

METHODE DITE LARHYSS

III.1 Introduction

La méthode dite LARHYSS représente une approche théorique rigoureuse visant à définir la relation fonctionnelle de la dimension linéaire d'une conduite circulaire, en particulier son diamètre. La fonction des six variables régissant l'écoulement uniforme est transformée en un produit de trois fonctions dépendant chacune de deux paramètres, parfois composés. Cette approche simple a permis d'aboutir à une formulation mathématique de la dimension linéaire recherchée, applicable à tous les régimes d'écoulement. Ceci a été rendu possible par la combinaison des relations de *Manning-Strickler* et de *Darcy-Weisbach*.

L'influence de la nature du régime d'écoulement sur la dimension linéaire de la conduite est mise en évidence par l'introduction de facteurs correctifs. Ce facteur est égal à l'unité lorsque l'écoulement est en régime turbulent rugueux. Lorsque l'écoulement est en régime de transition, ce facteur dépend à la fois du nombre de *Reynolds* ainsi que de la rugosité relative de la conduite considérée. Par contre, le facteur de correction ne dépend que du nombre de *Reynolds* lorsque l'écoulement est en régime pratiquement lisse.

A la fin de ce chapitre une approche expérimentale, visant à étayer les relations théorique établies, est exposée. Cette approche est établie par un protocole expérimental qui a été entièrement conçu et réalisé par le laboratoire LARHYSS.

III.2 Calcul de l'écoulement uniforme dans le régime turbulent rugueux

III.2.1 Transformation de la formule de *Manning-Strickler*

En régime d'écoulement turbulent rugueux, la dimension linéaire d'un profil liquide ou géométrique d'une forme quelconque peut être déduite de la transformation de l'équation de *Manning-Strickler*. Celle-ci s'écrit :

$$V = kR_h^{2/3}\sqrt{J} \quad (10)$$

Où V est la vitesse moyenne de l'écoulement, k est le coefficient de *Strickler*, R_h est le rayon hydraulique et J est le gradient de perte de charge correspondant également à la pente du canal considéré puisque l'écoulement est uniforme. En tenant compte du fait que $V=Q/A$ et $R_h=A/P$, où A et P désignent respectivement l'aire de section mouillée et le périmètre mouillé, la relation (10) de *Manning-Strickler* devient :

$$Q = k \frac{A^{2/3}}{P^{2/3}} A \sqrt{J} = k \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} \sqrt{J}$$

En tenant compte de la relation (14), l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} = \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} \quad (89)$$

A et P dépendent de la dimension linéaire a et l'on peut écrire quelle que soit la forme du profil géométrique :

$$A = a^2 A_1 \quad (90)$$

et

$$P = a P_1 \quad (91)$$

Les paramètres A_1 et P_1 sont adimensionnels et correspondent respectivement à l'aire de la section mouillée et au périmètre mouillé lorsque a est égale à l'unité. En tenant compte de ces considérations, la relation (89) devient :

soit :

$$a_r = \left[\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (92)$$

L'indice r désigne le domaine rugueux.

Ainsi, en posant :

$$\Lambda = \left[\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right] \quad (93)$$

$$a_0 = \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (94)$$

La relation (92) s'écrit simplement :

$$a_r = \Lambda a_0 \quad (95)$$

La relation (95) montre que toute dimension linéaire a_r s'exprime, dans le domaine rugueux, par le produit de deux fonctions Λ et a_0 . La fonction Λ dépend de Q , J et ε , mais ne dépend pas de la forme géométrique. On notera que Λ a la dimension d'une longueur donc c'est une longueur fluïdodynamique.

Le paramètre sans dimension a_0 dépend exclusivement du profil liquide de l'écoulement, c'est à dire du paramètre de forme.

III.2.2 Application à la conduite circulaire

Pour une conduite circulaire de diamètre D_r , la dimension linéaire recherchée est le diamètre ($a_r = D_r$).

Dans le cas d'un régime turbulent rugueux, l'équation (95) permet d'écrire :

$$D_r = \Lambda D_0 \quad (96)$$

L'aire de la section mouillée est $A_r = D_r^2 A_1$ et le périmètre mouillé est $P_r = D_r P_1$, A_1 et P_1 s'écrivent respectivement:

$$A_r = \frac{D_r^2}{4} (\theta_r - \sin \theta_r \cos \theta_r) \quad (97)$$

$$P_r = D_r \theta_r \quad (98)$$

Ainsi, en posant :

$$A_1 = (\theta_r - \sin \theta_r \cos \theta_r) / 4 \quad (99)$$

et

$$P_1 = \theta_r \quad (100)$$

où θ_r est le demi-angle au centre, exprimé en radian, du segment circulaire de hauteur h_r (figure 4) et tel que :

$$\cos \theta_r = \frac{\frac{D_r}{2} - h_r}{D_r/2} = 1 - \frac{2h_r}{D_r}$$

Sachant que le paramètre de forme $\xi = h_r/D_r$, on peut écrire que :

$$\theta_r = \cos^{-1}(1 - 2\xi) \quad (101)$$

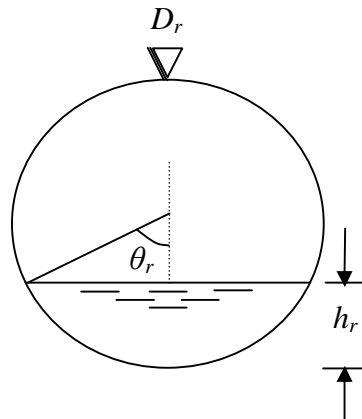


Figure 6: Schéma de définition des caractéristiques du profil circulaire en régime turbulent rugueux

Il apparaît ainsi que la relation (94) s'écrit :

$$a_0 = D_0 = \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}}$$

soit :

$$D_0 = \frac{\theta_r^{1/4}}{[(\theta_r - \cos \theta_r \sin \theta_r) / 4]^{5/8}} \quad (102)$$

D_0 ne dépend que du paramètre de forme ξ .

En vertu des relations (93) et (102), la relation (96) s'écrit :

$$D_r = \left[\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{4^{5/8} \theta_r^{1/4}}{(\theta_r - \cos \theta_r \sin \theta_r)^{5/8}}$$

ou bien :

$$D_r = 1,08 \left[\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{\theta_r^{1/4}}{(\theta_r - \sin \theta_r \cos \theta_r)^{5/8}} \quad (103)$$

La relation (103) permet le calcul explicite du diamètre D_r dans le domaine turbulent rugueux à partir des valeurs connues de Q , J , ε et ζ .

Si la hauteur d'eau h_r est la dimension linéaire recherchée ($a=h_r$), la relation (103) permet d'écrire, en considérant que $h_r = \xi D_r$:

$$h_r = 1,08 \left[\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \frac{\xi \theta_r^{1/4}}{(\theta_r - \sin \theta_r \cos \theta_r)^{5/8}} \quad (104)$$

Les relations (103) et (104) ne sont pas pratiques à appliquer lorsqu'il s'agit d'évaluer ζ . Elles peuvent être remplacées avec une excellente approximation par l'équation :

$$\left[\frac{8}{5} \sin(90^\circ \xi) \right]^2 = \frac{q_r}{\sqrt{J}} \left(\frac{\varepsilon}{D_r} \right)^{1/6} \quad (105)$$

où, $q_r = Q/\sqrt{gD_r^5}$ est le débit relatif et q_r/\sqrt{J} est la conductivité relative de la conduite.

Pour le cas particulier de la conduite circulaire pleine caractérisée par $\zeta = 1$, la relation (103) permet d'écrire :

$$D_r = 0,703 \left[\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \quad (106)$$

La relation approchée (105) conduit au même résultat pour $\zeta = 1$.

