2.1. Introduction :

Le but de ce paragraphe est d'étudier la forme générale du modèle dynamique, de mettre en évidence les différents termes qui interviennent et de déduire les propriétés caractéristiques de ces termes.

La connaissance des équations dynamiques du mouvement des bras du manipulateur permet la description du comportement dynamique du robot. Ces équations sont utilisées pour la simulation par ordinateur afin de décrire le mouvement du robot et d'assurer son contrôle par le maintien de la réponse dynamique en accord avec les performances du système et les objectifs désirés.

Le modèle dynamique actuel pour les robots manipulateurs est obtenu par la formulation de Lagrange- Euler qui est simple et systématique.

2.2. La formulation de Lagrange- Euler [1] :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \qquad , i = 1,2,\ldots, n \qquad (2\text{-}1)$$

Avec : L : lagrangien du système = K –P

K : énergie cinétique totale du système.

P : énergie potentielle totale du système.

q_i: coordonnés généralisés.

τ_i : Force (ou couple) généralisée appliquée au système à l'articulation (i) pour commander le bras.

2.3. Les vitesses d'articulations pour le robot manipulateur [1] :

L'application de la formulation de Lagrange-Euler nécessite la connaissance de la vitesse en chaque articulation. Posons ${}^{i}r_i$ la position d'un point se trouvant sur le bras du manipulateur par rapport au repère local qui est liée à l'articulation.

$${}^{i}r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} = (x_i, y_i, z_i, 1)^T \qquad (2\text{-}2)$$

Soit ${}^{0}r_i$ la position d'un point appartenant au bras manipulateur (i) par rapport à la base de coordonnée (x_0 , y_0 , z_0)

$${}^{0}r_i = {}^{0}T_i \; {}^{i}r_i \qquad (2\text{-}3)$$

Avec $${}^{0}T_i = {}^{0}T_1 \; {}^{1}T_2 \; \ldots {}^{i-1}T_i \qquad (2\text{-}4)$$

${}^{0}T_i$: La matrice de transformation homogène du $i^{ème}$ bras par rapport à la base de coordonnée.

$^{i-1}T_i$: La matrice de transformation homogène du i-1ème bras par rapport à la base de coordonnée de i^{ème} bras

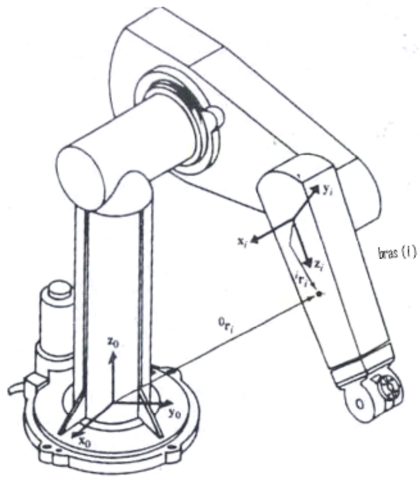

Figure 2-1 :Position d'un point sur le bras[1]

-Si l'articulation est rotoïde, on a :

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -cos\alpha_i \, sin\theta_i & sin\alpha_i \, sin\theta_i & a_i \, cos\theta_i \\ sin\theta_i & cos\alpha_i \, cos\theta_i & -sin\alpha_i \, cos\theta_i & a_i \, sin\theta_i \\ 0 & sin\alpha_i & cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}5)$$

-Si l'articulation est prismatique, on a :

$$^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} cos\theta_i & -cos\alpha_i \, sin\theta_i & sin\alpha_i \, sin\theta_i & 0 \\ sin\theta_i & cos\alpha_i \, cos\theta_i & -sin\alpha_i \, cos\theta_i & 0 \\ 0 & sin\alpha_i & cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}6)$$

