon b_i \left(\frac{\tau}{\tau+1} \right) I & 0 \\ E c_i X_{lc} & 0 & 0 & -\varepsilon c_i I \end{bmatrix} < 0 \quad R_i \in \mathfrak{R}_l$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma^+(P_o A_i - N_l C_i) - \mu_l Y_{lo} & * & * & * & * & * \\ H a_i^T P_{lo} & -\varepsilon a_i I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H b_i^T P_{lo} & 0 & -\varepsilon b_i I & 0 & 0 & 0 \\ H c_i^T N_l^T & 0 & 0 & -\varepsilon c_i I & 0 & 0 \\ E b_i K_l & 0 & 0 & 0 & \frac{-\varepsilon b_i^{-1}}{1+\tau} I & 0 \\ B_i K_l & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_i^{-1} I \end{bmatrix} < 0 \quad R_i \in \mathfrak{R}_l$$

Exemple 4.4:

Considérons l'exemple du pendule inversé sur un chariot mobile présenté dans l'exemple 3.3 (figure 2.6).

Les résultats obtenus après la résolution du programme de minimisation définie dans le théorème 4.7:

➤ *Sous système 1 :*

$$\underline{h}_1 = 0, \quad \varepsilon a_1 = 9.7310 \times 10^5, \quad \varepsilon b_1 = 4.0191 \times 10^5, \quad \varepsilon a_{12} = 8.1099 \times 10^5, \quad \varepsilon b_{12} = 4.0212 \times 10^5$$

$$P_{1c} = \begin{bmatrix} 0.1438 & 0.0275 & 0.0198 & 0.0324 \\ 0.0275 & 0.0053 & 0.0038 & 0.0062 \\ 0.0198 & 0.0038 & 0.0036 & 0.0046 \\ 0.0324 & 0.0062 & 0.0046 & 0.0075 \end{bmatrix}$$

$$P_{1o} = 10^7 \times \begin{bmatrix} 1.3308 & -0.0922 & 0.0903 & -0.2427 \\ -0.0922 & 0.0157 & -0.0111 & 0.0278 \\ 0.0903 & -0.0111 & 0.5556 & -0.0049 \\ -0.2427 & 0.0278 & -0.0049 & 0.1092 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} -1.0457 & -0.2023 & -0.1369 & -0.2484 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 11.7865 & 3.1783 \\ 195.1535 & 29.3832 \\ 2.1077 & 0.9970 \\ -3.0263 & 6.2930 \end{bmatrix}$$

➤ *Sous système 2 :*

$$\underline{h}_2 = 0, \quad \varepsilon a_2 = 8.8112 \times 10^5, \quad \varepsilon b_2 = 3.8325 \times 10^5, \quad \varepsilon a_{21} = 8.0152 \times 10^5, \quad \varepsilon b_{21} = 3.8457 \times 10^5$$

$$P_{2c} = \begin{bmatrix} 0.1733 & 0.0335 & 0.0224 & 0.0375 \\ 0.0335 & 0.0065 & 0.0043 & 0.0073 \\ 0.0224 & 0.0043 & 0.0038 & 0.0050 \\ 0.0375 & 0.0073 & 0.0050 & 0.0083 \end{bmatrix}$$

$$P_{2o} = 10^8 \times \begin{bmatrix} 1.6598 & -0.0977 & -0.1437 & -0.3959 \\ -0.0977 & 0.0293 & 0.0041 & 0.0691 \\ -0.1437 & 0.0041 & 0.8829 & 0.0506 \\ -0.3959 & 0.0691 & 0.0506 & 0.2263 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = 10^3 \times [-1.1872 \quad -0.2316 \quad -0.1459 \quad -0.2692]$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 3.9011 & 1.3981 \\ 186.8471 & 43.9076 \\ 1.8320 & 1.1092 \\ -26.9696 & -6.5151 \end{bmatrix}$$

Les valeurs obtenues sont $\underline{h}_1 = 0$, $\underline{h}_2 = 0$, un seul retour d'état $u(t) = K_1 x(t)$ ou $u(t) = K_2 x(t)$ et un seul gain d'observateur L_1 ou L_2 sont suffisants pour la stabilisation du pendule inversé. Les figures 4.11 à 4.15 représentent les états et les états estimés $(x_1(t), \hat{x}_1(t))$, $(x_2(t), \hat{x}_2(t))$, $(x_3(t), \hat{x}_3(t))$, $(x_4(t), \hat{x}_4(t))$, et la commande $u(t)$ respectivement, pour les conditions initiales $x(0) = [-60, 0, 0, 0]^T$ et $\hat{x}(0) = [0, 0, 0, 0]^T$.

