

## **CHAPITRE II**

# **Présentation de l'outil numérique utilisé et lois de comportement**

### **II.1 INTRODUCTION**

La simulation numérique de l'écoulement autour des écrans étanches est un problème complexe qui met en jeu des phénomènes d'interaction sol-structure à différents niveaux d'échelle. Les éléments en interaction sont le sol, l'écran, les butons et les tirants d'ancrage.

En outre, cette complexité présente notamment :

- La résolution par la loi de Darcy est souvent impossible analytiquement.
- Les configurations réelles sont telles (enceintes ramassées) que le problème ne peut être considéré comme plan, ce qui nécessite le recours aux calculs tridimensionnels.

Ces conditions complexes justifient l'utilisation d'un outil numérique adapté pour prendre en compte le comportement global de ce type d'ouvrage. La diversité de la nature des matériaux et de leur comportement induit nécessairement la modularité du code de calcul utilisé. De plus, les matériaux présentent généralement un comportement fortement non linéaire et des déformations irréversibles. Le code de calcul **FLAC** a ainsi été utilisé tant pour les simulations *bidimensionnelles* que *tridimensionnelles*, et est présenté dans une première partie.

Le développement des grands codes de calcul a évolué de pair avec les langages et le matériel informatique. Beaucoup de ces grands codes ont démarré dans les années 1970 et sont basés sur une conception de type « boîte noire », qui impose en général à l'utilisateur de se plier aux exigences du code, conçu pour résoudre des problèmes donnés. L'outil de simulation numérique ne doit pas être une boîte noire qui offre uniquement une solution aux données introduites. Mais plutôt, il doit permettre aussi des expérimentations numériques. Le code Flac respecte cette particularité en offrant à l'utilisateur de tester ses idées, d'introduire ses propres modèles de comportement et de modéliser les séquences de construction.

Nous présentons ici les principes du code Flac qui a été utilisé tant pour nos simulations *bidimensionnelles*, axisymétriques que *tridimensionnelles* de l'écoulement autour un écran étanche. Notons que, Flac3D est l'extension du Flac2D, cependant, il y'a des différences entre les formulations bi et tridimensionnelles, et en particulier dans les modèles mathématiques qui décrivent le mécanisme du système. Cette partie décrira la formulation et sa mise en œuvre en Flac.

### **II.2 GENERALITES**

**FLAC** (Fast Lagrangien Analysis of Continua), c'est un code en différences finies développé par la société Américaine ITASCA Consulting Group. Il simule le comportement des structures en sols, en roches ou autres matériaux qui se plastifient lorsque leur surface de charge est atteinte. Les matériaux sont représentés par des éléments ou des zones qui forment le maillage ajusté par l'utilisateur pour avoir la forme de l'objet à modéliser. Chaque élément se comporte selon sa description par une loi *contrainte/déformation* linéaire ou non linéaire aux chargements appliqués ou aux conditions aux limites imposées. Le matériau peut se plastifier et s'écouler, et le maillage peut se déformer (en mode grande déformation) et se déplacer avec le matériau qu'il représente.

Une des spécificités de Flac (et de tous les logiciels ITASCA) est le macro-langage *FISH*, qui permet à l'utilisateur de définir de nouvelles variables, procédures, sorties graphiques, et même d'écrire sa propre loi de comportement. La formulation de Flac est parfaitement adaptée à la modélisation des problèmes de géomécanique en plusieurs phases, comme une séquence excavation-construction-chargeement.

Starfield et Cundel (1988), fondateurs du Code Flac, ont insisté que la méthodologie des modélisations numériques en géomécanique doit être différentes de celle de l'ingénierie de structure. Ils ont signalé qu'il est impossible d'obtenir des données complètes sur les sols ou les roches du site ; par exemple : l'état des contraintes initiales, les propriétés et les discontinuités ne peuvent être que partiellement bien connues. Cette situation est incompatible avec la conception suivie dans les logiciels populaires utilisés pour la conception (boite noire qui accepte uniquement d'un côté l'introduction des données et de l'autre côté donne les résultats de prédiction du comportement).

Au contraire, les logiciels en géomécanique doivent être conçus et utilisés pour découvrir les mécanismes en absence des données nécessaires pour la prédiction. Quand le comportement du système est défini, il est approprié d'utiliser des calculs simples de la conception du processus.

D'une autre manière, les logiciels en géomécanique ne doivent être utilisés uniquement dans la conception, mais aussi comme un outil d'expérimentation numérique qui aide et donne au concepteur un aperçu sur les mécanismes possibles.

Avant de discuter les particularités du code Flac2D et Flac3D il est nécessaire de donner un aperçu rapide sur la méthode de différences finies adoptée dans ce code.

## II.3 DESCRIPTION DU CODE DE CALCUL

### II.3.1 Méthode des différences finies (FDM)

En rendant la complexité des calculs une chose du passé, l'évènement de l'ordinateur a révolutionné les sciences de l'ingénieur, des problèmes, autrefois considérés insolubles avec les méthodes classiques, sont maintenant facilement accessibles avec les méthodes numériques. Une de ces méthodes est la méthode des différences finies. De ce point de vue, elle constitue un outil formidable à la disposition de l'ingénieur.

De nos jours, l'emploi de la méthode s'est généralisé à d'autres domaines en particulier la mécanique des fluides, l'aéronautique, le magnétisme, transfert de chaleur et les problèmes couplés. Elle permet de résoudre tout problème défini par des équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites.

Un problème d'ingénierie est généralement représenté par un modèle mathématique ; des équations aux dérivées partielles sur un domaine géométrique avec des conditions aux limites sur les frontières de ce domaine. De plus, étant un problème continu, il possède une infinité de degrés de liberté. A l'exception de quelques cas ayant une géométrie très simple, il est très difficile sinon impossible de trouver une solution analytique au problème et d'étudier son comportement en une seule opération. Pour trouver une solution, l'ingénieur est donc amené à remplacer le système continu par un système discret équivalent ayant un nombre fini de degré de liberté.

Actuellement, l'ingénieur a le choix entre plusieurs méthodes dont deux méthodes numériques sont très répandues dans le domaine de construction. La MDF est très attrayante par sa simplicité quand il s'agit des problèmes à géométrie régulière. Par contre, elle est très difficile à généraliser aux problèmes à géométrie complexe et des conditions aux limites quelconques. Récemment ce problème est résolu grâce à la programmation de la méthode de Wilkins (Khennane. A).

La méthode des différences finies est donc une méthode qui permet de résoudre des systèmes d'équations différentielles avec conditions initiales et/ou aux limites. Toute dérivée dans le système d'équations est remplacée par une expression algébrique en termes de variations intervenant dans le système d'équations (contrainte ou déformation), en des lieux discrets de l'espace. Ces variables sont indéterminées ailleurs. Le programme en différences finies Flac ne nécessite pas le stockage d'une matrice de rigidité globale de grande taille : les équations sont reformulées à chaque pas.

Le programme en Flac est basé sur la méthode des différences finies : les variables sont connues en des lieux discrets de l'espace et il n'est pas nécessaire de stocker une matrice de rigidité globale. Le schéma de résolution est explicite : le calcul dans un élément est effectué sans tenir compte des éléments voisins.

Le logiciel Flac est un code de calcul en différences finies explicites basé sur une formulation numérique appelée « *méthode des éléments lagrangiens* » (Billaux et Cundall, 1993).

Comme le soulignent Billaux et Cundall, 1993, la méthode des différences finies est l'une des plus anciennes méthodes de résolution numérique d'un système d'équations différentielles, pour des conditions initiales et des conditions aux limites données, la solution est unique.

La plupart des méthodes utilisant les différences finies adoptent une discrétisation du milieu en mailles rectangulaires exclusivement. L'approche retenue par ITASCA est basée sur la méthode de Wilkins (1964), qui permet de formuler les équations des différences finies pour des éléments quelconques. On peut leur donner n'importe quelle forme aux limites et, faire varier les propriétés d'un élément à l'autre. De ce point de vue, elle est donc aussi performante que la méthode des éléments finis.

Dans cette méthode, chaque dérivée est remplacée directement par une expression algébrique écrite en fonction des variables de champs (c'est-à-dire les contraintes ou les déplacements) uniquement définis au niveau de points dans l'espace.

De plus, le code Flac se distingue essentiellement par son schéma de résolution explicite, qui permet de ne combiner les matrices élémentaires, ainsi un gain substantiel de place mémoire. En effet, seules les variables à la fin de chaque pas de temps sont stockées et non la matrice de rigidité, comme cela est le cas pour la méthode des éléments finis.

### **II.3.2 Analyse Lagrangienne**

Dans la méthode proposée, les coordonnées des nœuds peuvent être facilement réactualisées à chaque pas de temps, et le maillage se déforme avec le matériau qu'il représente. La formulation est donc « Lagrangienne », par opposition à la formulation « Eulérienne », pour laquelle le maillage reste fixe. L'intérêt de la méthode Lagrangienne est qu'elle permet de traiter facilement des problèmes en grandes déformations.

### **II.3.3 Schéma de résolution explicite**

Dans ce paragraphe, nous n'allons pas nous intéresser en détail à la méthode de résolution implantée à l'intérieur du code mais uniquement au mode de fonctionnement. Le lecteur intéressé peut se reporter à Marti & Cundall [1982] qui décrit la procédure plus finement.

La méthode de résolution adoptée par Flac consiste en une application non traditionnelle de la méthode des différences finies explicites, contrairement aux schémas de résolution implicites généralement adoptés. L'objectif de cette méthode est de traiter un problème statique par l'intermédiaire de la dynamique.

Basé sur le fait que dans la réalité, une partie de l'énergie de déformation accumulée par le système est convertie en énergie cinétique qui va se propager et se dissiper dans le matériau environnant. Le schéma de résolution explicite intègre ce phénomène en prenant en compte les équations dynamiques du mouvement. Le déséquilibre induit en une zone va se propager dans l'ensemble du massif. L'objectif de la méthode aux éléments lagrangiens n'en reste pas moins la résolution d'un problème statique ou quasi-statique par l'intermédiaire de la dynamique.

Le mode incrémental de résolution du système assure la stabilité du schéma numérique puisque même si le système est instable à certains instants les chemins de contraintes et de déformations sont respectés à chaque pas. La Figure II.1 précise bien quant à elle la séquence de calcul utilisée pour un pas de temps  $\Delta t$ . Cette procédure fait d'abord appel aux équations du mouvement afin de calculer les vitesses et les déplacements à partir de l'accélération, déduite de la résultante des forces et des contraintes. Alors, les déformations sont déduites des déplacements (intégrales des vitesses), et les nouvelles contraintes de ces déformations au travers des relations du modèle rhéologique.

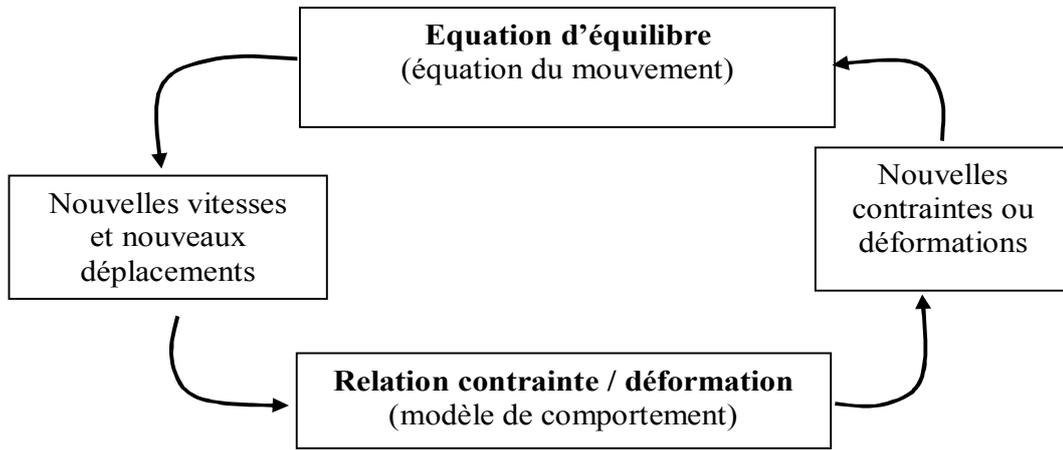


Figure II.1. Séquence de calcul générale (Billiaux, 1993).