θ_i, α_i, a_i, d_i : ce sont les paramètres géométriques du robot manipulateur.
L'expression de la vitesse est :

$$\begin{aligned} {}^0v_i \equiv v_i &= \frac{d}{dt}({}^0r_i) = \frac{d}{dt}({}^0T_i \, {}^ir_i) \\ &= {}^0\dot{T}_1 \, {}^1T_2 \ldots {}^{i-1}T_i \, {}^ir_i + {}^0T_1 \, {}^1\dot{T}_2 \ldots {}^{i-1}T_i \, {}^ir_i + \ldots \\ &+ {}^0T_1 \ldots {}^{i-1}\dot{T}_i \, {}^ir_i + {}^0T_i \, {}^i\dot{r}_i = \left[\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial \, {}^0T_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] {}^ir_i \end{aligned} \qquad (2\text{-}7)$$

Avec $\overset{\bullet}{{}^{i}r_i} = 0$, la dérivée partielle de ${}^{0}T_i$ par rapport à q_j peut être facilement calculée par l'aide de matrice Q_i qui est définit par :
-Pour une articulation rotoïde [1], on a :

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-8a}$$

-Pour une articulation prismatique [1], on a :

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-8b}$$

Et cela donne :

$$\frac{\partial\, {}^{i-1}T_i}{\partial q_i} = Q_i\, {}^{i-1}T_i \tag{2-9}$$

Par exemple, pour un robot manipulateur avec tous les articulations sont rotoïde, on a : $q_i = \theta_i$,et en utilisant l'équation (2-5),

$$\frac{\partial^{i-1}T_i}{\partial\theta_i} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_i & -\cos\alpha_i\cos\theta_i & \sin\alpha_i\cos\theta_i & -a_i\sin\theta_i \\ \cos\theta_i & -\cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & a_i\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\sin\alpha_i\cos\theta_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\equiv Q_i\, {}^{i-1}T_i$$

Alors, pour i = 1, 2,. . .,n

$$\frac{\partial^{0}T_i}{\partial q_j} = \begin{cases} {}^{0}T_1\, {}^{1}T_2 \ldots {}^{j-2}T_{j-1} Q_j\, {}^{j-1}T_j \ldots {}^{i-1}T_i \rightarrow j \le i \\ 0 \rightarrow j > i \end{cases} \tag{2-10}$$

Cette équation (2-10) peut être interpréter par l'effet de mouvement de l'articulation (j) dans tous le bras (i).
Dans le but de simplifier la notation, posons :

$$U_{ij} = \begin{cases} {}^{0}T_{j-1}\,Q_j\,{}^{j-1}T_i \rightarrow & j \le i \\ 0 \rightarrow & j > i \end{cases} \tag{2-11}$$

Utilisant cette notation, v_i s'écrit :

$$v_i = \left(\sum_{j=1}^{i} U_{ij}\,\dot{q}_j \right) {}^{i}r_i \tag{2-12}$$

2.4. L'énergie cinétique du robot manipulateur [1] :

Posons K_i l'énergie cinétique du bras manipulateur (i),avec i = 1,2,…,n ;exprimée dans la base de coordonnée du système,soit dK_i énergie cinétique d'une particule de masse dm appartenant au bras (i) on a :

$$\begin{aligned} dK_i &= \tfrac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) dm \\ &= \tfrac{1}{2}\, trace\, \left(v_i v_i^T \right) dm = \tfrac{1}{2}\, Tr\, \left(v_i v_i^T \right) dm \end{aligned} \tag{2-13}$$

En utilisant l'eq.(2-12) on obtient :

$$\begin{aligned} dK_i &= \tfrac{1}{2}\, Tr \left[\sum_{p=1}^{i} U_{ip}\,\dot{q}\,{}^{i}r_i \left(\sum_{r=1}^{i} U_{ir}\,\dot{q}\,{}^{i}r_i \right)^T \right] dm \\ &= \tfrac{1}{2}\, Tr \left[\sum_{p=1}^{i} \sum_{r=1}^{i} U_{ip}\,{}^{i}r_i\,{}^{i}r_i^T\,U_{ir}^T\,\dot{q}_p\,\dot{q}_r \right] dm \\ &= \tfrac{1}{2}\, Tr \left[\sum_{p=1}^{i} \sum_{r=1}^{i} U_{ip} \left({}^{i}r_i\,dm\ {}^{i}r_i^T \right) U_{ir}^T\,\dot{q}_p\,\dot{q}_r \right] \end{aligned} \tag{2-14}$$

$$K_i = \int dK_i = \tfrac{1}{2}\, Tr \left[\sum_{p=1}^{i} \sum_{r=1}^{i} U_{ip} \left(\int {}^{i}r_i\,{}^{i}r_i^T\,dm \right) U_{ir}^T\,\dot{q}_p\,\dot{q}_r \right] \tag{2-15}$$

