

I. APPROCHE THEORIQUE AU CALCUL DE L'ÉCOULEMENT UNIFORME

I.1. Introduction

Dans cette partie de notre mémoire, un développement théorique sera proposé au calcul de l'écoulement uniforme en régime turbulent rugueux. Notre approche s'appuiera sur la relation de *Nikuradse* exprimant le coefficient de frottement.

Par une approche nouvelle, une relation généralisée, applicable à tout profil de canaux, sera proposée et discutée. Elle exprimera notamment la variation de la conductivité du canal en fonction de divers paramètres hydrauliques caractérisant l'écoulement. L'attention portera plus particulièrement sur son application aux conduites circulaires, faisant l'objet de notre recherche. Nous déduirons ainsi la relation régissant l'écoulement uniforme en conduites circulaires aussi bien lorsque celles-ci sont en charges et à surface libre.

Des facteurs liés à la dimension linéaire des conduites seront introduits et leur rôle sera clairement défini. Nous montrerons la variation de ces paramètres de dimension en fonction du paramètre de forme de l'écoulement dont il dépend exclusivement. Nous indiquerons aussi leur valeur optimale ainsi que l'intervalle dans lequel ils évoluent.

En outre, le développement théorique nous permettra de déduire la relation $k - \varepsilon$ dont les valeurs seront confrontées à celles données par la bibliographie.

Les relations obtenues seront en règle générale implicite et nous proposerons de les remplacer, dans une excellente approximation, par des relations plus simples et plus pratiques.

Enfin, nous terminerons cette partie de l'étude par une présentation de quelques applications dans le but de mieux apprécier la fiabilité, la simplicité et la rapidité des relations théoriques que nous aurons proposées.

I.2. Relation théorique au calcul des conduites dans le domaine d'écoulement turbulent rugueux

I.2.1. Transformation de la formule de *Nikuradse*

La représentation graphique de la relation (55) de *Nikuradse* dans un système de coordonnées à divisions logarithmiques est indiquée sur la figure 8 et 9. Nous reportons sur l'axe des ordonnées les valeurs de $f^{-1/2}$ et sur l'axe des abscisses les valeurs du diamètre hydraulique D_h . La courbe a été tracée pour une valeur arbitrairement choisie de la rugosité absolue $\varepsilon = \varepsilon_1$.

Nous préconisons dans notre approche de remplacer la courbe de *Nikuradse* par une infinité de droites parallèles ou sécantes équilibrées de même pente, comme indiqué sur la figure 8. Ces droites sont donc de type puissance et peuvent s'écrire sous la forme :

$$y = \beta x^\theta \quad (162)$$

où $y = f^{-1/2}$ et $x = D_h$

Notre approche diffère de celle de *Strickler* qui suggère le remplacement de la courbe de *Nikuradse* par une seule droite sécante équilibrée de pente $\theta = 1/6$ (figure 9). Selon cette approche, le coefficient de résistance de *Strickler* et de *Nikuradse* ne seront égaux que pour deux valeurs seulement du diamètre hydraulique D_h . Par contre, le balayage de l'ensemble des points de la courbe de *Nikuradse* par une infinité de droites sécantes équilibrées permet d'égaliser les coefficients de résistance pour toute la gamme des diamètres hydrauliques considérés. Ceci permet de définir avec la plus grande précision possible tout diamètre hydraulique correspondant à l'égalité des coefficients de résistance pour une valeur donnée de la rugosité absolue.

Dans un premier temps, nous affectons à l'exposant θ , figurant dans la relation (162), la valeur $1/6$ de *Strickler* et l'on peut alors écrire :

$$y = \beta x^{1/6} \quad (163)$$

Or, dans le domaine d'écoulement turbulent rugueux, le coefficient de frottement f selon *Nikuradse* est donnée par la relation (55), soit :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right) \quad (55)$$

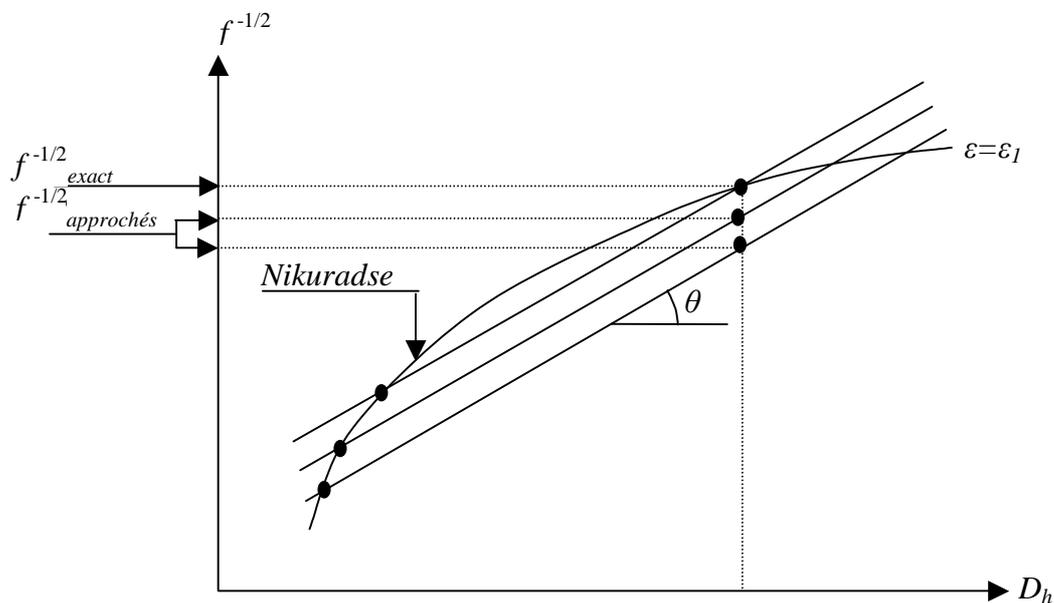


Figure 8 : Droites sécantes équilibrant la courbe de *Nikuradse* en régime turbulent rugueux, selon une approche nouvelle.