Pour le régime turbulent rugueux, on peut établir des relations généralisées pour l'évaluation du nombre de Reynolds R_r , du diamètre hydraulique D_{hr} et de la vitesse moyenne de l'écoulement V_r .

Par définition, le nombre de Reynolds R_r dans le régime turbulent rugueux s'écrit :

$$R_r = \frac{V_r D_{hr}}{\nu} \quad (107)$$

Où $D_{hr} = 4A_r/P_r$ est le diamètre hydraulique en régime turbulent rugueux et ν est la viscosité cinématique du liquide. En tenant compte du fait que $V = Q/A_r$, la relation (107) devient :

$$R_r = \frac{4Q}{P_r \nu} \quad (108)$$

Or, selon la relation (95), le périmètre mouillé s'écrit $P_r = \Lambda P_0$. La relation (108) conduit quelle que soit la forme géométrique considérée, à :

$$R_r = \frac{4Q}{\Lambda P_0 \nu} = \frac{4Q}{\Lambda a_0 \nu}$$

ou bien, en vertu de (93) et (94) :

$$R_r = \frac{4Q}{\Lambda v} \left[\frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right]^{5/4} \quad (109)$$

Soit :

$$R_r = \frac{4(8,2)^{3/8}}{v} \left[\frac{Q^{5/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right]^{3/8} \left[\frac{\sqrt{A_1}}{P} \right]^{5/4} \quad (110)$$

Il apparaît que le nombre de *Reynolds* R_r est une fonction du débit volume Q , du gradient de la perte de charge J , de la rugosité absolue, de la viscosité cinématique du liquide v et du paramètre de forme contenu dans les paramètres A_1 et P_1 . Cette expression du nombre de *Reynolds* est applicable pour tout profil géométrique, lorsque l'écoulement est en régime turbulent rugueux.

En appliquant la relation (II-24) à la conduite circulaire, le nombre de *Reynolds* devient :

ou bien

$$R_r = \frac{3,70}{v} \left[\frac{Q^{5/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right]^{3/8} \left[\frac{\sqrt{\theta_r - \sin\theta_r \cos\theta_r}}{\theta_r} \right]^{5/4} \quad (111)$$

Pour le cas particulier de la conduite circulaire pleine ($\theta_r = \pi$), la relation (111) devient :

$$R_r = \frac{1,81}{v} \left[\frac{Q^{5/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right]^{3/8} \quad (112)$$

Le diamètre hydraulique D_{hr} dans le cas d'un régime turbulent rugueux s'écrit, en tenant compte des relations (90), (91) et (95) :

$$D_{hr} = 4 \frac{A_r}{P_r} = \frac{4a_r^2 A_1}{a_r P} = 4a_r \frac{A_1}{P} \quad (113)$$

Ou bien :

$$D_{hr} = 4\Lambda a_0 \frac{A_1}{P} \quad (114)$$

Finalement le diamètre hydraulique D_{hr} en régime turbulent rugueux s'écrira :

$$D_{hr} = 4\Lambda \left[\frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right]^{3/4} \quad (115)$$

La relation (115) permet d'écrire, en tenant compte de (95) :

$$D_{hr} = 4 \left(\frac{\sqrt{A_1}}{P} \right)^{3/4} \quad (116)$$

La relation (115) peut se mettre sous la forme suivante :

Ou bien :

$$D_{hr} = \frac{4}{(8,2)^{3/8}} \left[\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \left[\frac{\sqrt{A_1}}{P} \right]^{3/4} \quad (117)$$

La relation (117) est applicable à tout profil géométrique connu dans le cas d'un écoulement en régime turbulent rugueux.

Par application de la relation (117) à une conduite circulaire, le diamètre hydraulique D_{hr} en régime turbulent rugueux, s'écrit :

$$D_{hr} = 1,08 \left[\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \left[\frac{\sqrt{\theta_r - \sin\theta_r \cos\theta_r}}{\theta_r} \right]^{3/4} \quad (118)$$

Pour le cas particulier de la conduite circulaire pleine, lorsque l'écoulement est en régime turbulent rugueux, la relation (118) conduit à la relation (106):

$$D_r = 0,703 \left[\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \quad (106)$$

La vitesse moyenne d'écoulement V_r peut être évaluée, en s'appuyant sur les relations (110) et (117).

$$V_r = \left[\frac{(8,2)^2 Q^{1/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right]^{3/4} \frac{A_1^{1/4}}{\sqrt{R}} \quad (119)$$

La relation (119) est généralisée à tout profil géométrique pour le cas d'un écoulement en régime turbulent rugueux. Pour le cas d'une conduite circulaire pleine ($\theta_r = \pi$), la relation (119) devient :

$$V_r = \left(\frac{\pi^3}{4} \right)^{1/4} \left[\frac{(8,2)^2 Q^{1/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right]^{3/4} \quad (120)$$

III.3 Calcul de la dimension linéaire dans le domaine de transition

Dans le domaine de transition, la dimension linéaire a dépend fortement de l'influence du nombre de *Reynolds* R . La démarche théorique consiste à corriger la dimension linéaire a_r , calculée selon la relation (95) obtenue dans l'hypothèse d'un régime turbulent rugueux, par un coefficient λ dit facteur de transition. La relation (95) devrait s'écrire :

$$a = \lambda \Lambda a_o = \lambda a_r \quad (121)$$

Lorsque le domaine est rugueux, $\lambda = 1$ et lorsque le domaine est de transition, $\lambda > 1$. Le facteur λ dépend à la fois de la valeur du nombre de *Reynolds* R ainsi que de celle de la rugosité relative ε/D_h . Afin d'exprimer le facteur de transition λ , il faut faire appel à l'équation (53) de *Darcy-Weisbach* :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (53)$$

L'aire de la section mouillée peut s'écrire en tenant compte (121) :

$$A = \lambda^2 \Lambda^2 a_\delta^2 A_1 \quad (122)$$

Selon la relation (121), le diamètre hydraulique D_h peut donc s'écrire dans le cas du régime de transition :

$$D_h = \lambda \Lambda D_{ho} \quad (123)$$

En tenant compte de ces considérations, la relation (53) de *Darcy-Weisbach* devient :

$$J = \frac{f}{\lambda \Lambda D_{ho}} \frac{Q^2}{2g(\lambda \cdot \Lambda^2 A_0)} = \frac{f Q^2}{2g \lambda^5 \Lambda^5 A_0^2 D_{ho}}$$

Soit
$$\lambda \Lambda = f^{1/5} \sqrt[5]{\frac{Q^2}{2g A_0^2 D_{ho} J}} \quad (124)$$

Le coefficient de frottement f dans la relation (124), s'obtient par application de l'équation de *Colebrook-White* en régime de transition, en se basant sur un procédé itératif, ou par application de la formule explicite de *Achour* (57):

$$f^{-1/2} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right] \quad (57)$$

Si l'on considère le même profil géométrique qui véhicule le même débit Q sous un même gradient de perte de charge J d'un écoulement en régime turbulent rugueux, la relation (124) s'écrit, avec $\lambda = 1$ et $f = f_r$:

$$\Lambda = f_r^{1/5} \sqrt[5]{\frac{Q^2}{2g A_0^2 D_{ho} J}} \quad (124)$$

Le rapport entre les relations (124) et (125) conduit à :

$$\lambda = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5} \quad (126)$$

Ainsi, dans le domaine de transition, la dimension linéaire a s'écrit en vertu des relations (121) et (126):

$$a = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5} a_r \quad (127)$$

a_r est la dimension linéaire dans le domaine rugueux.

Par contre, le coefficient de frottement f_r peut être évalué de manière explicite par application de la formule de *Nikuradse* (55) :

$$f_r^{-1/2} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right] \quad (55)$$

Dans la relation (57), le nombre de *Reynolds* R est :

$$R = \frac{4Q}{\lambda P_{rv}} = \frac{1}{\lambda} R_r$$

Ainsi :

$$R = \frac{R_r}{\lambda} \quad (128)$$

où R_r est le nombre de *Reynolds* en régime turbulent rugueux défini par (110).

