I. FORMULES USUELLES DE L'ECOULEMENT UNIFORME ET LEUR CORRELATION

I.1. Introduction

Le présent chapitre propose une synthèse des principales relations usuelles régissant l'écoulement uniforme.

Après avoir défini l'écoulement uniforme et les règles qui gouvernent son établissement, les relations de *Chézy*, de *Manning-Strickler* et de *Darcy-Weisbach* sont développées. Compte tenu de leur emploi pratique et aux résultats satisfaisants auxquels elles aboutissent, ce chapitre est exclusivement consacré à ces relations.

Les coefficients de résistance liés à ces formules sont particulièrement discutés et les relations permettant leur estimation sont présentées et commentées.

I.2. Etablissement de l'écoulement uniforme

L'écoulement uniforme peut être soit en régime laminaire soit en régime turbulent, mais il se produit sous de grandes vitesses. A vitesse élevée, l'écoulement uniforme est instable et il est le siège d'un fort entraînement d'air.

Dans les canaux ouverts, l'écoulement uniforme se développe lorsque les forces de résistance s'opposant à l'écoulement sont équilibrées par les forces de gravité. Les forces de résistance sont proportionnelles au carré de la vitesse moyenne V.

Lorsqu'un écoulement entrant dans un canal s'effectue de façon lente, la vitesse et par conséquent la résistance à l'écoulement sont faibles. Les forces de gravité sont alors prédominantes et l'écoulement subit alors une accélération depuis l'amont. La vitesse ainsi que la résistance augmentent au fur et à mesure que l'on se déplace vers l'aval, jusqu'à ce que les forces de gravité soient équilibrées. A cet instant, l'écoulement uniforme apparaît. La zone sur laquelle s'étend l'écoulement accéléré et au-delà de laquelle l'écoulement uniforme apparaît est dite zone de transition. Si la longueur du canal est inférieure à la longueur de la zone transitoire, l'écoulement uniforme ne peut être atteint.

Plus à l'aval de l'écoulement uniforme, les forces de gravité deviennent de plus en plus prédominantes en raison de l'accélération que subit l'écoulement. L'écoulement uniforme disparaît alors en laissant place à un écoulement varié.

La figure 1 montre l'état d'un écoulement à l'entrée et l'intérieur d'un canal de grande longueur et de différentes pentes géométriques J_s. La pente J_s est comparée à la pente critique J_c.

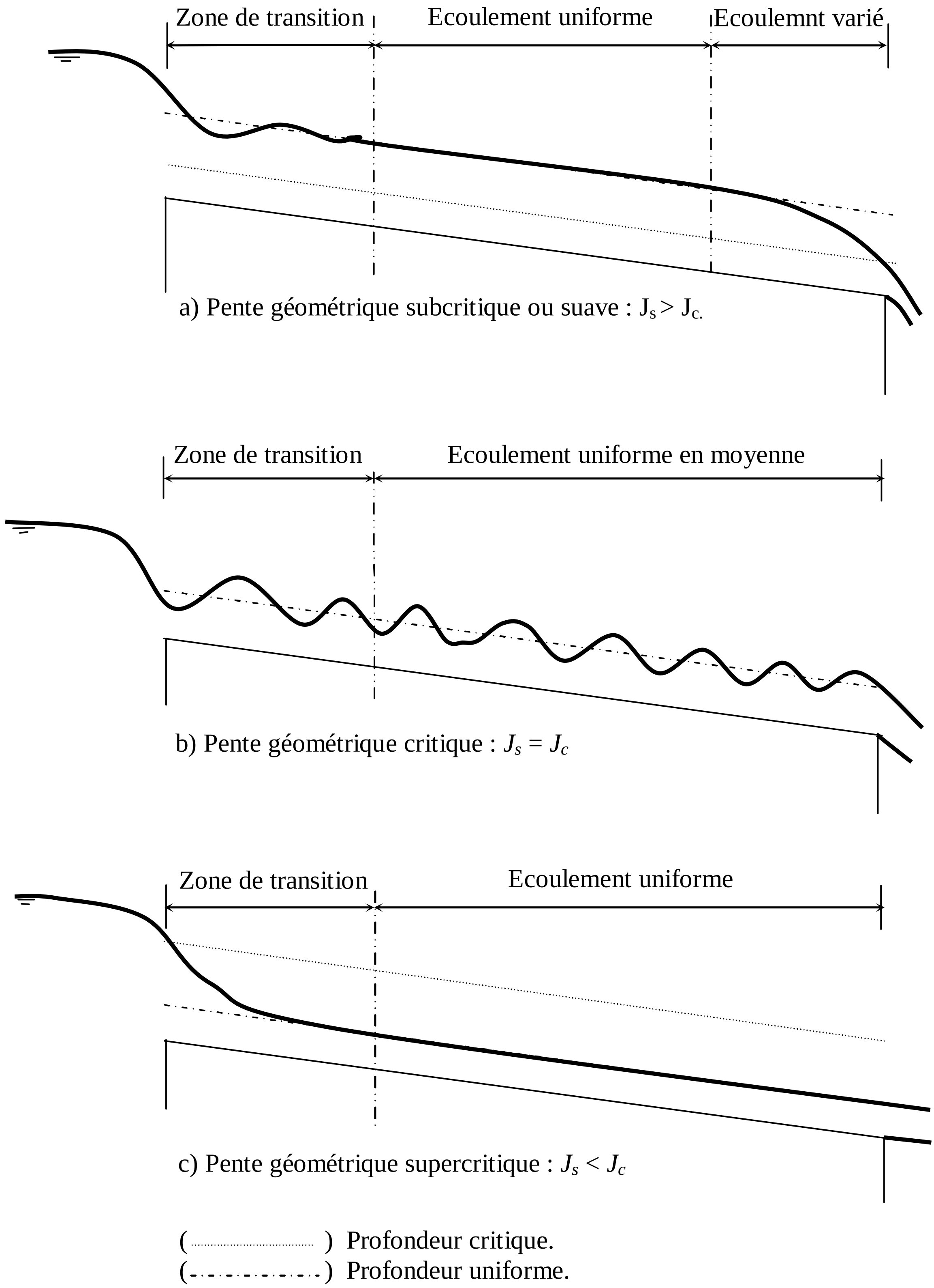

Figure 1: Etablissement de l'écoulement uniforme dans un canal de grande longueur

Lorsque la pente J_s est suave (figure 1.a), la zone de transition se présente sous l'aspect d'ondulations. L'écoulement est uniforme au milieu du canal mais varié aux extrémités de celui-ci. D'un point de vue théorique, l'écoulement varié tend vers l'écoulement uniforme de manière graduelle et asymptotique. On considère généralement dans la pratique que la profondeur de l'écoulement reste constante si la variation quelle subit n'excède pas 1% à 1,5% de la valeur moyenne de la profondeur normale.

Lorsque la pente J_s correspond à la pente critique J_c (figure 1.b), la surface libre de l'écoulement critique est instable. Des ondulations peuvent se produire au milieu du canal, mais la profondeur oscille autour d'une valeur moyenne et l'écoulement est alors considéré comme étant uniforme.