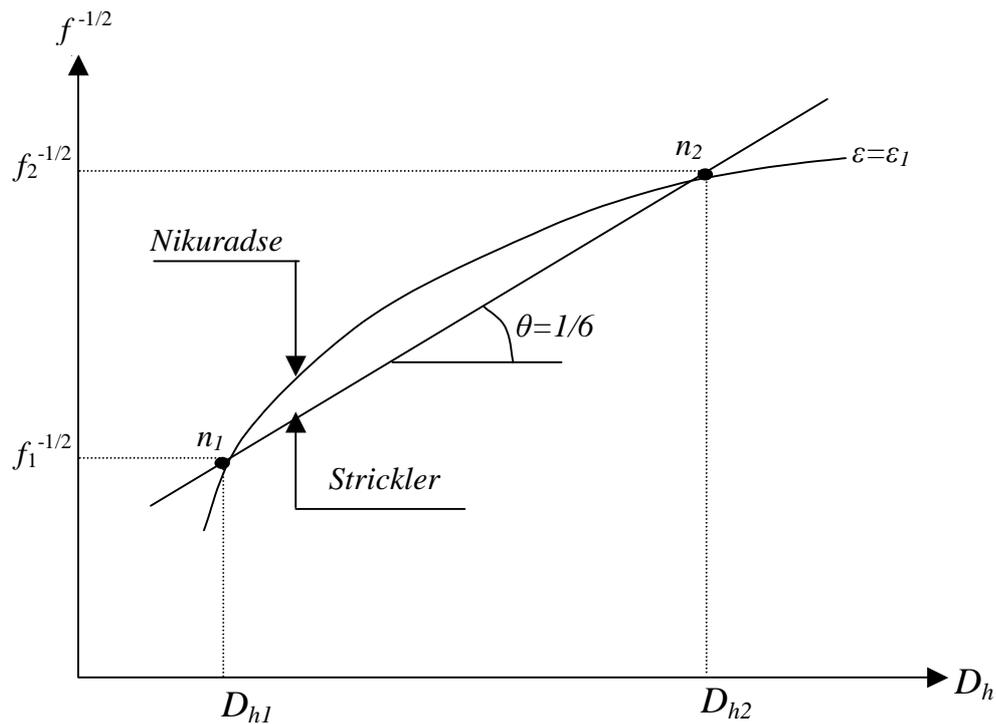


Figure 9 : Droite sécante équilibrant la courbe de *Nikuradse* en régime turbulent rugueux, selon l'approche de *Strickler*

En tenant compte de (163), la relation (55) s'écrit :

$$f^{-1/2} = \beta D_h^{1/6} \quad (164)$$

Ou bien :

$$\beta = \frac{1}{f^{1/2} D_h^{1/6}} \quad (165)$$

Ainsi, le coefficient β dépend à la fois du coefficient de frottement f ainsi que du diamètre hydraulique D_h , pour une valeur donnée de la rugosité absolue caractérisant la paroi de la conduite considérée. Notons que la relation (165) est applicable à toute conduite circulaire partiellement ou entièrement occupée par l'écoulement.

Le coefficient de frottement f et le diamètre hydraulique D_h sont liés par la formule de *Darcy – Weisbach* et représentée par la relation (53), soit :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (53)$$

Cette relation peut également s'écrire :

$$V = \sqrt{\frac{2g}{f}} \sqrt{D_h} \sqrt{J} \quad (166)$$

De plus :

$$D_h = 4R_h \quad (167)$$

En tenant compte de (164) et (167), la relation (166) devient :

$$V = 4^{2/3} \sqrt{2g} \beta R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (168)$$

Rappelons que la formule de *Manning - Strickler* s'écrit :

$$V = k R_h^{2/3} J^{1/2} \quad (10)$$

En comparant les relations (10) et (168) :

$$k = 4^{2/3} \sqrt{2g} \beta \quad (169)$$

La relation (169) montre clairement que le coefficient de résistance k de l'écoulement en régime turbulent rugueux et au sens de *Strickler*, s'exprime non seulement en fonction de la rugosité absolue ε mais aussi du diamètre hydraulique D_h . Ces deux derniers paramètres étant implicitement représentés par le facteur β selon les relations (55) et (165).