De même, le diamètre hydraulique D_h selon la relation (121) est $D_h = \lambda D_{hr}$. Ainsi la relation (57) devient en tenant compte de (128) :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7\lambda} + \frac{4,5\lambda}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97\lambda} \right] \quad (129)$$

Étant donné que, selon la relation (126), λ est fonction du coefficient de frottement, l'évaluation de λ nécessite a priori un procédé itératif dont le principe est le suivant :

$$f_1^{-1/2} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7\lambda_0} + \frac{4,5\lambda_0}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97\lambda_0} \right], \quad \lambda_0 = 1$$

$$f_2^{-1/2} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7\lambda_1} + \frac{4,5\lambda_1}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97\lambda_1} \right], \quad \lambda_1 = \left(\frac{f_1}{f_r} \right)^{1/5}$$

.....

$$f_3^{-1/2} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7\lambda_2} + \frac{4,5\lambda_2}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97\lambda_2} \right], \quad \lambda_2 = \left(\frac{f_2}{f_r} \right)^{1/5}, i=1,2,\dots,n$$

Il faut noter que ce procédé itératif n'est pas nécessaire, puisque il est aisé de montrer que $(\lambda_3 - \lambda_1) \leq 0,01\lambda_1$. Ainsi, l'erreur relative commise sur l'évaluation de λ , en application de la relation (126) et pour $f = f_1$, ne dépasse pas 1%.

Le nombre de *Reynolds* R_r et le diamètre hydraulique D_{hr} sont déterminés de manière explicite par les relations (110) et (117), en régime turbulent rugueux.

D'une manière générale, la dimension linéaire a en régime de transition, s'écrit selon (121)

$$a = \left[\frac{\log \left(\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} + \frac{4,5}{R_r} \log \frac{R_r}{6,97} \right)}{\log \left(\frac{\varepsilon/D_{hr}}{3,7} \right)} \right]^{-2/5} \left[\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \left[\frac{R}{\sqrt{A_1^5}} \right]^{1/4} \quad (130)$$

L'équation (130) permet le calcul explicite de la dimension linéaire a de tout profil géométrique connu, lorsque l'écoulement est en régime de transition ($\lambda > 1$) ou turbulent rugueux ($\lambda = 1$).

Lorsque c'est le diamètre D de la conduite qui est recherché, la dimension linéaire $a = D$, la relation (127) devient en tenant compte de (103) :

$$D = 1,08 \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5} \left(\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{\theta^{1/4}}{(\theta - \sin\theta \cos\theta)^{5/8}} \quad (131)$$

La relation (131) permet à la fois le calcul du diamètre de la conduite circulaire dans les domaines de transition et turbulent rugueux ($f \rightarrow f_r$), lorsque cette conduite est partiellement ou entièrement occupée par le liquide.

Pour le cas particulier de la conduite circulaire pleine caractérisée par $\xi=1$ ou $\theta = \pi$, la relation (131) devient :

$$D=0,703\left(\frac{f}{f_r}\right)^{1/5}\left(\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}}\right)^{3/8} \quad (132)$$

III.4 Domaine pratiquement lisse

Dans le domaine pratiquement lisse, caractérisé par une rugosité absolue $\varepsilon \rightarrow 0$, la valeur de la dimension linéaire a_r obtenue dans le domaine rugueux, doit être corrigé par un coefficient ψ analogue au coefficient de transition λ . La dimension linéaire recherchée s'écrit :

$$a = \psi \Lambda a_0 = \psi a_r \quad (133)$$

L'expression de ψ s'obtient de la même manière que celle ayant conduit à λ .

En faisant appel à la formule (53) de *Darcy-Weisbach* :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Où f est le coefficient de frottement en régime pratiquement lisse. L'aire de la section mouillée est $A = \psi^2 \Lambda^2 A_0$ et le diamètre hydraulique est $D_h = \psi \Lambda D_{h0}$

En tenant compte de ces considérations, la relation (53) de *Darcy-Weisbach* devient :

$$J = \frac{f}{\psi \Lambda D_{h0}} \frac{Q^2}{2g \psi^4 \Lambda^4 A_0^2}$$

$$\psi \Lambda = f^{1/5} \sqrt[5]{\frac{Q^2}{2g D_{h0} J}} \quad (134)$$

Dans le domaine rugueux, la relation, (134) s'écrit, avec $\psi=1$ et $f=f_r$:

$$\Lambda = f_r^{1/5} \sqrt[5]{\frac{Q^2}{2g D_{h0} J}} \quad (135)$$

En faisant le rapport entre les relations (134) et (135), on obtient :

$$\psi = \left(\frac{f}{f_r}\right)^{1/5} \quad (136)$$

Cependant, le coefficient de frottement f_r calculé en application de la formule de *Nikuradse* n'a pas de sens puisque $\varepsilon \rightarrow 0$. Afin de lever cette difficulté, il faut considérer une conduite hypothétique de même conductivité que la conduite réelle et caractérisée par une rugosité relative

$\varepsilon_r/D_{hr}=8,5.10^{-3}$ dans le domaine rugueux. Pour cette conduite hypothétique, le coefficient de frottement f_r selon *Nikuradse* est alors :

$$f_r = 0,0359 \quad (137)$$

La relation (136) devient:

$$\psi = 1,945 f^{1/5} \quad (138)$$

Le coefficient de frottement f se calcule pour $\varepsilon/D_h=0$, selon la relation (59), avec une erreur inférieure à 0,6% par rapport à la valeur obtenue selon *Colebrook-White* et pour $R \geq 2350$.

$$f^{-1/2} = -2 \log \left[\frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right]$$

La relation (138) peut être remplacée par l'équation suivante, obtenue avec un coefficient de corrélation $R^2 = 0,9999$:

$$\psi = \left(\frac{3,673}{\log R} \right)^{0,478}, \quad R \geq 2350 \quad (139)$$

Comme dans le cas du domaine de transition, le nombre de *Reynolds* figurant dans la relation (II-62) s'écrit $R=R_r/\psi$, cette relation devient :

$$\psi = \left[\frac{3,673}{\log(R_r/\psi)} \right]^{0,478} \quad (140)$$

Le coefficient ψ est ainsi évalué par itération de la manière suivante

$$\psi_1 = \left[\frac{3,673}{\log(R_r/\psi_0)} \right]^{0,478} \quad \text{avec } \psi_0 = 1,$$

$$\psi_2 = \left[\frac{3,673}{\log(R_r/\psi_1)} \right]^{0,478}$$

.....

$$\psi_i = \left[\frac{3,673}{\log(R_r/\psi_{i-1})} \right]^{0,478}$$

Il est aisé de constater que ce procédé itératif n'était pas nécessaire puisque :

$$(\psi_1 - \psi_3) < 0,01 \psi_1$$

La valeur recherchée de ψ peut donc être déterminée, avec une excellente approximation, par la relation :

$$\psi = \left(\frac{3,673}{\log R_r} \right)^{0,478} \quad (141)$$

Rappelons que le nombre de *Reynolds* R_r et le diamètre hydraulique, dans le domaine rugueux, s'écrivent :

$$R_r = \frac{4(8,2)^{3/8}}{\nu} \left[\frac{Q^{5/3} \sqrt{gJ}}{\varepsilon^{1/6}} \right]^{3/8} \left[\frac{\sqrt{A_1}}{R} \right]^{5/4} \quad (110)$$

$$D_{hr} = \frac{4}{(8,2)^{3/8}} \left[\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \left[\frac{\sqrt{A_1}}{R} \right]^{3/4} \quad (117)$$

Le nombre de *Reynolds* R_r , représente le nombre de *Reynolds* qui caractérise l'écoulement en régime turbulent rugueux dans la conduite hypothétique, de rugosité relative $\varepsilon_r/D_{hr}=8,5 \cdot 10^{-3}$.

