

Chapitre V

Effets du couplage hydromécanique dans les calculs de soutènement

V.1 INTRODUCTION

La description du comportement des sols, pour la modélisation d'ouvrages de géotechnique réels, passe nécessairement par la prise en compte des phénomènes de consolidation (ou de couplage hydromécanique), c'est-à-dire par la prise en compte de l'influence de la présence d'eau dans les sols sur leur déformabilité.

La principale caractéristique des problèmes de consolidation est que les déplacements dépendent du temps même si les chargements et les conditions aux limites sont maintenus constants à partir d'un instant initial. Bien que les outils théoriques et numériques nécessaires soient disponibles, la prise en compte de ces phénomènes dans la modélisation numérique des ouvrages reste rare : les exemples dans la littérature concernent des modèles physiques et quelques rares ouvrages réels [notamment dans Atwa (1996)], mais ces résultats ne permettent pas de se faire une idée générale de l'influence de l'eau sur le comportement des ouvrages de géotechnique au cours de leur construction et en service.

En pratique, les simulations numériques par *éléments finis* courantes ne prennent le plus souvent pas explicitement en compte les phénomènes de consolidation, et se limitent à l'analyse, traditionnelle en mécanique des sols, des situations à court terme et à long terme.

Trois raisons permettent d'expliquer cette pratique :

- d'une part, la préparation des données se trouve nettement simplifiée si l'on occulte les couplages ; par ailleurs, la description de l'évolution dans le temps des déplacements, des contraintes et des pressions interstitielles dépend de manière cruciale de la perméabilité des différentes couches de sol, dont la valeur est rarement déterminée avec précision dans le contexte d'un projet réel ;
- d'autre part, le nombre d'inconnues du problème numérique est sensiblement diminué, la taille de la matrice à inverser aussi et les calculs sont nettement plus rapides, la différence restant suffisante, même avec les outils de calcul modernes, pour justifier que l'on s'en tienne à des calculs sans couplage le plus souvent possible ;
- enfin, les calculs élastiques ou élastoplastiques *découplés* fournissent une solution qui ne dépend pas du temps, ce qui simplifie évidemment l'exploitation des résultats.

Dans ce **chapitre**, on se propose de préciser quelles sont les opérations couramment réalisées dans le cadre de la construction des soutènements, quels effets elles peuvent avoir sur la pression d'eau dans le sol, et comment ces opérations peuvent être prises en compte dans les simulations numériques en **Flac**. On discutera d'abord la formulation générale des problèmes couplés, puis la possibilité de découpler le calcul du champ de pression et le calcul des déformations du sol.

V.2 PHASAGE DES TRAVAUX ET PROCEDES DE CONSTRUCTION COURANTS

Cette première section donne une description rapide de quelques situations courantes, dans lesquelles les phénomènes de consolidation se manifestent et pour lesquelles il est nécessaire de pouvoir proposer une technique de modélisation numérique.

V.2.1 Consolidation

La manifestation la plus simple du phénomène de consolidation correspond au problème d'une couche saturée soumise "instantanément" à une surcharge verticale, par exemple le poids d'un remblai construit sur cette couche. Il se produit, à court terme, une augmentation uniforme de la

pression interstitielle dans la couche, et, si la couche est drainée, la pression interstitielle évolue pour revenir à une distribution hydrostatique (Figure V.1). À mesure que le fluide est expulsé de la couche et que les surpressions induites par le chargement se dissipent, la couche se tasse progressivement. Ce problème, évidemment très simple, met en lumière les caractéristiques des phénomènes de consolidation : existence d'une situation à court terme, suivie d'une évolution du champ de charge hydraulique qui s'accompagne de déformations progressives du sol. Ce problème présente l'avantage de se prêter (dans le cas unidimensionnel), à une résolution analytique permettant de quantifier la vitesse du phénomène et les tassements à long terme.

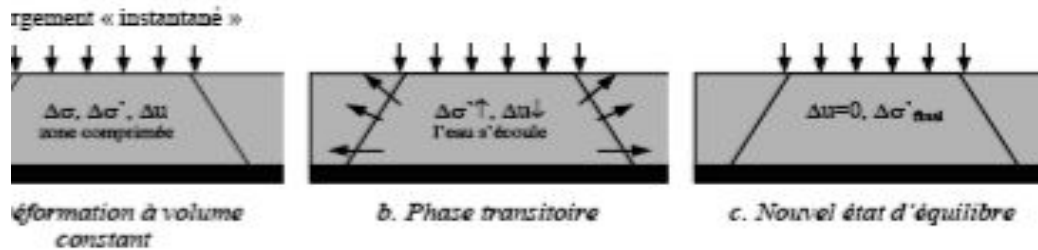


Figure V.1. Trois phases de la réponse d'un massif de sols à l'application d'une surcharge verticale.