Dans chaque boîte de calcul de la Figure II.1 on remet à jour toutes les variables à traiter à partir de valeurs connues qui doivent, elles, restées fixes durant les calculs dans cette boîte. C'est le principe fondamental de la résolution explicite. Ainsi le calcul de nouvelles contraintes n'affecte pas les vitesses calculées dans la boîte précédente. Cette hypothèse est justifiée par Itasca Consulting Group (2002), si un pas de temps  $\Delta t$  assez petit est choisi de manière à ce que l'information ne puisse pas passer d'un élément à l'autre au cours de cet intervalle de temps. Des éléments voisins ne pourront donc pas s'influencer pendant une période de calcul.

Tout ceci se base sur l'idée que la vitesse de l'« onde de calcul » est toujours supérieure à celle des ondes physiques ce qui permet de figer les valeurs connues et utilisées pour la durée des calculs  $\Delta t$ . Pour constituer un algorithme opérationnel, les mouvements doivent être amortis de manière à arriver à un état stationnaire (*équilibre* ou *écoulement permanent*) en un minimum de cycles et en un pas de temps le plus grand possible afin d'éliminer le risque d'instabilités numériques.

L'amortissement utilisé consiste à imposer à chaque nœud une force d'amortissement dont le module est proportionnel au module de la force nette non équilibrée et, dont la direction est telle qu'elle produit toujours un travail négatif. Cette forme d'amortissement artificiel permet aux forces de volume de s'évanouir à l'état stationnaire. La constante d'amortissement sans dimension, ne dépend pas des propriétés du système et, permet un amortissement variable d'un point à l'autre (Cundall, 1987). La procédure de résolution explicite n'étant pas inconditionnellement stable, il est nécessaire que la vitesse du front de calcul soit plus grande que la vitesse maximale de propagation de l'information, pour cela le choix du pas de temps est important en effet il doit être plus petit qu'un certain pas de temps critique (Billiaux, 1993).

Enfin, le critère de convergence pour contrôler la fin des cycles de calcul est simplement basé sur l'état d'équilibre de l'ensemble des éléments. Le programme teste pour chacun des éléments le déséquilibre de force et retient la force maximale non équilibrée. L'utilisateur définit la force en deçà de laquelle la convergence est supposée suffisante.

Les équations du mouvement sont utilisées pour calculer de nouvelles vitesses et donc de nouveaux déplacements à partir des contraintes et des forces en jeu. Rappelons que pour un solide déformable dans un référentiel lagrangien, l'équation du mouvement de Newton est exprimée par l'équation II.1.

$$\rho \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i \quad (\text{II.1})$$

Avec :  $\rho$  : masse volumique ;  $t$  : temps ;  $\dot{u}$  : vecteur vitesse ;  $x$  : vecteur position ;  $g$  : accélération due aux forces de volume

Les taux de déformations  $\dot{e}_i$  (Équation II.2) sont ensuite déduits et la loi de

comportement du matériau (Équation II.3) est utilisée pour calculer de nouvelles contraintes. Chaque séquence de calcul forme un cycle de calcul.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{II.2})$$

$$\sigma_n = f(\sigma_p, \varepsilon, k) \quad (\text{II.3})$$

Avec :

- $\sigma_n$  : nouvelles contraintes
- $\sigma_p$  : contraintes du cycle de calcul précédent
- $\varepsilon$  : déformation
- $k$  : Paramètre d'écrouissage

Ainsi formulée, la méthode de résolution implémentée dans Flac présente des avantages et des inconvénients si on tente de la comparer à d'autres méthodes bien connues telle que la méthode implicite généralement utilisée en éléments finis.

Le Tableau II.1 résume ces différences. Notons qu'au cours d'un pas de calcul, aucune itération n'est nécessaire pour calculer les contraintes à partir des déformations quelque soit le type de comportement envisagé pour le sol.

Tableau II.1. Comparaison entre les méthodes explicite et implicite (Cundall, 1980).

Explicite	Implicite
Le pas de temps doit être inférieur à une valeur critique pour assurer la stabilité.	Pas de restriction sur le pas de temps, au moins pour certains schémas de résolution.
Peu de calculs par pas de temps.	Nombreux calculs par pas de temps.
Pas d'amortissement numérique significatif introduit pour les problèmes dynamiques.	Amortissement numérique dépendant du temps pour les schémas inconditionnellement stables.
Prise en compte de lois de comportement non linéaires sans itérations supplémentaires.	Nécessité d'une procédure itérative pour la prise en compte de comportements non linéaires.
Si le pas de temps est inférieur à sa valeur critique, une loi non linéaire est toujours suivie d'une manière correcte.	Il est toujours nécessaire de démontrer que la procédure est : (a) stable ; et (b) physiquement correcte, c'est-à-dire qu'elle permet de suivre un chemin de contraintes physiquement correct.
Aucune matrice n'est construite. La mémoire nécessaire est minimum.	Une matrice de rigidité doit être stockée. La mémoire nécessaire est importante.
Aucune matrice n'étant construite, des grandes déformations et de grands déplacements peuvent être pris en compte avec quasiment aucun calcul supplémentaire.	Des calculs supplémentaires sont nécessaires pour suivre de grandes déformations et de grands déplacements.

Toutefois, le critère sur le pas de temps conduit nécessairement à un nombre de cycles de calcul importants, ce qui rend cette méthode peu performante pour les problèmes linéaires en petites déformations.

Il semble donc que le domaine de prédilection d'une méthode explicite soit l'étude de systèmes comprenant par exemple des non-linéarités, de grandes déformations ou des instabilités physiques. La prise en compte de la réelle complexité d'un site comportant de manière générale ce type de problèmes, la résolution explicite constitue donc une méthode bien adaptée aux types de difficultés auxquels nous nous sommes intéressés.

### II.3.4 Formulation numérique en différences finies : passage du problème continu à la discrétisation

En deux dimensions, le milieu continu est discrétisé en quadrilatères, chacun d'eux étant divisé en deux paires d'éléments triangulaires ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ ) à déformation uniforme comme indiqué sur la Figure II.2. La force exercée sur un nœud est la moyenne des forces pour les deux paires de triangles, ce qui permet d'assurer une réponse symétrique à un chargement symétrique.

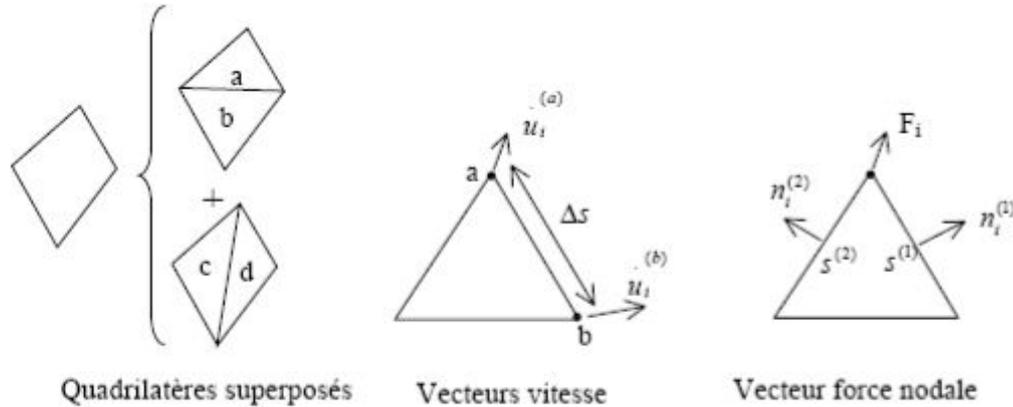


Figure II.2. Discrétisation mixte

A chaque étape de la Figure II.1 correspond une formulation numérique en différences finies. Les équations aux différences finies sont déduites du théorème de Gauss :

$$\int_s n_i \cdot f \cdot ds = \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dA \quad (\text{II.4})$$

Où :

- $s$  : périmètre de l'élément de surface  $A$ ,
- $n_i$  : vecteur unitaire normal à  $s$ ,
- $f$  : scalaire, vecteur ou tenseur défini sur  $A$  et son périmètre.

Le tenseur taux de déformation est donné par l'Équation II.2 et l'application du théorème de Gauss permet d'obtenir une relation en fonction des vitesses au nœud (a) et (b) (Figure II.2):

$$\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2A} \sum \left( \partial \dot{u}_i^{(a)} + \partial \dot{u}_i^{(b)} \right) n_j \Delta s \quad (\text{II.5})$$

- $\Delta s$  : distance du point a au point b,
- $A$  : aire de l'élément.

**b)** A partir du tenseur des déformations  $e'_{ij}$ , on utilise la loi de comportement (et l'ajustement de rotation pour les grandes déformations) pour en déduire un nouveau tenseur de contrainte (Équation II.3).

**c)** De ces contraintes on déduit la force totale appliquée à chaque nœud en sommant toutes les forces à ce nœud dues à chaque élément dont il fait partie, en ajoutant le chargement éventuel et les forces de volume  $F^s = g m_g$

**d)**  $\Sigma F_i$  est la force nette non équilibrée appliquée au nœud. On applique ensuite la loi de Newton (Équation 1) dont la formulation en différences finies est :

$$\dot{u}_i \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) = \dot{u}_i \left( t + \frac{\Delta t}{2} \right) + \sum F_i^{(t)} \frac{\Delta t}{m} \quad (\text{II.6})$$

On obtient les nouvelles vitesses de déplacement aux nœuds puis on effectue le pas de calcul suivant (retour en a).

En grandes déformations, on calcule également les nouvelles coordonnées du nœud :

$$x_i^{t+\Delta t} = x_i^{(t)} + u_i^{(t+\Delta t)} \Delta t \quad (\text{II.7})$$

### Amortissement

Les mouvements doivent être amortis de manière à arriver à l'état stationnaire (équilibre ou écoulement permanent) en un minimum de cycles. Par simplification, Flac impose à chaque nœud une force d'amortissement dont le module est proportionnel au module de la force nette non-équilibrée, et dont la direction est telle qu'elle produit toujours un travail négatif.  $\sum F_i^{(t)}$  est remplacé par  $\sum F_i^{(t)} - \alpha \sum F_i^{(t)} \text{ signe } (\dot{u}^{t-\frac{\Delta t}{2}})$  dans l'équation de Newton de l'étape c). Avec cette forme d'amortissement, les forces de volume se dissipent à l'état stationnaire (contrairement à l'amortissement visqueux).

### Critère de convergence

Le critère de convergence pour contrôler la fin des cycles de calcul est basé sur l'état d'équilibre de l'ensemble des éléments. Le programme teste pour chacun des éléments le déséquilibre de force et retient la force maximale non équilibrée. L'utilisateur définit la force en deçà de laquelle la convergence est supposée suffisante.

A l'atteinte de l'équilibre, les vitesses de déplacement des nœuds deviennent très faibles (un critère acceptable est une vitesse maximum de  $10^{-7}$  m/s), à moins que l'on observe une rupture du sol. Dans ce cas, les vecteurs vitesses aux nœuds ont une direction privilégiée et ne tendent pas à se réduire (écoulement permanent).

