

II. CALCUL DE L'ÉCOULEMENT UNIFORME

II.1. Introduction

Après avoir passé en revue les formules usuelles de l'écoulement uniforme, le présent chapitre est consacré à la présentation de la méthodologie de calcul de ce type d'écoulement, notamment la détermination de la dimension linéaire. Notre attention porte essentiellement sur la conduite circulaire pleine en raison de son application très répandue dans la pratique. Notons que la méthodologie présentée peut être étendue à tous les autres profils géométriques connus.

Deux principaux paramètres sont définis, à savoir la conductivité d'une section d'un canal ou d'une conduite et le facteur de section. Leur importance est fondamentale dans l'application des relations, régissant l'écoulement uniforme, présentées sous leur forme classique. Ces paramètres sont explicitement définis pour une conduite circulaire faisant l'objet de notre étude.

II.2. Définitions

II.2.1. Conductivité d'une section d'un canal

Le débit volume d'un écoulement uniforme se produisant dans un canal est donné par le produit de la vitesse moyenne de l'écoulement à l'aire de la surface mouillée A . La vitesse V , comme nous l'avons déjà indiqué, s'exprime sous la forme générale $V = CR_h^\beta J^\gamma$. Le débit s'écrit alors

$$Q = VA = CAR_h^\beta J^\gamma = K J^\gamma \quad (68)$$

où :

$$K = CAR_h^\beta \quad (69)$$

Le terme K est connu sous le nom de conductivité de la section du canal. Il représente la capacité d'évacuation (conductivité) de la section du canal, proportionnelle au débit volume Q . Lorsque l'une ou l'autre des formules de *Chézy* et de *Manning* est appliquée, impliquant ainsi que $\gamma = 1/2$, le débit volume Q s'exprime alors :

$$Q = KJ^{1/2} \quad (70)$$

La conductivité est alors :

$$K = Q/J^{1/2} \quad (71)$$

La relation (71) permet ainsi de calculer la conductivité K lorsque les valeurs du débit volume Q et la pente J du canal sont connues.

Lorsque la formule de *Chézy* est appliquée, la relation (69) devient :

$$K = CAR_h^{1/2} \quad (72)$$

C est le coefficient de *Chézy*.

De même, lorsque la formule de *Manning* est appliquée, la conductivité s'écrit :

$$K = (1/n)AR_h^{2/3} \quad (73)$$

Les relations (72) et (73) peuvent être utilisées lorsque la géométrie de la section mouillée A ainsi que le facteur de résistance ou le coefficient de rugosité sont connus.

II.2.2. Facteur de section

Le produit $AR_h^{2/3}$ est appelé facteur de section, ayant une grande importance pour le calcul de l'écoulement uniforme. Le facteur de section peut être déduit de la relation (73) :

$$AR_h^{2/3} = nK \quad (74)$$

En tenant compte de (71), la relation (74) s'écrit :

$$AR_h^{2/3} = n \frac{Q}{\sqrt{J}} \quad (75)$$

La relation (75) est essentiellement applicable au calcul de l'écoulement uniforme. Le membre droit de cette équation est composé des paramètres n , Q et J , tandis que son membre gauche ne dépend que de la géométrie de la section mouillée. Pour des valeurs données de n , Q et J , il n'existe qu'une seule valeur de la profondeur correspondant à l'écoulement uniforme. Cette profondeur est appelée « profondeur normale de l'écoulement ».

Lorsque les valeurs de n et de J , sont connues, la relation (75) montre qu'il n'existe qu'un seul débit volume Q assurant l'écoulement uniforme; ce débit est appelé « débit normal ».

L'unicité de la profondeur normale et du débit normal est assurée à condition que le facteur de section $AR_h^{2/3}$ varie dans le même sens que la profondeur de l'écoulement; c'est ce qui est d'ailleurs observé dans la majeure partie des cas.

