Annexes

A

Preuve des Théorèmes (2.11) et (2.13)

La boucle fermée du système non autonome avec l'utilisation de la loi de commande floue de type PDC représenté par le modèle flou TS suivant :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - B_i K_j)x(t) \tag{A.1}$$

Théorème A.1 *[6] : Le modèle flou (A.1) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice définie positive* $P = P^T > 0$ *, et des matrices symétriques* $Q_{ii} = Q_{ii}^T$ *et des matrices* $Q_{ji} = Q_{ij}^T$ *, qui vérifient les inégalités suivantes :*

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + Q_{ii} < 0 \qquad \forall i = 1,\ldots,r \tag{A.2}$$

$$G_{ij}^T P + P G_{ij} + Q_{ij} \leq 0 \qquad i < j \leq r \tag{A.3}$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \ldots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & \ldots & Q_{2r} \\ & & & \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \ldots & Q_{rr} \end{pmatrix} > 0 \tag{A.4}$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j$$

Preuve :

Soit la fonction candidate de Lyapunov quadratique suivante :

$$V\big(x(t)\big) = x^T(t)Px(t) \tag{B.5}$$

La dérivée de la fonction candidate de Lyapunov est donnée par :

$$\begin{aligned}
\dot{V}\big(x(t)\big) &= \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) \\
&= 2x^T(t)P\left\{\sum_{i=1}^{r} h_i\big(z(t)\big)h_i\big(z(t)\big)G_{ii}x(t) + 2\sum_{i<j\le r} h_i\big(z(t)\big)h_j\big(z(t)\big)\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)\right\}x(t) \\
&= \sum_{i=1}^{r} h_i\big(z(t)\big)h_i\big(z(t)\big)\left\{x^T(t)(G_{ii}^T + PG_{ii})x(t)\right\} \\
&\qquad + 2\sum_{i<j\le r} h_i\big(z(t)\big)h_j\big(z(t)\big)\left\{x^T(t)\left(\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P + P\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)\right)x(t)\right\} \\
&\le -\sum_{i=1}^{r} h_i\big(z(t)\big)h_i\big(z(t)\big)x^T(t)Q_{ii}x(t) - 2\sum_{i<j\le r} h_i\big(z(t)\big)h_j\big(z(t)\big)x^T(t)Q_{ij}x(t) \\
&= -\begin{pmatrix} h_1x \\ h_2x \\ \\ h_rx \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \dots & Q_{1r} \\ Q_{21} & Q_{22} & \dots & Q_{2r} \\ & & & \\ Q_{r1} & Q_{r2} & \dots & Q_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1x \\ h_2x \\ \\ h_rx \end{pmatrix} \\
&= x^T H^T(-Q)Hx
\end{aligned} \tag{A.6}$$

La stabilité de la boucle fermée est assurée si dérivée de la fonction candidate de Lyapunov (A.6) est strictement négative.

De la même manière, on peut trouver les conditions de stabilité moins conservative du modèle flou TS discret.

B

Théorème de séparation

En utilisant une loi de commande floue de type PDC, La boucle fermée du système non autonome et la dynamique de l'observateur représenté par des modèles flous TS sont données par :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - B_i K_j)x(t) \tag{B.1}$$

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - L_i C_j)e(t) \tag{B.2}$$

Les conditions de stabilité de la boucle fermée du système et la dynamique de l'observateur sont donnés respectivement par les deux théorèmes suivants :

Théorème B.1 : *Le modèle flou (B.1) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice commune définie positive* $P_c = P_c^T > 0$ *qui satisfait les conditions suivantes* :

$$\begin{aligned} &G_{ii}^T P_c + P_c G_{ii} < 0 && \forall i = 1,\dots,r \\ &\left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2}\right)^T P_c + P_c\left(\frac{(G_{ij} + G_{ji})}{2}\right) \le 0 && i < j \le r \end{aligned} \tag{B.3}$$

avec :

$$G_{ij} = A_i - B_i K_j$$

Théorème B.2 : *Le modèle flou (B.2) est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une matrice commune définie positive* $P_o = P_o^T > 0$ *qui satisfait les conditions suivantes* :

$$\begin{aligned} & H_{ii}^T P_o + P_o H_{ii} < 0 && \forall i = 1,\ldots,r \\ & \left(\frac{(H_{ij}+H_{ji})}{2}\right)^T P_o + P_o\left(\frac{(H_{ij}+H_{ji})}{2}\right) \le 0 && i < j \le r \end{aligned} \tag{B.4}$$

avec :

$$H_{ij} = A_i - L_i C_j$$

La boucle fermée complète composée de l'état du système et l'erreur d'estimation, permet d'écrire le système augmenté suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} h_i\big(z(t)\big)h_j\big(z(t)\big)\begin{bmatrix} A_i + B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \tag{B.5}$$