La relation (168) s'exprime, en tenant compte de la relation (169) :

$$V = k R_h^{2/3} \sqrt{J} \quad (170)$$

Etant donné que la vitesse moyenne V d'un écoulement est telle que $V = Q/A$, la relation (170) s'écrit :

$$\frac{Q}{k \sqrt{J}} = A R_h^{2/3} \quad (171)$$

En définissant le paramètre de cambrure $\mu = \frac{R_h}{P}$, le périmètre mouillé P est alors :

$$P = \frac{R_h}{\mu} \quad (172)$$

De plus, le rayon hydraulique s'écrit :

$$R_h = \frac{A}{P}$$

Soit :

$$A = P R_h \quad (173)$$

En vertu de (172), la relation (173) devient :

$$A = \frac{R_h^2}{\mu} \quad (174)$$

En tenant compte de (174), la relation (171) peut s'écrire :

$$\frac{Q}{k \sqrt{J}} = \frac{R_h^{8/3}}{\mu} \quad (175)$$

Le terme figurant dans le membre droit de la relation (175) représente le facteur de section qui dépend à la fois de l'aire de la section mouillée A et du périmètre mouillé P . Ces derniers paramètres dépendent à leur tour de la dimension linéaire a . Au cours du chapitre III de la 1^{ère} partie, nous avons montré que, quelle que soit la forme du profil géométrique considéré :

$$A = a^2 A_1 \quad (90)$$

$$P = a P_1 \quad (91)$$

Rappelons que les paramètres A_1 et P_1 sont adimensionnels et correspondent respectivement à l'aire de la section mouillée et au périmètre mouillé lorsque la dimension linéaire a est égale à l'unité.

La relation (175) peut s'écrire :

$$\frac{\mu Q}{k \sqrt{J}} = R_h^{8/3} \quad (176)$$

Ou bien :

$$R_h = \mu^{3/8} \left[\frac{Q}{k \sqrt{J}} \right]^{3/8} \quad (177)$$

Selon la méthode préconisée par le laboratoire *Larhyss* (2002), toute dimension linéaire en régime turbulent rugueux s'écrit :

$$a = \Lambda a_0 \quad (95)$$

La fonction Λ dépend de Q , J et ε et sa dimension et celle d'une longueur :

$$\Lambda = \left[\frac{Q \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{gJ}} \right]^{3/8} \quad (93)$$

Le paramètre sans dimension a_0 dépend exclusivement du profil liquide de l'écoulement, c'est à dire du paramètre de forme. L'expression de a_0 s'écrit :

$$a_0 = \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} \quad (94)$$

Par analogie à la relation (95), le rayon hydraulique R_h peut s'écrire :

$$R_h = \Lambda R_{h0} \quad (178)$$

Soit :

$$R_{h0} = \mu^{3/8} \quad (179)$$

et :

$$\Lambda = \left[\frac{Q}{k \sqrt{J}} \right]^{3/8} \quad (180)$$

La relation (180) peut prendre la forme suivante :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = k \Lambda^{8/3} \quad (181)$$

En tenant compte de (169), la relation (181) devient :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = 4^{2/3} \sqrt{2g} \beta \Lambda^{8/3} \quad (182)$$

En vertu de (165), la relation (182) s'écrit :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = \frac{4^{2/3} \sqrt{2g}}{f^{1/2} D_h^{1/6}} \Lambda^{8/3} \quad (183)$$

En tenant compte de (55), la relation (183) devient :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = -2 \frac{4^{2/3} \sqrt{2g}}{D_h^{1/6}} \Lambda^{8/3} \log \left(\frac{\varepsilon / D_h}{3,7} \right) \quad (184)$$

De plus :

$$D_h = \Lambda D_{h0} \quad (185)$$

Soit :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = \frac{4^{2/3} \sqrt{8g}}{D_{h0}^{1/6}} \Lambda^{5/2} \log \left(\frac{3,7 \Lambda D_{h0}}{\varepsilon} \right) \quad (186)$$

Ou bien :

$$\frac{Q}{\sqrt{g J \varepsilon^5}} = \frac{4^{2/3} \sqrt{8}}{D_{h0}^{1/6}} \left(\frac{\Lambda}{\varepsilon} \right)^{5/2} \log \left(3,7 D_{h0} \frac{\Lambda}{\varepsilon} \right) \quad (187)$$

La relation (187) représente l'équation générale permettant le calcul de la longueur Λ dite longueur fluïdo-dynamique de l'écoulement dans le domaine turbulent rugueux. Cependant cette relation est implicite vis-à-vis de Λ , ce qui nécessite l'utilisation d'un procédé itératif lors de son application. La connaissance de la longueur fluïdo-dynamique Λ permet le calcul de la dimension linéaire du profil géométrique par la relation (95). Le paramètre de dimension a_0 est défini par la relation (94).

I.2.2. Application à la conduite circulaire

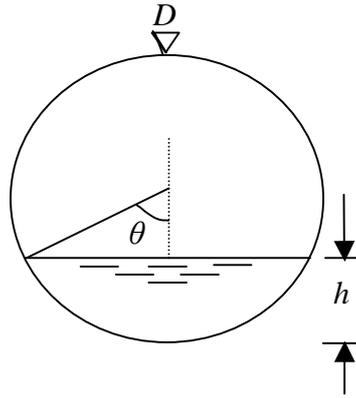


Figure 10: Schéma de définition du profil circulaire partiellement occupé par un écoulement

La figure 10 montre un profil circulaire de diamètre D partiellement occupé par un écoulement de profondeur h . Le segment circulaire est défini par le paramètre de forme $\xi=h/D$. Celui-ci est lié au demi angle au centre θ par la relation (101).