Dans le cas des conduites fermées, le facteur de section $AR_h^{2/3}$ croît dans un premier temps lorsque la profondeur augmente et décroît dans un second temps à l'approche de la section pleine. Le maximum de la valeur du facteur de section s'obtient généralement, dans le cas de telles conduites, à une profondeur légèrement inférieure à celle qui correspond à la pleine section. Par conséquent, il est possible d'obtenir deux profondeurs pour une même valeur du facteur de section. Ces profondeurs sont respectivement plus grande et plus petite que la profondeur correspondant au maximum de valeur de $AR_h^{2/3}$.

L'équation (75) est très utile au calcul de l'écoulement uniforme. Lorsque les valeurs du débit Q , de la pente J et celle du coefficient de rugosité n sont connues, l'équation (75) permet de calculer

la valeur du facteur de section $A_N R_{hN}^{2/3}$ correspondant à l'écoulement uniforme et de déduire alors la profondeur h_N de celui-ci. En outre, lorsque les valeurs de n , J et du facteur de section sont connues, le débit normal Q_N peut être calculé par application de la relation :

$$Q_N = (1/n) A_N R_{hN}^{2/3} \sqrt{J} \quad (76)$$

La relation (76) traduit en fait le produit de la section mouillée et de la vitesse moyenne de l'écoulement défini par la formule de *Manning* (1891).

II.3. Application à la conduite circulaire

L'aire de la section mouillée d'un segment circulaire est entièrement définie par le diamètre D de la section et par le demi-angle au centre θ (figure 4).

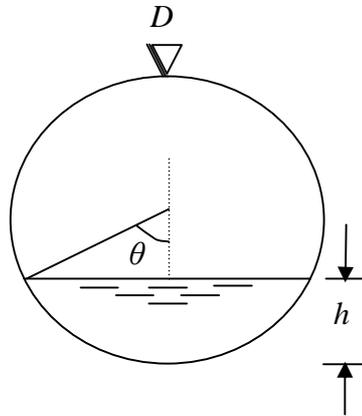


Figure 4: Schéma de définition du profil circulaire

L'aire de la section mouillée A du segment circulaire, représenté par la figure 4, s'écrit :

$$A = \frac{D^2}{4} (\theta - \sin\theta \cos\theta) \quad (77)$$

θ exprimé en radians.

Le périmètre mouillé P du même segment circulaire s'exprime par :

$$P = D\theta \quad (78)$$

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ est ainsi :

$$R_h = \frac{D^2 (\theta - \sin\theta \cos\theta)}{4 D\theta}$$

$$R_h = \frac{D}{4} \left[1 - \frac{\sin\theta \cos\theta}{\theta} \right] \quad (79)$$

Le demi-angle au centre θ s'exprime géométriquement à partir de la figure 4 :

$$\theta = \cos^{-1}(1 - 2\xi) \quad (80)$$

où $\xi = h/D$ est le paramètre de forme du segment circulaire.

La combinaison des équations (77) et (79) permet d'exprimer le facteur de section $AR_h^{2/3}$, soit :

$$AR_h^{2/3} = \frac{D^2}{4} (\theta - \sin \theta \cos \theta) \left[\frac{D}{4} \left(\frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{\theta} \right) \right]^{2/3}$$

ou bien

$$AR_h^{2/3} = \frac{D^2 D^{2/3} (\theta - \sin \theta \cos \theta) (\theta - \sin \theta \cos \theta)^{2/3}}{4 \cdot 4^{2/3} \theta^{2/3}}$$

$$AR_h^{2/3} = \frac{D^{8/3} (\theta - \sin \theta \cos \theta)^{5/3}}{4^{5/3} \theta^{2/3}} \quad (81)$$