## II.4 FORCES NON EQUILIBREES (UNBALANCED FORCE)

Dans un modèle à éléments finis, il est nécessaire que le processus de chargement soit représentatif de celui subi réellement par le massif. On y arrive en décomposant le chargement total en incréments de charge chaque incrément étant suffisamment petit pour que la solution converge après quelques itérations, malgré la réponse non linéaire du massif.

Toutefois, au fur et à mesure que le système modélisé devient de plus en plus non-linéaire et que l'incrément de chargement devient de plus en plus petit par rapport au chargement total, la technique incrémentale devient similaire à la modélisation d'un comportement quasi dynamique du massif, répondant à l'application graduelle du chargement total.

Afin de surmonter cela, une technique de relaxation dynamique a été proposée (Otter et al, 1966) et a été appliquée, en premier, aux géomécaniques par Cundall (1971). Dans cette technique, des forces non équilibrées agissent au niveau de points d'intégration matériels, et provoquent une accélération de la masse associée à ces points, en appliquant les lois du mouvement de Newton. Un nouveau bilan des forces est alors dressé pour chaque point d'intégration matériel dans le modèle.

Cette technique d'amortissement a pour effet une accélération de la convergence et réduit considérablement les effets d'oscillation mécanique. De plus, elle a l'avantage de pouvoir gérer des non-linéarités à la fois géométriques et rhéologiques, pour un surcoût de calcul relativement faible qui dépend linéairement du nombre d'éléments utilisés.

Par ailleurs, la divergence numérique révèle en général dans le modèle des comportements provoqués par des anomalies physiques (amorce de rupture, hétérogénéité des matériaux). Une fois que le modèle a été divisé en éléments, que les propriétés des matériaux ont été assignées et que les chargements ont été appliqués, certaines techniques doivent être utilisées pour redistribuer les forces non équilibrées, et donc déterminer la solution du nouvel état d'équilibre. La méthode des différences finies cherche pour cela à minimiser l'énergie potentielle totale du système, afin d'établir les relations d'équilibre : les déplacements sont les inconnues de ces équations simultanées. La force maximale non équilibrée est déterminée pour l'ensemble des mailles. L'évolution de cette force peut être affichée sur l'écran ou visualisée comme un graphe. Cette force est importante pour l'indication de l'équilibre du modèle.

Notons  $R$  le rapport en pourcentage de la force non équilibrée maximale sur la force interne représentative. Une valeur de  $R$  de 1% à 0.1% peut être acceptable pour l'indication de l'équilibre en fonction du degré de précision voulu :  $R = 1\%$  peut être suffisante pour une étape intermédiaire dans une séquence d'opération, tandis que  $R = 0.1\%$  peut être utilisée pour un état final.

## II.5 PRESENTATION DU CODE BIDIMENSIONNEL (FLAC2D)

Flac2D a été conçu pour opérer dans un espace *bidimensionnel*. Bien souvent, il est possible de tirer parti des symétries du système étudié, afin de réduire la complexité du modèle, et donc les temps de calcul. Ainsi, un maillage d'éléments finis de massif n'est pas systématiquement à trois dimensions. En effet, si l'une des dimensions de l'ouvrage est prépondérante (remblai de grande largeur, section courante d'un tunnel, etc.) et toutes les autres caractéristiques du modèle (chargement, conditions aux limites, interfaces) le permettent, il est possible d'analyser l'ouvrage dans un *plan*. Cette analyse, dite en déformations *planes*, suppose que la composante du déplacement perpendiculaire au plan considéré est uniformément nulle.

L'utilisateur construit alors son maillage dans un plan, mais admet implicitement qu'il bénéficie d'une profondeur égale à l'unité. Les forces appliquées sur ce type de modèle ne s'expriment pas en Newton, mais en Newton par mètre (force par unité de longueur).

L'utilisation de modèles *bidimensionnels* permet bien sûr de réduire considérablement les temps de calcul, mais rend surtout possible le raffinement géométrique des systèmes étudiés. En effet, pour de nombreux problèmes *tridimensionnels*, les maillages raffinés sont difficiles, voire impossibles à réaliser car la taille des systèmes matriciels peut très vite dépasser la capacité des ordinateurs utilisés. Par conséquent, les maillages sont fréquemment plus grossiers dans le cas *tridimensionnel* que dans le cas *bidimensionnel* et la modélisation est plus approximative.

Le code Flac2D intègre de nombreux modèles constitutifs, adaptables à un grand nombre de matériaux, géologiques ou non. Chacun d'entre eux nécessite l'apport de paramètres mécaniques spécifiques, descriptifs de la rhéologie du matériau.

Les modèles disponibles dans Flac2D sont : modèle nul (pour les sols retirés ou excavés), élasticité isotrope ou anisotrope, élasto-plasticité (cam-clay modifié, Druker-Prager, Mohr-coulomb standard ou avec écrouissage positif (ou négatif) et écrouissage et changement de volume, élasto-plasticité (Mohr-Coulomb) avec plan de discontinuité localisé (faille, etc.))

En effet, on note que nos simulations à l'aide du code Flac2D se feront en problèmes à axe de symétrie (*batardeaux circulaires*), en faisant appel à la commande : **config gw axi** implantée dans ce code.

## II.6 PRESENTATION DU CODE TRIDIMENSIONNEL (FLAC3D)

Flac3D (**F**ast **L**agrangian **A**nalysis of **C**ontinua in **3D**) est un outil avancé pour des études complexes de géotechnique et d'interaction sol-roche / structures. C'est un code qui est utilisé dans l'analyse, essai, et dessin par ingénieurs géotechniques, civil et des mines, et il a une grande gamme d'application parce que sa possibilité analytique n'est pas limitée à une définition du problème particulière ou type d'analyse.

Grâce à ses nombreuses fonctionnalités, Flac3D résout de multiples problèmes :

- dimensionnement de pentes, talus ou fouilles et analyse de leurs stabilités ;
- dimensionnement de fondations superficielles et profondes ;
- étude de barrages en terre ou en béton ;
- excavations souterraines avec phasage complexes ;
- interaction Sol-Structure ;
- matériaux à loi de comportement spécifique développée par l'utilisateur.

### II.6.1 Formulation du modèle 3D en différences finies explicite

On rappelle que Flac3D est un programme en différences finies explicite. Il a pour but d'étudier numériquement le comportement mécanique du milieu continu en trois dimensions quand il atteint l'état d'équilibre ou écoulement stationnaire plastique. La réponse observée du modèle est extraite d'une part, du modèle mathématique particulier, et de la mise en œuvre numérique spécifique d'une autre part.

### II.6.2 Description du modèle mathématique

La mécanique du milieu est dérivée des principes généraux (définition de la force, loi du mouvement), et l'utilisation des équations qui définissent le milieu. Les expressions mathématiques qui en résultent sont la mise des équations différentielles aux dérivées partielles (EDP), qui relient les variables mécaniques (contraintes) et variables cinétiques (force et vitesse), qui doivent être résolues pour une géométrie particulière avec leur propriétés, et conditions initiales et aux limites. Un aspect important du modèle est l'inclusion des équations du mouvement, bien que, Flac3D est concerné principalement par l'état des contraintes et déformations du milieu au voisinage de l'état d'équilibre.

### II.6.3 Formulation numérique

La méthode de solution adoptée en Flac3D est caractérisée par les trois approches suivantes :

1. approche en différences finies (espace en 1<sup>er</sup> ordre et dérivées par rapport au temps du variable sont approximés par les différences finies, supposant des variations linéaires de la variable autour de l'espace fini et l'intervalle du temps, respectivement) ;
2. approche du modèle discret (le milieu continu est remplacé par un milieu discret équivalent, où toutes les forces appliquées sont concentrées aux nœuds du maillage tridimensionnel utilisé dans la représentation du modèle) ;
3. approche de la solution dynamique (les termes d'inertie dans l'équation du mouvement sont utilisés comme moyens numériques pour atteindre l'état d'équilibre du système considéré).

Les lois du mouvement du milieu continu sont, au biais de ces approches, transformées en formes discrètes de la loi de Newton aux nœuds. Le système résultant des équations différentielles ordinaires est alors résolu numériquement en utilisant une approche dans le temps en différences finies explicites. Les dérivées spatiales impliquées dans la dérivation du milieu équivalent sont celles qui apparaissent dans la définition des forces dans les termes de vitesse.

Dans le but de définir les variations de la vitesse et l'intervalle de l'espace, le milieu est discrétisé en éléments de forme tétraédrale où les vitesses sont des nœuds du maillage mentionné ci-dessous et représenté sur la Figure II.3 suivante.

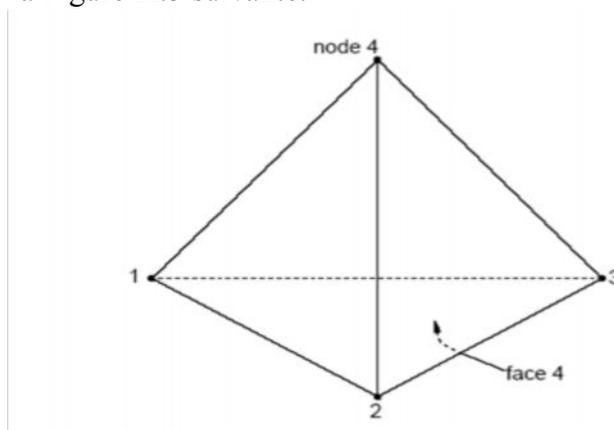


Figure II.3. Tétraèdre.

## II.6.4 Nomenclature

Le code Flac3D utilise une nomenclature qui est consistante, en général, avec laquelle sont utilisés en convention les programmes des différences ou éléments finis pour l'analyse des contraintes. Ici pour clarification, la Figure II.4 illustre la terminologie de Flac3D.

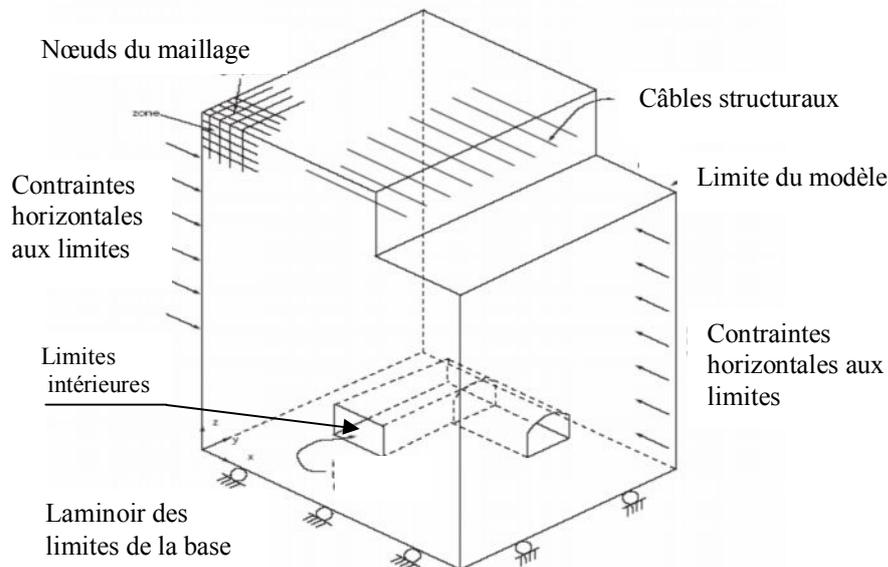


Figure II.4. Exemple du modèle Flac3D.

### a) Modèle Flac3D

Le modèle Flac3D est créé par l'utilisateur pour simuler le problème physique. En référant aux commandes qui définissent les conditions du problème pour la solution numérique.