Ce profil est donc défini par deux dimensions linéaires h et D . L'aire de la section mouillée A ainsi que le périmètre mouillé P s'écrivent respectivement :

$$A = \frac{D^2}{4}(\theta - \sin\theta\cos\theta) \quad (97)$$

$$P = D\theta \quad (98)$$

Où θ est en radians. En considérant pour dimension linéaire $a=D$, on peut écrire que :

$$A_1 = \frac{1}{4}(\theta - \sin\theta\cos\theta) \quad (99)$$

$$P_1 = \theta \quad (100)$$

Le paramètre de dimension D_0 du diamètre D est :

$$D_0 = \frac{P_1^{1/4}}{A_1^{5/8}} = \frac{\theta^{1/4}}{[(\theta - \sin\theta\cos\theta)/4]^{5/8}} \quad (102)$$

Le paramètre de dimension h_0 de la profondeur h est :

$$h_0 = \xi D_0 = \frac{\xi\theta^{1/4}}{[(\theta - \sin\theta\cos\theta)/4]^{5/8}} \quad (188)$$

En tenant compte de la relation (116), le paramètre de dimension D_{h0} est :

$$D_{h0} = 2^{5/4} \left(\frac{\sqrt{\theta - \sin\theta\cos\theta}}{\theta} \right)^{3/4} \quad (189)$$

En tenant compte de la relation (189), la relation (186) peut s'écrire :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = 6,169 \sqrt{g} \frac{\theta^{1/8}}{(\theta - \sin\theta \cos\theta)^{1/16}} A^{5/2} \log \left[8,8 \left(\frac{\sqrt{\theta - \sin\theta \cos\theta}}{\theta} \right)^{3/4} \frac{A}{\varepsilon} \right] \quad (190)$$

La relation (190) représente la formule générale visant à calculer la longueur fluïdo-dynamique A pour les conduites circulaires partiellement occupées par l'écoulement.

Pour le cas particulier de la conduite circulaire entièrement occupée par l'écoulement, le demi angle au centre θ égale à π et le paramètre de dimension D_{h0} devient alors constant selon la relation (189) :

$$D_{h0} = 2^{5/4} \left(\frac{\sqrt{\theta - \sin\theta \cos\theta}}{\theta} \right)^{3/4} = 1,548$$

En tenant compte de ces considérations, la relation (186) devient :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = 6,626 \sqrt{g} A^{5/2} \log \left(5,729 \frac{A}{\varepsilon} \right) \quad (191)$$

Ou bien, selon la relation (187) :

$$\frac{Q}{\sqrt{g J \varepsilon^5}} = 6,626 \left(\frac{A}{\varepsilon} \right)^{5/2} \log \left(5,729 \frac{A}{\varepsilon} \right) \quad (192)$$

En posant $\varphi = Q / \sqrt{g J \varepsilon^5}$, la relation (192) s'écrit :

$$\varphi = 6,626 \left(\frac{A}{\varepsilon} \right)^{5/2} \log \left(5,729 \frac{A}{\varepsilon} \right) \quad (193)$$

Pour faciliter l'emploi de cette dernière relation, nous avons proposé un tableau de valeurs inséré en annexe de ce mémoire (Tableau A1).

La relation (193) étant implicite vis-à-vis de A , nous proposons de la remplacer par une relation explicite obtenue par ajustement statistique (voir figure 11):

$$\frac{A}{\varepsilon} = 0,4089 \varphi^{0,3814} \quad (194)$$

Notons que cette dernière formule (194) est applicable pour $A/\varepsilon \geq 50$, avec une erreur relative maximale inférieure à 1,3 %.

En ce qui concerne les faibles valeurs de A/ε ($A/\varepsilon < 50$), il faut appliquer, en utilisant un procédé itératif, la relation (191) ou (192).

Après avoir déterminé A , le diamètre de la conduite peut être aisément calculé par application de la relation (96) :

$$D = A D_0 \quad (96)$$

Le paramètre de dimension D_0 est donné par la relation (102).

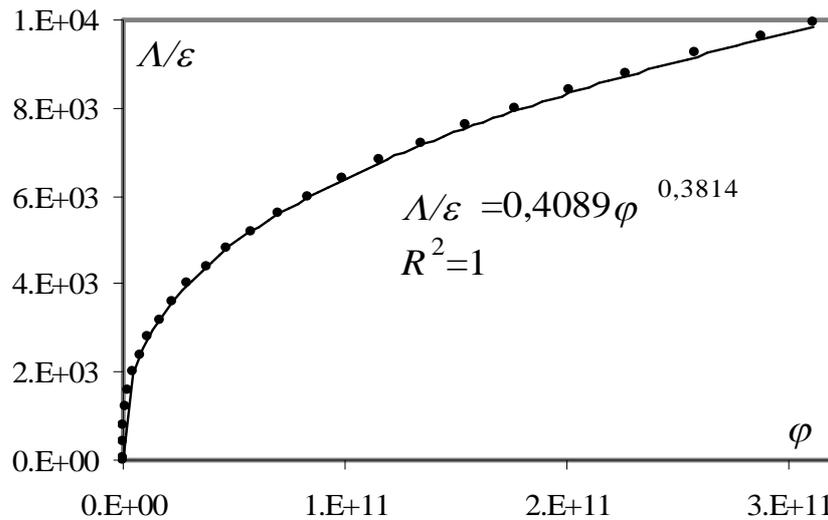


Figure 11: (—) Courbe tracée suivant la relation (194), (●●●●) Points obtenus selon la relation (193)

Application

Soit à déterminer, sous un gradient de perte de charge $J=9.10^{-3}$, le diamètre D d'une conduite circulaire entièrement occupée par un écoulement d'eau, en régime turbulent rugueux, de débit $Q=400$ l/s. La rugosité absolue de la paroi est $\varepsilon=0,75$ mm et l'accélération de la pesanteur est $g=9,81$ m/s².

L'application de la relation (96) permet le calcul du diamètre de la conduite circulaire D . Dans le cas de la conduite circulaire pleine $D_0=D_{h0}=1,548$.