Théorème B.3 : *le système augmenté décrit par l'équation (B.5) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une matrice définie positive commune* $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ *tels que :*

$$\begin{aligned} & \Lambda_{ii}^T \tilde{P} + \tilde{P}\Lambda_{ii} < 0 && i = 1,\ldots,r \\ & (\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji})^T \tilde{P} + \tilde{P}(\Lambda_{ij} + \Lambda_{ji}) < 0 && i < j \le r \end{aligned} \tag{B,6}$$

où Λ_{ij} *peut être définie comme suit :*

$$\Lambda_{ij} = \begin{bmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{bmatrix} \tag{B,7}$$

Si on peut prolonger la propriété de séparation observateur/contrôleur d'un système simple au cas de (B.5). On montrera dans la prochaine section, que dans le cas de (B.5), on a en effet la propriété de séparation, et on a deux ensembles de LMI séparés pour l'observateur et le contrôleur.

Propriété de séparation

Pour prouver que la propriété de séparation [29] est solvable, on doit montrer que $\tilde{P}$ la solution commune définie positive des inégalités dans (B.6), est une matrice diagonale, avec λP_c et P_o en tant qu'éléments diagonaux, où P_c est la solution définie positive des inégalités dans (B.3), λ est une constante positive, et P_o est la solution de (B.4). On peut exprimer la propriété de séparation dans le théorème suivant [29] :

Théorème B.2 *(Théorème de séparation pour les systèmes flous TS) : Le système (B.5) est globalement asymptotiquement stable si les inégalités dans* (B.3) *et* (B.4) *sont satisfaites indépendamment.*

Preuve

On choisis $\tilde{P}$ comme matrice diagonale avec λP_c *et* P_o comme éléments diagonaux, c'est-à-dire, on a ce qui suit :

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \lambda P_c & 0 \\ 0 & P_o \end{bmatrix} \tag{B.8}$$

On montrera qu'il existe toujours un $\lambda > 0$ tel que $\tilde{P}$ satisfait les inégalités (B.6). En remplaçant $\tilde{P}$ et Λ_{ij} dans (B.6) on obtient l'inégalité suivant :

$$\begin{bmatrix} \lambda\left[(A_i - B_i K_i)^T P_c + P_c (A_i - B_i K_i)\right] & \lambda P_c (B_i K_i) \\ \lambda (B_i K_i)^T P_c & (A_i - L_i C_i)^T P_o + P_o (A_i - L_i C_i) \end{bmatrix} < 0 \tag{B.9}$$

En utilisant le complément de Schur, (B.9) est définie négative si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \lambda\left[(A_i - B_i K_i)^T P_c + P_c (A_i - B_i K_i)\right] < 0 \\ \lambda P_c (B_i K_i)\left[(A_i - L_i C_i)^T P_o + P_o (A_i - L_i C_i)\right]^{-1} (B_i K_i)^T P_c \\ -\left[(A_i - B_i K_i)^T P_c + P_c (A_i - B_i K_i)\right] > 0 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Puisque (B.3) est satisfaite, la première inégalité déjà vraie. La deuxième condition est satisfaite pour tout $\lambda > 0$ tel que :

$$\lambda \min_{1\le i\le r} \mu_i > \max_{1\le i\le r} \nu_i$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mu_i &= \lambda_{\min}\left\{P_c(B_iK_i)\left[(A_i - L_iC_i)^T P_o + P_o(A_i - L_iC_i)\right]^{-1}(B_iK_i)^T P_c\right\} \\
\nu_i &= \lambda_{\max}\left[(A_i - B_iK_i)^T P_c + P_c(A_i - B_iK_i)\right]
\end{aligned}$$

où $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$ sont les valeurs propres minimales et maximales. Comme (B.3) et (B.4) sont déjà satisfaites, un tel $\lambda > 0$ existe toujours.

En utilisant le même argument, on peut également montrer que la seconde partie des inégalités (B.6) est satisfaite. Par conséquent, les deux ensembles d'inégalités peuvent être résolus indépendamment, et la séparation est valable.