Remplaçons dans (117), la rugosité absolue par $\varepsilon_r=8,5 \cdot 10^{-3} \cdot D_{hr}$, on obtient ainsi :

$$D_{hr} = C_0^{16/15} \left[\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right]^{2/5} \left[\frac{\sqrt{A_1}}{R} \right]^{4/5} \quad (142)$$

Avec :

$$C_0 = \frac{4(8,5 \cdot 10^{-3})^{1/16}}{(8,2)^{3/8}}$$

D_{hr} est le diamètre hydraulique de la conduite hypothétique en régime turbulent rugueux, pour une rugosité relative $\varepsilon_r/D_{hr}=8,5 \cdot 10^{-3}$.

Revenons à la relation (110) et remplaçons la rugosité absolue par $\varepsilon_r=8,5 \cdot 10^{-3} D_{hr}$, la relation (110) devient :

$$R_r = \frac{11,63}{\nu} (Q^3 gJ)^{1/5} \left[\frac{\sqrt{A_1}}{R} \right]^{6/5} \quad (143)$$

Il est intéressant de noter que, pour la conduite hypothétique circulaire partiellement remplie de rugosité relative $\varepsilon/D_{hr}=8,5 \cdot 10^{-3}$, $A_1 = \frac{1}{4}(\theta - \cos\theta \sin\theta)$ et $R = \theta$, la relation (143) conduit à :

$$R_r = 5 \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} \left(\frac{\sqrt{\theta - \sin\theta \cos\theta}}{\theta} \right)^{6/5} \quad (144)$$

Le diamètre hydraulique pour la même conduite est, selon (142) :

$$D_{hr} \approx \frac{4}{5} \left[\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right]^{2/5} \left(\frac{\sqrt{\theta - \sin\theta \cos\theta}}{\theta} \right)^{4/5} \quad (145)$$

Soit :

$$D_r = \frac{4}{5} \left[\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right]^{2/5} \frac{\theta^{1/5}}{(\theta - \sin \theta \cos \theta)^{3/5}} \quad (146)$$

Pour le cas particulier de la conduite hypothétique pleine pour laquelle $\theta = \pi$, les relations (144) et (146) conduisent respectivement à :

$$R_r = \frac{5}{2} \frac{(gJQ)^{1/5}}{\nu} \quad (147)$$

$$D_r \approx \frac{1}{2} \left[\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right]^{2/5} \quad (148)$$

Lorsque c'est le diamètre D de la conduite qui est recherché ($a = D$), la relation $D = \psi D_r$ devient, en tenant compte de (141) et (146) :

$$D = \frac{4}{5} \left(\frac{3,673}{\log R_r} \right)^{0,478} \left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \frac{\theta^{1/5}}{(\theta - \sin \theta \cos \theta)^{3/5}} \quad (149)$$

Le nombre de Reynolds R_r est exprimé par la relation (143).

Dans le cas particulier de la conduite circulaire pleine ($\theta = \pi$), la relation (149) devient :

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{3,673}{\log R_r} \right)^{0,478} \left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5} \quad (150)$$

où R_r se calcule sans difficulté en application de la relation (147). Les formules (149) et (150) permettent respectivement le calcul explicite du diamètre D d'une conduite circulaire partiellement et entièrement occupée par un écoulement en régime pratiquement lisse.

III.5 Relation généralisée au calcul du débit

L'objectif de cette partie de l'étude consiste à proposer une relation généralisée au calcul du débit dans les conduites et les canaux. Ce calcul se fait de manière explicite et reste valable quelque soit le profil considéré et pour tout domaine d'écoulement. Cette généralisation est possible, en faisant appel à la formule de *Darcy-Weisbach* et de la formule de *Colebrook-White*.

III.5.1 Transformation de la relation de *Darcy-Weisbach*

La formule de *Darcy-Weisbach* est donnée par l'expression (53) :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2}$$

ou bien :

$$J = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2 \quad (151)$$

A et P sont respectivement la section mouillée et le périmètre mouillé.

En tenant compte des relations (90) et (91), la relation (151) devient :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{R}{A_1^3} \right)^{1/2} \frac{q}{\sqrt{J}} \quad (152)$$

avec :

$$q = \frac{Q}{\sqrt{ga^5}}$$

III.5.2 Transformation de la relation de Colebrook-White

La formule générale de *Colebrook-White* exprime le coefficient de frottement f en fonction de la rugosité relative ε/D_h et du nombre de *Reynolds* R par la relation (54) :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right]$$

En tenant compte des relations (108), (113) et (152), la relation (54) peut s'écrire :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/a P_1}{14,8 A_1} + \frac{2,51 a P_1 v \sqrt{P_1} (q/\sqrt{J})}{4 Q 2\sqrt{2} A_1^{3/2}} \right]$$

soit

$$f^{-1/2} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/a P_1}{14,8 A_1} + \frac{2,51 v}{8\sqrt{2} \sqrt{gJa^3}} \left(\frac{P_1}{A_1} \right)^{3/2} \right] \quad (153)$$

III.5.3 Conductivité relative

L'expression de la conductivité relative peut être obtenue par la combinaison des relations (152) et (153). Nous pouvons écrire :

$$\frac{q}{2\sqrt{2}\sqrt{J}} \sqrt{\frac{P_1}{A_1^3}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/a P_1}{14,8 A_1} + \frac{2,51 a P_1 v \sqrt{P_1} Q}{4 Q 2\sqrt{2} \sqrt{gJ} a^{5/2} A_1^{3/2}} \right]$$

ou bien :

$$\frac{q}{2\sqrt{2}\sqrt{J}} \sqrt{\frac{P_1}{A_1^3}} = -2 \log \left[\frac{\varepsilon/a P_1}{14,8 A_1} + \frac{2,51}{8\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{gJa^3}} \sqrt{\frac{P_1^3}{A_1^3}} \right] \quad (154)$$

En considérant la quantité $\sqrt{gJa^3}$, on peut constater que sa dimension correspond à [m²/s] et de plus elle peut s'écrire :

$$\sqrt{gJa^3} = \sqrt{gJa^2 a} = a \sqrt{gJa}$$

La quantité \sqrt{gJa} a pour dimension m/s, c'est à dire la dimension d'une vitesse. Ainsi, $\frac{a\sqrt{gJa}}{v}$ représente le nombre de *Reynolds* que l'on peut noter R_m .

$$R_m = \frac{a\sqrt{gJa}}{v} \quad (155)$$

R_m sera désigné par le nombre de *Reynolds* modifié.

L'équation (154) peut s'écrire :

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -4\sqrt{2} \sqrt{\frac{A_1^3}{P_1}} \log \left[\frac{\varepsilon/a}{14,8} \frac{P_1}{A_1} + \frac{2,51}{8\sqrt{2}} \sqrt{\frac{P_1^3}{A_1^3}} \frac{1}{R_m} \right] \quad (156)$$

La relation (156) consiste à évaluer le débit volume Q véhiculé par une conduite ou un canal de forme quelconque, dans tout domaine d'écoulement, à partir des valeurs connues des variables : J , a , ε , ν et le paramètre de forme.