Soit

$$J_i = \int {}^{i}r_i\,{}^{i}r_i^T\,dm = \begin{bmatrix} \int x_i^2\,dm & \int x_i y_i\,dm & \int x_i z_i\,dm & \int x_i\,dm \\ \int x_i y_i\,dm & \int y_i^2\,dm & \int y_i z_i\,dm & \int y_i\,dm \\ \int x_i z_i\,dm & \int y_i z_i\,dm & \int z_i^2\,dm & \int z_i\,dm \\ \int x_i\,dm & \int y_i\,dm & \int z_i\,dm & \int dm \end{bmatrix} \tag{2-16}$$

$avec\ {}^{i}r_i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$,

Si on utilise le tenseur d'inertie I_{ij} qui est définie :

$$I_{ij} = \int \left[\delta_{ij} \left(\sum_k x_k^2 \right) - x_i x_j \right] dm \tag{2-17}$$

δ_{ij} dit symbole de Kronecker,J_i s'exprime en tenseur d'inertie par :

$$J_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{xx}+I_{yy}+I_{zz}}{2} & -I_{xy} & -I_{xz} & m_i\overline{x_i} \\ -I_{xy} & \frac{I_{xx}-I_{yy}+I_{zz}}{2} & -I_{yz} & m_i\overline{y_i} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & \frac{I_{xx}+I_{yy}-I_{zz}}{2} & m_i\overline{z_i} \\ m_i\overline{x_i} & m_i\overline{y_i} & m_i\overline{z_i} & m_i \end{bmatrix} \tag{2-18}$$

${}^{i}\overline{r_i} = (\overline{x_i},\overline{y_i},\overline{z_i},1)$, Les coordonnées du centre de gravité du bras manipulateur (i)

L'énergie cinétique totale du robot manipulateur est :

$$K = \sum_{i=1}^{n} K_i = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Tr\left(\sum_{p=1}^{i}\sum_{r=1}^{i} U_{ip} J_i U_{ir}^{T}\, \dot{q}_p\, \dot{q}_r\right)$$

$$K = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{p=1}^{i}\sum_{r=1}^{i}\left[Tr\,(U_{ip} J_i U_{ir}^{T})\,\dot{q}_p\,\dot{q}_r\right] \tag{2-19}$$

2.5. L'énergie potentielle du robot manipulateur [1] :

Soit P énergie potentielle totale, P_i énergie potentielle du bras manipulateur (i)

$$P_i = -m_i g\, {}^{0}\overline{r_i} = -m_i g\,({}^{0}T_i\, {}^{i}\overline{r_i}) \tag{2-20}$$

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} -m_i g\,({}^{0}T_i\, {}^{i}\overline{r_i}) \tag{2-21}$$

Avec $g = (g_x, g_y, g_z, 0)$

$g = (0,0,-|g|,0)$

(g=9.8062m/s^2)

2.6. L'équation du mouvement du robot manipulateur [1]:

De l'éq.(2-19) et l'éq.(2-21),le lagrangien est égal :

L = K – P

$$L = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{i}\left[Tr\,(U_{ij} J_i U_{ik}^{T})\,\dot{q}_j\,\dot{q}_k\right] + \sum_{i=1}^{n} m_i g\,({}^{0}T_i\, {}^{i}\overline{r_i}) \tag{2-22}$$