On peut ainsi définir le facteur de section relatif au diamètre D de la conduite circulaire, ne dépendant que du demi-angle au centre θ et par conséquent du paramètre de forme $\xi = h/D$, en écrivant que :

$$\frac{AR_h^{2/3}}{D^{8/3}} = \frac{1}{4^{5/3}} \left[\frac{(\theta - \sin \theta \cos \theta)^{5/3}}{\theta^{2/3}} \right] \quad (82)$$

Pour le cas d'une conduite circulaire pleine $\theta = \pi$, soit ($\xi = 1$), le facteur de section relatif au diamètre D de la conduite circulaire devient une constante et s'écrit :

$$\frac{AR_h^{2/3}}{D^{8/3}} = \frac{\pi}{4^{5/3}} \quad (83)$$

II.3.1. Présentation du diagramme de *Moody* :

Pour illustrer l'influence du nombre de *Reynolds* R d'un écoulement uniforme et par conséquent celle de la viscosité cinématique ν du liquide, nous pouvons faire appel au diagramme de *Moody*. Ce diagramme est élaboré pour la conduite en charge de diamètre D et peut être étendu à l'écoulement à surface libre en substituant D par D_h .

Le digramme de *Moody* s'obtient par la représentation graphique de la fonction f ($f, R, \varepsilon/D$), dans un système de coordonnées à divisions logarithmiques. Ce diagramme est établi en s'appuyant sur la formule de *Colebrook-White* pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D ou ε/D_h . Ce diagramme est représenté sur la figure 5.

- Dans la zone de pleine turbulence ou zone de l'écoulement turbulent rugueux, le coefficient de frottement f prend une valeur déterminée pour une rugosité relative ε/D donnée. Le nombre de *Reynolds* R n'a aucune influence sur la variation des caractéristiques hydrauliques du profil liquide considéré.

Le coefficient de frottement f dans cette zone peut être évalué par la formule de *Nikuradse*

$$\frac{1}{\sqrt{f_r}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/D_r}{3,7} \right]$$

Pour le cas d'un écoulement à surface libre, on peut écrire :

$$\frac{1}{\sqrt{f_r}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} \right] \quad (55)$$

L'indice « r » désigne le domaine rugueux.

- Dans le domaine de transition, le coefficient de frottement f est fonction du nombre de Reynolds R et de la rugosité relative ε/D . Celui-ci peut être déterminé par application de la relation de *Colebrook-White* :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right] \quad (54)$$

En réalité la formule de *Colebrook-White* est valable aussi bien en régime de transition qu'en régime turbulent rugueux. Pour le régime turbulent rugueux, le nombre de Reynolds R tend vers l'infini et la relation de *Nikuradse* est reproduite.

- Dans le domaine pratiquement lisse, le coefficient de frottement f n'est fonction que du nombre de Reynolds R . le coefficient de frottement f peut être déduit de la relation (54) de *Colebrook-White* lorsque ε/D tend vers zéro. ($\varepsilon/D \rightarrow 0$)

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left[\frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right] \quad (56)$$

Pour les cas de l'écoulement en régime de transition et pratiquement lisse, l'évaluation du coefficient de frottement f nécessite un procédé itératif.

II.3.2. Calcul du diamètre d'une conduite pleine

Le calcul du diamètre d'une conduite pleine nécessite la combinaison des équations de *Darcy-Weisbach* (1854, 1845) et de continuité $Q=VA=V\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)$.

En éliminant la vitesse V entre ces équations, on obtient :

$$J = \frac{Q^2}{2g \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} \quad (84)$$