Pour le cas particulier d'une conduite circulaire pleine, la dimension linéaire $a=D$, ($P_1=\pi$, $A_1=\pi/4$) l'équation (156) devient :

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left[\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{2,51}{\sqrt{2}R_m} \right] \quad (157)$$

La relation (II-82) devient pour le cas du régime turbulent rugueux (la viscosité du liquide est négligeable $\nu \rightarrow 0$, par conséquent le nombre de Reynolds modifié tend vers l'infini ($R_m \rightarrow \infty$)) :

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -4\sqrt{2} \sqrt{\frac{A_1^3}{P_1}} \log \left[\frac{\varepsilon/a}{14,8} \frac{P_1}{A_1} \right] \quad (158)$$

Soit, pour le cas d'une conduite circulaire pleine:

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left[\frac{\varepsilon/D}{3,7} \right] \quad (159)$$

Pour le cas d'un régime pratiquement lisse la rugosité absolue est nulle ($\varepsilon/a=0$), la relation (156) devient :

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -4\sqrt{2} \sqrt{\frac{A_1^3}{P_1}} \log \left[\frac{2,51}{8\sqrt{2}} \sqrt{\frac{P_1^3}{A_1^3}} \frac{1}{R_m} \right] \quad (160)$$

Soit, pour le cas d'une conduite circulaire pleine:

$$\frac{q}{\sqrt{J}} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \log \left[\frac{2,51}{\sqrt{2}R_m} \right] \quad (161)$$

III.6 Approche Expérimentale

III.6.1 Introduction

Dans cette partie de l'étude une approche expérimentale est élaborée dont l'objectif principal est la vérification des relations théoriques exposées dans les paragraphes précédents.

Le protocole expérimental a été soigneusement décrit et conçu de manière à permettre l'étude de l'ensemble des régimes d'écoulement turbulent rugueux, de transition et pratiquement lisse.

Pour chacun des régimes d'écoulement ci-dessus mentionnés, les mesures expérimentales visent principalement à comparer les diamètres théoriques et réels sur la base d'un échantillon de points de mesure important.

Notons que ces mesures expérimentales seront considérées comme données de base, lors de la vérification de notre développement théorique. Ces données sont le débit volume Q véhiculé par la conduite d'essai de diamètre D , le gradient de perte de charge J , la rugosité absolue de la paroi de la conduite d'essai ε , la température de l'eau d'essai T .

Les données citées ci-dessus sont regroupées dans les tableaux 18 à 22 figurants en annexes.

Les essais ont concerné les conduites de diamètre intérieur respectif : 49mm, 56mm, 86mm, 124mm et 130mm.

III.6.2 Description générale du protocole expérimental

La figure 6 montre le schéma simplifié de l'installation ayant servi à l'étude expérimentale de l'écoulement uniforme dans les conduites en charge. Cette installation a été entièrement conçue et réalisée par le Laboratoire de Recherche en Hydraulique Souterraine et de Surface (LARHYSS) de l'Université de Biskra.

Comme l'indique la (figure 7), l'installation est conçue pour alimenter en circuit fermé la conduite circulaire testée. Elle est composée :

- D'un support.
- D'une pompe axiale alimentant en eau le système et pouvant débiter jusqu'à 100 l/s.
- D'un débitmètre à diaphragme inséré dans la conduite d'alimentation à l'aval de la pompe. Ce dispositif de mesure a été préalablement étalonné et sa précision est de l'ordre de 0,5 l/s. Les deux prises de pression sortant du débitmètre à diaphragme sont raccordées à un tableau manométrique (tableau manométrique n°1) muni de deux tubes piézométriques. A chaque débit Q véhiculé par la conduite d'alimentation correspond une différence de cote Δh des ménisques dans les tubes. Le débit Q a été corrélé à Δh et l'étalonnage a conduit à écrire que :

$$Q = 0,02218(\Delta h)^{0,5082}, \text{ où } Q \text{ est en m}^3/\text{s et } \Delta h \text{ en m.}$$

- D'un bassin d'accumulation recevant les eaux évacuées par l'extrémité aval de la conduite d'essai.
- D'une vanne plane permettant de régler à volonté le débit Q .
- De deux prises de pression statiques opérées sur la conduite testée, raccordées à un tableau manométrique (tableau manométrique n°2) doté de deux tubes piézométriques. La différence de cote ΔH des ménisques dans les tubes piézométriques correspond à la perte de charge linéaire occasionnée entre les deux prises de pression sur la longueur L séparant les deux prises.

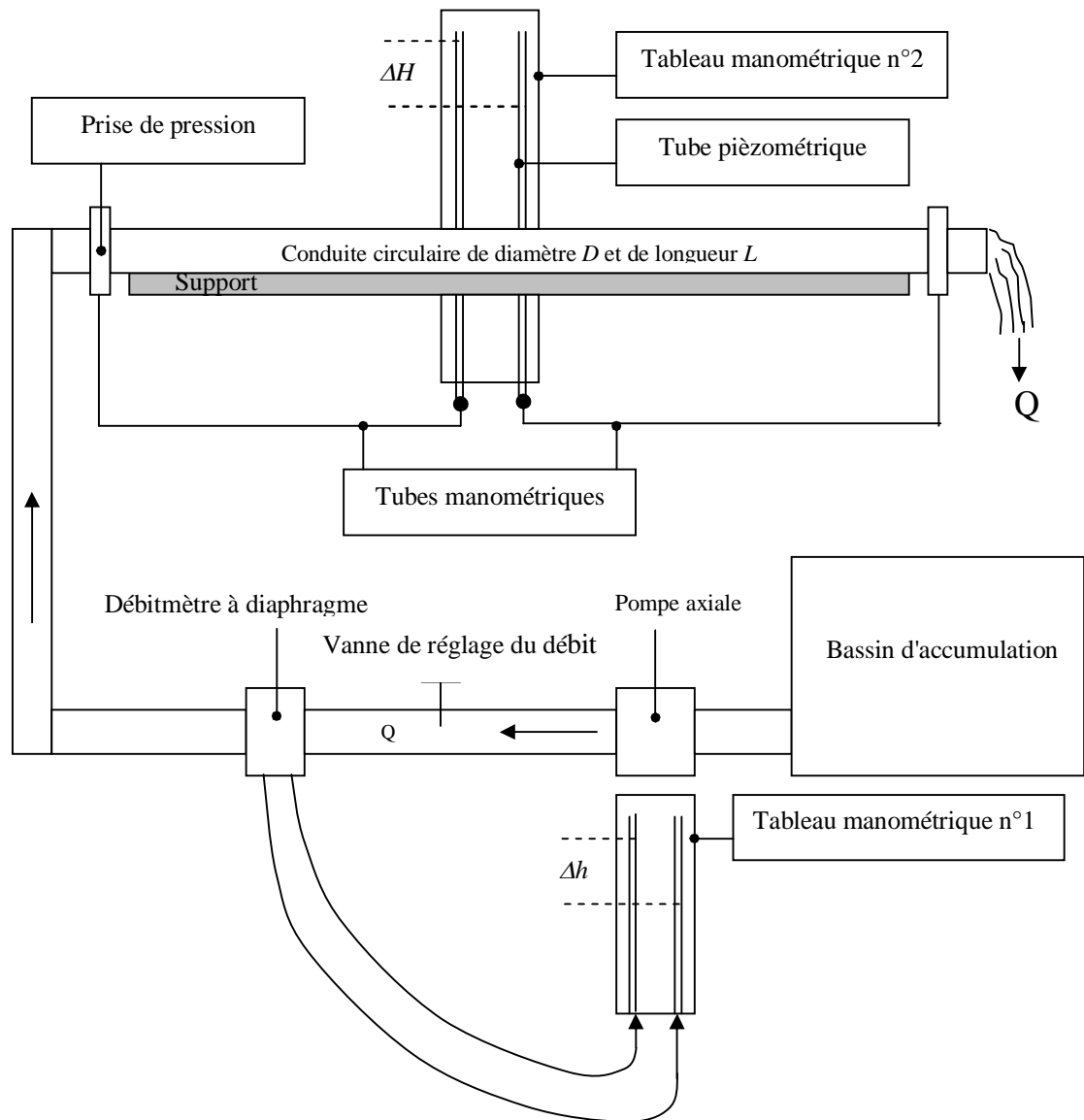


Figure 7: Schéma simplifié du dispositif expérimental ayant servi à l'étude de l'écoulement uniforme en conduite circulaire en charge.