Lorsque la pente J_s est supercritique ou prononcée (figure 1.c), la surface libre dans la zone de transition chute de manière graduelle d'un niveau subcritique ou suave à un niveau supercritique ou prononcé. Au-delà de la zone de transition, l'écoulement devient uniforme.

La longueur sur laquelle s'étend la zone transitoire dépend essentiellement du débit volume Q entrant dans le canal ainsi que des caractéristiques de celui-ci telles que la rugosité absolue, la pente et la géométrie d'entrée. D'un point de vue hydrodynamique, la longueur de la zone de transition ne doit pas être inférieure à la longueur pour laquelle, sous des conditions données de l'écoulement, la couche limite est pleinement développée.

Le calcul de la profondeur d'un écoulement uniforme, appelée hauteur normale de l'écoulement est très importante. Le classement des profils géométriques par exemple est tributaire de la valeur de la profondeur normale. Comme le montre la figure (1.c), la profondeur normale est inférieure à la profondeur critique et c'est cette inégalité qui permet de conclure sur le caractère prononcé ou supercritique de la pente géométrique du canal.

Le calcul de la profondeur normale dans les canaux se base sur les relations dites « relations de l'écoulement normal ». Celles-ci expriment, de manière approximative, la vitesse moyenne V de l'écoulement sous l'hypothèse d'un régime turbulent. Les formules pratiques de l'écoulement uniforme s'expriment généralement sous la forme $V=CR_h^{\beta}J^{\gamma}$ où R_h est le rayon hydraulique et J est la pente de la ligne de charge. Comme nous l'avons déjà indiqué, J correspond également à la pente J_s. Le paramètre C traduit la résistance de l'écoulement et dépend de V, de R_h, de la rugosité absolue ε caractérisant les parois du canal, de la viscosité du liquide ν et de beaucoup d'autres facteurs.

La distinction doit être faite entre l'écoulement uniforme se produisant dans les canaux artificiels et dans les canaux naturels. Dans la pratique, l'écoulement dans les canaux naturels est considéré comme étant uniforme lorsque la profondeur de l'écoulement ne subit pas de variation brusque pouvant être causée par les irrégularités des parois du canal.

L'application des relations de l'écoulement uniforme aux canaux naturels mène à des résultats plutôt approximatifs, en raison du fait que l'écoulement dépend en réalité d'un plus grand nombre de facteurs que ceux qui influencent l'écoulement dans les canaux artificiels. Selon *Schnackenberg* (1951), une bonne relation de l'écoulement uniforme dans un canal naturel, sans transport de sédiments, est celle qui devrait tenir compte d'au moins 10 paramètres qui sont A, V, V_{ms} qui correspond à la vitesse maximale à la surface, le périmètre mouillé P, R_h, la profondeur maximale y de l'écoulement, la pente S_w de la surface libre, le coefficient n qui caractérise la rugosité du canal, la viscosité dynamique μ du liquide et la température T de celui-ci.

Lorsque l'on se réfère à la bibliographie (*Houk*, 1918; *Lindquist*,1933; *Forchheimer*,1930; *Vladislavljevitch*,1951), on peut s'apercevoir que de très nombreuses relations ont été proposées au calcul de l'écoulement uniforme. Cependant, aucune d'entre elles ne répond au qualificatif de « bonne relation » selon la conception de *Schnackenberg* (1951).
Différentes approches ont été également présentées au calcul de la vitesse de l'écoulement dans les canaux naturels, telle que celle de *T*oebes (1955). Dans cette approche, une analyse par corrélation multiple est appliquée aux différents facteurs qui influencent la vitesse de l'écoulement dans un canal naturel. Ces facteurs, selon *T*oebes (1955) sont A, V_{ms}, S_w, n et T. Par cette approche, il est possible d'estimer l'influence de chacun des dits facteurs sur la vitesse V et la valeur de celle-ci est égale à la somme algébrique des diverses contributions de chacun des paramètres en question. Cependant, la méthode de *Toebes* (1955) ne peut être appliquée que dans la région géographique pour laquelle a été faite l'analyse de l'influence des facteurs ci-dessus cités, ce qui malheureusement exclu toute généralisation de cette méthode.

A travers de nombreux exemples pratiques concernant l'écoulement uniforme, on peut s'apercevoir que les formules dites de *Chézy* et de *Manning* (ou de *Manning-Strickler*) sont les plus largement utilisées. La forme de leur expression est telle que nous l'avons déjà indiqué $V = CR_h^{\beta} J^{\gamma}$ où les exposants β et γ ont des valeurs bien déterminées. En raison de leur utilisation fiable et très répandue, ces relations seront développées aussi clairement que possible, en tentant d'éclaircir leur limite et leur domaine d'applicabilité. D'autres relations seront également exposées, telle que la formule de *Darcy-Weisbach* (1854, 1845) dont l'application est universelle. Cette relation joue un rôle important dans le calcul des écoulements évoluant dans les conduites, et sa généralisation aux canaux ouverts connaît un grand succès.

I.3. Formule de *Chézy*

La formule de *Chézy* est probablement la première formule destinée au calcul de l'écoulement uniforme. La vitesse moyenne V de l'écoulement s'exprime par :

$$V = CR_h^{1/2} J^{1/2} \qquad (1)$$

Où R_h est le rayon hydraulique, J la pente de la ligne de charge totale ou gradient de perte de charge (J étant également la pente du canal) et C est le facteur caractérisant la résistance de l'écoulement, habituellement appelé coefficient de *Chézy*.

Chézy stipule que la force de résistance s'opposant à l'écoulement et par unité de surface de canal est proportionnelle au carré de la vitesse moyenne V. Cette force peut donc s'écrire : $F_r(1m^2) = KV^2$, où K est le facteur de proportionnalité. Comme le montre la figure 2, la surface du canal en contact avec le liquide est égale au produit du périmètre mouillé P par la longueur L du canal. La force totale F_r mise en jeu s'écrit ainsi :