En utilisant un procédé itératif, la longueur fluïdo-dynamique Λ est calculée par la relation implicite (191), soit $\Lambda=0,324$ m. Ainsi, le diamètre est $D=\Lambda D_0 =0,502$ m.

Pour bien examiner l'exactitude de la relation implicite (191) nous avons vérifié le gradient de la perte de charge J par la relation (53) de *Darcy-Weisbach*.

Etant donné que $V=\frac{Q}{A}$, $D_h=D$, $A=\frac{\pi D^2}{4}$, la relation (53) s'écrit :

$$J=\frac{8 f}{\pi^2 g} \frac{Q^2}{D^5} \quad (195)$$

Le coefficient de frottement f peut être calculé par la relation de *Nikuradse* :

$$f^{-1/2}=-2\log\left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7}\right)$$

soit $f=0,0217$. Selon la relation (195), nous obtenons $J=8,99999.10^{-3} \approx 9.10^{-3}$ et ceci confirme la validité du calcul.

I.3. Modification de l'exposant de *Strickler*

I.3.1. Conductivité

Dans ce paragraphe, nous modifions la pente de la droite sécante équilibrée de *Strickler* en affectant à l'exposant θ la valeur 0,15. La relation (164) devient alors :

$$f^{-1/2} = \beta D_h^{0,15} \quad (196)$$

Ou bien :

$$\beta = \frac{1}{f^{1/2} D_h^{0,15}} \quad (197)$$

La valeur de la pente $\theta=0,15$ a été choisie après plusieurs ajustements basés sur la relation implicite (191) et applicable à la conduite circulaire entièrement occupée par l'écoulement dans le domaine turbulent rugueux.

En vertu des relations (196) et (167), la relation (53) devient :

$$V = 2\sqrt{2g} 4^{0,15} \beta R_h^{0,65} \sqrt{J} \quad (198)$$

Le coefficient de résistance de l'écoulement k est tel que :

$$k = 2\sqrt{2g} 4^{0,15} \beta \quad (199)$$

La relation (198) devient :

$$V = k R_h^{0,65} \sqrt{J} \quad (200)$$

La relation (200) représente la formule générale régissant l'écoulement dans le domaine turbulent rugueux.

Le coefficient de résistance de l'écoulement k s'exprime, en tenant compte de la relation (197):

$$k = 2\sqrt{2g} 4^{0,15} \frac{1}{f^{1/2} D_h^{0,15}} \quad (201)$$

Cette relation peut s'écrire, en tenant compte de la formule de *Nikuradse* :

$$k = \frac{2^{2,8} \sqrt{g}}{D_h^{0,15}} \log \left(\frac{3,7}{\varepsilon / D_h} \right) \quad (202)$$

La relation (202) permet le calcul du coefficient de résistance de l'écoulement k en fonction de la rugosité absolue ε et du diamètre hydraulique D_h .

Les figures 12,13 et 14, montrent la variation de k calculé selon la relation (202) et k calculé selon la relation (14) de *Hager* (1987), en fonction du diamètre hydraulique D_h .

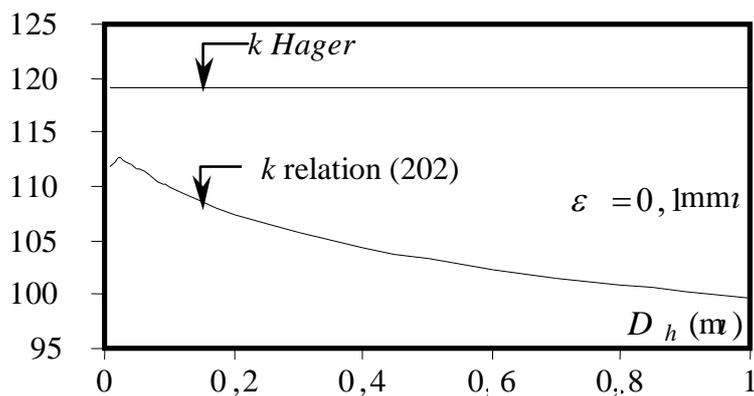


Figure 12 : Variation de k (relation 202) et k (relation (14) de Hager) en fonction de D_h (m) pour $\varepsilon = 0,1\text{mm}$

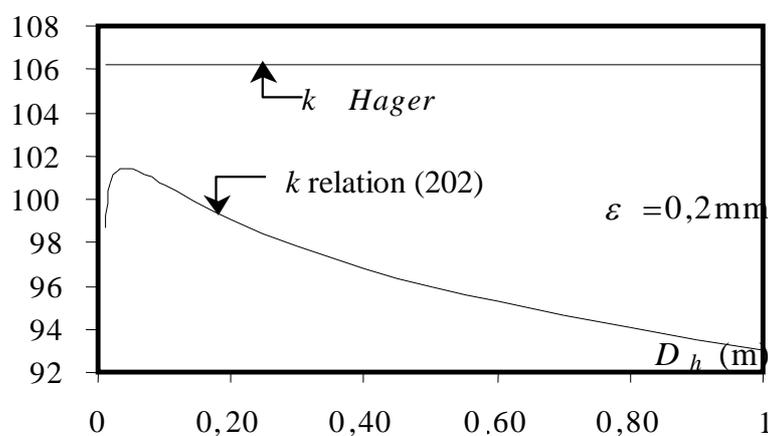


Figure 13 : Variation de k (relation 202) et k (relation (14) de Hager) en fonction de D_h (m) pour $\varepsilon = 0,2\text{mm}$