III.6.3 Essais et Résultats

II.6.3.1 Répartition des débits et du régime d'écoulement

Les essais ont concerné 05 conduites circulaires de diamètre intérieur respectif 49 mm , 56 mm , 86 mm , 124 mm et 130 mm .

Chacune de ces conduites a fait l'objet d'essais dans une large gamme des débits volumes Q . Pour chaque débit, obtenu par manipulation de la vanne de réglage, la perte de charge linéaire ΔH a été déterminée par lecture sur le tableau manométrique n° 2. Les gammes des débits testés ont fait l'objet d'une analyse visant à définir la nature du régime d'écoulement dans la conduite testée. Selon les possibilités expérimentales, dépendantes fortement des débits fournis par la pompe et des diamètres des conduites, les régimes d'écoulement turbulent rugueux, de transition et pratiquement lisse ont été obtenus et répartis comme suit :

1. Diamètre $D = 49$ mm
 $1,7 \text{ l/s} \leq Q \leq 3,6 \text{ l/s}$: Régime d'écoulement de transition
 $3,6 \text{ l/s} \leq Q \leq 9 \text{ l/s}$: Régime d'écoulement turbulent rugueux
2. Diamètre $D = 56$ mm
 $1,7 \text{ l/s} \leq Q \leq 6,2 \text{ l/s}$: Régime d'écoulement de transition
 $6,2 \text{ l/s} \leq Q \leq 12 \text{ l/s}$: Régime d'écoulement turbulent rugueux
3. Diamètre $D = 86$ mm
 $5 \text{ l/s} \leq Q \leq 30 \text{ l/s}$: Régime d'écoulement pratiquement lisse
4. Diamètre $D = 124$ mm
 $19,5 \text{ l/s} \leq Q \leq 40,6 \text{ l/s}$: Régime d'écoulement turbulent rugueux
5. Diamètre $D = 130$ mm
 $14 \text{ l/s} \leq Q \leq 44 \text{ l/s}$: Régime d'écoulement de transition

III.6.3.2 Procédure d'expérimentation

La procédure expérimentale a consisté à faire les mesures au laboratoire, pour chaque conduite testée de diamètre D et pour chaque débit volontairement injecté, de :

- La différence des cotes Δh dans le tableau manométrique n°1 pour déterminer le débit Q dont l'expression est donnée, après avoir étalonné le débitmètre à diaphragme, comme suit :

$$Q = 0,02218 \Delta h^{0,5082}, \quad Q \text{ en } m^3/s \text{ et } \Delta h \text{ en mètre}$$

- La différence de cotes ΔH dans le tableau manométrique n°2 afin de déterminer le gradient de perte de charge J en utilisant la relation, $J = \Delta H/L$.

L étant la longueur qui sépare les deux prises de pression reliées avec le manomètre n°2.

- La température de l'eau T afin de déterminer la viscosité cinématique ν et par conséquent le nombre de Reynolds R .

La viscosité cinématique ν peut être calculée par la formule de *Poiseulle* :

$$\nu = \frac{1,78 \cdot 10^{-6}}{1 + 0,0337T + 0,00022T^2}$$

Le nombre de Reynolds R est évalué, par définition, en application de la relation :

$$R = \frac{4Q}{\pi D \nu}$$

La rugosité absolue ε est liée au coefficient k de *Strickler* par la relation de *Hager* $k\varepsilon^{1/6}/(8,2\sqrt{g})=1$ que nous avons déjà indiquée. L'évaluation du coefficient k s'accompagne en règle générale d'une erreur relative importante, pouvant atteindre 10% et même plus dans certains cas. La relation

$k = f(\varepsilon)$ ci-dessus indiquée permet d'écrire, en vertu du théorème des erreurs relatives, que $\Delta k/k = (1/6)\Delta\varepsilon/\varepsilon$. Ceci implique que 10% d'erreur commise sur l'évaluation du coefficient k entraîne 60% d'erreur relative sur l'estimation de la rugosité absolue ε .

Cependant, il est à noter que cette erreur relative sur la rugosité absolue ε , aussi grande soit-elle, n'a pratiquement aucune influence significative sur l'évaluation de la dimension linéaire a .

Pour illustrer cette affirmation, considérons le cas d'une conduite circulaire pleine de diamètre D et pour laquelle $a = D$. En supposant un écoulement en régime turbulent rugueux, le développement théorique présenté dans les paragraphes précédents a montré que le diamètre D_r pouvait être évalué par la relation :

$$D_r = 1,548 \left[\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8}$$

En vertu du théorème des erreurs relatives, cette dernière relation permet d'écrire que :

$$\frac{\Delta D_r}{D_r} = \frac{3}{8} \left[\frac{1}{2} \frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta Q}{Q} \right] + \frac{1}{16} \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}$$

Le terme $(1/16)\Delta\varepsilon/\varepsilon$ représente à lui seul l'influence de l'erreur relative de la rugosité sur celle du diamètre D_r . Ainsi, 60% d'erreur relative commise sur l'évaluation de la rugosité absolue n'entraîne qu'une erreur relative $\Delta D_r/D_r = 0,6/16 = 3,75\%$ sur l'évaluation du diamètre D_r .

La rugosité relative (ou absolue) des conduites testées a été estimée par la combinaison des relations de *Darcy-Weisbach* et *Achour* qui sont respectivement :

$$J = \frac{8f}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5}$$

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \frac{R}{6,97} \right)$$

Les valeurs obtenues de la rugosité relative ε/D sont regroupées dans les tableaux 18 à 22 en annexes, ainsi que les valeurs correspondantes de la rugosité absolue ε .

III.6.3.3 Vérification expérimentale de la dimension linéaire D des conduites testées

Cette partie de l'étude vise à vérifier et à comparer les valeurs réelles et calculées du diamètre D pour l'ensemble des conduites testées. Cette vérification a concerné tous les régimes d'écoulement observés et c'est ainsi que pour :

1. Régime d'écoulement turbulent rugueux

Le régime d'écoulement turbulent rugueux, le diamètre D_r calculé ou théorique répond à la

relation $D_r = 1,548 \left[\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8}$, en tenant compte des valeurs mesurées des paramètres Q , J et ε .

Pour chacune des valeurs de ces paramètres, le diamètre D_r a été calculé puis comparé au diamètre réel D de la conduite testée. Cette comparaison a permis de conclure que les diamètres normalisés calculés selon la relation ci-dessus indiquée correspondent parfaitement aux diamètres réels correspondants des conduites testées.

Les valeurs obtenues des coefficients λ sont très proches de l'unité et a été conclu à la nature turbulente de l'écoulement observé. Une correction sur les diamètres calculés a été cependant opérée en écrivant que D (réel) = λD (calculé).

2. Régime d'écoulement de transition

Le régime de transition a concerné les conduites de diamètre $D = 49 \text{ mm}$, 56 mm et 130 mm . Les résultats les plus significatifs sont ceux obtenus sur la conduite de diamètre $D = 130 \text{ mm}$, compte tenu de la large gamme des débits utilisés $14 \text{ l/s} \leq Q \leq 44 \text{ l/s}$.

La vérification expérimentale des diamètres des conduites testées a consisté à comparer les diamètres calculés et réels de ces mêmes conduites.

Le tableau 1 montre les écarts relatifs issus de cette comparaison, pour le seul cas du diamètre $D = 130 \text{ mm}$.