V.2.2 Rabattement de nappe

Un autre exemple très simple où se manifeste le couplage entre le fluide et les déformations du sol correspond au rabattement de la nappe. Considérons par exemple une couche horizontale de sol saturé, la nappe étant initialement au niveau du terrain naturel. Un des procédés souvent mis en œuvre dans les travaux de génie civil, en particulier pour améliorer la stabilité d'une fouille réalisée à proximité, consiste à rabattre la nappe, c'est-à-dire à abaisser son niveau de plusieurs mètres. Le rabattement induit un tassement de la couche.

Le champ de pression stabilisé à long terme ne correspond pas en général à un état d'équilibre hydrostatique : le pompage pour rabattre la nappe induit donc un écoulement du fluide à travers le sol. Par ailleurs, dans le cas d'un sol granulaire, on peut considérer en première approximation que le niveau final de la nappe sépare une zone saturée d'une zone non saturée (dans laquelle l'air a remplacé l'eau dans les pores) ; il y a donc lieu de prendre en compte la variation du poids volumique du sol situé au-dessus de la nappe.



Figure V.2. Réponse d'un massif de sol après le rabattement de la nappe.

V.2.3 Excavation

La réalisation des ouvrages de soutènement, des tunnels et, plus généralement, des ouvrages souterrains passe par l'excavation, en général par étapes, de zones de terrain. Cette opération s'accompagne d'une décompression du terrain autour de la zone excavée et d'une diminution du poids du système étudié. Dans les calculs sans couplage, on modélise en général cette étape en imposant sur le contour de la zone excavée une densité surfacique d'efforts déduite de l'état de contraintes avant excavation et calculée de manière à annuler le vecteur contrainte sur cette surface. Il conviendra dans la suite de préciser dans quelle mesure ce procédé peut s'adapter lorsque l'on veut prendre en compte les *effets de l'eau*.

Le phasage de construction d'un ouvrage réel est en général nettement plus complexe que les exemples précédents peuvent le laisser penser. La réalisation des ouvrages de soutènement est

souvent un enchaînement de différentes étapes qui sollicitent un volume limité de terrain et posent des problèmes de nature différente du point de vue de l'interaction entre les comportements *mécanique* et *hydraulique*. Le phasage des travaux réalisés dans le cas d'ouvrages **réels**, seront étudiés de manière détaillée dans la suite de cette thèse.

V.2.4 Synthèse

Le déroulement du chantier est en général décrit comme la succession de phases de terrassement, de construction, etc. Il est naturel de simuler le phasage des travaux par l'enchaînement de calculs, la difficulté étant de bien préciser quelle(s) phase(s) des travaux sont associées à chaque étape de calcul, et quels chargements il faut appliquer pour simuler correctement ces phases de travaux.

Après avoir présenté les phénomènes que l'on souhaite étudier, on aborde maintenant les principes sur lesquels repose leur modélisation *mathématique*.

V.3 MODELISATION DE LA CONSOLIDATION

Le terme de consolidation désigne l'interaction entre le comportement *mécanique* du squelette solide du sol et le comportement *hydraulique* du fluide remplissant ses pores. C'est donc un phénomène de *couplage hydromécanique*. Dans la suite, on se limite au cas de sols *saturés* ou *quasi-saturés*. Le cas des sols non saturés est en effet sensiblement plus complexe : la description de leur comportement ne fait pas encore l'objet d'un véritable consensus, et sa prise en compte dans les calculs par éléments finis fait encore l'objet de développements (voir par exemple Kormi, 2003). Du point de vue mathématique, les problèmes de consolidation se formulent comme un ensemble d'équations aux dérivées partielles portant sur des fonctions dépendant des variables d'espace et du temps, avec des conditions aux limites hydrauliques et mécaniques et une condition initiale décrivant l'état du système étudié au début de l'intervalle de temps étudié.

V.3.1 Formulation des problèmes couplés

Dans tout ce qui suit, on se préoccupe seulement d'évolutions quasi-statiques.

V.3.1.1 Principe des contraintes effectives de Terzaghi

L'analyse du couplage hydromécanique repose sur le principe de Terzaghi, qui combine les effets des contraintes dans le sol et de la pression du fluide interstitiel. En adoptant la convention de signe de la mécanique des milieux continus (contraintes de compression négatives), on définit un « tenseur des contraintes effectives » σ' par :

$$\sigma' = \sigma + pl \quad (\text{V.1})$$

où σ est le tenseur des contraintes totales et p la pression de l'eau dans les pores.

V.3.1.2 Comportement du sol

L'évolution des déformations dans le sol est gouvernée par le tenseur des contraintes effectives σ' . Dans le cas d'un sol élastique linéaire, la loi de comportement s'écrit :

$$\sigma' - \sigma'_0 = C_0 : \varepsilon \quad (\text{V.2})$$

où σ'_0 désigne la contrainte effective initiale, C_0 le tenseur des modules élastiques et ε la déformation élastique.

Dans le cas d'un sol élastoplastique, la déformation ε sera remplacée par $\varepsilon - \varepsilon^p$ où ε est le tenseur des déformations totales et ε^p est le tenseur des déformations plastiques. La loi de comportement s'écrit alors :

$$\sigma' - \sigma'_0 = C_0 : (\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (\text{V.3})$$

On désigne par f la surface de charge dans l'espace des contraintes effectives, qui définit le domaine à l'intérieur duquel il n'y a pas d'évolution des déformations plastiques.