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$= \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{j} Tr(U_{jk} J_j U_{ji}^{T})\,\ddot{q}_k + \sum_{j=i}^{n}\sum_{k=1}^{j}\sum_{m=1}^{j} Tr(U_{jkm} J_i U_{ji}^{T})\,\dot{q}_k\,\dot{q}_m - \sum_{j=i}^{n} m_j g U_{ji}\, {}^{j}\overline{r_j} \tag{2-23}$$

$$\tau_i = \sum_{k=1}^{n} D_{ik}\,\ddot{q}_k + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{ikm}\,\dot{q}_k\,\dot{q}_m + c_i \rightarrow i = 1,2,\dots,n \tag{2-24}$$

Sous forme matricielle, on a :

$$\tau_i = D(q(t))\ddot{q}(t) + h(q(t),\dot{q}(t)) + c(q(t)) \qquad (2\text{-}25)$$

Avec,

-τ(t) :de dimension (n*1) ,qui représente le vecteur du couple généralisé,

$$\tau(t) = (\tau_1(t), \tau_2(t), \ldots, \tau_n(t))^T \qquad (2\text{-}26)$$

-q(t) :de dimension(n*1),qui représente le vecteur des variables des articulations du robot manipulateur ,

$$q(t) = (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t))^T \qquad (2\text{-}27)$$

-$\dot{q}(t)$: de dimension (n*1), qui représente le vecteur vitesse des articulations du robot manipulateur,

$$\dot{q}(t) = (\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \ldots, \dot{q}_n(t))^T \qquad (2\text{-}28)$$

-$\ddot{q}(t)$: de dimension (n*1), qui représente le vecteur accélération des variables des articulations du robot manipulateur,

$$\ddot{q}(t) = (\ddot{q}_1(t), \ddot{q}_2(t), \ldots, \ddot{q}_n(t))^T \qquad (2\text{-}29)$$

-D (q) : de dimension (n*n), qui représente la matrice accélération symétrique dont les éléments sont,

$$D_{ik} = \sum_{j=\max(i,k)}^{n} Tr(U_{jk} J_j U_{ji}^T) \rightarrow i,k = 1,2,\ldots,n \qquad (2\text{-}30)$$

-$h(q,\dot{q})$: de dimension (n*1), qui représente le vecteur des forces de Coriolis et des forces centrifuges, ces éléments sont définit par,

$$h(q,\dot{q}) = (h_1, h_2, \ldots, h_n)^T$$

$$h_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} h_{ikm}\,\dot{q}_k\,\dot{q}_m \rightarrow i = 1,2,\ldots,n \qquad (2\text{-}31)$$

$$h_{ikm} = \sum_{j=\max(i,k,m)}^{n} Tr(U_{jkm} J_j U_{ji}^T) \rightarrow i,k,m = 1,2,\ldots,n \qquad (2\text{-}32)$$

-c(q) : de dimension (n*1), qui représente le vecteur des forces de pesanteur,ces éléments sont définit par,

$$c(q) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$$

$$c_i = \sum_{j=i}^{n} (-m_j g U_{ji}\, {}^j\overline{r_j}) \rightarrow i = 1,2,\ldots,n \qquad (2\text{-}33)$$

2.7. Les équations de mouvement d'un robot manipulateur avec des articulations rotoïdes [1]:

Si les équations de (2-25) à (2-33) sont étendues à l'étude d'un robot manipulateur doté de six articulations rotoïdes, les termes de l'équation dynamique de mouvement sont obtenus :

-La matrice d'accélération symétrique, D (θ) donnée par l'équation (2-30), on a :

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{15} & D_{25} & D_{35} & D_{45} & D_{55} & D_{56} \\ D_{16} & D_{26} & D_{36} & D_{46} & D_{56} & D_{66} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}34)$$