$$F_r = KV^2PL \qquad (2)$$

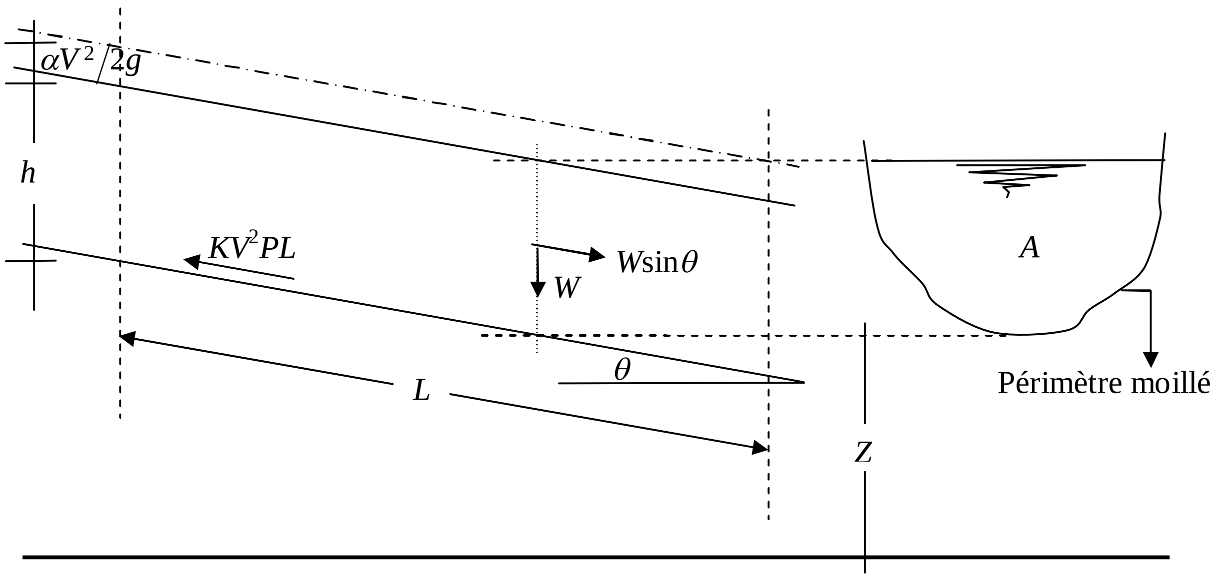

Figure 2: Schéma de définition ayant servi de base à l'élaboration de la formule de *Chézy*

Nous avons déjà indiqué que l'écoulement uniforme s'établissait lorsque les forces de gravité sont équilibrées par les forces de résistances F_r. La quantité (*W Sinθ)* représentée sur la figure 2 correspond à la composante tangentielle du poids propre W du liquide. C'est cette composante qui intervient dans l'écoulement et qui doit être équilibrée par la force F_r. Le poids propre W peut s'écrire. $W = \rho gAL$ où ρ est la masse volumique du liquide et g est l'accélération de la pesanteur. Le produit $A.L$ désigne le volume de liquide sur toute la longueur L. Ainsi nous pouvons écrire :

$$\rho g A L \sin\theta = K V^2 P L$$

soit :

$$V^2 = \left(\frac{\rho g}{K}\right)\left(\frac{A}{P}\sin\theta\right)$$

La quantité *A/P* représente par définition le rayon hydraulique R_h.

En désignant par $C^2 = (\rho g / K)$ et par $J = \sin\theta$, il ressort que :

$$V = C R_h^{1/2} J^{1/2} \qquad (3)$$

Comme l'exige la relation (3), le coefficient *C* de *Chézy* doit avoir pour unité $[L^{1/2}.T^{-1}]$.

Plusieurs relations ont été proposées au calcul du coefficient *C* de *Chézy*. Nous verrons dans ce qui suit, les plus importantes d'entre elles.

I.3.1. Détermination du coefficient C de *Chézy* par la formule de *Ganguillet-Kutter*

La formule de G*anguillet–Kutter* (1869) exprime le coefficient *C* de *Chézy* en fonction de la pente *J* du canal, du rayon hydraulique R_h et du coefficient de rugosité *n*. Elle a été élaborée à partir de mesures expérimentales, effectuées sur divers types de canaux et rivières naturelles.

$$C = \frac{23 + \frac{0{,}00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{\sqrt{R_h}}\left(23 + \frac{0{,}00155}{J}\right)} \qquad (4)$$

Le coefficient *n* figurant dans la relation (4) est connu sous le nom « coefficient *n* de *Kutter* ».

Bien que la relation (4) apparaisse quelque peu encombrante, elle donne néanmoins des résultats assez satisfaisants. De nombreux auteurs proposent d'éliminer le terme contenant la pente *J*, afin de simplifier la forme de l'équation (4). On peut en effet s'apercevoir que le terme (0,00155/ *J*) n'a pas d'effet remarquable sur la valeur du coefficient *C*, pour une même valeur du coefficient de rugosité *n* et du rayon hydraulique R_h. A titre indicatif, pour n=0,01 et R_h=1,20m, le coefficient *C* ne subit pratiquement aucun changement dans une large gamme de valeurs de *J* :

$$102 \le C \le 103 \text{ lorsque } 0{,}00005 \le J \le 0{,}01.$$

I.3.2. Détermination du coefficient *C* de *Chézy* par la formule de *Bazin*

Bazin (1897) considère que la valeur du coefficient C de *Chézy* dépend du rayon hydraulique R_h mais ne dépend pas de la pente J du canal. Le coefficient C peut alors être déterminé par application de la relation :

$$C=\frac{87}{1+\frac{m}{\sqrt{R_h}}} \tag{5}$$

m est le coefficient de rugosité dépendant de la nature du matériau constituant le canal considéré et dont la valeur est tabulée. Les valeurs de m sont sans commune mesure avec celles qui correspondent au coefficient de rugosité n figurant dans la relation (4) de *Ganguillet–Kutter* (1869) et ceci pour le même matériau. A titre indicatif, pour le cas d'un canal fabriqué en ciment lisse, les tables de valeurs indiquent que n=0,01 et m=0,11.

La formule de *Bazin* (1897) a été, à l'origine, élaborée pour des petits canaux, bien que sa généralisation ne donne pas d'aussi bons résultats que ceux obtenus par la formule de *Ganguillet–Kutter* (1869).

I.3.3. Détermination du coefficient *C* de *Chézy* par la formule de *Powell*

Powell (1950) propose une relation de type logarithmique au calcul du coefficient C de *Chézy,* mais elle se présente sous la forme implicite :

$$C=-23{,}2\log\left(1{,}811\frac{C}{R}+\frac{\varepsilon}{R_h}\right) \tag{6}$$

" log " désigne le logarithme décimal, R est le nombre de *Reynolds,* ε est la rugosité absolue des parois du canal et R_h est le rayon hydraulique.

A l'origine, la relation de *Powell* (1950) a été présentée en unité anglaise et les constantes figurant dans la relation (6) sont alors différentes et beaucoup plus simples :

$$C=-42\log\left(\frac{C}{4R}+\frac{\varepsilon}{R_h}\right) \tag{7}$$

Pour le cas des canaux rugueux, l'écoulement est en général turbulent rugueux correspondant aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds* R, le terme $C/4R$ tend alors vers zéro et la relation (7) devient :

$$C=-42\log\left(\frac{\varepsilon}{R_h}\right) \tag{8}$$

Par contre pour les canaux lisses, l'effet de la rugosité est faible et la relation (7) peut s'écrire

$$C=-42\log\left(\frac{C}{4R}\right) \tag{9}$$

I.4. Formule de *Manning-Strickler*

La vitesse moyenne V de l'écoulement uniforme peut être également évaluée par la formule dite de *Manning-Strickler* (1891, 1923). La vitesse V est liée au coefficient C de résistance de l'écoulement, au rayon hydraulique R_h et à la pente J du canal. A l'origine, la formule de *Manning-Strickler* se présentait sous une forme compliquée, puis elle a été simplifiée pour s'écrire, avec $k=C$:

$$V = kR_h^{2/3} J^{1/2} \tag{10}$$

La relation (10) a été ensuite modifiée par plusieurs auteurs pour s'écrire en unité métrique :

$$V=(1/n)R_h^{2/3}J^{1/2} \tag{11}$$

(n selon *Manning* et $1/n = k$ selon *Strickler*).