L'équation (84) s'écrit aussi :

$$D^5 = f \left(\frac{8Q^2}{\pi^2 g J} \right) \quad (85)$$

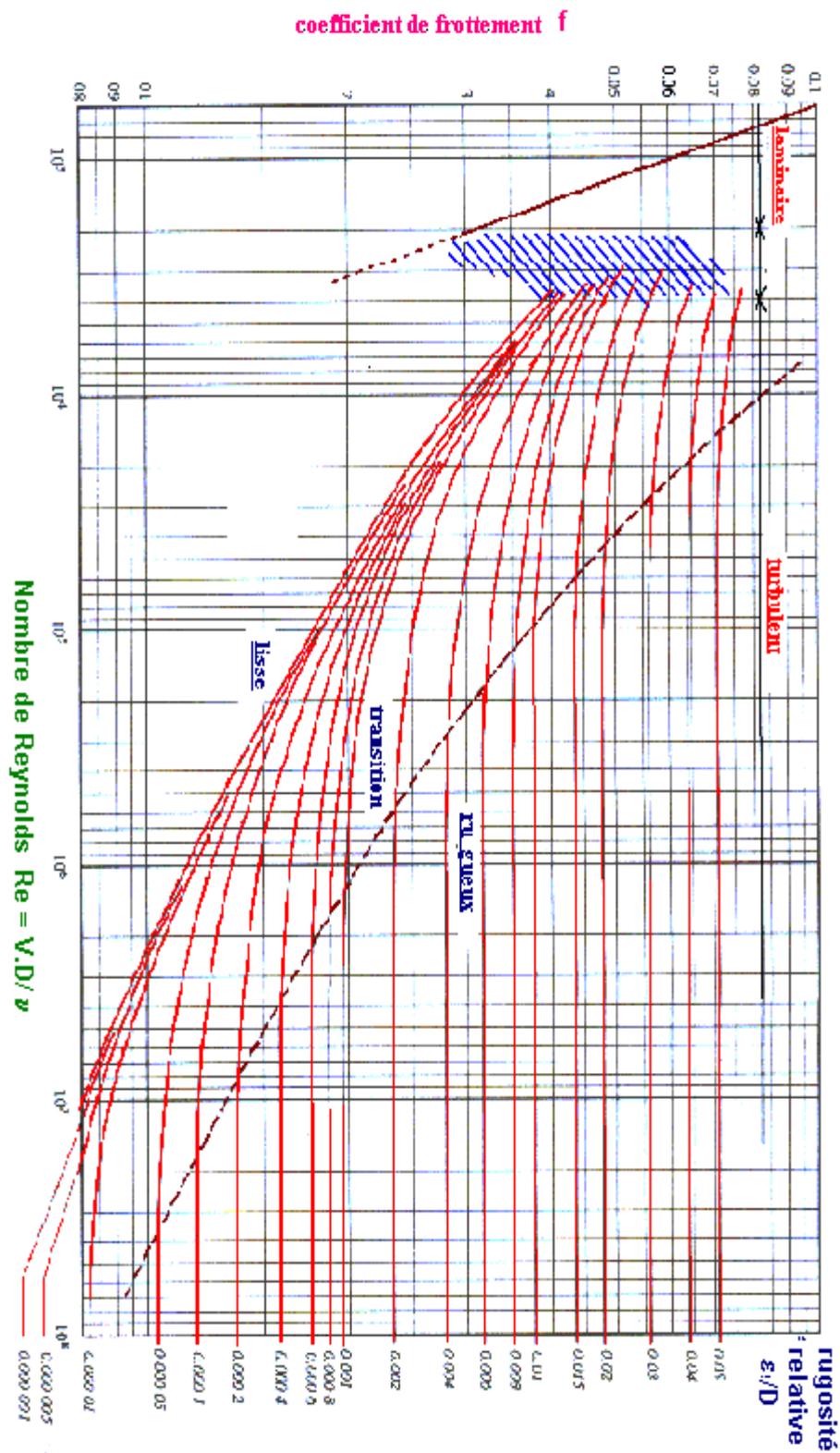


Figure 5 : Diagramme de *Moody*

L'équation (85) peut s'écrire plus simplement :

$$D^5 = c f \quad (86)$$

ou c est une constante telle que $\left(\frac{8Q^2}{\pi^2 g J}\right) = c$.

Le coefficient de frottement f est évalué par la relation (54).