Tableau 1 : Ecart relatif sur le diamètre calculé et réel en régime de transition

$\Delta D/D$ (%)	0,8	0,5	0,38	0,29	0,43	1,46	1,16	0,21	1,98
$\Delta D/D$ (%)	0,04	0,28	0,64	0,54	0,39	0,43	0,86	1,2	1,75
$\Delta D/D$ (%)	2,26	2,89	2,8	2,28	2,3	2,15	2,2	2,15	2,54
$\Delta D/D$ (%)	2,83	3,05	3,6	3,7	4,23	4,23	4,5	4,3	

On peut ainsi constater que l'écart maximal observé sur l'estimation du diamètre réel de la conduite ne dépasse guère 4,5%

Les diamètres calculés ont obtenu par application de la relation :

D (calculé, régime de transition) = λD_r (calculé, régime turbulent rugueux)

Avec :

$$D_r = 1,548 \left[\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \quad \text{et} \quad \lambda = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5}$$

En vertu du théorème des erreurs relatives, ces dernières relations permettent d'écrire respectivement que :

$$\frac{\Delta D_r}{D_r} = \frac{3}{8} \left[\frac{1}{2} \frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta Q}{Q} \right] + \frac{1}{16} \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{5} \frac{\Delta f}{f}$$

Le terme $\Delta f/f$ a été déterminé en vertu de la relation de Darcy-Weisbach :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta J}{J} + 2 \frac{\Delta Q}{Q}$$

Soit donc :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{5} \left[\frac{\Delta J}{J} + 2 \frac{\Delta Q}{Q} \right]$$

Finalement on peut remarquer que l'erreur relative commise sur l'estimation du diamètre réel de la conduite dépend de celles commises sur l'estimation du gradient de perte de charge J , du débit volume Q et de la rugosité absolue ε .

Les plus petites valeurs des paramètres de J , Q et ε rencontrés au cours de l'expérimentation sont respectivement $J = 0,01333333$, $Q = 14,8$ l/s et $\varepsilon = 9,88 \cdot 10^{-5}$. Cette dernière valeur montre clairement que l'erreur relative commise sur l'estimation de ε est insignifiante et nous pouvons écrire que :

$$\frac{\Delta D_r}{D_r} \approx \frac{3}{8} \left[\frac{1}{2} \frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta Q}{Q} \right]$$

Etant donné que $J = \Delta H/L$, l'erreur relative commise sur l'estimation du gradient J de la perte de charge est :

$$\Delta J/J = \Delta (\Delta H)/\Delta H + \Delta L/L \approx \Delta (\Delta H)/\Delta H$$

La valeur de ΔH correspondant à la valeur minimale de $J = 0,01333333$ est $\Delta H = 0,02$ m. En estimant que l'erreur absolue issue de la lecture de ΔH est environ égale à 1 mm, ceci permet d'écrire que $\Delta (\Delta H)/\Delta H = \Delta J/J = 10^{-3}/0,02 = 5\%$. L'erreur relative issue de la mesure du débit $Q = 0,5$ l/s est $\Delta Q/Q = 0,5/14,8 \approx 3,38\%$. En tenant compte de toutes ces considérations, l'erreur relative maximale commise sur l'évaluation du diamètre D est donc :

$$\frac{\Delta D_r}{D_r} \approx \frac{3}{8} \left[\frac{1}{2} \frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta Q}{Q} \right] = \frac{3}{8} \left[\frac{1}{2} (0,05 + 0,0338) \right] \approx 2,2\%$$

L'écart maximal observé sur l'estimation du diamètre D réel de la conduit testée est également lié à celui commis sur l'évaluation du coefficient de correction λ . En effet, $D = \lambda D_r$ implique que :

$$\Delta D/D = \Delta \lambda/\lambda + \Delta D_r/D_r$$

En considérant les valeurs maximales observées $\Delta J/J = 5\%$ et $\Delta Q/Q = 3,38\%$, la relation qui exprime l'erreur relative sur l'estimation de λ permet d'écrire que :

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{1}{5} (0,05 + 2 \times 0,0338) \approx 2,35\%$$

Ainsi :

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta D_r}{D_r} = 2,35 + 2,2 = 4,55\%$$

C'est ainsi que se justifie amplement l'erreur relative maximale expérimentale sur l'évaluation du diamètre réel D pour le cas de la conduite de 130mm de diamètre, $\Delta D/D \text{ max.} = 4,5\%$.

3. Régime d'écoulement pratiquement lisse

Comme pour les régimes d'écoulement turbulent rugueux et de transition, l'expérimentation que a concerné le régime d'écoulement pratiquement lisse. Celui-ci a été observé dans la conduite de diamètre $D = 86 \text{ mm}$ et dans la gamme $5,7 \text{ l/s} \leq Q \leq 30 \text{ l/s}$.

L'objectif de l'étude a été de comparer les diamètres calculés, en vertu de la méthode préconisée au cours du développement théorique, et le diamètre réelle de la conduite testée ($D = 86 \text{ mm}$, Diamètre réel).

Les points de mesure obtenus dans la gamme des débits ci-dessus indiqués n'ont pas tous été significatifs, notamment pour les débits réduits allant jusqu'à 10 l/s. Pour un débit $Q = 10 \text{ l/s}$, l'erreur relative commise sur la mesure est de $0,5/10 = 5\%$. Ceci constitue l'erreur relative maximale sur la mesure du débit, compte tenu de la précision de 0,5 l/s du débitmètre à diaphragme utilisé. Pour la plus grande valeur du débit $Q = 30 \text{ l/s}$, l'erreur se réduit à $0,5/30 = 1,67\%$.

Le calcul du diamètre de la conduite repose sur la mesure expérimentale du facteur de correction ψ . Le diamètre réel calculé a été obtenu par la correction du diamètre de la conduite hypothétique véhiculant un écoulement en régime turbulent rugueux, selon la relation :

$$D \text{ (réel non normalisé)} = \psi D_r \text{ (conduite hypothétique)}$$

Le diamètre de la conduite hypothétique est évalué, par la relation suivante, en tenant compte des valeurs mesurés des débits Q et du gradient de la perte de charge J :

$$D_r \text{ (conduite hypothétique)} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}} \right)^{2/5}$$

En vertu du théorème des erreurs relatives, l'erreur commise sur le calcul du diamètre D_r est

$$\frac{\Delta D_r}{D_r} = \frac{2}{5} \left(\frac{\Delta Q}{Q} + \frac{1}{2} \frac{\Delta J}{J} \right)$$

Etant donné que $J = \Delta H/L$, la relation précédente permet d'écrire, compte tenu de l'erreur insignifiante commise sur la mesure de la longueur L :

$$\frac{\Delta D_r}{D_r} = \frac{2}{5} \left(\frac{\Delta Q}{Q} + \frac{1}{2} \frac{\Delta(\Delta H)}{\Delta H} \right)$$

En considérant la plus faible valeur du débit $Q = 5,7 \text{ l/s}$ de la gamme utilisée, l'erreur relative sur la mesure de ce débit est maximale et vaut $\Delta Q/Q = 0,5/5,7 \approx 8,77 \%$. Bien que cette erreur soit relativement significative, elle n'a cependant qu'une faible influence sur le calcul du diamètre D_r . Cette affirmation sera étayée dans ce qui suit.

En se référant au tableau... en annexe, la perte de charge ΔH correspondant au débit $Q = 5,7 \text{ l/s}$ est $\Delta H = 0,015 \text{ m} = 15 \text{ mm}$. L'erreur relative commise sur la lecture de ΔH est par suite $\Delta(\Delta H)/\Delta H = 1/15$.

En tenant compte de ces considérations, l'erreur relative maximale affectant le calcul du diamètre D_r est donc :

$$\frac{\Delta D_r}{D_r} = \frac{2}{5} \left(0,0877 + \frac{1}{30} \right) \approx 4,84\%$$

Ainsi, compte tenu d'une erreur relative significative maximale de 8,77% sur la mesure du débit Q , l'erreur relative commise sur le calcul du diamètre D_r n'est que de 4,84 % environ.