$$D_{11} = Tr(U_{11}J_1U_{11}^T) + Tr(U_{21}J_2U_{21}^T) + Tr(U_{31}J_3U_{31}^T) + Tr(U_{41}J_4U_{41}^T)$$
$$+ Tr(U_{51}J_5U_{51}^T) + Tr(U_{61}J_6U_{61}^T)$$
$$D_{12} = D_{21} = Tr(U_{22}J_2U_{21}^T) + Tr(U_{32}J_3U_{31}^T) + Tr(U_{42}J_4U_{41}^T) + Tr(U_{52}J_5U_{51}^T)$$
$$+ Tr(U_{62}J_6U_{61}^T)$$
$$D_{13} = D_{31} = Tr(U_{33}J_3U_{31}^T) + Tr(U_{43}J_4U_{41}^T) + Tr(U_{53}J_5U_{51}^T) + Tr(U_{63}J_6U_{61}^T)$$
$$D_{14} = D_{41} = Tr(U_{44}J_4U_{41}^T) + Tr(U_{54}J_5U_{51}^T) + Tr(U_{64}J_6U_{61}^T)$$
$$D_{15} = D_{51} = Tr(U_{55}J_5U_{51}^T) + Tr(U_{65}J_6U_{61}^T)$$
$$D_{16} = D_{61} = Tr(U_{66}J_6U_{61}^T)$$
$$D_{22} = Tr(U_{22}J_2U_{22}^T) + Tr(U_{32}J_3U_{32}^T) + Tr(U_{42}J_4U_{42}^T) + Tr(U_{52}J_5U_{52}^T)$$
$$+ Tr(U_{62}J_6U_{62}^T)$$
$$D_{23} = D_{32} = Tr(U_{33}J_3U_{32}^T) + Tr(U_{43}J_4U_{42}^T) + Tr(U_{53}J_5U_{52}^T) + Tr(U_{63}J_6U_{62}^T)$$
$$D_{24} = D_{42} = Tr(U_{44}J_4U_{42}^T) + Tr(U_{54}J_5U_{52}^T) + Tr(U_{64}J_6U_{62}^T)$$
$$D_{25} = D_{52} = Tr(U_{55}J_5U_{52}^T) + Tr(U_{65}J_6U_{62}^T)$$
$$D_{26} = D_{62} = Tr(U_{66}J_6U_{62}^T)$$
$$D_{33} = Tr(U_{33}J_3U_{33}^T) + Tr(U_{43}J_4U_{43}^T) + Tr(U_{53}J_5U_{53}^T) + Tr(U_{63}J_6U_{63}^T)$$
$$D_{34} = D_{43} = Tr(U_{44}J_4U_{43}^T) + Tr(U_{54}J_5U_{53}^T) + Tr(U_{64}J_6U_{63}^T)$$
$$D_{35} = D_{53} = Tr(U_{55}J_5U_{53}^T) + Tr(U_{65}J_6U_{63}^T)$$
$$D_{36} = D_{63} = Tr(U_{66}J_6U_{63}^T)$$
$$D_{44} = Tr(U_{44}J_4U_{44}^T) + Tr(U_{54}J_5U_{54}^T) + Tr(U_{64}J_6U_{64}^T)$$
$$D_{45} = D_{54} = Tr(U_{55}J_5U_{54}^T) + Tr(U_{65}J_6U_{64}^T)$$
$$D_{46} = D_{64} = Tr(U_{66}J_6U_{64}^T)$$
$$D_{55} = Tr(U_{55}J_5U_{55}^T) + Tr(U_{65}J_6U_{65}^T)$$
$$D_{56} = D_{65} = Tr(U_{66}J_6U_{65}^T)$$
$$D_{66} = Tr(U_{66}J_6U_{66}^T)$$

$-h(\theta,\dot{\theta})$:

$$H_{i,v}=\begin{bmatrix} h_{i11} & h_{i12} & h_{i13} & h_{i14} & h_{i15} & h_{i16} \\ h_{i12} & h_{i22} & h_{i23} & h_{i24} & h_{i25} & h_{i26} \\ h_{i13} & h_{i23} & h_{i33} & h_{i34} & h_{i35} & h_{i36} \\ h_{i14} & h_{i24} & h_{i34} & h_{i44} & h_{i45} & h_{i46} \\ h_{i15} & h_{i25} & h_{i35} & h_{i45} & h_{i55} & h_{i56} \\ h_{i16} & h_{i26} & h_{i36} & h_{i46} & h_{i56} & h_{i66} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\theta}(t)=\left[\dot{\theta}_1(t),\dot{\theta}_2(t),\dot{\theta}_3(t),\dot{\theta}_4(t),\dot{\theta}_5(t),\dot{\theta}_6(t)\right]^T$$

$$h_i=\dot{\theta}^T H_{i,v}\,\dot{\theta}$$

$$h(\theta,\dot{\theta})=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dot{\theta}^T H_{1,v}\,\dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{2,v}\,\dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{3,v}\,\dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{4,v}\,\dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{5,v}\,\dot{\theta} \\ \dot{\theta}^T H_{6,v}\,\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