### b) La zone

La zone en différence finie est le petit domaine géométrique dans lequel le changement dans les phénomènes (exemple : les contraintes) est évalué. Les zones polyédrales de différentes formes (exemple : les zones en forme brique, pyramide et tétraèdre) sont utilisées pour créer et voir le perspective des modèles.

### c) Zone nulle

Les zones nulles sont des zones qui représentent des vides (i.e., aucun matériau n'est présent) à l'intérieur du maillage en différences finies.

### d) Nœuds de maillage

Ils sont associés avec les corners des zones en différences finies. Il y'a cinq, six, sept ou huit nœuds du maillage associés avec chaque zone polyédrale, dépendant de la forme des zones. Des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont attribuées à chaque nœud du maillage, ainsi spécifient l'emplacement exacte des zones en différences finies. .

### e) Conditions aux limites

Ce sont la prescription des conditions contrôlées ou CONTRAINTE autour les limites du modèle (exemple : les déplacements ou forces fixés pour les problèmes mécaniques, limites imperméables pour les problèmes d'écoulement souterrain).

### f) Conditions initiales

C'est l'état de toutes les variables dans le modèle (exemple : pressions interstitielles) préalables pour n'importe change du chargement ou TROUBLE (telle que : excavation).

### g) Modèle constitutif

Le modèle constitutif représente le comportement de la déformation et les forces décrites pour les zones du modèle Flac3D. Plusieurs modèles constitutifs sont disponibles en Flac3D pour assimiler les différents types des comportements communs associés avec les modèles géologiques. Le modèle

constitutif et les propriétés du matériau peuvent être attribués individuellement dans les modèles en Flac3D.

#### h) Sous maillage (SUB-GRID)

Le maillage en différences finies peut être composé par de sous mailles. Ces dernières peuvent être utilisées pour créer des régions de différentes formes dans le modèle (exemple : le sous maillage d'un barrage peut être placé sur le sous maillage de la fondation). Le sous maillage est généré séparément, déplacé et attaché en ensemble.

#### i) Interface

Une interface est la connexion entre les mailles qui peuvent être séparées (exemple : baisse ou ouverture) pendant le processus de calcul. Une interface peut représenter une discontinuité physique comme l'interface entre deux différents matériaux.

#### j) Groupe

Le groupe en modèle Flac3D renvoie à la collection des zones identifiées par un seul nom. Les groupes sont utilisés pour limiter le rang de certaines commandes de Flac3D, comme pour la commande *MODEL* qui attribue les modèles matériels aux groupes désignés.

### II.6.5 La solution statique

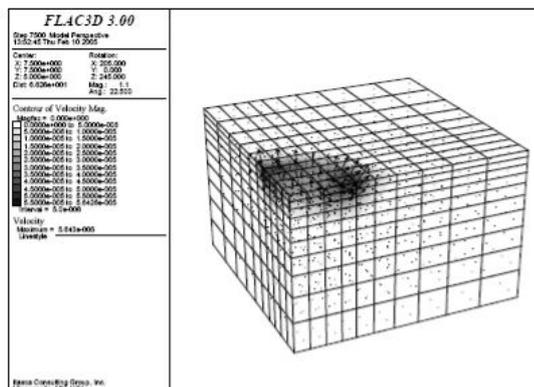
La solution statique est atteinte en Flac3D lorsque le taux de changement de l'énergie cinétique dans le modèle s'approche d'une valeur négligeable. Ceci est obtenu en appliquant l'équation du mouvement. A la fin de l'étape de l'état statique, le modèle sera à l'état d'équilibre ou l'état de *l'écoulement permanent* du matériau si une part ou tout le modèle est instable au-dessous des conditions des charges appliquées. Ceci est le calcul par défaut de Flac3D. Les solutions statiques mécaniques peuvent être couplées pour *l'écoulement souterrain* transitoire ou les solutions de transfert de chaleur.

### II.6.6 La solution dynamique

Pour la solution dynamique, toutes les équations dynamiques de mouvement (y compris les termes d'inertie) sont résolues; la génération et la dissipation de l'énergie cinétique affectent directement la solution. Les solutions dynamiques sont nécessaires pour les problèmes provoquant de haute fréquence et charges de courtes durées. (Exemple : chargement séismique ou explosive). Le calcul dynamique est un modèle optionnel pour Flac3D.

### II.6.7 Le maillage en différences finies

Le maillage en différences finies recouvre le domaine physique analysé. Le petit maillage qui peut être analysé par Flac3D constitué seulement d'une seule zone. Plusieurs problèmes, cependant, sont définis par des mailles constituées de centaine ou de milliers de zones. Le maillage en Flac3D est spécifié par les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Tous les nœuds du maillage et les zones centrées sont définies par le vecteur position  $v(x,y,z)$ .



## II.6.8 Création de fichiers de données en Flac3D

L'utilisateur a le choix d'exécution de Flac3D interactivement (i.e., entrer les commandes de Flac3D dans son environnement) ou via des fichiers de données (appelés aussi '*batch file*'). Le fichier de données est un fichier créé par l'utilisateur contenant les commandes de Flac3D pour le problème à analyser. En général, la création des fichiers de données est la bonne méthode pour utiliser Flac3D. On fait appel aux fichiers de données par la commande CALL. Il est recommandé que l'extension commune des fichiers de données soit '\*.DAT' pour entrer des données, et l'extension '\*.FIS' pour les fonctions FISH en Flac3D afin de distinguer un fichier des autres types de fichiers.

Flac3D est basé sur un format de commande parce que la plupart des analyses exigent l'utilisation de fichiers d'entrée de données. Flac3D peut être employé comme « laboratoire numérique » pour examiner des idées. L'utilisateur implique un ordre des commandes qui définissent les conditions de problème pour la solution numérique.

Flac3D opère sous toutes les plates-formes Windows, avec opération du mode de commandes disponibles dans une fenêtre de la production standard. Flac3D fournit des formes primitives construites et résolution rapide, hautes capacités graphiques pour activer le processus de la modélisation. Les paramètres de la solution peuvent être spécifiés par l'utilisateur, en maximisant le contrôle de l'utilisateur sur la durée, longueur, et efficacité de l'exécution du modèle. Le contrôle supplémentaire et personnalisé sont disponibles à l'utilisateur à travers le langage de programmation construit puissant de Flac3D, FISH.

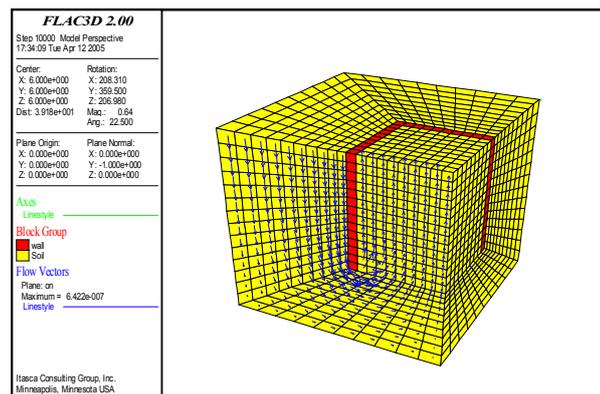


Figure II.6. Sorte graphique d'un modèle Flac3D. Excavation dans un sol saturé.

## II.6.9 Méthodologie de simulation avec Flac3D

Afin d'installer un modèle pour réaliser une simulation avec Flac3D, trois composants fondamentaux d'un problème doivent être indiqués :

1. Générer le maillage ;
2. Définir les paramètres constitutifs ; et
3. Appliquer les conditions initiales et aux limites.

La Figure II.7 (adoptée du manuel Flac3D) présente les grandes lignes de la stratégie utilisée pour modéliser l'excavation d'une tranchée. La simulation se fait par phase et la réponse du système est systématiquement examinée après chacune des phases de calcul pour s'assurer de la validité des résultats.

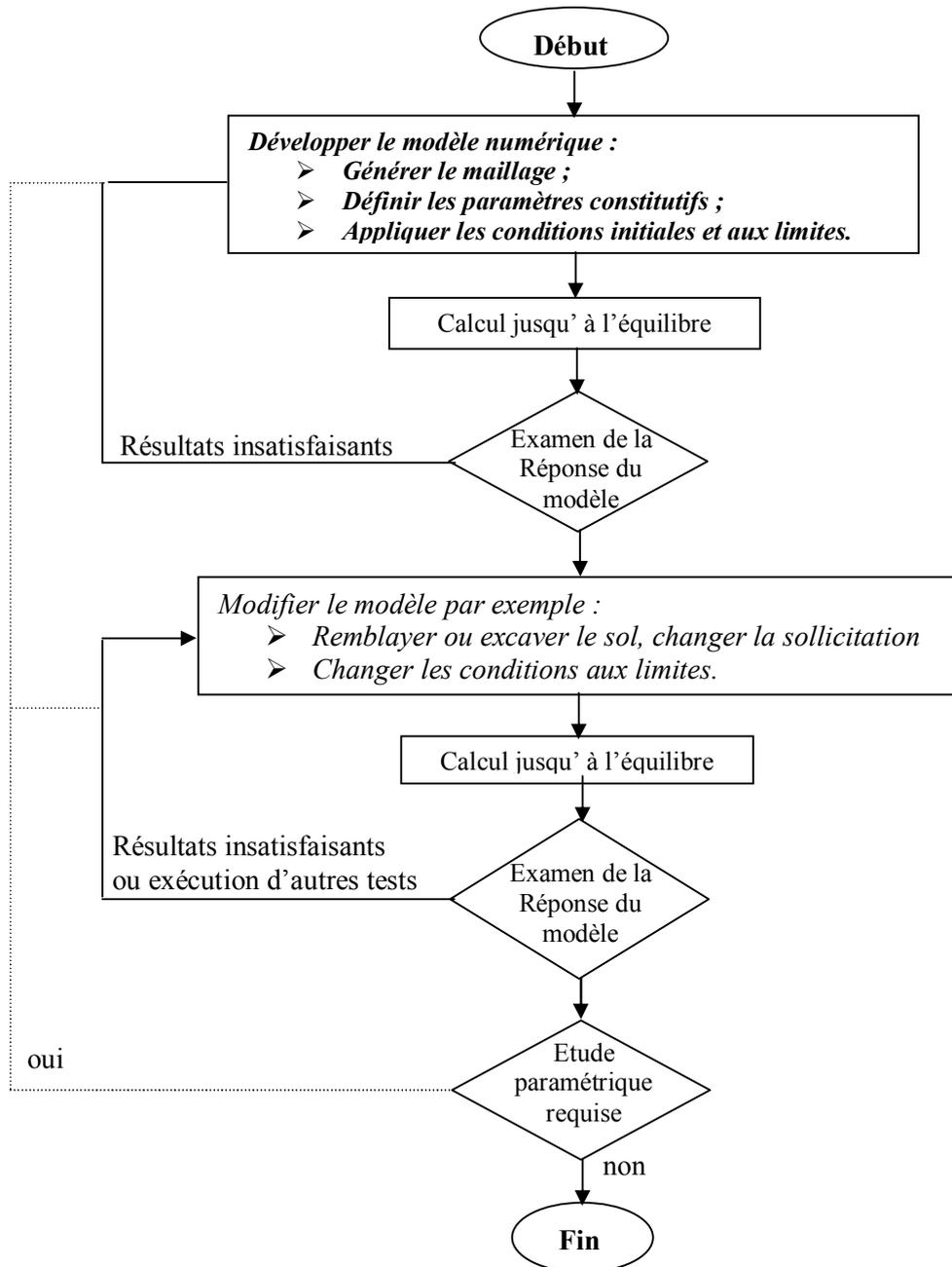


Figure II.7. Méthodologie de modélisation numérique avec Flac (ITASCA Manuel).