La conversion en unité anglaise de la relation (11) donne :

$$V=(1{,}486/n)R_h^{2/3}J^{1/2} \tag{12}$$

Dans cette conversion, la valeur numérique du coefficient de rugosité n reste inchangée et la même valeur est utilisée dans les deux systèmes d'unité. Comme l'exige la forme de la relation (12), le coefficient de rugosité n doit avoir pour dimension $T.L^{-1/3}$. Cependant, il est physiquement injustifié que la dimension de temps T puisse intervenir dans l'unité d'une rugosité puisque celle-ci ne devrait dépendre que de la nature du matériau constituant les parois du canal considéré. Pour cette raison, certains auteurs suggèrent que le numérateur de la relation (12) devrait contenir le terme ($g^{1/2}$), où g est l'accélération de la pesanteur. Ceci conduirait à donner à n la dimension $[L^{1/6}]$. En outre, il a été démontré que le coefficient de rugosité n pouvait s'écrire :

$$n=\left[\phi\left(\frac{R_h}{\varepsilon}\right)\right]\varepsilon^{1/6} \tag{13}$$

où ε est la rugosité absolue. Si la fonction $\phi\left(\frac{R_h}{\varepsilon}\right)$ doit être considérée comme étant adimensionnelle, le coefficient de rugosité n doit alors avoir la même dimension que $\varepsilon^{1/6}$, c'est à dire $[L^{1/6}]$. *Hager* (1987) a pu montrer que la rugosité absolue ε et le coefficient k de *Strickler* (1923) sont liés par la relation :

$$\frac{k\,\varepsilon^{1/6}}{8{,}2\sqrt{g}} = 1 \tag{14}$$

D'autre part, il est également possible d'admettre que le terme $1{,}486/n$ figurant dans la relation (12) puisse contenir de manière implicite la dimension $[L^{1/3}T^{-1}]$, ou que $\phi(R_h/\varepsilon)$ contienne un facteur ayant une dimension. Ceci rendrait alors le coefficient *n* adimensionnel. Sous cette dernière condition, la conversion en unité anglaise conduit à la constante $(3{,}2808)^{1/3} = 1{,}486$, puisque 1m = 3,2808ft.

Si l'on considère que la dimension de *n* est $[L^{1/6}]$, sa valeur numérique en unité anglaise doit être différente de sa valeur en unité métrique, à moins de tenir compte d'un facteur de correction ou de compensation.

Si *n* est la valeur du coefficient de rugosité en unité métrique et *n*' en unité anglaise, on peut écrire alors $n' = (3{,}2808)^{1/6}\, n = 1{,}219\, n$. Lorsque la formule de *Manning* subit la conversion de l'unité métrique vers l'unité anglaise, la constante figurant dans l'expression qui en résulte est égale à $(3{,}2808)^{1/3+1/6} = \sqrt{3{,}2808} = 1{,}811$ et la dimension de *n* est alors $[L^{1/6}]$.

En raison de sa forme simplifiée et aux résultats satisfaisants auxquels elle aboutit, la formule de *Manning–Strickler* (1891, 1923) est celle qui est largement utilisée lors du calcul des écoulements uniformes dans les canaux ouverts.

De nombreuses applications ont montré que les valeurs de *n* de *Manning* (1891) et *m* de *Kutter* (1869) sont pratiquement identiques lorsque la pente du canal est supérieure ou égale à 0,0001, pour un rayon hydraulique variant approximativement entre 0,30 m et 9 m.

En comparant la formule de *Manning* (1891), exprimée en unité métrique, à celle de *Chézy,* on peut écrire.

$$C = \left(\frac{1}{n}\right) R_h^{1/6} \qquad (15)$$

Ainsi la formule de *Manning-Strickler* (1891, 1923) est souvent considérée comme une variante de la formule de Chézy.

De nombreuses études dont celle de *Bazin* (1897) et qui concernent les canaux artificiels, ont montré que l'exposant de R_h ne serait pas égal à 2/3 comme le suggère *Manning* (1891), mais sa valeur moyenne varie entre 0,6499 et 0,8395 suivant la forme du canal et la rugosité de celui-ci.

Des études telles que celles de *Pavlovski* (1940) suggèrent de prendre la valeur 3/4 pour l'exposant de R_h, tandis que *Blench* (1939) considère le coefficient *C* comme une variable qui dépend non seulement du coefficient de rugosité *n* mais aussi du rayon hydraulique R_h dont l'exposant dépend à son tour de *n* et de R_h ; c'est la formule dite de *Pavlovski* (1940) qui s'exprime, en unité métrique, par :

$$C = (1/n) R_h^y \qquad (16)$$

où
$$y = 2{,}5\sqrt{n} - 0{,}13 - \frac{3}{4}\sqrt{R_h}\,(\sqrt{n} - 0{,}10)$$

La relation (16) est applicable pour un rayon hydraulique variant entre 0,10 et 3m et pour *n* compris entre 0,011 et 0,04. Des relations approchées au calcul de l'exposant *y* sont également proposées :

$$y=\frac{3}{2}\sqrt{n} \qquad \text{pour } R_h<1{,}0\text{m}$$

$$y=1{,}3\sqrt{n} \qquad \text{pour } R_h>1{,}0\text{m}$$

L'application de la formule de *Manning* (1891) comme d'ailleurs celle de *Ganguillet-Kutter* (1869), est tributaire de la valeur du coefficient de rugosité *n*. Il n'existe aucune méthode exacte qui permet d'évaluer *n*. Evaluer le coefficient *n* revient en fait à estimer la résistance de l'écoulement dans un canal donné, ce qui nécessite beaucoup d'expérience et de pratique. En se référant à la bibliographie, plusieurs auteurs concluent que pour estimer *n* les étapes suivantes sont nécessaires.

1- recenser puis apprécier l'influence des paramètres pouvant affecter le coefficient *n*, tels que la présence de végétation dans le canal, la dimension moyenne des grains du matériau constituant les parois du canal, l'irrégularité du canal par la présence de courbures ou de variation même réduite de la section transversale de l'écoulement, etc…
2- Consulter les tables de valeurs de *n* déjà évalué pour des canaux de différents types.
3- Examiner et s'informer de l'état physique caractérisant les canaux existants et dont la valeur de *n* a déjà été déterminée.
4- Déterminer la valeur de *n* par une approche analytique basée sur la répartition théorique de la vitesse dans les sections transversales de l'écoulement.

Ce dernier point nous parait intéressant et sera développé dans ce qui suit, après avoir donné un bref rappel sur les relations théoriques se rapportant à l'écoulement uniforme.