-c(θ) :de l'équation (2-33), on a :

$$c(\theta)=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6)^T$$

avec

$$c_1=-(m_1gU_{11}\,{}^1\bar{r}_1+m_2gU_{21}\,{}^2\bar{r}_2+m_3gU_{31}\,{}^3\bar{r}_3+m_4gU_{41}\,{}^4\bar{r}_4+m_5gU_{51}\,{}^5\bar{r}_5+m_6gU_{61}\,{}^6\bar{r}_6)$$

$$c_2=-(m_2gU_{22}\,{}^2\bar{r}_2+m_3gU_{32}\,{}^3\bar{r}_3+m_4gU_{42}\,{}^4\bar{r}_4+m_5gU_{52}\,{}^5\bar{r}_5+m_6gU_{62}\,{}^6\bar{r}_6)$$

$$c_3=-(m_3gU_{33}\,{}^3\bar{r}_3+m_4gU_{43}\,{}^4\bar{r}_4+m_5gU_{53}\,{}^5\bar{r}_5+m_6gU_{63}\,{}^6\bar{r}_6)$$

$$c_4=-(m_4gU_{44}\,{}^4\bar{r}_4+m_5gU_{54}\,{}^5\bar{r}_5+m_6gU_{64}\,{}^6\bar{r}_6)$$

$$c_5=-(m_5gU_{55}\,{}^5\bar{r}_5+m_6gU_{65}\,{}^6\bar{r}_6)$$

$$c_6=-m_6gU_{66}\,{}^6\bar{r}_6$$

2.8. Application à un robot manipulateur à deux bras :

-Données :

- Les variables des articulations = θ_1 , θ_2 .
- Masses des bras = m_1 ,m_2 .
- Paramètres des bras = $\alpha_1=\alpha_2=0$; $d_1=d_2=0$; $a_1=a_2=1$

La matrice de transformation homogène ${}^{i-1}A_i \rightarrow i=1,2$

$$^0T_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & lc_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & ls_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & lc_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & ls_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$^0T_2 = {}^0T_1\,{}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l(c_{12}+c_1) \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l(s_{12}+s_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$c_1 = cos(\theta_1); s_1 = sin(\theta_1); c_2 = cos(\theta_2); s_2 = sin(\theta_2);$
$c_{12} = cos(\theta_1 + \theta_2); s_{12} = sin(\theta_1 + \theta_2).$

On a des articulations rotoïdes,alors :

$$Q_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En utilisant l'équation (2-11) :

$$U_{11} = \frac{\partial^0 T_1}{\partial \theta_1} = Q_1\,{}^0T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & lc_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & ls_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 & 0 & -ls_1 \\ c_1 & -s_1 & 0 & lc_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{21} = \frac{\partial^0 T_2}{\partial \theta_1} = Q_1\,{}^0T_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l(c_{12}+c_1) \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l(s_{12}+s_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 & -l(s_{12}+s_1) \\ c_{12} & -s_{12} & 0 & l(c_{12}+c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U_{22} = \frac{\partial^0 T_2}{\partial \theta_2} = {}^0T_1 Q_2 {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & lc_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & ls_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & lc_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & ls_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 & -ls_{12} \\ c_{12} & -s_{12} & 0 & lc_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1l^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_1l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}m_1l & 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix}; J_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_2l^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}m_2l \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}m_2l & 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

En utilisant l'équation (2-30), on a :

$$D_{11} = Tr(U_{11}J_1U_{11}^T) + Tr(U_{21}J_2U_{21}^T) = \frac{1}{3}m_1l^2 + \frac{4}{3}m_2 + m_2c_2l^2$$
$$D_{12} = D_{21} = Tr(U_{22}J_2U_{21}^T) = \frac{1}{3}m_2l^2 + \frac{1}{2}m_2l^2c_2$$
$$D_{22} = Tr(U_{22}J_2U_{22}^T) = \frac{1}{3}m_2l^2$$