Si : $f((\sigma')) < 0$, ou $f((\sigma')) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial \sigma'} d\sigma' \leq 0$, il n'y a pas de déformations plastiques ;

et si $f((\sigma')) = 0$, et $\frac{\partial f}{\partial \sigma'} d\sigma' > 0$, il peut y avoir une évolution des déformations plastiques suivant la loi d'écoulement qui s'écrit, dans le cas associé :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma'}, \quad d\lambda \geq 0 \quad (\text{V.4})$$

Le scalaire $d\lambda$, appelé multiplicateur plastique, est déterminé en écrivant la condition de cohérence $f(\sigma') = 0$.

Dans le cas d'une loi non associée, on introduit un potentiel plastique g , différent de la fonction de charge f , et qui permet d'écrire la loi d'écoulement sous la forme :

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma'}, \quad d\lambda \geq 0$$

V.3.1.3 Formulation de l'équation d'équilibre mécanique

L'équilibre mécanique du sol s'écrit, en termes de contraintes totales :

$$\text{div } \sigma - \gamma e_z = 0 \quad (\text{V.5})$$

où γ désigne le poids volumique global du sol saturé. En introduisant le tenseur des contraintes effectives, l'équation précédente peut aussi s'écrire :

$$\text{div } \sigma' - \gamma e_z - \text{grad } p = 0$$

où le champ des pressions d'eau n'est en général pas une donnée mais une inconnue du problème. En introduisant le poids volumique déjaugé du terrain, défini par :

$$\gamma' = \gamma - \gamma_w$$

et en remplaçant la pression d'eau p par la charge hydraulique h définie par :

$$h = p / \gamma_w + z$$

l'équation d'équilibre peut encore s'écrire :

$$\text{div } \sigma' - \gamma' e_z - \gamma_w \text{grad } h = 0 \quad (\text{V.6})$$

Cette équation d'équilibre mécanique doit être complétée par les relations qui décrivent les mouvements de l'eau dans le sol. Il s'agit de la loi de *conservation de la masse d'eau* et de la loi de *Darcy*.

V.3.1.4 Conservation de la masse d'eau

L'équation de conservation de la masse d'eau s'écrit :

$$\frac{\partial (n\rho_w)}{\partial t} + \rho_w \text{div}(v) = 0$$

où n désigne la porosité du sol, ρ_w la masse volumique du fluide et v sa vitesse «apparente», définie comme le débit volumique par unité de surface ; cette vitesse n'est donc pas égale à la vitesse des particules d'eau, le rapport entre les deux étant la porosité du sol.

On peut réécrire la relation précédente sous la forme :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{n}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + \text{div } v = 0$$

Ou encore :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{n}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div } v = 0$$

En mécanique des sols, on fait en général l'hypothèse que le solide constituant le squelette du sol est incompressible, ce qui permet d'écrire que la variation du volume occupé par l'eau, donc la variation de porosité, est égale à la variation du volume global, donnée par la trace du tenseur des déformations. Par ailleurs, en désignant par K_w le module de compression du fluide et a_w la

compressibilité de fluide définis par :

$$a_w = \frac{1}{K_w} = \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial p}, \text{ l'équation précédente devient :}$$

$$\frac{\partial(\text{tr} \varepsilon)}{\partial t} + \frac{n}{k_w} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div } v = 0 \quad (\text{V.7})$$

L'équation de conservation écrite sous cette forme s'interprète donc de la manière suivante : le flux d'eau sortant d'un volume de sol (terme $\text{div } v$) est lié soit à l'augmentation du volume global donc du volume des pores [terme $\partial(\text{tr } \varepsilon)/\partial t$], soit à une augmentation de pression du fluide, qui entraîne une augmentation de la masse volumique du fluide (terme $n/K_w \partial p/\partial t$).

V.3.1.5 Loi de Darcy

Cette loi relie linéairement la vitesse v du fluide dans le sol au gradient de la charge hydraulique :

$$v = -k \text{grad } h \quad (\text{V.8})$$

où k est le tenseur de la perméabilité du terrain. Ce tenseur permet de généraliser en trois dimensions une loi expérimentale établie initialement par *Darcy* en conditions unidimensionnelles.

La perméabilité varie sur plusieurs ordres de grandeur selon les formations géologiques, de 10^{-2} m/s pour les graviers ou des sables grossiers à 10^{-9} m/s voire moins pour des argiles. Elle dépend notamment de la porosité du sol et des conditions de contact de l'eau avec les particules.

Il faut noter que les effets d'anisotropie sont parfois beaucoup plus marqués pour la perméabilité que pour les autres caractéristiques des sols, et que la mesure en place ou en laboratoire de la perméabilité n'est pas plus précise ni plus facile que celle des paramètres mécaniques classiques. Cependant, la perméabilité gouverne directement le temps caractéristique de l'évolution des déformations du sol. Elle joue donc un rôle très important dans l'analyse du comportement et la prévision des déplacements des ouvrages en régime transitoire.