I.5. Équation théorique de l'écoulement uniforme

I.5.1. Distribution de la vitesse dans un écoulement turbulent

La distribution de la vitesse dans un écoulement turbulent demeure quasi uniforme lorsque la couche limite est pleinement développée. La distribution des vitesses suit approximativement une loi logarithmique. La contrainte de cisaillement ou tangentielle en n'importe quel point de l'écoulement turbulent, se produisant au-dessus d'une paroi solide, est donnée par la relation de *Prandtl* (1926):

$$\tau=\rho l^2(dv/dy)^2 \qquad (17)$$

ρ est la masse volumique du liquide en écoulement, l est une longueur caractéristique dite longueur de mélange, dv/dy est le gradient de vitesse à la hauteur y de la paroi solide et normale à celle-ci. La longueur de mélange peut être interprétée par la longueur au-delà de laquelle la particule liquide voit sa quantité de mouvement diminuée.

Dans la région proche de la paroi solide, *Prandtl* (1926) utilise deux approches :

1- La longueur de mélange est proportionnelle à y, soit $l = K.y$ où K est le facteur de proportionnalité entre l et y et dont la valeur a été estimée à 0,40 environ.

2- La contrainte tangentielle est constante.

Puisque la contrainte tangentielle à la surface est égale à la force tractrice unitaire τ_0, la constance de la contrainte implique que $\tau = \tau_0$.

La relation (17) devient :

$$d\mathrm{v} = (1/K)(\tau_0/\rho)^{1/2}(dy/y) \tag{18}$$

L'intégration de la relation (18) mène à :

$$\mathrm{V} = 2{,}5(\tau_0/\rho)^{1/2} Ln(y/y_0) \tag{19}$$

« *Ln* » désigne le logarithme népérien et y_0 représente la constante d'intégration. La force tractrice τ_0 s'exprime par la relation $\tau_0 = \varpi R_h J$ où $\varpi = \rho g$ est le poids spécifique du liquide, R_h est le rayon hydraulique et J la pente du canal. On peut alors écrire que :

$$(\tau_0/\rho)^{1/2} = (gR_h J)^{1/2} = V_f$$

où V_f a la dimension d'une vitesse et elle est connue sous le nom de vitesse de frottement. La relation (19) devient alors :

$$\mathrm{V} = 2{,}5 V_f Ln(y/y_0) \tag{20}$$

La relation (20) indique que la vitesse dans un écoulement turbulent est une fonction logarithmique de la distance y. Elle est connue sous le nom de loi universelle de *Prandtl-Von-Karman* de la distribution des vitesses. Cette loi a été vérifiée par plusieurs expériences et les résultats ont montré une remarquable similitude entre la distribution des vitesses observée expérimentalement et celle issue de la théorie.

Lorsque la surface solide est lisse, la constante y_0 ne dépend que de la vitesse de frottement V_f et de la viscosité cinématique ν du liquide :

$$y_0 = m_0 \frac{\nu}{V_f} \tag{21}$$

m_0 est une constante égale à 1/9 lorsque la surface solide est lisse. Cette constante a été déduite des essais de *Nikuradse* concernant les conduites lisses. La combinaison des relations (20) et (21) donne ainsi, pour les surfaces lisses, la répartition de la vitesse dans un écoulement turbulent :

$$\mathrm{V} = 2{,}5 V_f Ln(9 y V_f/\nu) \tag{22}$$

Lorsque la surface est rugueuse, la constante y_0 dépend de la rugosité absolue ε :

$$y_0 = m_0 \varepsilon \qquad (23)$$

La constante m_0 est approximativement égale à 1/30 et la relation (19) devient alors :

$$V = 2{,}5 V_f \, Ln(30y/\varepsilon) \qquad (24)$$

I.5.2. Équation de *Keulegan*

En utilisant la loi universelle de *Prandtl-Von-Karman* de la distribution des vitesses, *Keulegan* (1938) aboutit à des équations donnant la vitesse moyenne d'un écoulement turbulent dans les canaux ouverts par une approche théorique simple. En se basant sur l'équation de continuité, le débit volume Q passant par une section quelconque de l'écoulement peut être écrit :

$$Q = VA = \int_{\delta_0=0}^{y=h} v B dy \qquad (25)$$

V est la vitesse moyenne de l'écoulement, h est la profondeur de l'écoulement, A est l'aire de la section mouillée, B est la longueur de la courbe d'égale vitesse (figure 3) et y est la profondeur verticale comptée à partir de la surface jusqu'à la courbe d'égale vitesse. La sous couche limite laminaire d'épaisseur δ_0 est considérée comme étant très mince (δ_0 = 0).

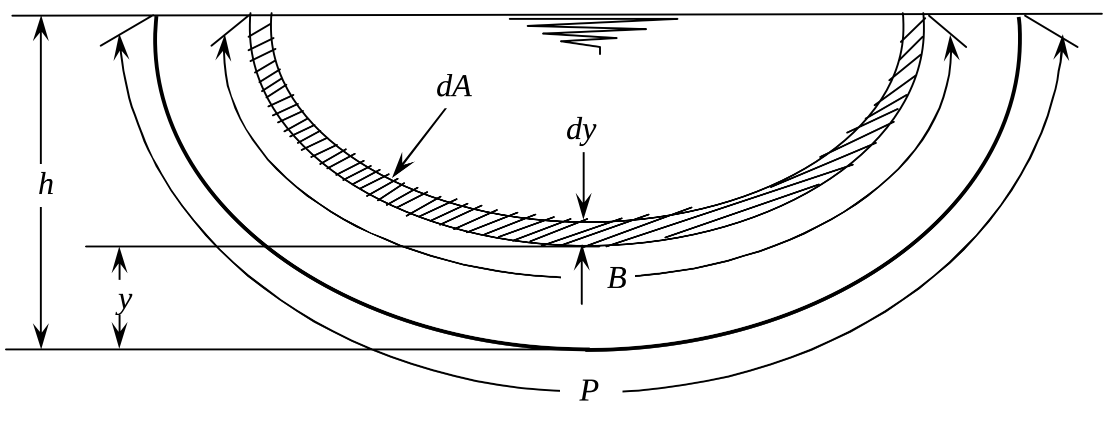

Figure 3: Schéma de définition ayant servi de base à l'établissement de l'équation de *Keulegan*

Le maximum de vitesse est supposé être à la surface et que la longueur B est proportionnelle à la distance verticale y. Ceci permet d'écrire :

$$B = P - \gamma \, y \qquad (26)$$

P est le périmètre mouillé de la surface considérée et γ est une fonction dépendant de la forme de la section. Ainsi, l'aire de la section mouillée A est :

$$A = \int_0^h B dy = Ph - \frac{1}{2}\gamma h^2 \tag{27}$$

La combinaison des relations (20), (25) et (27) permet d'écrire, après intégration :

$$V = 2,5 V_f \, Ln\left[\frac{R_h}{y_0}\frac{h}{R_h}\exp\left(-1 - \frac{\gamma h^2}{4A}\right)\right]$$

$$V = V_f\left[5,75\log\left[\frac{h}{m_0 R_h}\exp\left(-1 - \frac{\gamma h^2}{4A}\right)\right] + 5,75\log\frac{m_0 R_h}{y_0}\right] \tag{28}$$

"log " désigne le logarithme décimal.