A partir de l'équation (2-31) :

-Pour i = 1, on a :

$$h_1 = \sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} h_{1km}\dot{\theta}_k\dot{\theta}_m = h_{111}\dot{\theta}_1^2 + h_{112}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + h_{121}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + h_{122}\dot{\theta}_2^2$$

En utilisant l'équation (2-32),on peut calculer h_{ikm}.

$$h_1 = -\frac{1}{2}m_2s_2l^2\dot{\theta}_2^2 - m_2s_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

-Pour i = 2,on a :

$$h_2 = \sum_{k=1}^{2}\sum_{m=1}^{2} h_{2km}\dot{\theta}_k\dot{\theta}_m = h_{211}\dot{\theta}_1^2 + h_{212}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + h_{221}\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + h_{222}\dot{\theta}_2^2$$
$$= \frac{1}{2}m_2s_2l^2\dot{\theta}_1^2$$

$d'ou$,

$$h(\theta,\dot{\theta}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}m_2s_2l^2\dot{\theta}_2^2 - m_2s_2l^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \frac{1}{2}m_2s_2l^2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

Puis on utilise l'équation (2-33) pour le calcul des termes de $c = (c_1, c_2)^T$

$$c_1 = -(m_1 g U_{11}\,{}^1\overline{r_1} + m_2 g U_{21}\,{}^2\overline{r_2})$$

$$= -m_1(0,-g,0,0)\begin{bmatrix} -s_1 & -c_1 & 0 & -ls_1 \\ c_1 & -s_1 & 0 & lc_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-m_2(0,-g,0,0)\begin{bmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 & -l(s_{12}+s_1) \\ c_{12} & -s_{12} & 0 & l(c_{12}+c_1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \tfrac{1}{2} m_1 glc_1 + \tfrac{1}{2} m_2 glc_{12} + m_2 glc_1$$

$$c_2 = -m_2 g U_{22}\,{}^2\overline{r_2}$$

$$= -m_2(0,-g,0,0)\begin{bmatrix} -s_{12} & -c_{12} & 0 & -ls_{12} \\ c_{12} & -s_{12} & 0 & lc_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -m_2(\tfrac{1}{2} glc_{12} - glc_{12}) = \tfrac{1}{2} m_2 glc_{12}$$

$$c(\theta) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_1 glc_1 + \frac{1}{2} m_2 glc_{12} + m_2 glc_1 \\ \frac{1}{2} m_2 glc_{12} \end{bmatrix}$$

Finalement, les équations de mouvement de Lagrange-Euler pour un robot manipulateur à deux bras sont [1]:

$$\tau(t) = D(\theta)\ddot{\theta}(t) + h(\theta,\dot{\theta}) + c(\theta)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_1 + \frac{4}{3} m_2 l^2 + m_2 c_2 l^2 & \frac{1}{3} m_2 l^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 c_2 \\ \frac{1}{3} m_2 l^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 c_2 & \frac{1}{3} m_2 l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} m_2 s_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 - m_2 s_2 l^2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ \frac{1}{2} m_2 s_2 l^2 \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_1 glc_1 + \frac{1}{2} m_2 glc_{12} + m_2 glc_1 \\ \frac{1}{2} m_2 glc_{12} \end{bmatrix}$$

2.9. Conclusion :

Nous avons présenté dans ce chapitre le formalisme le plus utilisé pour le calcul du modèle dynamique des robots : le formalisme de Lagrange- Euler. Nous avons montré comment établir l'équation et la détermination des paramètres de l'équation D, h, c et finalement l'obtention de l'équation dynamique de Lagrange- Euler pour un robot manipulateur à deux bras.
Dans le chapitre suivant, nous allons utiliser la modélisation par éléments finis par la prise en compte du caractère bidimensionnel et tridimensionnel.