### II.6.10 Génération de maillage

La génération de maillage dans Flac3D implique de raccorder l'ensemble des formes de maillage de la connectivité spécifique (désignée sous le nom des *primitives*) pour former un modèle complet avec la géométrie désirée. Plusieurs types de formes primitives sont disponibles, et ceux-ci peuvent être reliés et conformés pour créer les géométries tridimensionnelles complexes.

Le maillage de Flac3D est produit avec la commande GENERATE zone. Cette commande peut être employée indépendamment pour créer un modèle reparté en zones d'une forme primitive ; chaque forme a un type spécifique de connectivité.

Plusieurs formes primitives sont établies dans le générateur pour accélérer la génération de maillage pour des formes de problème simple. Ceux-ci incluent la brique, la cale, la pyramide et des formes de cylindre.

#### ➤ Orientation des noeuds et les faces dans les zones en Flac3D

On rappelle qu'une zone est le domaine géométrique fermé, avec des noeuds aux sommets et des faces formant la surface de celle-ci. L'orientation relative des nœuds et les faces est montrée sur la

Figure II.8. Pour les cinq formes primitives du maillage : la brique, pyramide, brique et tétraèdre dégénérés. Chaque face a des *verticaux* ; ces derniers sont identifiés aussi sur la Figure II.8. Plusieurs commandes de Flac3D et le langage *FISH*, se rapportent à cette orientation.

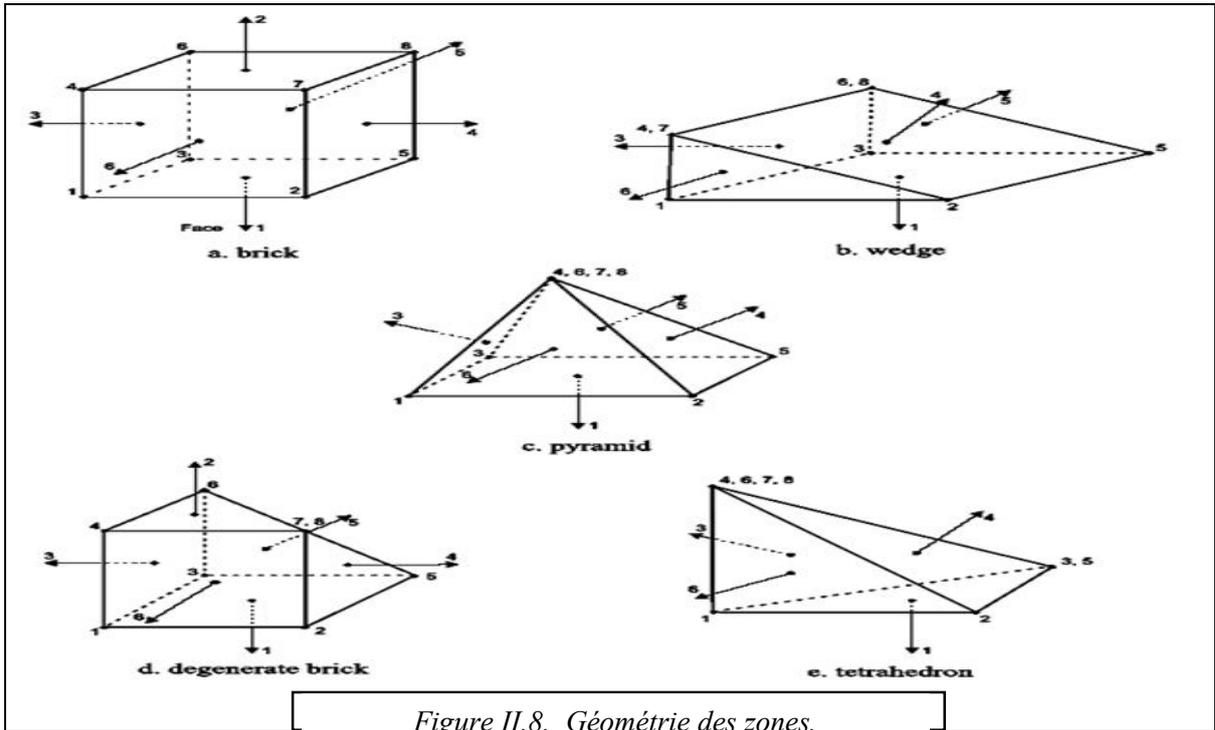


Figure II.8. Géométrie des zones.

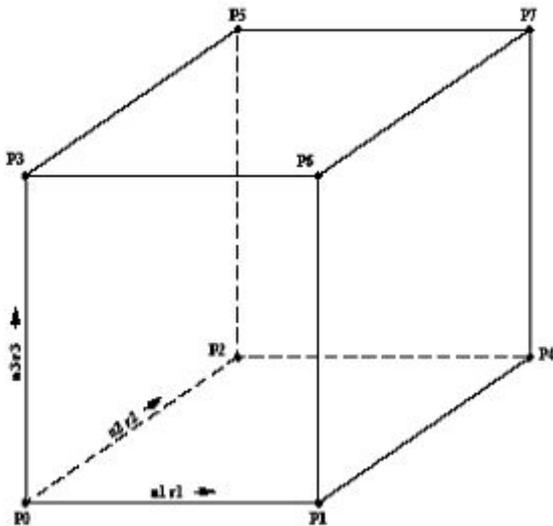


Figure II.9. Maillage d'une brique- brick

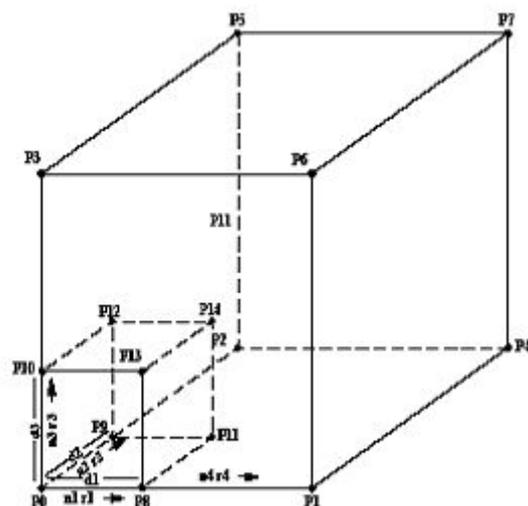


Figure II.10. Maillage gradué d'une brique - radbrick.

## II.7 MODELISATION DE L'ÉCOULEMENT

### II.7.1 Modélisation de l'écoulement en Flac

Dans le cas général, les terrains sont en partie baignés par des nappes d'eau en équilibre hydrostatique ou en écoulement. La présence de cette eau dans les espaces interstitiels entre les grains induit des effets mécaniques sur le sol : forces d'écoulement appliquées aux grains, poids déjaugé et consolidation.

Si la perméabilité du sol est élevée, le mouvement de l'eau est instantané et la pression interstitielle n'est pas modifiée. Ainsi, dans le cas d'un remblai construit sur un sol perméable, la pression interstitielle est constamment égale à la pression interstitielle initiale.

En revanche, si la perméabilité du sol est faible par rapport à la vitesse de variation des contraintes, l'eau interstitielle ne peut s'écouler de manière instantanée et se met en surpression qui se dissipe dans le temps (*le sol se consolide*).

Le comportement d'un sol perméable est toujours un comportement à long terme (*condition drainée*). Alors que le comportement d'un sol peu perméable évolue entre deux comportements extrêmes :

- Un comportement à court terme lorsque le sol vient d'être chargé ou déchargé. Aucune variation de volume n'a encore pu se produire et les variations des contraintes normales sont reportées totalement ou en partie sur l'eau interstitielle (*condition non drainée*) ;
- Un comportement à long terme lorsque la surpression interstitielle due au chargement du sol s'est dissipée et que le régime d'écoulement de l'eau est devenu permanent (*condition drainée*).

Duncan (1996) a indiqué que, pour les problèmes faisant intervenir des chargements non exceptionnels, les sols dont le coefficient de perméabilité est supérieur à  $10^{-6}$  m/s peuvent être analysés en conditions drainées et les sols de coefficient de perméabilité inférieur à  $10^{-9}$  m/s en condition non drainée.

Flac modélise l'écoulement de l'eau dans le milieu poreux tel que le sol, soit indépendamment de l'effet mécanique (calcul hydromécanique découplé), soit en tenant compte de l'interaction sol-fluide (hydromécanique couplé). Ce dernier type de comportement induit deux effets mécaniques. Dans le premier, le changement de la pression interstitielle génère un changement en contraintes effectives qui peuvent affecter la réponse du solide. A titre d'exemple, une réduction des contraintes effectives peut induire un écoulement plastique. Dans le deuxième, le fluide réagit par un changement de pressions interstitielles à la variation mécanique du volume.

La formulation de l'écoulement de Flac est basée sur des relations simples, en utilisant la loi de Darcy pour un milieu poreux anisotrope. L'effet de gravité est incorporé dans la formulation afin de permettre à l'eau de migrer en toute zone non totalement saturée.

Avec cette formulation, une surface libre apparaît naturellement dans un calcul d'écoulement.

Dans le cas des problèmes couplés drainés, la convergence au régime statique peut être très lente (plusieurs pas de calcul mécanique sont nécessaire pour garder l'équilibre quasi statique) quand le module volumique de l'eau est très grand par rapport au module de confinement du sol  $K + (4/3) G$ . Plusieurs stratégies de modélisation sont disponibles en Flac pour approcher les différents processus couplés. L'une consiste à supposer que les pressions interstitielles nodales soient fixes. Cette approche ne nécessite pas de mémoire supplémentaire dans le calcul. Elle peut être représentative dans le cas des sols grossiers baignés par une nappe statique sans écoulement. Les pressions interstitielles se dissipent au fur et à mesure, que le changement est appliqué et que l'on peut considérer que le champ de pressions d'eau est invariant. Ce champ de pression d'eau se traduit par des actions simples sur le sol et les éléments de structure. Ainsi, le sol se trouve simplement déjaugé tandis que les éléments de structure se trouvent soumis à des champs de pressions simples.

Les autres stratégies de Flac utilisent la configuration **Ground water (Config GW)** pour l'analyse de l'interaction sol - fluide. Les plus élaborées nécessitent plus de temps et de mémoire.

## II.7.2 Modélisation de l'écoulement en Flac3D

Le code Flac3D manie les deux écoulements complètement saturés, aussi bien que l'écoulement dans lequel une surface phréatique se développe. Dans ce cas, les pressions interstitielles sont nulles au-dessus de la surface phréatique et la phase de l'air est considérée comme passive. La logique est applicable aux matières grossières quand les effets capillaires peuvent être négligés. Les caractéristiques suivantes sont fournies avec la capacité de l'écoulement du fluide :

1. Deux lois de transport de fluide qui correspondent à la perméabilité *isotrope* et *anisotrope* sont disponibles. Le modèle nul de l'écoulement du fluide est aussi fourni pour spécifier des milieux imperméables dans le domaine de l'écoulement.
2. Différentes zones peuvent avoir différents modèles d'écoulement (isotrope, anisotrope ou nul) et propriétés.
3. Les pressions du fluide, flux et les conditions aux limites peuvent être prescrites.
4. Les sources du fluide (puits) peuvent être insérées dans le milieu comme point sources ou source volume. Ces sources correspondent à l'écoulement entrant ou écoulement sortant et varie avec le temps.
5. Les deux algorithmes de solutions explicite et implicite de l'écoulement du fluide sont disponibles complètement pour les simulations des sols saturés. Une méthode explicite de solution est utilisée pour l'écoulement saturé/non saturé.
6. Coupler entre les calculs mécaniques et hydrauliques dus aux grains déformables est fourni à travers le coefficient *Biot*,  $\alpha$ .
7. Coupler au calcul thermique est fourni à travers l'expansion du coefficient thermique linéaire,  $\alpha_t$ , et du coefficient thermique non drainé,  $\hat{\alpha}$ .
8. La logique de l'écoulement thermique du fluide est basée sur une théorie linéaire qui assume des propriétés constantes du milieu et des négligences de la convection. Les températures du fluide et du solide sont équilibrées localement.