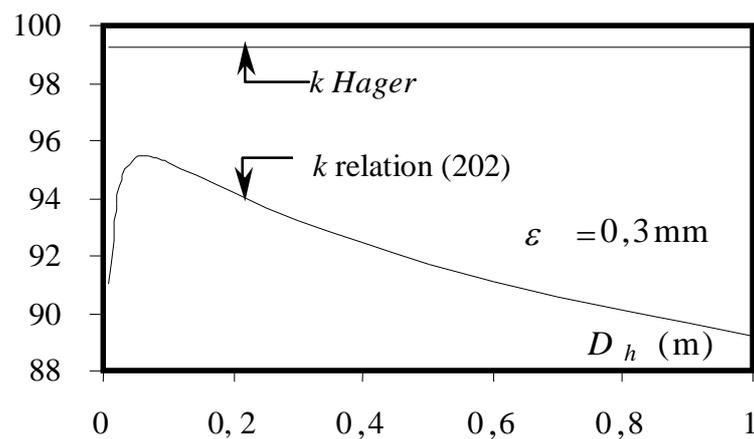


Figure 14 : Variation de k (relation 202) et k (relation (14) de Hager) en fonction de D_h (m) pour $\varepsilon = 0,3\text{mm}$

Nous pouvons constater que le coefficient de résistance k présente un maximum pour chaque valeur de ε . Ce maximum peut être aisément déterminé en égalant à zéro la dérivée de la relation (202) par rapport à D_h , soit :

$$\frac{dk}{dD_h} = 2^{2,8} \sqrt{g} D_h^{-1,15} \left[\frac{1}{2,3} - 0,15 \log \left(3,7 \frac{D_h}{\varepsilon} \right) \right] = 0$$

soit :

$$D_h = 213,97 \varepsilon$$

On obtient ainsi que :

$$k_{\max} = \frac{9,026}{\varepsilon^{0,15}} \sqrt{g}$$

soit :

$$\frac{k_{\max} \varepsilon^{0,15}}{\sqrt{g}} = 9,026 \quad (203)$$

Les valeurs de k_{\max} sont regroupées dans le tableau 2, pour les trois valeurs considérées de la rugosité absolue ε .

Tableau 2 : calcul de k_{\max} par la relation (203)

| ε (m) | D_h (m) | k_{\max} |
|-------------------|-----------|------------|
| 0,0001 | 0,021 | 112,55 |
| 0,0002 | 0,042 | 101,44 |
| 0,0003 | 0,064 | 95,45 |

Notons que le coefficient de résistance de l'écoulement k doit être, selon la relation (200), exprimé en $m^{0,35}/s$.

La vitesse moyenne dans une section transversale, d'après l'équation de continuité, s'écrit $V=Q/A$ et le rayon hydraulique par définition est $R_h=A/P$. En tenant compte de ces considérations, la relation (198) devient :

$$Q = 2 \sqrt{2g} 4^{0,15} \beta \frac{A^{1,65}}{P^{0,65}} \sqrt{J} \quad (204)$$

En tenant compte de (90) et (91), la relation (204) peut s'écrire :

$$Q = 2 \sqrt{2g} 4^{0,15} \beta a^{2,65} \frac{A_1^{1,65}}{P_1^{0,65}} \sqrt{J} \quad (205)$$

Ou bien :

$$a = \left[\frac{Q}{2\sqrt{2g} 4^{0,15} \beta \sqrt{J}} \right]^{2,65} \frac{P_1^{0,65}}{A_1^{1,65}} \quad (206)$$

Par analogie à la relation (95), la relation (206) s'écrit sous la forme suivante :

$$\Lambda = \left[\frac{Q}{2\sqrt{2g} 4^{0,15} \beta \sqrt{J}} \right]^{2,65} \quad (207)$$

et :

$$a_0 = \frac{P_1^{0,65}}{A_1^{1,65}} \quad (208)$$

Ou bien :

$$a_0 = \frac{P_1^{0,245}}{A_1^{0,623}} \quad (209)$$

En vertu de la relation (197), la relation (207) devient :

$$\Lambda = \left[\frac{Q D_h^{0,15}}{2\sqrt{2g} 4^{0,15} f^{-1/2} \sqrt{J}} \right]^{2,65} \quad (210)$$

En tenant compte de (55), la relation (210) doit prendre la forme suivante :

$$\Lambda = \left[\frac{Q D_h^{0,15}}{2\sqrt{2g} 4^{0,15} \sqrt{J} 2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right)} \right]^{2,65} \quad (211)$$

En vertu de (185), la relation (211) devient :

$$\Lambda^{2,65} = \frac{Q \Lambda^{0,15} D_{h0}^{0,15}}{4^{1,15} \sqrt{2g} \sqrt{J} \log \left(\frac{\Lambda D_{h0} 3,7}{\varepsilon} \right)} \quad (212)$$

Ou bien :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = \frac{2^{2,8} \sqrt{g}}{D_{h0}^{0,15}} \Lambda^{5/2} \log \left(3,7 D_{h0} \frac{\Lambda}{\varepsilon} \right) \quad (213)$$

La relation (213) exprime ainsi la conductivité de la conduite. Cette relation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{Q}{\sqrt{gJ\varepsilon^5}} = \frac{2^{2,8}}{D_{h0}^{0,15}} \left(\frac{\Lambda}{\varepsilon}\right)^{5/2} \log\left(3,7D_{h0}\frac{\Lambda}{\varepsilon}\right) \quad (214)$$

I.3.2. Expression du paramètre de dimension D_{h0}

Le diamètre hydraulique s'écrit d'après la relation (114) comme suit :

$$D_h = 4\Lambda a_0 \frac{A_1}{P_1} \quad (114)$$

La relation (114) permet d'écrire, en tenant compte de la relation (185) :

$$D_{h0} = 4a_0 \frac{A_1}{P_1}$$

En tenant compte de (208), la relation (214) devient :

$$D_{h0} = 4 \left(\frac{\sqrt{A_1}}{P_1} \right)^{0,755} \quad (215)$$

La relation (215) permet le calcul du paramètre de dimension D_{h0} pour tout profil géométrique et ne dépend que du paramètre de forme ω .