Le nombre de *Reynolds* R est exprimé par la relation :

$$R = \frac{VD}{\nu} = \left(\frac{4Q}{\pi v}\right) \frac{1}{D} \quad (87)$$

Pour le même débit et même conduite le terme entre parenthèse est constant $\left(\frac{4Q}{\pi v}\right) = c'$

L'équation (87) devient :

$$R = c'(1/D) \quad (88)$$

La détermination du diamètre D est fonction de la nature du régime d'écoulement.

La détermination du diamètre D pour une conduite pleine, par la relation de *Darcy-Weisbach* (53) nécessite l'utilisation du procédé itératif suivant :

- Dans la relation (53), il y a trois inconnues, notamment f , V et D ; deux inconnues dans l'équation de continuité notamment V et D et deux inconnues dans la relation du nombre de *Reynolds* R , notamment V et D . De plus, la rugosité relative ε/D est inconnue.
- Pour le même débit et même conduite, Les quantités $\left(\frac{8Q^2}{\pi^2 g J}\right) = c$ et $\left(\frac{4Q}{\pi v}\right) = c'$, sont connues.

Procédé itératif :

- On choisit une valeur d'essai pour le coefficient de frottement désigné par f_1 comme 1^{ère} estimation.
- Par application de (86) et (88), on obtient les valeurs de :

$$D_1 = (c f_1)^{1/5}$$

$$R_1 = c'/D_1 \text{ et } \varepsilon/D_1$$

- A partir du diagramme de *Moody* avec $(R_1, \varepsilon/D_1)$ on obtient graphiquement f_2 . La nouvelle valeur de f_2 est contrôlée en utilisant la dernière valeur d'essai f_1 . Si la valeur admise pour le coefficient de frottement est satisfaisante, on arrête les itérations. Dans le cas contraire, une nouvelle itération est nécessaire. Dans ce cas, on procède comme suit :
- Puisque le coefficient de frottement f ne varie que lentement avec le nombre de *Reynolds* R . Choisissons donc f_2 comme deuxième estimation.

- Par application de (86) et (88), on obtient les valeurs pour :

$$D_2 = (cf_2)^{1/5}$$

$$R_2 = c'/D_2 \quad \text{et} \quad \varepsilon/D_2$$

- A partir du diagramme de *Moody* avec $(R_2, \varepsilon/D_2)$ on obtient graphiquement f_3 .
- La nouvelle valeur de f_3 est contrôlée en utilisant la dernière valeur d'essai f_2 . Si $f_3 = f_2$, la convergence étant atteinte, le calcul itératif s'arrête. Si $f_3 \neq f_2$; il faut suivre les itérations jusqu'à ce que $f_n = f_{n-1}$.
- La dernière valeur de D est donc retenue comme réponse.

II.3.3. Exemple d'application

Soit à déterminer le diamètre d'une conduite, de rugosité absolue $\varepsilon = 0,05$ mm, utilisée pour transporter 250 l/s d'eau dont la viscosité cinématique est $\nu = 10^{-6}$ m²/s, sur une distance de 10 km, avec une perte de charge de 25 m.

Le diamètre de la conduite sera obtenu par une procédure itérative.

$$c = \frac{8 \times 10000 \times (0,25)^2}{\pi^2 \times 9,81 \times 25} = 2,06 \qquad c' = \frac{4 \times 0,25}{\pi \times 9,10^{-6}} = 3,54 \cdot 10^4$$

1^{ère} itération :

1. Choisissons $f_1 = 0,018$ comme première estimation. On choisit en général des valeurs autour de $f = 0,02$ comme valeur de départ.
2. par application de la relation (86) $\Rightarrow D_1^5 = 2,06 \times 0,018$ et l'on obtient $D_1 = 0,515$ m
3. par application de la relation (87) $\Rightarrow R_1 = \frac{3,54 \cdot 10^4}{0,515}$ et l'on obtient : $R_1 = 6,87 \cdot 10^4$
4. On calcule également la rugosité relative : $\frac{\varepsilon}{D_1} = 0,97 \cdot 10^{-4}$
5. A partir du diagramme de *Moody* avec $(R_1, \varepsilon/D_1)$, on obtient graphiquement : $f_2 = 0,0195$. on voit que $f_2 \neq f_1$; la valeur admise pour le coefficient de frottement n'est pas encore satisfaisante. Une nouvelle itération est par conséquent nécessaire.