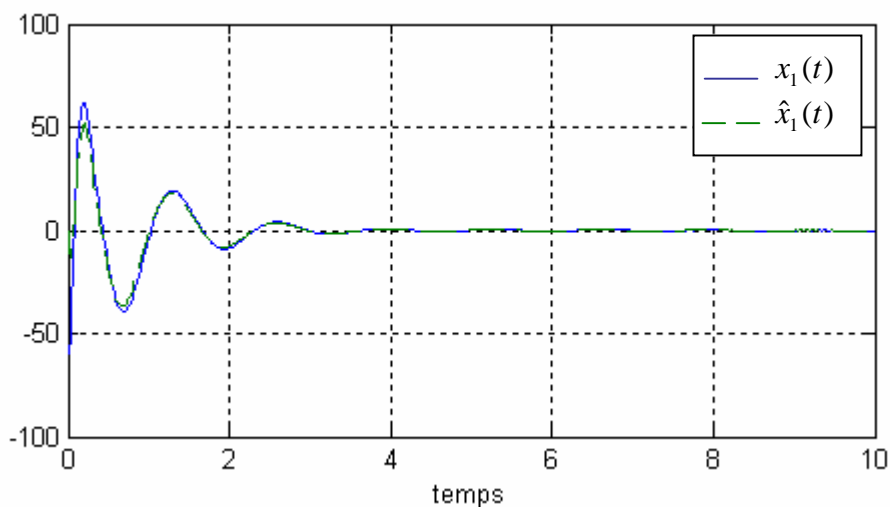


Figure 4.11 : Evolution de l'état $x_1(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_1(t)$

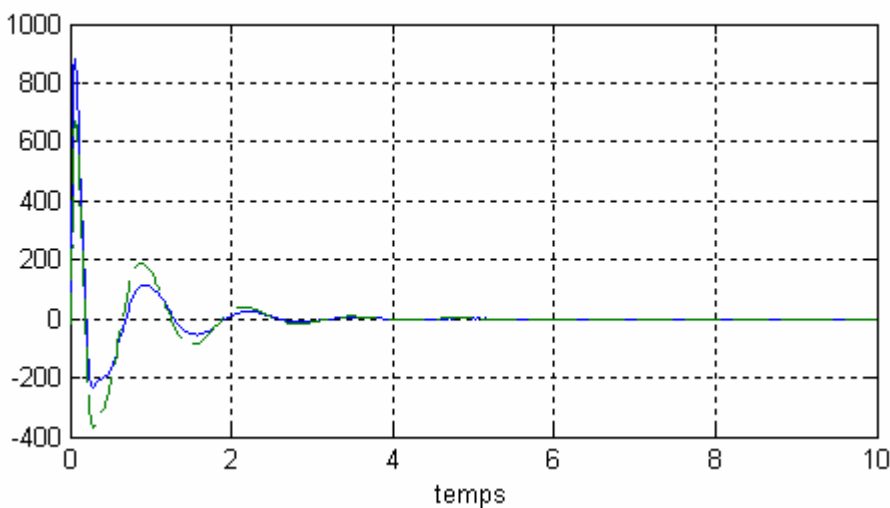


Figure 4.12 : Evolution de l'état $x_2(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_2(t)$