### II.7.3 Modélisation de l'écoulement de l'eau avec le calcul de la surface phréatique

Flac3D modélise l'écoulement de l'eau dans lequel une surface phréatique se développe, comme l'écoulement entièrement saturé. Les pressions interstitielles sont nulles au-dessus de la surface phréatique et la phase d'air est négligée en tant que passive. La logique appliquée aux matériaux suppose que les effets capillaires peuvent être négligés.

Deux lois de transport des liquides sont disponibles correspondant à la perméabilité isotrope et anisotrope. Le modèle nul d'écoulement du fluide est fourni pour indiquer les matériaux imperméables, et les différentes zones peuvent avoir des différents modèles et propriétés de l'écoulement du fluide.

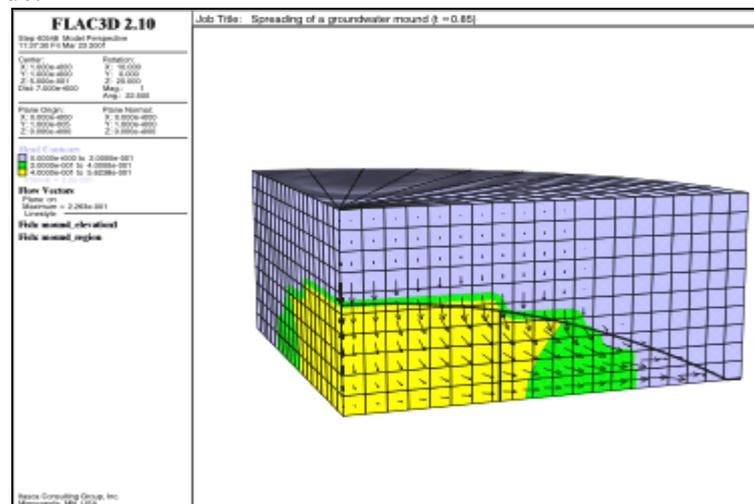


Figure II.11. Propagation d'un monticule d'eaux souterraines dans un milieu saturé.

## II.8 ELEMENTS DE STRUCTURE

Afin de simuler la paroi moulée, les butons et les tirants d'ancrage, des éléments structurels sont mis en œuvre. Deux types d'éléments permettent de modéliser les tirants : les éléments câble et les éléments barre. La description faite de ces éléments correspond à leur utilisation en deux dimensions (Flac2D).

### II.8.1 Éléments câble

Lorsque le renforcement est utilisé pour augmenter la résistance au cisaillement du sol, des éléments câbles peuvent être mis en œuvre. Ces éléments peuvent notamment modéliser des clous, tirants à ancrage réparti ou ponctuel pouvant être précontraint et des boulons.

Les éléments câbles sont des éléments finis rectilignes à un degré de liberté par nœud. Ils n'ont pas de résistance à la flexion, leur comportement est uniquement axial. Ces éléments peuvent être ancrés en un point spécifique du maillage ou bien liés au maillage afin qu'une force se développe le long de l'élément lorsque le maillage se déforme. Ces éléments ont été mis en œuvre afin d'effectuer des modélisations pour lesquelles la pape de renforcement est soumise à une tension initiale.

### II.8.2 Éléments poutre

Les éléments poutre sont des éléments bidimensionnels avec trois degrés de liberté à chaque extrémité (translation en  $x$ , en  $y$  et rotation). Une représentation est donnée sur la Figure II.12. Ces éléments peuvent être joints entre eux et/ou aux nœuds du maillage. Les éléments sont caractérisés par leur géométrie et leurs propriétés matérielles. Les éléments poutre sont considérés ayant une section symétrique de surface  $A$ , une longueur et un moment d'inertie. En général, le comportement des éléments poutre est élastique linéaire sans critère de rupture. On attribue ainsi à chaque élément un module d'élasticité  $E$ .

Les éléments poutre sont généralement utilisés pour représenter des éléments de structure pour lesquels la résistance à la flexion est importante (butons, poteau, poutre). Des éléments poutre attachés au maillage via des éléments d'interface peuvent également simuler l'effet des géotextiles. En assignant un moment d'inertie nul aux éléments poutre, ceux-ci vont se comporter comme des éléments flexibles qui ne reprennent pas de moments de flexion. La modélisation des interfaces entre les éléments poutre et le maillage permet de prendre en compte l'interaction entre les éléments de structure et le sol environnant.

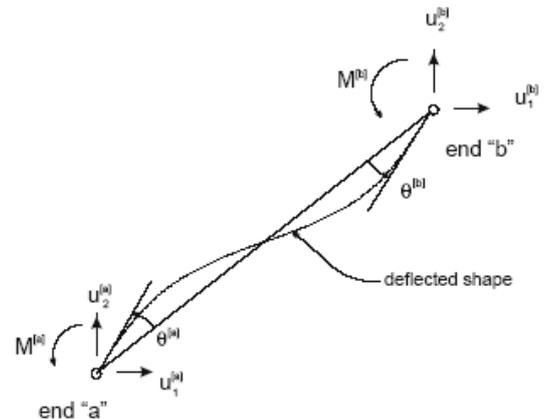


Figure II.12. Nomenclature pour un élément poutre.

### II.8.3 Éléments barre

**II.8.4 Coque**, structure mince pouvant reprendre les chargements et les moments fléchissants, et pour laquelle les déformations de cisaillement transverse peuvent être négligées (fondation superficielle, plancher).

**II.8.5 Soutènement**, coque dotée d'une interface frottant avec le matériau avoisinant (revêtement de tunnel, mur de soutènement).

**II.8.6 Soutènement encastré**, soutènement qui étend l'interaction avec la grille aux deux côtés du soutènement.

**II.8.7 Géogrille**, soutènement dont la résistance à la flexion est nulle (géotextile, géomembrane).

**Pieu**, poutre qui peut transmettre au maillage des efforts normaux et de cisaillement (fondation profonde).

**II.8.8 Boulon**, structure avec résistance à la traction qui possède une interface de comportement radoucissant qui simule le coulis d'ancrage.

## II.9 MODELES DE COMPORTEMENT

Après avoir présenté le code de calcul, nous allons maintenant décrire brièvement les modèles de comportement de sol, et les éléments d'interface permettant d'introduire des non-linéarités géométriques qui peuvent être rencontrées au cours de la résolution des problèmes.

Un certain nombre de modèles de comportement sont disponibles dans le logiciel, que l'on peut classer en trois groupes : le modèle nul, les modèles élastiques et les modèles plastiques :

- le modèle nul : il est utilisé pour représenter des zones de sol excavées,
- les modèles élastiques : le modèle élastique linéaire et isotrope et le modèle élastique transversalement isotrope,
- les modèles plastiques avec entre autres :
  - 1) le modèle élastique parfaitement plastique de Mohr-Coulomb,
  - 2) le modèle élastoplastique avec écrouissage de Cam Clay.

Tous les modèles sont implémentés en utilisant le même algorithme numérique incrémental : à partir de l'état de contrainte du pas précédent et de l'incrément de déformation totale du pas de temps actuel, l'incrément de contrainte correspondant est calculé et le nouvel état de contrainte est alors déterminé.

Il est possible d'introduire de nouvelles lois de comportement mécaniques dans le logiciel Flac. Cela est possible avec **Flac2D** par l'intermédiaire du langage de programmation interne au logiciel (langage **FISH**). En **3D**, le modèle doit être implémenté en langage **C++**, puis compilé en un fichier **DLL** (**D**ynamic **L**ink **L**ibrary). Cette méthode est également utilisable pour Flac2D. Dans certains cas, cette dernière solution, est nettement plus efficace que la programmation en **FISH** en terme de temps de calcul.

### II.9.1 Le modèle élastique linéaire isotrope : Loi de Hooke dans Flac

Les lois de comportement relient les sollicitations appliquées  $\sigma_{ij}$  à la réponse en déformations des matériaux  $\varepsilon_{ij}$ . Dans le cas de l'élasticité linéaire isotrope le tenseur de déformations est relié au tenseur des contraintes, et l'expression la plus courante est donnée par la relation de Hooke qui adopte les formes établies dans l'équation **II.8** et dans l'équation **II.9**. Avec  $\delta_{ij}$  l'indice de Kronecker.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{II.8})$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij} - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{II.9})$$

Dans le code de calcul Flac, l'écriture des relations de comportement utilise les modules volumiques et de cisaillement plutôt que le module d'Young et le coefficient de Poisson, les relations entre ces divers paramètres sont résumées dans le Tableau **II.2**.

Tableau II.2. Relations entre constantes élastiques (d'après Leipholz, 1974).

Couple de paramètres utilisés	Expression des paramètres			
	Module de cisaillement G	Module d'Young E	Module volumique K	Coefficient de Poisson $\nu$
G, E	G	E	$\frac{GE}{9G-3E}$	$\frac{E-2G}{2G}$
G, K	G	$\frac{9GK}{3K+G}$	K	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$
G, $\nu$	G	$2G(1+\nu)$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\nu$
E, K	$\frac{3KE}{9K-E}$	E	K	$\frac{3K-E}{6K}$
E, $\nu$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	E	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\nu$
K, $\nu$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$3K(1-2\nu)$	K	$\nu$

## II.9.2 Le modèle Elasto-Plastique de Mohr-Coulomb dans Flac3D

Un comportement de type élastique linéaire isotrope ne peut être utilisé qu'en première approche car il ne permet pas de prendre en compte de déformations irréversibles. La plupart des matériaux sont en effet élastoplastiques, leur comportement est caractérisé par l'apparition de déformations élastiques et, de déformations irréversibles. La décomposition usuelle mais qui n'est pas forcément la seule est donnée dans l'équation **II.10**.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (\text{II.10})$$

Avec  $\varepsilon$  les déformations totales,  $\varepsilon^e$  les déformations élastiques et  $\varepsilon^p$  les déformations plastiques. Les modèles élasto-plastiques sont basés sur trois notions fondamentales : la surface de charge, la règle d'écrouissage et la règle d'écoulement. Nous allons maintenant exposer les bases pour chacune de ces notions.

### II.9.2.1 Notion de surface de charge

La surface de charge divise l'espace des contraintes en deux parties :

- L'intérieur de la surface de charge correspond à un état de déformations réversibles (élastiques).
- La surface de charge en elle même correspond à un état de déformations pouvant se décomposer de la manière suivante : une partie réversible comme précédemment et une partie de déformations irréversibles (plastique).

La frontière entre ces deux domaines est caractérisée par une fonction scalaire  $f$  appelée fonction de charge :

$$f(\sigma_{ij}, \lambda, A_i) \quad (\text{II.11})$$

Avec :

- $\sigma_{ij}$  tenseur des contraintes.
- $\lambda$  paramètre d'écrouissage isotrope en général fonction des déformations plastiques.
- $A_i$  paramètre d'écrouissage cinématique.

Trois cas de figure se présentent donc :

- ♦  $f < 0$  Intérieur de la surface, ce domaine est élastique.
- ♦  $f = 0$  Les déformations élastiques peuvent être éventuellement accompagnées de déformations plastiques.
- ♦  $f > 0$  Etat de contraintes physiquement impossible en élasto-plasticité.