I.3.3. Application à la conduite circulaire

I.3.3.1. Paramètres de dimension des conduites circulaires

Dans le cas de la conduite circulaire (Figure 10) les paramètres A_1 et P_1 , si on considère le diamètre D comme dimension linéaire à recherchée, sont donnés par les relations (99) et (100) respectivement.

En tenant compte des relations (99) et (100), la relation (215) s'écrit :

$$D_{h0} = 2^{1,245} \left(\frac{\sqrt{\theta - \sin\theta \cos\theta}}{\theta} \right)^{0,755} \quad (216)$$

La relation (216) représente le paramètre de dimension D_{h0} du diamètre hydraulique D_h .

Le paramètre de dimension D_0 du diamètre D est :

$$D_0 = \frac{P_1^{0,245}}{A_1^{0,623}} = \frac{\theta^{0,245}}{[(\theta - \sin\theta \cos\theta)/4]^{0,623}} \quad (217)$$

Le paramètre de dimension h_0 de la profondeur h est :

$$h_0 = \xi D_0 = \frac{\xi \theta^{0,245}}{[(\theta - \sin\theta \cos\theta)/4]^{0,623}} \quad (218)$$

Pour la section mouillée A , le paramètre de dimension A_0 est :

$$A_0 = a_0^2 A_1 = \frac{P_1^{0,491}}{A_1^{0,245}} = \frac{\theta^{0,491}}{[(\theta - \sin\theta \cos\theta)/4]^{0,245}} \quad (219)$$

Pour le périmètre mouillé P , le paramètre de dimension P_0 est :

$$P_0 = a_0 P_1 = \left(\frac{P_1}{\sqrt{A_1}} \right)^{1,245} = \left(\frac{2\theta}{\sqrt{\theta - \sin\theta \cos\theta}} \right)^{1,245} \quad (220)$$

I.3.3.2. Conditions optimales

La représentation graphique (figure 15) des relations (216), (219) montre que le paramètre de dimension D_{h0} présente un maximum, tandis que A_0 présente un minimum pour une valeur optimale du paramètre de forme $\xi = \xi_{opt}$. Cette valeur peut être aisément déterminée en égalant à zéro les dérivées $dD_{h0}/d\xi$ et $dA_0/d\xi$, soit :

$$\xi = \xi_{opt} = 1/2 \quad (221)$$

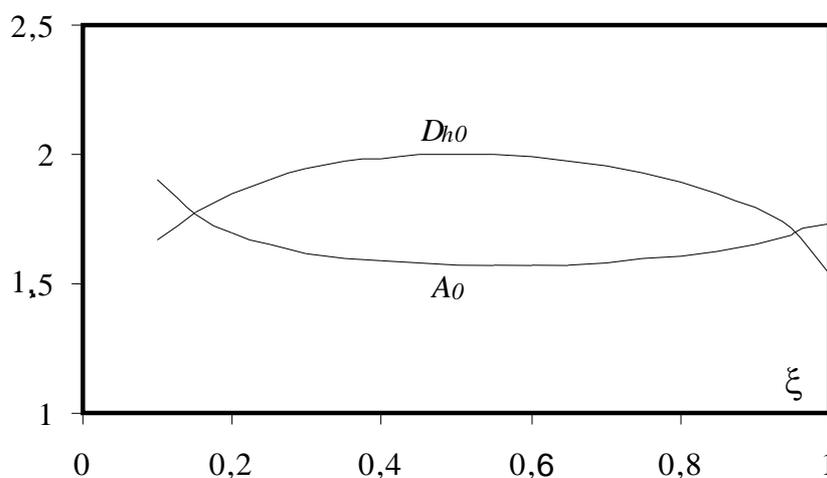


Figure 15 : Variation de D_{h0} et A_0 en fonction du paramètre de forme ξ selon les relations (216) et (219).

La figure 16 montre la variation de D_0 , h_0 et P_0 en fonction du paramètre de forme ξ . On peut observer que D_0 et P_0 présentent un minimum. Le calcul indique que le minimum de D_0 est atteint pour $\xi = \xi_{opt} = 0,939$. Cette valeur peut être déterminée en égalant à zéro la dérivée $dD_0/d\xi$.

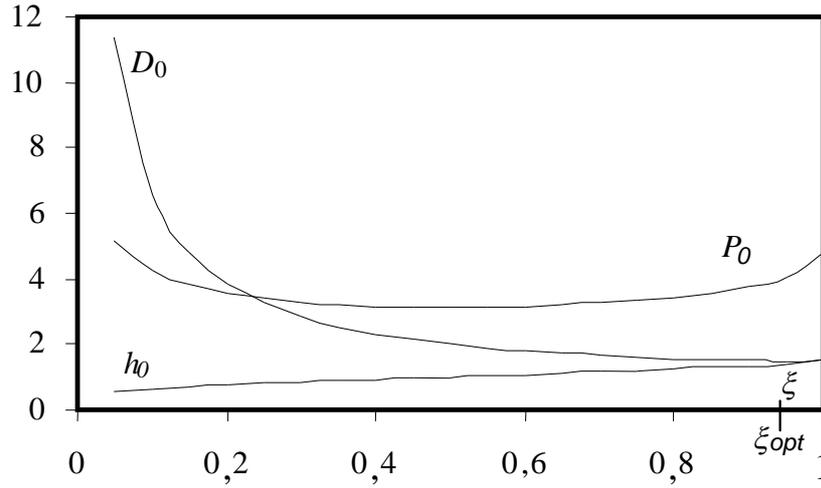


Figure 16: Variation de D_0 , h_0 et P_0 en fonction du paramètre de forme ξ selon les relations (217), (218) et (220).