L'erreur relative commise sur le calcul du diamètre réel de la conduite s'obtient en écrivant que :

$$\Delta D/D = \Delta \psi/\psi + \Delta D_r/D_r$$

Comme dans le cas du coefficient de correction λ , l'erreur relative engendrée sur le calcul du coefficient ψ s'écrit :

$$\frac{\Delta \psi}{\psi} = \frac{1}{5} \frac{\Delta f}{f}$$

avec :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta J}{J} + 2 \frac{\Delta Q}{Q}$$

soit :

$$\frac{\Delta \psi}{\psi} = \frac{1}{5} \left(\frac{\Delta J}{J} + 2 \frac{\Delta Q}{Q} \right)$$

ou bien :

$$\frac{\Delta \psi}{\psi} = \frac{1}{5} \left(\frac{\Delta(\Delta H)}{\Delta H} + 2 \frac{\Delta Q}{Q} \right)$$

Cette dernière relation conduit à écrire que :

$$\frac{\Delta \psi}{\psi} = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{15} + 2 \times 0,0877 \right) \approx 4,84\%$$

L'erreur relative occasionnée sur le calcul du diamètre réel de la conduite est donc :

$$\frac{\Delta D}{D} = 4,84 + 4,84 = 9,68\%$$

Il est à noter que les mesures expérimentales sont entachées d'une erreur relative qui demeure dans tous les cas en deçà de l'erreur maximale. Ceci permet de conclure, à la fiabilité de la démarche

théorique proposée pour l'évaluation du diamètre de la conduite circulaire en régime d'écoulement pratiquement lisse.

III.7 Conclusion

Le chapitre précédent a été consacré à la représentation de la méthode dite *LARHYSS* établie par le *laboratoire de recherches en hydraulique souterraine et de surface* de l'université *Mohamed Khider* de *BISKRA*. Comme nous l'avons vue cette méthode est élaborée pour le calcul de l'écoulement uniforme, notamment l'évaluation de la dimension linéaire d'un profil géométrique de forme quelconque pour toute nature de régime d'écoulement turbulent (rugueux, transition et lisse).

La dimension linéaire quelconque a_r en régime turbulent rugueux a pu être exprimée par la transformation de la relation de *Manning – Strickler*. La relation fonctionnelle $\varphi(Q, J, \varepsilon, a_r, \text{paramètre de forme}) = 0$ a été clairement définie et la relation $a_r = \left(\frac{Q}{k\sqrt{J}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}}$ a été obtenue.

Cette dernière relation montre que toute dimension linéaire a_r d'un profil géométrique de forme quelconque véhiculant un écoulement en régime turbulent rugueux dépend de quatre paramètres :

- le débit volume Q
- la pente J du canal
- le coefficient k de *Strickler*
- du paramètre de forme exprimé par les variables P_1 et A_1 . Ceux-ci représentent respectivement le périmètre mouillé et l'aire de la section mouillée du profil considéré, lorsque la dimension linéaire a_r est égale à l'unité, soit $P_1 = P/a_r$ et $A_1 = A/a_r^2$.

En tenant compte de la relation de *Hager* $\frac{k\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{g}}=1$, qui traduit la corrélation entre le coefficient de

Strickler et la rugosité absolue ε , la dimension linéaire a_r devient $a_r = \left(\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}}$. Cette

dernière relation, qui s'applique à tout profil géométrique, a été présentée de manière symbolique

par $a_r = \Lambda a_o$, où $\Lambda = \left(\frac{Q\varepsilon^{1/6}}{8,2\sqrt{gJ}} \right)^{3/8}$ a la dimension d'une longueur et $a_o = \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}}$ est un paramètre sans

dimension que nous avons désigné par paramètre de la dimension linéaire.

Le développement théorique a pu également établir de nouvelles expressions du nombre de *Reynolds* R_r de l'écoulement uniforme en régime turbulent rugueux ainsi que celle de la vitesse moyenne V_r :

$$R_r = \frac{4Q}{\Lambda v} \left(\frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{5/4}, \quad V_r = \frac{Q}{\Lambda^2} \left(\frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{1/2}.$$

Pour l'écoulement en régime de transition, l'étude a proposé de corriger la dimension linéaire a_r en régime turbulent rugueux par un coefficient λ désigné par *coefficient de transition*. La dimension

linéaire a en régime de transition peut alors s'écrire $a = \lambda a_r = \lambda \Lambda a_o = \lambda \left(\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}}$. Le

coefficient de transition λ dépend à la fois de la rugosité relative ε/D_{hr} et du nombre de Reynolds R_r caractérisant l'écoulement en régime turbulent rugueux. L'expression du coefficient de transition λ a

pu être établie et s'écrit $\lambda = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5}$. Les coefficients de frottement f et f_r peuvent être respectivement

évalués par la formule de *Colebrook-White* et celle de *Nikuradse*. Etant donné le caractère implicite

de la formule de *Colebrook-White*, le choix s'est finalement porté sur la relation explicite de *Achour*.

La démarche précédente a été également adoptée en ce qui concerne le calcul de la dimension linéaire a en régime pratiquement lisse. La dimension linéaire a_r en régime turbulent rugueux est corrigée par un coefficient ψ tel que :

$$a = \psi a_r = \psi \Lambda a_o = \psi \left(\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{gJ}} \right)^{3/8} \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}}$$

Le coefficient de correction ψ s'obtient de la même manière que celle ayant conduit à l'expression

du coefficient de transition λ et le coefficient ψ s'écrit : $\psi = \left(\frac{f}{f_r} \right)^{1/5}$. Les coefficient de frottement f

et f_r sont donnés respectivement par la relation de *Achour* et celle de *Nikuradsé*. Cependant, le coefficient de frottement f_r selon la formule de *Nikuradsé* n'a pas de signification physique puisque l'écoulement est pratiquement lisse et est donc caractérisé par une rugosité relative $\varepsilon/D_h \rightarrow 0$.

Afin de lever cette difficulté, le coefficient de frottement f_r doit être calculé pour un écoulement turbulent rugueux véhiculé par une conduite hypothétique de rugosité relative $\varepsilon/D_{hr} = 8,5 \cdot 10^{-3}$. Une

analyse particulière de l'expression du coefficient de correction ψ a montré que celui-ci pouvait être corrélé au nombre de *Reynolds* R_r de l'écoulement turbulent rugueux et un ajustement basé sur la

méthode des moindres carrés non linéaires a permis d'écrire avec une excellente approximation

$$\Psi = \left(\frac{3,673}{\log R_r} \right)^{0,478} .$$

Enfin, la combinaison des formules transformées et généralisées de *Darcy-Weisbach* et de *Colebrook-White* a permis d'aboutir à une relation explicite de la conductivité relative, applicable à tout profil géométrique et pour toute nature du régime d'écoulement. Ces relations sont destinées au calcul explicite du débit volume Q .

En fin Un protocole expérimental a été réalisé et n'a concerné que la conduite circulaire entièrement remplie par l'écoulement. Ce protocole a eu pour objectif principal la vérification expérimentale des relations issues du développement théorique, notamment celle ayant permis l'évaluation de la dimension linéaire.

Afin d'observer expérimentalement l'ensemble des régimes d'écoulement, plusieurs conduites ont été testées. Il s'agit des conduites de diamètre intérieur 49 mm, 56 mm, 86 mm, 124 mm et 130 mm.

La vérification expérimentale du diamètre de la conduite testée a été effectuée pour chacun de ces régimes (rugueux, transition et lisse).

Pour l'ensemble des essais effectués, l'analyse des mesures expérimentales a permis de conclure de manière satisfaisante sur la fiabilité des relations théoriques proposées.

Dans la partie suivante de notre mémoire, consacrée à l'étude de l'écoulement uniforme, notre approche théorique et sa vérification sera présentée.