Le premier terme du membre droit de l'équation (28), figurant entre les crochets, est une fonction de la forme de la section du canal considéré. Cependant, la variation que subit ce terme pour différentes formes de canaux est relativement faible et il a été remplacé par une constante désignée par A_0. La relation (28) prend alors une forme plus simplifiée et s'écrit :

$$V = V_f\left[A_0 + 5,75\log\left(\frac{m_0 R_h}{y_0}\right)\right] \tag{29}$$

La relation exprimée par (29) représente l'équation théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement dans les canaux ouverts.

Pour les canaux à paroi lisse, l'étude de *Keulegan* (1938), basée sur les valeurs expérimentales de *Nikuradse,* montre que $A_0 \approx 3,25$. Ainsi, l'équation théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à paroi lisse est, en tenant compte de (21) :

$$V = V_f\left(3,25 + 5,75\log\left(\frac{R_h V_f}{\nu}\right)\right) \tag{30}$$

En ce qui concerne les canaux ouverts à paroi rugueuse, *Keulegan* (1938) montre, après avoir analysé les mesures de *Bazin*, que la constante A_0 varie dans une large gamme en fonction de la forme de la section du canal ($3,23 \le A_0 \le 16,92$), et la valeur $A_0 = 6,25$ est alors adoptée. Ainsi, l'expression théorique générale de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à parois rugueuses est, en tenant compte de (23) :

$$V = V_f\left(6,25 + 5,75\log\left(R_h/\varepsilon\right)\right) \tag{31}$$

En combinant les expressions $V = C R_h^{1/2} J^{1/2}$ de *Chézy* et $\sqrt{g R_h J} = V_f$ de la vitesse de frottement, on peut écrire :

$$V/V_f = C/\sqrt{g} \tag{32}$$

ou bien, en faisant appel à la relation liant le coefficient de *Chézy C* au coefficient de résistance *f* et à l'accélération de la pesanteur *g*, la relation (32) devient :

$$\frac{V}{V_f}=\sqrt{\frac{8}{f}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{f}} \tag{33}$$

En tenant compte de la relation (32) et de la définition du nombre de *Reynolds* modifié tel que $R=R_hV/\nu$, les relations (30) et (31) permettent alors d'exprimer le coefficient C et f, respectivement pour un canal à paroi lisse et rugueuse :

$$C/\sqrt{g}=3{,}25+5{,}75\log\left(\frac{R\sqrt{g}}{C}\right) \tag{34}$$

$$C/\sqrt{g}=6{,}25+5{,}75\log\left(\frac{R_h}{\varepsilon}\right) \tag{35}$$

ou bien :

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=0{,}231+2{,}033\log\left(R\sqrt{f}\right) \tag{36}$$

$$\frac{1}{\sqrt{f}}=2{,}210+2{,}033\log\left(\frac{R_h}{\varepsilon}\right) \tag{37}$$

I.6. Interprétation théorique du coefficient de rugosité de *Manning*

En éliminant le coefficient C de *Chézy* entre les relations (15) et (35), le coefficient n de *Manning* peut alors s'écrire :

$$n=\varepsilon^{1/6}\phi\left(\frac{R_h}{\varepsilon}\right) \tag{38}$$

avec :

$$\phi\left(\frac{R_h}{\varepsilon}\right)=\frac{\left(R_h/\varepsilon\right)^{1/6}}{\sqrt{g}\left[6{,}25+5{,}75\log\left(R_h/\varepsilon\right)\right]} \tag{39}$$

La représentation graphique de (39), pour une large gamme de valeurs de la rugosité relative (R_h/ε), se traduit par une courbe plate presque horizontale. La fonction $\phi(R_h/\varepsilon)$ peut alors être remplacée par une constante dont la valeur est approximativement égale 0,0342.

Si l'on admet que la fonction $\phi(R_h/\varepsilon)$ est constante, la relation (38) indique alors que le coefficient n de *Manning* varie en fonction de la puissance 1/6 de la rugosité absolue. En d'autres termes, lorsque ε subit une variation de 1/1000ème, le coefficient n de *Manning* ne varie que de 1/3 environ. Ainsi, ε est donc plus sensible que le coefficient n. En conséquence, l'application de la relation (38) n'entraîne qu'une erreur relativement faible sur le calcul du coefficient n de *Manning.*

L'étude comparative de *Bakhmeteff* et *Feodorof* (1943) entre les formules de *Manning* (1891), de *Ganguillet–Kutter* (1869) et de *Prandtl–Von–Karman* (1926) mise sous une forme identique à celle de la relation (38), montre que la formule de *Manning* (1891) est la plus adaptée.

I.7. Méthode de détermination du coefficient *n* de *Manning*

Deux méthodes de détermination du coefficient *n* de *Manning*, basées sur la répartition théorique des vitesses dans un canal à parois rugueuses, ont été développées. La première méthode, dite « méthode liée à la mesure de la rugosité », admet la validité de la relation (39). Ainsi, la valeur de *n* peut être calculée en application de la relation (38) pour la valeur connue de la rugosité absolue ε.

La seconde méthode est dite « méthode liée à la mesure de la vitesse ». En se référant à la loi logarithmique de la répartition de la vitesse exprimée par la relation (24), on peut s'apercevoir que cette répartition dépend de la rugosité absolue ε liée au coefficient *n* de *Manning* par la relation (38). En d'autres termes, la rugosité dans le sens du coefficient *n* de *Manning* peut être considérée comme un facteur prédominant affectant la répartition de la vitesse. Si celle-ci était connue, le coefficient *n* de *Manning* peut alors être évalué.

On définit $V_{0,2}$ la vitesse aux deux dixièmes de la profondeur ou à la distance $0,8y$ comptée à partir du fond du canal de grande largeur et à parois rugueuses; y représentant la profondeur de l'écoulement. En vertu de la relation (24), on peut écrire :

$$V_{0,2}=2,5V_f\,Ln\left(\frac{24y}{\varepsilon}\right) \tag{40}$$

De manière identique, nous pouvons écrire que :

$$V_{0,8}=2,5V_f\,Ln\left(\frac{6y}{\varepsilon}\right) \tag{41}$$

En éliminant la vitesse V_f entre les relations (40) et (41), on peut écrire, en posant $X=V_{0,2}/V_{0,8}$:

$$(1-X)Ln\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)=XLn(6)-Ln(24)$$

ou bien :

$$Ln\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)=\frac{(1,792X-3,178)}{(1-X)} \tag{42}$$

L'équation (31) qui exprime la vitesse moyenne de l'écoulement dans un canal à parois rugueuses, devient alors pour un canal de grande largeur ($R_h = y$) :

$$\frac{V}{V_f}=\frac{1,775(X+0,95)}{X-1} \tag{43}$$

En outre, la combinaison des relations (15) et (31), pour ($R_h = y$), donne :

$$\frac{V}{V_f}=\frac{y^{1/6}}{n\sqrt{g}} \tag{44}$$

Ainsi, le coefficient *n* de *Manning* peut être évalué à partir de l'égalité des relations (43) et (44), soit :

$$n = \frac{y^{1/6}(X-1)}{1{,}775\sqrt{g}(X+0{,}95)} \tag{45}$$

La relation (45) permet ainsi d'évaluer le coefficient n de *Manning* pour le cas d'un canal de grande largeur à parois rugueuses et dans l'hypothèse que la distribution de la vitesse suit une loi logarithmique.