V.3.1.6 Conditions initiales et conditions aux limites

Le problème *couplé* se ramène à un ensemble d'équations aux dérivées partielles dont la solution évolue dans le temps. Il est donc nécessaire de connaître l'état initial du système au début de l'intervalle de temps d'étude. Cet état, avant chargement, doit être caractérisé par la donnée des champs de contraintes σ° et de pression p° .

Le champ de contraintes σ° est en équilibre avec le poids volumique : $\text{div } \sigma^\circ = \gamma e_z$.

Dans de nombreuses situations, le fluide est au repos avant chargement. La charge hydraulique est donc uniforme, et le champ de contraintes effectives est en équilibre avec le poids volumique déjaugé :

$$\text{Div } \sigma^{0'} = \gamma' e_z$$

Par ailleurs, il est nécessaire de définir les conditions aux limites *mécaniques* et *hydrauliques* sur les frontières du domaine étudié :

- les conditions aux limites *mécaniques* consistent à imposer pour chacune des trois directions de l'espace, la composante correspondante du déplacement ou du vecteur contrainte totale σ_n sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine étudié :

$$\begin{aligned} i = 1, 2, 3 \quad \partial\Omega = S_{T_i} \cup S_{\xi_i} & \quad S_{T_i} \cap S_{\xi_i} = \emptyset \\ (\sigma n)_i = T_i^d & \quad \text{sur } S_{T_i} \\ \xi_i \cdot e_i = \xi_i^d & \quad \text{sur } S_{\xi_i} \end{aligned}$$

- les conditions aux limites *hydrauliques* donnent la valeur en tout point du flux d'eau (composante normale de v) à travers une partie S_v donnée de la frontière $\partial\Omega$ du domaine ou la valeur de la pression sur le complément S_p de cette frontière :

$$\begin{aligned} \partial\Omega = S_p \cup S_v \quad S_p \cap S_v = \emptyset; \\ p = p^d \quad \text{sur } S_p; \quad \underline{v} \cdot n = v^d \quad \text{sur } S_v \end{aligned}$$

En résumé, un problème *couplé* se ramène au système d'équations aux dérivées partielles et de conditions aux limites récapitulé dans le tableau ci-dessous :

Nature	Formulation	
Equations aux dérivées partielles :		
Equation d'équilibre	$div \underline{\sigma} - \gamma \underline{e}_z = 0$ (ou $div \underline{\sigma}' - \gamma' \underline{e}_z - \gamma_w \underline{grad} h = 0$)	
Loi de comportement	$\underline{\sigma}' - \underline{\sigma}'_0 = C_0 : (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^p)$	
Conservation de la masse	$d \underline{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}'}$, $d\lambda \geq 0$ et $f = 0$ si $d\lambda > 0$	
Loi Darcy	$div \underline{v} + \partial(tr \underline{\varepsilon}) / \partial t + n/K_w \partial p / \partial t = 0$ $\underline{v} = -\underline{k} \underline{grad} h$	
Conditions aux limites :		
Conditions mécaniques	$i=1, 2, 3$	$\partial\Omega = S_{\Pi} \cup S_{\Sigma}$ $S_{\Pi} \cap S_{\Sigma} = \emptyset$ $(\underline{\sigma} \underline{n})_{\underline{e}_i} = T_i^d$ sur S_{Π} $\underline{\xi} \underline{e}_i = \xi_i^d$ sur S_{Σ}
Conditions hydrauliques		$\partial\Omega = S_p \cup S_v$ $S_p \cap S_v = \emptyset$; $p = p^d$ sur S_p ; $\underline{v} \cdot \underline{n} = v^d$ sur S_v
Etat initial :		
Champ de contraintes $\underline{\sigma}^0$	$div \underline{\sigma}^0 = \gamma \underline{e}_z$ ($div \underline{\sigma}'^0 = \gamma' \underline{e}_z$ si le fluide est initialement au repos)	

La principale caractéristique d'un problème *couplé* réside dans le fait que la solution dépend du **temps**, et que les problèmes *hydraulique* et *mécanique* ne peuvent pas, en général, se résoudre indépendamment. Cependant, l'utilisation des logiciels de calcul numérique couplés est souvent **très lourde** car le couplage conduit à agrandir la taille des matrices de calcul, et intègre une dimension supplémentaire, celle du temps, ce qui multiplie les calculs à mener. C'est aussi la raison principale pour laquelle la prise en compte des effets hydrauliques dans les calculs reste encore **très limitée** en pratique, malgré le développement des outils théorique et numérique au cours des dernières années. Dans ce contexte, on se propose de discuter dans quelles conditions et par quels moyens on peut obtenir une approximation de la solution par **découplage** des problèmes hydraulique et mécanique. L'idée est de proposer une solution simple et praticable pour les calculs du phasage de la construction des ouvrages.