2^{ème} itération :

On suit la même démarche que pour la première itération :

1. Puisque f ne varie que lentement avec R_1 , choisissons donc f_2 comme deuxième estimation.
2. par application de la relation (86) $D_2^5 = 2,06 \times 0,0195 \Rightarrow D_2 = 0,526$ m.
3. par application de la relation (87) $R_2 = \frac{3,54 \cdot 10^4}{0,526} \Rightarrow R_2 = 6,73 \cdot 10^4$

4. $\frac{\varepsilon}{D_2} = 0,95 \cdot 10^{-4}$
5. A partir du diagramme de *Moody* avec $(R_2, \varepsilon/D_2)$, on obtient graphiquement $f_3 = 0,0195$. on voit que $f_3 = f_2$; la valeur admise pour le coefficient de frottement au début de cette deuxième itération est donc satisfaisante. La convergence étant atteinte, le calcul itératif s'arrête.

On en conclut qu'une conduite de diamètre $D_2 = 526$ mm convient pour transporter l'eau dans les conditions précisées ci-dessus. On prendra une conduite de diamètre normalisé $D = 550$ mm.

II.4. Conclusion

La conductivité d'un canal $K = \frac{Q}{\sqrt{J}}$ est définie comme étant la capacité d'évacuation de celui-ci. L'application de la formule de *Manning* (1891) montre que K est inversement proportionnel au coefficient n de *Manning*, proportionnel à l'aire de la section mouillée et proportionnel à la puissance 2/3 du rayon hydraulique.

Le facteur de section correspond au produit $AR_h^{2/3}$ et il est proportionnel au coefficient n de *Manning* et à la conductivité K du canal.

L'application au cas de la conduite circulaire partiellement occupée par l'écoulement montre que le facteur de section est étroitement lié au diamètre D de la conduite ainsi qu'au paramètre de forme $\xi = h_N/D$ de l'écoulement, où h_N est la profondeur de l'écoulement uniforme ou profondeur normale. Celle-ci doit être évaluée par un procédé itératif.

Le chapitre précédent a montré que les formules habituellement utilisées pour l'écoulement uniforme, telle que celle de *Manning-Strickler* (1891, 1923), ne tiennent pas compte de l'effet de la viscosité et par conséquent de celui du nombre de *Reynolds*. Leur emploi est donc réservé exclusivement aux écoulements uniformes en régime turbulent rugueux.

En ce qui concerne le calcul de l'écoulement uniforme en régime de transition et pratiquement lisse, notre choix s'est porté sur l'utilisation de la formule de *Darcy-Weisbach* (1854, 1845) où l'effet de la viscosité est pris en compte à travers le nombre de *Reynolds*

$$R = \frac{VD_h}{\nu}$$

Le coefficient de frottement f figurant dans la relation de *Darcy-Weisbach* peut être déterminé par application de la formule de *Colebrook-White*. Dans cette relation, f dépend de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds*. L'évaluation de f nécessite cependant un procédé itératif, mais cette contrainte est levée en utilisant la formule de *Achour* (1997).

Le chapitre précédent s'est achevé par une application numérique de la formule de *Darcy-Weisbach* au calcul de diamètre D d'une conduite circulaire entièrement occupée par l'écoulement.

Dans le chapitre suivant, la méthode dite *Larhyss* (2002) sera présentée.