I.8. Formule de *Darcy-Weisbach*

Considérons un écoulement en régime permanent de débit Q dans un canal rectiligne de section transversale constante.

Proposons-nous d'établir l'expression de la perte de charge ΔH correspondant à l'écoulement sur une distance L, représentant la longueur du tronçon rectiligne de la canalisation considérée.

Les paramètres physiques qui interviennent dans le problème ainsi posé sont :

Δp perte de pression, L longueur du tronçon d'écoulement considéré, D_h diamètre hydraulique, ε la rugosité absolue des parois, V la vitesse moyenne de l'écoulement, ρ la masse volumique du liquide et ν la viscosité cinématique du liquide.

Sept grandeurs physiques caractérisent ainsi le phénomène (n=7) ainsi que trois grandeurs fondamentales (M, L et T), soit $r = 3$.

En application du théorème de *vaschy-buckingham,* la relation physique recherchée doit s'exprimer par une relation entre $n–r = 4$ produits sans dimension indépendants formés avec les sept grandeurs considérées :

$$\frac{\Delta p}{\left(\rho V^2/2\right)} = \varphi\left(L/D_h, VD_h/\nu, \varepsilon/D_h\right) \tag{46}$$

Δp est proportionnel à L puisque l'écoulement est identique dans toutes les sections transversales. La relation (46) devient :

$$\frac{\Delta p}{\left(\rho V^2/2\right)} = \frac{L}{D_h} F\left(\frac{VD_h}{\nu}, \frac{\varepsilon}{D_h}\right) \tag{47}$$

Posons :

$$f = F\left(\frac{VD_h}{\nu}, \frac{\varepsilon}{D_h}\right) \tag{48}$$

f est le coefficient de frottement. Il ressort que :

$$\frac{\Delta p}{\rho} = f \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2} \tag{49}$$

Si l'on exprime Δp en hauteur d'eau, c'est à dire

$$\Delta p = \Delta H \rho g \tag{50}$$

ΔH est la perte de charge le long de la canalisation considérée, ρ est la masse volumique du liquide et g est l'accélération de la pesanteur. Les relations (49) et (50) montrent que :

$$\Delta H = f \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2g} \tag{51}$$

Par définition, le gradient de la perte de charge J s'exprime par :

$$J = \frac{\Delta H}{L} \tag{52}$$

En remplaçant (51) dans (52), on obtient la formule de *Darcy-Weisbach* (1854, 1845):

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} \tag{53}$$

La formule de *Darcy–Weisbach* exprime la proportionnalité entre le gradient de la perte de charge J, la vitesse moyenne V de l'écoulement et le diamètre hydraulique $D_h=4A/P=4R_h$. Le facteur de proportionnalité étant le coefficient de frottement f. Le gradient J est inversement proportionnel à D_h et proportionnel au carré de la vitesse V.

La formule (53) est aussi valable pour les canaux ouverts que pour les conduites fermées.

Le coefficient de frottement f peut être évalué par diverses relations, selon la nature du régime d'écoulement.

1.8.1. Détermination du coefficient de frottement par la formule de *Colebrook-White*

Colebrook propose une relation de type logarithmique au calcul du coefficient de frottement, mais elle se présente sous une forme implicite.

$$f^{-1/2} = -2\log\left(\frac{\varepsilon/D_h}{3{,}7} + \frac{2{,}51}{R\sqrt{f}}\right) \tag{54}$$

ε/D_h est la rugosité relative et R est le nombre de *Reynolds.*

« log » désigne le logarithme décimal.

La formule de *Colebrook* est d'une applicabilité générale, car elle englobe tous les régimes d'écoulement (régime lisse, régime turbulent rugueux et régime de transition).

Dans le cas où le régime d'écoulement serait de transition, le coefficient de frottement f dépend à la fois de la rugosité relative ε/D_h et du nombre de *Reynolds* R. Pour des valeurs données de ε/D_h et de R, l'évaluation du coefficient de frottement f, par application de la relation (54), donne des résultats proches de la réalité. Compte tenu de sa forme implicite, son utilisation est facilitée par l'emploi des tables et abaques ou par des procédés itératifs.

A partir d'une valeur $R=R_{lim}$ dépendant de la valeur de ε/D_h, le coefficient de frottement demeure pratiquement inchangé avec l'augmentation de R. Cette particularité caractérise la nature de l'écoulement dans la zone de pleine turbulence ou domaine rugueux. Dans ce domaine, le coefficient de frottement f peut être évalué par la relation explicite de *Nikuradse.*

$$f^{-1/2}=-2\log\left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7}\right) \tag{55}$$

La relation (55) peut être obtenue à partir de la relation (54), en écrivant que R tend vers l'infini. Ceci correspond en pratique à des valeurs élevées de R.

Dans le domaine pratiquement lisse correspondant à la rugosité relative ε/D_h tendant vers zéro, ($\varepsilon/D_h \rightarrow 0$), la relation (54) mène à écrire que:

$$f^{-1/2}=-2\log\left(\frac{2,51}{R\sqrt{f}}\right) \tag{56}$$

L'évaluation de f nécessite également un procédé itératif.

1.8.2. Détermination du coefficient de frottement par la formule de *Achour :*

Achour (1997) propose une relation explicite de type logarithmique au calcul du coefficient de frottement f :

$$f^{-1/2}=-2\log\left[\frac{\varepsilon/D_h}{3,7}+\frac{4,5}{R}\log\left(\frac{R}{6,97}\right)\right] \tag{57}$$

"log" désigne le logarithme décimal, R est le nombre de *Reynolds*, ε est la rugosité absolue des parois de la canalisation et D_h est le diamètre hydraulique.

La formule de *Achour* (1997) englobe les différents régimes d'écoulement (lisse, rugueux et de transition). Pour le cas de l'écoulement en régime turbulent rugueux, le premier terme de l'équation (57) l'emporte sur le second terme, car, $\frac{4,5}{R}\log\left(\frac{R}{6,97}\right)$ tend vers zéro. L'équation (57) devient :

$$f^{-1/2}=-2\log\left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7}\right) \tag{58}$$

La relation (55) est alors reproduite.