V.3.2 Découplage des problèmes mécanique et hydraulique

L'équation d'équilibre (V.6) fait apparaître le terme $-\gamma_w \underline{grad} h$, qui peut être considéré comme une force volumique due à la variation de la charge hydraulique dans le massif. On peut donc découpler les problèmes mécanique et hydraulique si l'on parvient à déterminer la pression ou la charge indépendamment du problème mécanique : il suffit de reporter le champ de pression dans le problème mécanique, à travers l'équation d'équilibre. La difficulté réside dans le fait que la détermination du champ de pression indépendamment du problème en déformation n'est en général pas possible, à cause de la présence du terme $\frac{\partial(tr \underline{\varepsilon})}{\partial t}$ dans l'équation (V.7) de conservation de la masse de fluide.

Il importe de voir que l'on peut distinguer deux sortes de chargement :

- les chargements de type « **hydraulique** », qui correspondent au cas où l'écoulement est provoqué par une variation des conditions aux limites hydrauliques (mouvement de la nappe par installation de drains dans le sol par exemple) ;
- les chargements de type **mécanique**, qui correspondent à la situation dans laquelle une sollicitation mécanique induit une déformation volumique du sol, qui entraîne une modification du champ de charge hydraulique mettant en mouvement le fluide.

La différence principale entre ces deux situations est la suivante : dans le premier cas, le champ de pression est connu juste après le chargement, alors que, dans le second, la variation de pression induite par le chargement mécanique est inconnue. Le problème à résoudre est donc plus complexe dans le cas d'un chargement mécanique, en raison du fait que la variation instantanée du champ de

pression est inconnue.

Dans la modélisation de la construction des ouvrages en génie civil, on représente les étapes de construction par une succession de chargements mécaniques instantanés sur une partie de la frontière du domaine étudié et on distingue trois situations :

- la situation à « **court terme** », correspond à la réponse « instantanée » du massif considéré, c'est-à-dire au bout d'un intervalle de temps très court comparé au temps caractéristique de l'évolution du champ de pression. Comme on vient de le voir, cette situation se caractérise par le fait que la pression présente une discontinuité vis-à-vis du temps ;
- la situation « **à long terme** » correspond à un régime permanent, dans lequel la déformation du sol et le champ de pression atteignent, au bout d'un temps suffisamment grand, une valeur asymptotique qui ne dépend pas du temps ;
- la situation **transitoire** correspond à la situation intermédiaire entre ces deux situations. On s'intéresse à cette situation par exemple dans le cas où le phasage de travaux ne permet pas d'atteindre le régime permanent entre deux phases données.

V.3.2.1 Problème à court terme

L'idée du calcul à court terme consiste à considérer que l'intervalle de temps auquel on s'intéresse est suffisamment court pour qu'il n'y ait pas eu de mouvement de fluide à travers le sol (la perméabilité du sol n'est pas infinie, il faut donc du temps pour que l'eau se déplace). Cet état correspond donc à une évolution non drainée. Autrement dit, l'intervalle de temps δt à la fin duquel on recherche les champs inconnus est tel que, pour tout volume élémentaire dV , on a :

$$\int_0^{\delta t} \left[\int_{dV} \operatorname{div} v \right] dt = 0$$

On déduit de cette condition que l'on a une liaison entre la variation de pression et la déformation volumique à court terme :

$$\operatorname{tr}(z) + n / k_w \delta p = 0$$

Dans la mesure où les particules du sol sont incompressibles, et où l'eau ne peut pas s'échapper, la variation de volume du sol à court terme est donc en relation linéaire avec la variation de pression. Il est alors important de noter que la compressibilité du sol reflète celle de l'eau, qui est peu compressible sous les niveaux de chargement classiques en mécanique des sols mais qui n'est pas nulle : on n'écrira donc pas $\operatorname{tr} \varepsilon = 0$ car la relation précédente donnerait $\delta p = 0$, ce qui est faux.

V.3.2.1.1 Solution découplée à court terme en élasticité

On se place d'abord dans le cas élastique linéaire. En admettant qu'il n'y a pas de modification instantanée des forces de volumes, le problème se formule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \delta \sigma &= 0 \\ \delta \sigma' &= C_0 : \varepsilon \\ \operatorname{tr}(\delta \varepsilon) + n / k_w \delta p &= 0 \\ \delta \sigma n &= T \end{aligned}$$

avec les conditions aux limites sur le vecteur-contrainte ainsi que les conditions aux limites portant sur les déplacements.