Lorsque le point représentatif de l'état des contraintes atteint la surface de charge  $f=0$  deux cas de comportement élasto-plastiques sont possibles :

- a) La surface de charge n'évolue pas et l'expression de la surface de charge ne contient donc pas de paramètre d'écrouissage.
- b) La surface de charge évolue au cours du chargement (modèle élasto-plastique avec écrouissage).

### II.9.2.2 Notion de règle d'écrouissage

Afin de mieux comprendre la notion d'écrouissage, nous allons nous placer dans le cas d'un essai de traction ou de compression uniaxiale (Figure **II.13**).

Le long du chemin  $OA$  le comportement est élastique, c'est à dire que quand on décharge on revient en  $O$ . Le point  $A$ , représentant le point limite au delà duquel on n'a plus le comportement élastique correspond à une contrainte caractéristique dite "seuil" de plasticité initial ou "limite élastique". Après l'avoir franchi, et si étant au point  $B$  par exemple, on décharge, le chemin de déchargement ne sera pas  $BAO$  mais  $BCD$ . La déformation qui reste  $OD = \varepsilon^p$  est une déformation irréversible, dite plastique. On est donc entré dans le domaine plastique. Si on recharge, le chemin sera  $DEF$ ,  $F$  étant le prolongement du chemin  $OAB$ . Il rejoint alors le chemin du premier chargement.

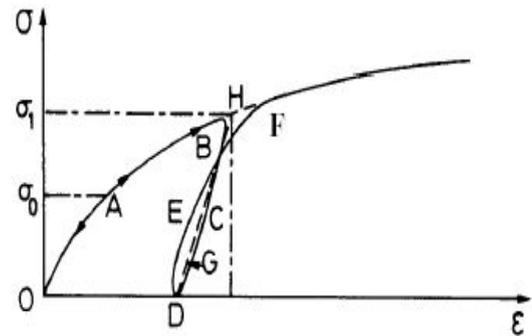


Figure II.13. Essai de compression ou de compression uniaxiale d'un matériau.

On peut assimiler en général la courbe  $BCDEF$  à la droite  $DGH$  et admettre que les déformations sont réversibles le long de cette ligne. Le nouveau seuil de plasticité est alors le point  $H$  qui est plus élevé que le précédent ( $A$ ). Cette élévation du seuil de plasticité s'appelle écrouissage.

Le domaine élastique d'un matériau dépend donc de l'état d'écrouissage du matériau (équivalent à l'état de chargement), la frontière de ce domaine est donnée par l'Équation II.10. L'écrouissage du matériau se traduit par l'évolution de la surface du seuil de plasticité. On introduit donc une ou plusieurs variables supplémentaires, appelées variables d'écrouissage  $\lambda$ . Ces variables peuvent être choisies de façon arbitraire à condition qu'elles permettent de traduire l'évolution de l'état interne du milieu qui a subi des déformations plastiques. Ces variables peuvent être par exemple des scalaires fonction des déformations plastiques comme pour le modèle de Cam-Clay (Roscoe & Burland [1968], Schofield & Wroth [1968]) qui utilise la déformation volumique plastique comme paramètre d'écrouissage, ou bien des tenseurs par exemple  $\varepsilon_{ij}^p$ .

En général, on peut distinguer trois catégories de loi d'écrouissage :

- ◆ La théorie de l'écrouissage isotrope de Taylor & Quinney [1931] qui admet que dans le domaine élastique intérieur au critère de plasticité se transforme par homothétie de centre  $O$  pendant l'écrouissage (Figure II.14).

Il correspond au cas où la surface de charge subit une dilatation ou une contraction uniforme. L'écrouissage dans ce cas est caractérisé par une variable scalaire

- ◆ La théorie de l'écrouissage cinématique de Prager [1955] qui propose que le domaine élastique se translate dans l'espace des contraintes.

L'écrouissage dans ce cas est caractérisé par une variable tensorielle définissant le centre de la surface de charge.

- ◆ La théorie de l'écrouissage mixte qui est une combinaison des deux théories précédentes pour permettre la création d'un modèle « anisotrope cinématique ».

La surface de charge se translate et se dilate uniformément dans toutes les directions.

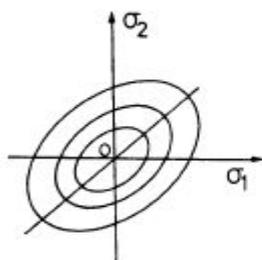


Figure II.14. Modèle d'écrouissage isotrope.

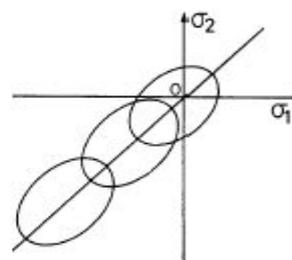


Figure II.15 : Modèle d'écrouissage cinématique.

### II.9.2.3 Notion de loi d'écoulement

L'incrément de déformation plastique est caractérisé par sa direction et son amplitude, la direction de l'incrément de déformation plastique est perpendiculaire à la surface définissant le potentiel plastique  $g(\sigma_{ij})=0$ . La forme générale de l'incrément de déformation plastique est donnée par l'Équation II.11, le détail du calcul de cette variable n'est pas donné ici, mais il peut être trouvé dans divers ouvrages relatant de la plasticité.

Le multiplicateur plastique :

$$\varepsilon_{ij}^{\cdot p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{II.12})$$

Avec  $\dot{\lambda} \geq 0$

L'équation (II.12) est celle de normalité en déformations plastiques.

En général  $f = g + \text{constante}$ , la loi est dite associée lorsque  $f$  et  $g$  sont confondues, pour un état de contrainte  $\sigma_{ij}$  tel que  $f = 0$ , deux cas sont possibles :

◆ 1er cas :  $f(\sigma_{ij}, \lambda) = 0$  ;  $\frac{\partial f(\sigma_{ij}, \lambda)}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$  ;  $d\varepsilon = d\varepsilon^e$  et donc  $d\varepsilon^p = 0$

C'est un cas de décharge et l'incrément de contrainte est dirigé vers l'intérieur du domaine élastique actuel.

◆ 2ème cas :  $f(\sigma_{ij}, \lambda) = 0$  ;  $\frac{\partial f(\sigma_{ij}, \lambda)}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$  ;  $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$

C'est un cas de chargement et l'incrément de contrainte est dirigé vers l'extérieur du domaine élastique actuel.

Nous allons maintenant présenter le modèle élasto-plastique utilisé dans notre étude.

Le modèle de **Mohr-Coulomb** est un modèle souvent utilisé pour représenter la rupture par cisaillement dans les sols et les roches tendres.

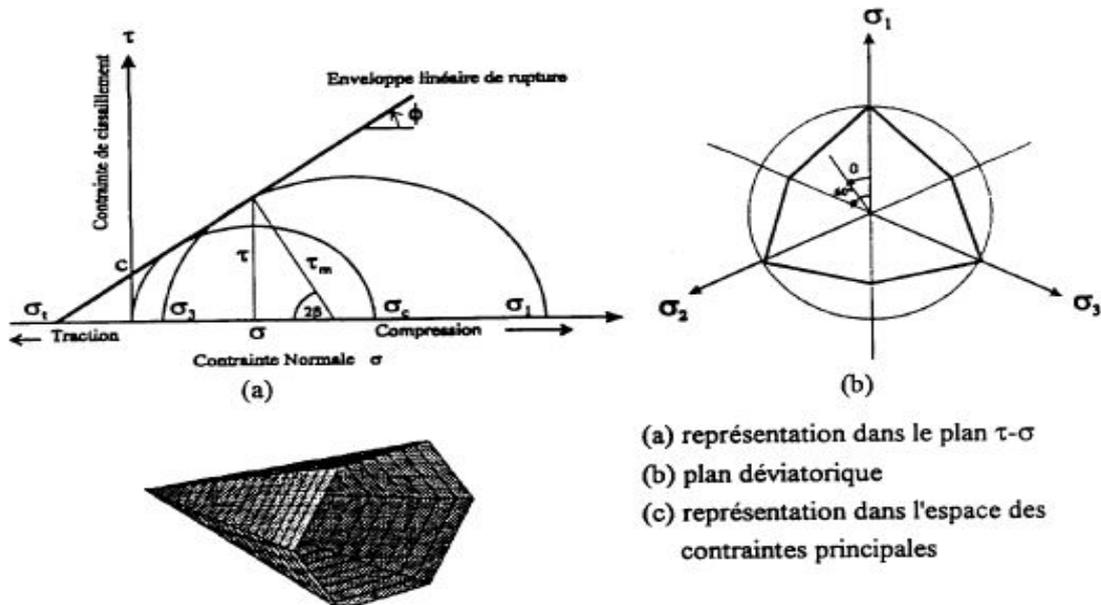


Figure II.16. Critère de rupture de Mohr-Coulomb (Lee, 1994).

La surface de charge pour ce modèle correspond à un critère Mohr-Coulomb (rupture en cisaillement) avec critère supplémentaire de rupture par traction. La position d'un point de contrainte sur cette surface est contrôlée selon une règle non associée pour la rupture en cisaillement et une règle associée pour la rupture en traction. Tout champs de contraintes peut être exprimé en termes de contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (Figure II.17) et déformations principales  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$ . La convention de signe dans Flac, attribuant des valeurs *négatives* à la compression, et *positives* à la traction.

Le critère de rupture dans le modèle Flac2D est Mohr-Coulomb composée avec critère de rupture en traction. Les contraintes principales sont ordonnées de la manière suivante :

$$\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3 \tag{II.13}$$

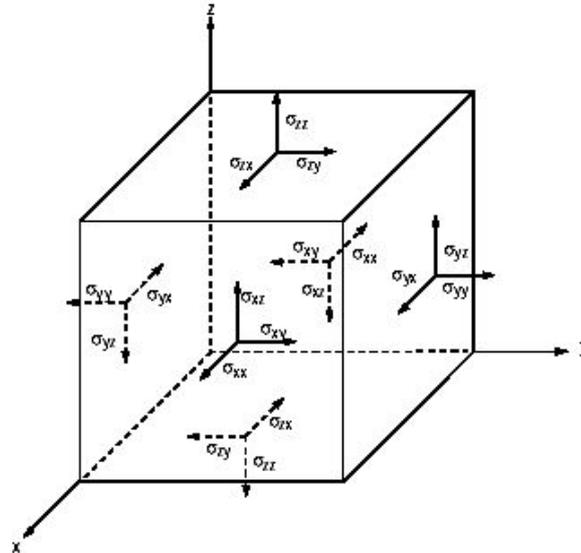


Figure II.17. Convention de signe des contraintes principales induites dans un élément.

L'enveloppe de rupture (aussi appelée surface de charge) de Mohr-Coulomb (Figure II.18) est définie du point A au point B par la relation suivante, qui fait intervenir les caractéristiques de résistance au cisaillement du matériau :

$$f' = \sigma_1 - \sigma_3 N_\phi + 2c\sqrt{N_\phi} \tag{II.14}$$

Du point de B au point C, la rupture est contrôlée par la résistance à la traction du matériau  $\sigma_1$  :

$$f_1 = \sigma_3 - \sigma' \tag{II.15}$$

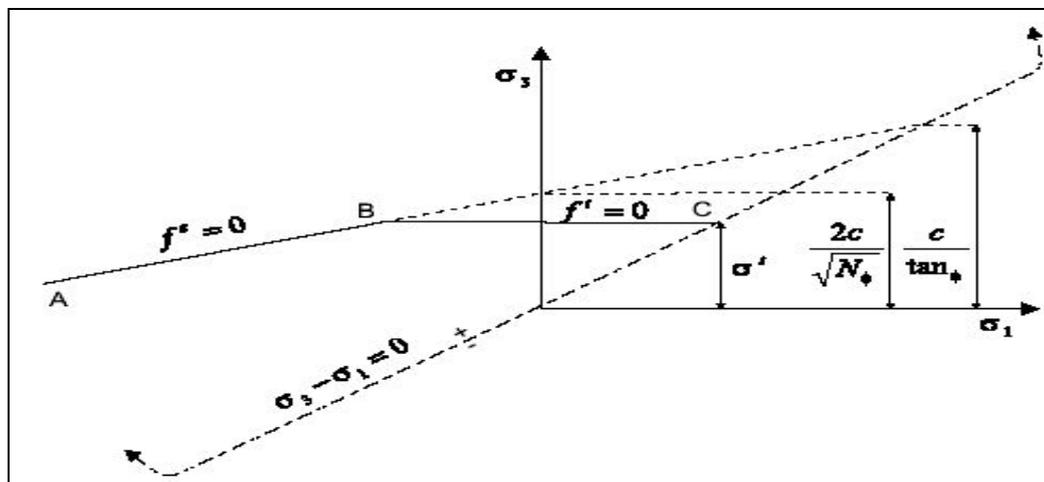


Figure II.18. Critère de rupture de Mohr-Coulomb.