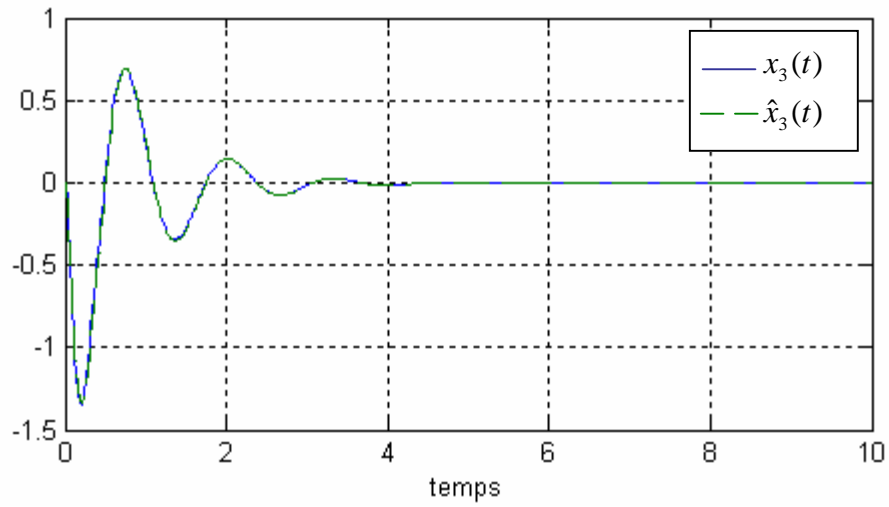


Figure 4.13 : Evolution de l'état $x_3(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_3(t)$

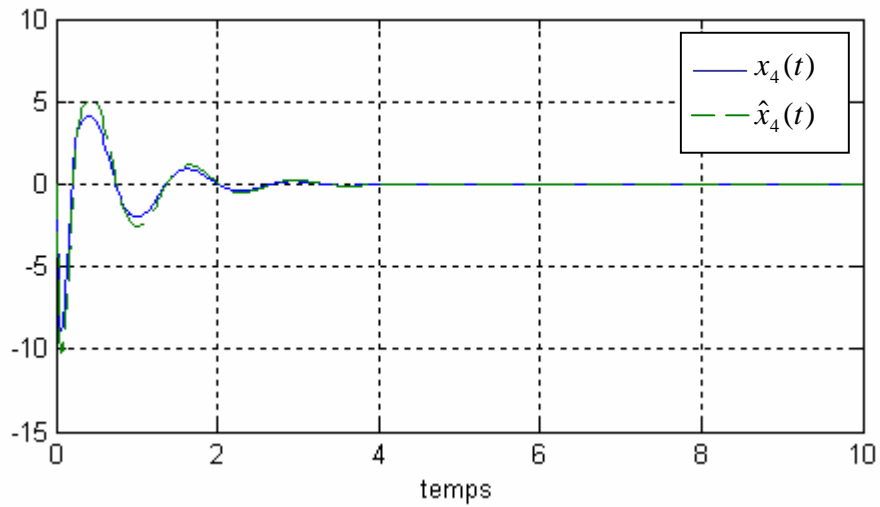


Figure 4.14 : Evolution de l'état $x_4(t)$ et de l'état estimée $\hat{x}_4(t)$

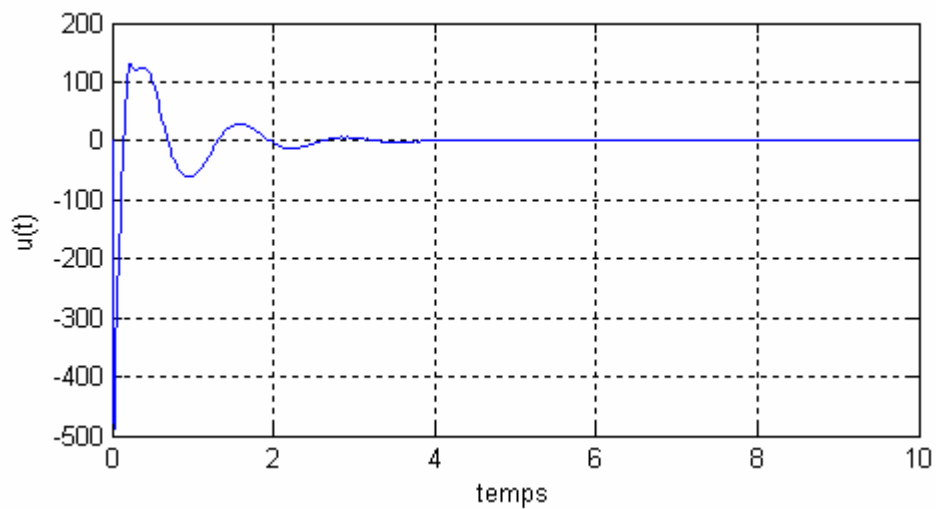


Figure 4.15 : Evolution de la commande $u(t)$

4.8. Conclusion

Le modèle flou incertain est représenté comme un ensemble de systèmes linéaires incertains et une loi de commande local est conçue telle que la région de stabilité du sous système local correspondant est maximisé. Cette approche permet l'optimisation du nombre de contrôleurs qui peut être plus petit que celui des règles.