La relation entre la variation de pression et la déformation volumique instantanée permet d'éliminer la variation de pression δp au profit de la déformation volumique $\operatorname{tr}(\varepsilon)$. On obtient l'ensemble d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \delta \sigma &= 0 \\ \delta \sigma &= \delta \sigma' - \delta p l = C_0 : \varepsilon - \delta p l = (C_0 + k_w / n l \otimes l) : \varepsilon \\ \delta \sigma n &= T \end{aligned} \tag{V.9}$$

qui constitue un problème mécanique bien posé en contraintes totales où la pression n'intervient pas directement. Il est donc possible de déterminer les déplacements à court terme, et de calculer

ensuite la variation de la pression à court terme donnée par :

$$\delta p = -k_w / n \operatorname{tr}(\varepsilon)$$

V.3.2.1.2 Modules élastiques en condition non drainée

Par souci d'alléger les notations, on a représenté jusqu'ici les modules d'élasticité par un tenseur noté C_0 . Pour un comportement élastique isotrope, caractérisé en conditions drainées par les coefficients de Lamé λ_0 et μ , l'équation (V.9) reliant les contraintes totales et les déformations à court terme peut s'écrire :

$$\delta \sigma = (\lambda_0 + k_w / n) \operatorname{tr}(\varepsilon) \mathbf{1} + 2\mu \varepsilon = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) \mathbf{1} + 2\mu \varepsilon$$

avec $\lambda = \lambda_0 + K_w / n$. Autrement dit, en conditions non drainées, les contraintes totales se calculent avec le même module de cisaillement μ qu'en conditions drainées mais avec un coefficient de Lamé λ modifié. On peut aussi définir un module d'Young non drainé E_u et un coefficient de Poisson non drainé ν_u par :

$$E_u = E \frac{1 + 3 \frac{k_w}{nE} (1 - 2\nu)}{1 + 2 \frac{k_w}{nE} (1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{et} \quad \nu_u = \frac{\nu + 3 \frac{k_w}{nE} (1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 + 2 \frac{k_w}{nE} (1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

où E et ν désignent les caractéristiques élastiques du sol en conditions drainées. On notera que, pour un sol nettement plus compressible que l'eau ($K_w \gg E$), E_u tend vers $3E/2$ et ν_u vers 0.5.

Si l'on préfère caractériser le comportement à l'aide des modules de compression K et de cisaillement G , on a les relations suivantes entre les modules en conditions non drainées et drainées :

$$\begin{aligned} K_u &= K + K_w / n \\ G_u &= G = \mu \end{aligned}$$

Quelle que soit la représentation employée, le comportement élastique apparent du sol à court terme est presque incompressible, ce qui pose des problèmes numériques (la matrice de rigidité globale est singulière pour $\nu = 0,5$). Il peut être adroit de diminuer la valeur de K_w dans cette phase de calcul pour contourner cette difficulté.

V.3.2.1.3 Déformations plastiques à court terme

Considérons maintenant le problème du calcul des déformations plastiques à court terme. Le problème posé est un problème d'élastoplasticité en contraintes totales, qui peut se formuler de la manière suivante :

$$\operatorname{div} \delta \sigma = 0$$

$$\delta \sigma = \delta \sigma' - \delta p \mathbf{1} = C_0 : (\varepsilon - \varepsilon^p) - \delta p \mathbf{1} = (C_0 + k_w / n \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) : \varepsilon - C_0 : \varepsilon^p$$

$$\delta \varepsilon^p = d\lambda \partial f / \partial \sigma'$$

$\delta \sigma_n = T$ ainsi que les conditions aux limites portant sur les déplacements.

La pression n'a pas complètement disparu : elle figure encore dans la règle d'écoulement et dans le calcul du critère de plasticité.

Le problème peut se traiter au moyen des algorithmes habituels, à condition de gérer :

- le fait que le tenseur d'élasticité utilisé pour calculer la matrice de rigidité est différent de celui qui sert au calcul de l'incrément de déformation plastique lors de la projection sur le critère.
- le fait que le critère doit être vérifié avec le tenseur de contraintes effectives σ' et non le tenseur de contraintes totales σ . Il faut alors connaître la valeur de la pression pour calculer correctement le critère.

Le traitement découplé du problème en élastoplasticité peut donc être envisagé, en recherchant la variation de pression à court terme de manière itérative (comme les déformations plastiques).

V.3.2.2 Découplage du problème à long terme

On se place maintenant dans une situation à long terme, c'est-à-dire au bout d'un temps suffisamment grand pour que le squelette du sol soit à nouveau immobile et l'écoulement du fluide *permanent*. Dans ce cas, deux des termes figurant dans l'équation de conservation de la masse fluide (V.7) disparaissent. L'équation de conservation d'eau, la loi de Darcy et les conditions aux limites hydrauliques fournissent un problème mathématiquement bien posé permettant de déterminer la valeur asymptotique du champ de pression :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &= 0 \\ v &= -k \operatorname{grad} h \\ \partial\Omega &= S_p \cup S_v \text{ et } S_p \cap S_v = \emptyset ; p = p^d \text{ sur } S_p ; v \cdot n = v^d \text{ sur } S_v \end{aligned}$$

Le champ de pression à long terme peut donc être déterminé indépendamment des champs de contraintes et de déformations : on a découpé le problème hydraulique, de manière rigoureuse du point de vue mathématique. De plus, la détermination du champ de pression est un problème classique du point de vue mathématique et généralement assez facile avec la plupart des codes de calcul.