Dans le domaine pratiquement lisse, le second membre de l'équation (57) l'emporte sur le premier terme puisque ε/D_h tend vers zéro. L'équation (57) devient alors :

$$f^{-1/2}=-2\log\left(\frac{4,5}{R}\log\frac{R}{6,97}\right) \tag{59}$$

L'application de la relation (59) occasionne un écart relatif inférieur à 0,6% par rapport à la relation (59) et pour $R \geq 2350$. La formule de *Swamee* (1976) permet également d'évaluer f de manière explicite dans le domaine pratiquement lisse :

$$f = \left[2\log\left(\frac{5,74}{R^{0,9}} \right) \right]^{-2} \tag{60}$$

Mais, la relation (60) occasionne un écart de 1,5% par rapport à (59) pour $5.10^{3} < R < 10^{8}$.

1.8.3. Corrélation entre le coefficient de *Chézy* et de *Darcy-Weisbach*

Nous devons savoir dans quelle mesure les formules universelles des pertes de charge applicables aux écoulements en charge pourraient s'appliquer aux écoulements à surface libre. Rappelons au préalable la formule générale de l'écoulement à partir de la formule de *Darcy-Weisbach* (1854, 1845) *:*

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} \tag{53}$$

Nous savons que dans le cas d'une conduite de section circulaire pleine, le rayon hydraulique est donné par : $R_h = D_h/4$, ou bien $D_h = 4R_h$. La relation (53) devient alors :

$$J = \frac{f}{4R_h} \frac{V^2}{2g} = \frac{f}{8R_h} \frac{V^2}{g} \tag{61}$$

D'où

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{R_h J} \tag{62}$$

En comparant les relations (1) et (62), on peut écrire; pour le coefficient C de *Chézy :*

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \tag{63}$$

1.8.4. Corrélation entre les formules de *Darcy-Weisbach* et de *Manning-Strickler*

Manning (1891) et *Strickler* (1923) ont établi et confirmé une forme simple reliant la vitesse moyenne V avec la pente du frottement J_f et le rayon hydraulique R_h par l'équation suivante :

$$V = kR_h^{2/3} J_f^{1/2} \tag{64}$$

Avec k coefficient de rugosité, appelé aussi coefficient de *Strickler* ($m^{1/3}/s$).
Cette formule est très utilisée et s'applique encore de nos jours. L'équation de *Manning-Strickler* (1891, 1923) s'applique uniquement si l'équation suivante est satisfaite *Hager* (1987) :

$$\varepsilon / D_h > 1050/R \tag{65}$$

Ce qui correspond à :

$$\varepsilon > 1050 \nu / V \quad (66)$$

Avec : $R = VD_h/\nu$

La rugosité absolue (rugosité équivalente du sable) ε est indépendante du diamètre D_h de la canalisation et donc du rayon hydraulique R_h.

La relation entre la rugosité équivalente du sable et le coefficient de rugosité k d'après *Strickler* (1923) (ou $n = \frac{1}{k}$ d'après *Manning*), est selon *Hager* (1987) :

$$k\varepsilon^{1/6}/\sqrt{g} = 8{,}2 \quad (14)$$

En comparant les relations (64) et (62), on peut écrire; pour le coefficient k de *Strickler* :

$$kR_h^{1/6} = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (67)$$

I.9. Conclusion

Le chapitre précédent a montré que la vitesse moyenne d'un écoulement uniforme peut se mettre sous la forme $V = CR_h^{\beta} J^{\gamma}$. Le paramètre C traduit la résistance de l'écoulement et peut être désigné par d'autres symboles. Son évaluation ainsi que sa dimension varie d'un auteur à un autre. Les exposants β et γ ont des valeurs qui varient également d'un auteur à un autre.

Selon *Chézy*, le coefficient de résistance C doit avoir pour unité [$L^{1/2}$ T^{-1}] et les exposants β et γ sont tels que $\beta = \gamma = 1/2$.

Ce coefficient, dit de *Chézy*, peut être évalué de manière approximative en vertu des relations de *Ganguillet–Kutter* (1869), de *Bazin* (1897) et de *Powell* (1950).

Selon *Ganguillet–Kutter* (1869), le coefficient C dépend à la fois de n, J et de R_h qui désignent respectivement le coefficient de rugosité traduisant l'état physique des parois du canal, la pente de celui-ci et le rayon hydraulique. Le coefficient C, selon la relation établie par ces auteurs, est faiblement influencé par la variation de J.

Selon *Bazin* (1897), le coefficient C de *Chézy* dépend à la fois de m et de R_h où m est un coefficient qui traduit la nature physique des parois du canal. Il dépend en d'autres termes du matériau constituant ces parois.

Selon *Powell* (1950), le coefficient C de *Chézy* dépend d'un plus grand nombre de paramètres qui sont ε, R_h et R. Le paramètre ε est la rugosité absolue des parois du canal, c'est à dire la hauteur moyenne des aspérités de ces parois. Le paramètre R désigne le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement. La formule de *Powell* (1950), contrairement à celle de

Ganguillet–Kutter (1869) ou de *Bazin* (1897), est implicite vis-à-vis du coefficient *C* et se présente sous une forme logarithmique.

Selon *Manning–Strickler* (1891, 1923), le coefficient *C* est remplacé par le symbole $k = 1/n$ ayant pour dimension [$L^{1/3}$ T^{-1}]. Les exposants β et γ sont tels que β=2/3 et γ=1/2. Le coefficient *k*, dit coefficient de *Strickler*, peut être lié à la rugosité ε par la relation de *Hager* (1987), $\frac{k\varepsilon^{1/6}}{(8,2\sqrt{g})}=1$.

Le coefficient *n*, dit de *Manning*, peut être corrélé au coefficient *C* de *Chézy* par la relation $C=\frac{1}{n}R_h^{1/6}$ ou par celle de *Pavlovski* (1940) $C=\frac{1}{n}R_h^{y}$, où *y* dépend de *n* et de R_h.

Le chapitre précédent a montré que la loi de distribution de la vitesse dans un écoulement turbulent est de type logarithmique, selon la conception de *Prandtl-Von-Karman*. Elle se présente sous la forme $V=\frac{5}{2}V_f\,Ln\left(\frac{y}{y_o}\right)$ où $V_f=\sqrt{gR_hJ}$ est la vitesse dite de frottement, *y* est la distance verticale comptée à partir du fond du canal au point considéré, y_o est une constante qui dépend notamment de la nature lisse ou rugueuse des parois du canal.

La vitesse moyenne *V* de l'écoulement peut être également exprimée par la formule de *Darcy–Weisbach* (1854, 1845) $J=\frac{f}{D_h}\frac{V^2}{2g}$. Le paramètre D_h désigne le diamètre hydraulique, *f* est le coefficient de frottement traduisant la résistance à l'écoulement et *J* est la pente du canal. Le coefficient de frottement *f* peut être évalué par la formule implicite de *Colebrook–White* ou par la relation explicite de *Achour* (1997), et ce pour toute nature du régime d'écoulement.

Le coefficient de frottement *f* peut être corrélé au coefficient *C* de *Chézy* par la relation $C=\sqrt{\frac{8g}{f}}$.

Après avoir passé en revue les formules usuelles de l'écoulement uniforme, le chapitre suivant sera consacré au calcul de cet écoulement se produisant notamment dans une conduite circulaire. Notre attention a été portée sur cette forme en raison de son utilisation fréquente dans la pratique.