Où  $\phi$  est l'angle de frottement,  $c$ , la cohésion,  $\sigma'$ , la résistance à la traction et

$$N_{\varphi} = \frac{1 + \sin(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)} \quad (\text{II.16})$$

La résistance à la traction du matériel ne peut pas dépasser la valeur de  $\sigma_3$  correspondant au point d'intersection des lignes droites  $f^s = 0$  et  $\sigma_1 = \sigma_3$  dans le plan  $f(\sigma_1, \sigma_3)$ . On donne cette valeur maximale :

$$\sigma'_{\max} = \frac{c}{\tan \varphi} \quad (\text{II.17})$$

Dans le domaine plastique, une loi d'écoulement définit le comportement du matériau lorsque les déformations sont irréversibles. La fonction de potentielle plastique est décrite au moyen de deux fonctions  $g^s$  et  $g'$ , la fonction  $g^s$  correspond à une loi non associée et a la forme :

$$g^s = \sigma_1 - \sigma_3 N_{\psi} \quad (\text{II.18})$$

Avec :

$$N_{\psi} = \frac{1 + \sin(\psi)}{1 - \sin(\psi)} \quad (\text{II.19})$$

Où  $\psi$  est l'angle de dilatance du matériau.

La fonction  $g'$  correspond à une règle d'écoulement associée et est écrite :

$$g' = -\sigma_3 \quad (\text{II.20})$$

### ➤ Paramètres du modèle

Ce modèle est appelé par la commande *Mod M*, les paramètres sont donnés par la commande *prop* comme suit :

1. bulk : module du volume,  $K$  ;
2. shear : module de cisaillement,  $G$  ;
3. cohésion : cohésion du sol ;
4. friction : angle de frottement interne ;
5. dilation : angle de dilatance,  $\psi$  ;
6. tension : contrainte limite de traction.

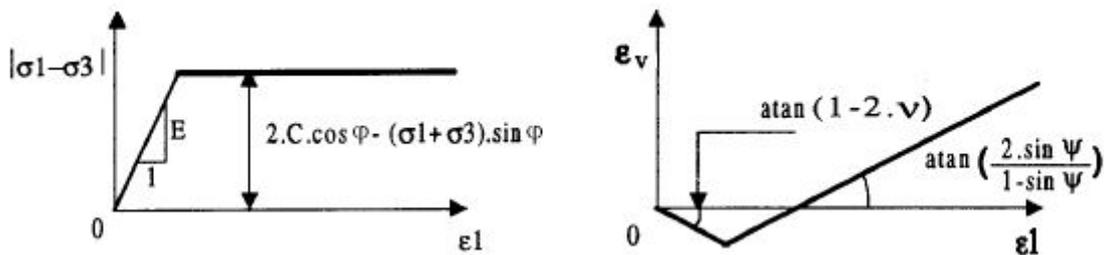


Figure II.19. Critère de Mohr-Coulomb.

Un autre paramètre peut éventuellement entrer en ligne de compte  $\sigma_t$ , contrainte de rupture par traction, ce qui correspond à l'introduction d'un critère supplémentaire (avec sa propre loi d'écoulement) et modifie ainsi le modèle initial de Mohr Coulomb qui ne tient pas compte de ce paramètre.

### II.9.3 Modèle de comportement de l'interface

Les éléments d'interface sont utilisés pour représenter de manière simplifiée le comportement des joints ou les couches minces, et les liaisons entre éléments de structure et éléments de sol/roche.

Flac3D représente des interfaces comme collections d'éléments triangulaires (éléments d'interface), dont chacun est défini par trois nœuds (nœuds d'interface). Des éléments d'interface peuvent être créés à n'importe quel emplacement dans l'espace. Généralement, des éléments d'interface sont

fixés à une face de surface de zone ; deux éléments triangulaires d'interface sont définis pour chaque face quadrilatérale de zone.

Des nœuds d'interface sont alors créés automatiquement à chaque sommet d'élément d'interface. Quand une autre surface de modèle entre en contact avec un élément d'interface, le contact est détecté au nœud d'interface, et est caractérisé par des rigidités normales et le cisaillement, et des propriétés de glissement.

La relation fondamentale de contact est définie entre le nœud d'interface et une face de surface de zone, également connus sous le nom de *face de cible*. La direction normale de la force d'interface est déterminée par l'orientation de la face de cible.

Le modèle constitutif est défini par un critère de résistance au cisaillement de **Coulomb** qui limite la force de cisaillement agissant à un nœud d'interface, des rigidités normales et de cisaillement, contraintes de traction et cisaillement, et un angle de dilatance qui cause une augmentation de la force normale effective sur la facette cible après que la limite de résistance de cisaillement soit atteinte. La Figure II.20 illustre les composantes du modèle constitutif agissant au nœud d'interface (P).

Les contacts d'interface sont détectés seulement aux nœuds d'interface et les forces de contact sont transférées seulement aux nœuds d'interface. Les propriétés d'interface sont associées à chaque nœud ; les propriétés peuvent varier du nœud au nœud.

Par défaut, l'effet de *pression interstitielle* est inclus dans le calcul d'interface en employant la contrainte effective comme la base pour la condition de glissement.

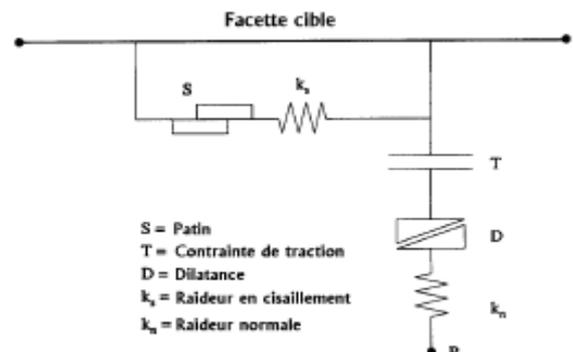


Figure II.20. Détail des composants d'un élément d'interface (Itasca Flac3D).

➤ **Choix des propriétés mécaniques**

L'attribution des propriétés mécaniques (en particulier rigidité) à une interface dépend de la manière dans laquelle l'interface est employée. D'une manière générale les valeurs recommandées par les auteurs de Flac consistent à prendre  $K_n$  et  $K_s$  dix fois plus élevés que la raideur équivalente de la zone voisine la plus raide. La rigidité apparente d'une zone dans la direction normale est :

$$\max \left[ \frac{\left( k + \frac{4}{3} G \right)}{\Delta z_{\min}} \right] \tag{II.21}$$

Où :  $K$  et  $G$  sont le module volumique et de cisaillement respectivement ; et  $\Delta z_{\min}$  est la plus petite dimension dans la direction normale (voir Figure II.21). La notation Max [ ] indique que la valeur maximale sur toutes les zones adjacentes à l'interface doit être employée.

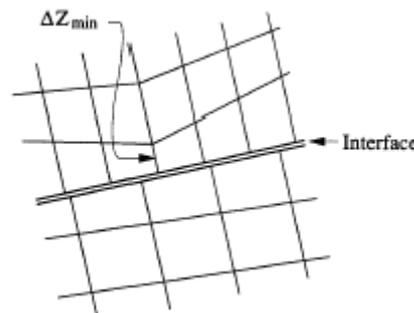


Figure II.21. Dimension de la zone utilisée pour le calcul des raideurs (Itasca Flac3D).

Cette recommandation permet de ne pas pénaliser les temps de calcul lors de la prise en compte d'une interface.

Les propriétés mécaniques des joints sont conventionnellement dérivées de tests en laboratoire (c'est-à-dire de cisaillement direct et tests triaxiaux), ces essais peuvent fournir des propriétés physiques pour l'angle de frottement, la cohésion, l'angle de dilatance et traction limite, aussi bien que les rigidités normaux et de cisaillement.

➤ **Paramètres du modèle**

Les paramètres à définir sont :

1. cohésion : cohésion de l'interface ;
2. dilatation : angle de dilatance de l'interface ;
3. friction : angle de frottement de l'interface ;
4.  $K_n$  : rigidité normale ;
5.  $K_s$  : rigidité de cisaillement;
6. tension : contrainte limite de traction.

## II.10 CONCLUSION

La modélisation numérique de l'écoulement autour d'un écran étanche à l'aide d'un code de calcul aux différences finies ou, aux éléments finis nécessite une modélisation nécessairement approchée d'une réalité complexe. Cela conduit à faire un certain nombre de choix qui concernent aussi bien les paramètres de l'outil numérique que le modèle de comportement utilisé.

Pour simuler l'écoulement autour d'un écran étanche, nous avons retenu le code de calcul Flac. La discrétisation en différences finies suivant l'approche de Wilkins [1964] et, la résolution explicite en éléments lagrangiens lui permettent de simuler des problèmes fortement non linéaire (modules de sols, interfaces), de géométrie complexe (tunnels non circulaires, éléments de soutènement représentés par des coques) avec une bonne stabilité numérique.

L'exploitation des résultats d'un calcul tridimensionnel nécessite une large gamme de représentations graphiques pour l'examen et la représentation des résultats à chaque étape de l'analyse, le code Flac3D donne la possibilité de la définition rapide des vues et sorties graphiques à partir de l'interface graphique.

La décision d'élaborer un modèle tridimensionnel dépend certe largement de critères économiques, mais elle doit aussi tenir compte du degré d'erreur qu'est prêt à accepter l'ingénieur lorsqu'il réalise des calculs bidimensionnels alors qu'il sait que le problème est véritablement tridimensionnel. Les techniques proposées pour introduire certain effet tridimensionnel dans les modèles plans réduisent l'écart, mais peuvent parfois ignorer certains phénomènes d'interactions et conduisent à des résultats plus conservateurs que la réalité.

Néanmoins, les calculs numériques tridimensionnels commencent à faire partie de la vie des ingénieurs géotechniciens et les publications se multiplient dans ce domaine.

Les progrès réalisés en matière de moyens informatiques, d'algorithmes de résolution rapides et efficaces, et de pré- et post-processeur graphique conviviaux et performants devraient aider ce type d'analyse à s'imposer dans les années à venir.

Finalement, et en conséquence de la complexité mathématique des problèmes l'existence et l'unicité de la solution ne peuvent être démontrées qu'avec des hypothèses restrictives peu applicables à des problèmes réels. Une connaissance expérimentale préalable du problème est toujours indispensable à la formulation mathématique et pour une fiabilité des prévisions numériques (Ingel, Ryhming & R. Goougnot, 2002).

Ce chapitre a été donc l'occasion de présenter l'outil numérique qui sera employé dans la suite du travail. La validation du modèle numérique sera présentée au cours des chapitres suivants.