La deuxième étape du raisonnement consiste à reporter le champ de pression ainsi obtenu dans le problème mécanique. On a donc à résoudre le système suivant en contraintes effectives :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma' - \gamma' e_z - \gamma_w \operatorname{grad} h &= 0 \\ \sigma' - \sigma'_0 &= C_0 : (\varepsilon - \varepsilon^p) \\ d\varepsilon^p &= d\lambda \frac{\partial f'}{\partial \sigma}, \quad d\lambda > 0 \\ \partial\Omega &= S_{T_i} \cup S_{\xi} \text{ et } S_{T_i} \cap S_{\xi} = \emptyset ; (\sigma' n)_i = T_i^d + p \text{ sur } S_{T_i} ; \xi e_i = \xi_i^d \text{ sur } S_{\xi} \end{aligned}$$

La seule difficulté tient au fait que l'évolution des déformations plastiques dépend en général de l'histoire du chargement, c'est-à-dire de l'histoire des contraintes. Or le trajet de contraintes effectives suivi ici n'est pas nécessairement simple : à court terme, un chargement mécanique peut induire une augmentation de la pression du fluide susceptible de conduire à des déformations plastiques dont le problème mécanique ci-dessus ne rend pas compte. Il en va différemment en élasticité, puisque les déformations dépendent seulement de la valeur finale des contraintes effectives et pas du trajet de chargement suivi.

La procédure proposée ci-dessus pour découpler le problème à long terme, qui consiste à introduire dans le calcul un chargement volumique égal à $-\gamma_w \operatorname{grad} h$ et à corriger, si nécessaire, les conditions aux limites en contraintes, donne un résultat exact dans le cas *élastique*. En revanche, elle peut induire une erreur plus ou moins importante dans le cas *élastoplastique*, car elle conduit à négliger les déformations plastiques qui peuvent se produire à court terme ou en régime transitoire.

V.3.2.3 Découplage en régime transitoire

Le découplage des problèmes *hydraulique* et *mécanique* à long terme est relativement facile. La principale limite de cette démarche réside dans le fait que l'on ne prend pas en compte les déformations plastiques qui peuvent se produire à court terme. La démarche est un peu différente si l'on cherche à découpler le problème en régime transitoire. L'idée consiste à découpler le problème hydraulique en supprimant simplement le terme de couplage dans l'équation de conservation de la masse d'eau, ce qui conduit au problème suivant :

$$\begin{aligned} \partial(\operatorname{tr} \varepsilon) / \partial t + n / k_w \partial p / \partial t + \operatorname{div} v &= 0 \\ v &= -k \operatorname{grad} h \\ \partial\Omega &= S_p \cup S_v \text{ et } S_p \cap S_v = \emptyset ; p = p^d \text{ sur } S_p ; v \cdot n = v^d \text{ sur } S_v \end{aligned}$$

Autrement dit, pour le problème hydraulique, on considère que le sol ne déforme pas et que l'échange de fluide d'eau ne dépend que de la variation de la pression. Le problème obtenu est un problème de *diffusion*, donc la solution dépend du temps et peut se résoudre numériquement à l'aide du code **Flac** par exemple.

Une fois obtenue la variation de la pression à l'instant t , on résout le problème mécanique dans lequel on a reporté le champ de pression, comme on l'a fait pour le problème à long terme. La validité de cette procédure est évidemment sujette aux mêmes limites que pour le problème à long terme : elle ne permet pas, dans le cas d'un matériau élastoplastique, de prendre en compte les déformations plastiques qui peuvent se produire à court terme.

Par ailleurs, le découplage du problème en pression à long terme repose sur une hypothèse physique claire, à savoir que les déformations et la pression finissent par se stabiliser. En revanche, le découplage auquel on a procédé en régime transitoire est arbitraire et change radicalement la physique du problème. Il en résulte que l'approximation du champ de la pression ainsi obtenue peut être assez mauvaise, au moins pour ce qui concerne la vitesse d'évolution du champ de pression.

Pour préciser ce point, définissons la variation du volume d'échange de fluide φ_w à un moment t ($0 < t < T_c$) par :

$$\varphi_w = n/k_w \delta p + tr \varepsilon \quad (\text{V.10})$$

En éliminant le vecteur de vitesse apparente v entre l'équation de conservation de la masse fluide et la loi de Darcy, on obtient alors :

$$\partial \varphi_w / \partial t = \text{div}(k \text{ grad } h)$$

En supposant que la perméabilité est homogène et isotrope, on peut déduire :

$$\partial \varphi_w / \partial t = k / \gamma_w \Delta(\delta p) \quad (\text{V.11})$$

On applique deux fois l'opérateur divergence aux deux membres de l'équation du comportement élastique en contraintes totales :

$$\delta \sigma = \lambda_0 tr(\varepsilon)1 + 2\mu \varepsilon - \delta p 1$$

ainsi qu'aux deux membres de (V.10) et, en admettant $\text{div}(\delta \sigma) = 0$, on obtient :

$$(\lambda_0 + 2\mu) \Delta(tr \varepsilon) = \Delta(\delta p)$$

$$\Delta(tr \varepsilon) = \Delta(\varphi_w) - n/k_w \Delta(\delta p)$$

qui donne, en éliminant $\Delta(tr \varepsilon)$:

$$\Delta(\delta p) = \frac{k_w}{n} \frac{\lambda_0 + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \Delta(\varphi_w)$$

Il reste à utiliser cette équation dans (I.11) pour faire apparaître une équation de champ relative à la seule variable $\delta \varphi_w$:

$$\partial \varphi_w / \partial t = c_m \Delta(\varphi_w) \quad (\text{V.12})$$

où l'on a posé :

$$c_m = k \frac{k_w}{n \gamma_w} \frac{\lambda_0 + 2\mu}{\lambda + 2\mu}$$

qui porte le nom de coefficient de consolidation et s'exprime en $[L^2 T^{-1}]$. En général, le fluide est bien moins compressible que le sol ($K_w \gg \lambda_0$), compte tenu de l'expression $\lambda = \lambda_0 + K_w/n$, le coefficient de consolidation tend vers la valeur de :

$$c_m = \frac{k}{\gamma_w} (\lambda_0 + 2\mu)$$

L'écriture de l'équation de diffusion sous la forme (V.12) se révèle très avantageuse dans la résolution des problèmes d'évolution. On reviendra sur ce point plus en détail au deuxième chapitre. L'écriture de l'équation de diffusion (V.11) sous la forme (V.12) permet d'identifier le temps caractéristique T_c du phénomène de diffusion de la masse fluide. Celui-ci apparaît en cherchant la forme adimensionnelle de (V.12). Soit L une longueur caractéristique du problème : on pose $\chi^i = xi/L$, $\Delta' = \sum i \partial^2 / \partial \chi^i^2$ et $\tau = t/T_c$, l'équation (V.12) prend maintenant la forme suivante :

$$\frac{\partial(\phi_w)}{\partial \tau} = \left[c_m \frac{T_c}{L^2} \right] \Delta'(\phi_w)$$

Cette expression permet de montrer que le temps caractéristique de phénomène de diffusion de la masse fluide est donné par $T_c=L^2/c_m$. On en conclut que la vitesse du phénomène est liée à la perméabilité et à la compressibilité du sol, et en particulier que les surpressions se dissipent plus vite dans un sol plus raide. Dans l'approche découplée du régime transitoire, on a négligé la déformation volumique, ce qui revient à considérer que le sol est incompressible pendant le régime transitoire. Cette approche nous a conduit à un problème qui peut se formuler, en termes de charge hydraulique, de la manière suivante :

$$\frac{n\gamma_w}{K_w} \frac{\partial h}{\partial t} + \text{div } v$$

$$v = -k \text{ grad } h$$

$$\partial\Omega = S_p \cup S_v \text{ et } S_p \cap S_v = \emptyset ; h = h^d \text{ sur } S_p ; \underline{v} \cdot \underline{n} = v^d \text{ sur } S_v$$

En reportant dans la conservation de masse, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{kK_w}{n\gamma_w} \Delta(h)$$

et le temps caractéristique du problème de diffusion est alors donné par :

$$T'_c = L^2 \frac{n\gamma_w}{kK_w}$$

qui est évidemment différent du temps T_c et ne dépend que des caractéristiques hydrauliques du sol. On ne prend donc pas en compte la compressibilité du sol, ce qui conduit à une erreur très significative sur l'échelle de temps caractéristique de l'évolution de la pression. Dans ce cas particulier, on peut corriger l'erreur commise en modifiant de manière appropriée l'échelle de temps à travers le coefficient du terme $(\partial h/\partial t)$ dans l'équation de conservation de masse. Cependant, il est difficile d'appliquer ce même processus de correction dans un problème quelconque dans la mesure où l'on ne sait pas évaluer le rapport entre les temps caractéristiques des problèmes *couplé* et *découplé*.

V.4 CONCLUSION

La description du comportement des ouvrages réels en géotechnique par des simulations numériques passe nécessairement par la prise en compte du rôle de l'eau dans les sols.

La résolution du problème fait appel à des formulations du problème *mécanique* (équation d'équilibre, loi de comportement...) et du problème *hydraulique* (conservation de masse d'eau, loi Darcy,...) qui ne peuvent pas en principe être résolues séparément. C'est donc un problème *couplé* pour lequel les calculs numériques sont souvent **très lourds** et **coûteux** et difficiles à mettre en œuvre en pratique.

Dans ce chapitre, après une partie consacrée à la description physique et théorique du problème, nous avons examiné la possibilité de découpler les problèmes hydraulique et mécanique dans les situations à *court terme*, à *long terme* et en *régime transitoire*. On a montré qu'à court terme et à long terme, le problème est mathématiquement bien posé et peut être résolu à l'aide d'un logiciel de calcul classique dans le cas élastique. En revanche, la procédure proposée peut induire une erreur plus ou moins importante dans le cas élastoplastique, car elle conduit à négliger les déformations plastiques qui se produisent à court terme.

En régime transitoire, le découplage peut conduire à des erreurs sur l'échelle de temps du problème *hydraulique* en diffusion. Il est donc recommandé d'utiliser avec prudence de cette approche découplée.