La relation (217) permet d'écrire que $dD_0/d\xi = d(P_1^{0,245}/A_1^{0,623})/d\xi = 0$, ou bien, en tenant compte de (99) et (100) :

$$0,65A_1 \frac{dP_1}{d\xi} - 1,65P_1 \frac{dA_1}{d\xi} = 0 \Leftrightarrow 0,65A_1 \frac{d\theta}{d\xi} - \frac{1,65}{4} P_1 \frac{d\theta}{d\xi} (1 - \cos 2\theta) = 0$$

Soit :

$$2,6A_1 = 1,65P_1 (1 - \cos 2\theta)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{0,65} \theta (1,65 \cos 2\theta - 1) = \sin \theta \cos \theta \quad (222)$$

La solution de la relation (222) correspond à $\theta = 2,6435$ radians ou bien à $\xi = (1 - \cos \theta)/2 \approx 0,939$.

En ce qui concerne le minimum de P_0 , la relation (220) indique que $dP_0/d\xi = 0$, soit

$$\frac{d}{d\xi} \left[\left(P_1 / \sqrt{A_1} \right)^{1,245} \right] = 0. \text{ En tenant compte des relations (99) et (100), on peut aisément montrer que :}$$

$$4A_1 = \frac{\theta}{2} (1 - \cos 2\theta), \text{ ou bien :}$$

$$\frac{\theta}{2} (1 + \cos 2\theta) = \sin \theta \cos \theta \quad (223)$$

La solution de la relation (223) correspond à $\theta = 1,5708$ radians, soit $\xi = 1/2$.

Le calcul montre également que :

$$P_0 (\xi = 1/2) = P_0 \text{ min.} = 3,14, \quad D_{h_0} (\xi = 1/2) = D_{h_0} \text{ max.} = 1,999,$$

$$A_0 (\xi = 1/2) = A_0 \text{ min.} = 1,57, \quad D_0 (\xi = 0,939) = D_0 \text{ min.} = 1,499.$$

La longueur fluide-dynamique Λ s'écrit, en tenant compte des relations (213) et (216) :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = 6,119 \sqrt{g} \frac{\theta^{0,113}}{(\theta - \sin\theta \cos\theta)^{0,057}} \Lambda^{5/2} \log \left[8,77 \left(\frac{\sqrt{\theta - \sin\theta \cos\theta}}{\theta} \right)^{0,755} \frac{\Lambda}{\varepsilon} \right] \quad (224)$$

Ou bien :

$$\frac{Q}{\sqrt{Jg\varepsilon^5}} = 6,119 \frac{\theta^{0,113}}{(\theta - \sin\theta \cos\theta)^{0,057}} \left(\frac{\Lambda}{\varepsilon} \right)^{5/2} \log \left[8,77 \left(\frac{\sqrt{\theta - \sin\theta \cos\theta}}{\theta} \right)^{0,755} \frac{\Lambda}{\varepsilon} \right] \quad (225)$$

I.3.4. Cas de la conduite circulaire entièrement occupée par l'écoulement

Pour le cas particulier de la conduite circulaire entièrement occupée par l'écoulement (θ est égal à π), le paramètre de dimension du diamètre hydraulique D_{h0} peut être calculé par application de la relation (216) :

$$D_{h0} = 2^{1,245} \left(\frac{\sqrt{\theta - \sin\theta \cos\theta}}{\theta} \right)^{0,755} = 1,539 \quad (216)$$

En tenant compte de cette considération, la relation (224) devient :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = 6,528 \sqrt{g} \Lambda^{5/2} \log \left(5,695 \frac{\Lambda}{\varepsilon} \right) \quad (226)$$

Ou bien, selon la relation (225) :

$$\frac{Q}{\sqrt{gJ\varepsilon^5}} = 6,528 \left(\frac{\Lambda}{\varepsilon} \right)^{5/2} \log \left(5,695 \frac{\Lambda}{\varepsilon} \right) \quad (227)$$

Afin de faciliter l'utilisation de cette relation, nous avons proposé en annexe un tableau de valeurs (Tableau A2) permettant l'estimation de la longueur fluide-dynamique Λ ($Q/\sqrt{gJ\varepsilon^5} = f(\Lambda/\varepsilon)$).

En posant $\varphi = Q/\sqrt{gJ\varepsilon^5}$, la relation (227) peut s'écrire :

$$\varphi = 6,528 \left(\frac{\Lambda}{\varepsilon} \right)^{5/2} \log \left(5,695 \frac{\Lambda}{\varepsilon} \right) \quad (228)$$

La relation (228) se présente sous une forme implicite vis-à-vis de Λ . Un ajustement a permis de proposer, avec une excellente corrélation, une relation explicite (figure 17):

$$\frac{\Lambda}{\varepsilon} = 0,4115 \varphi^{0,3814} \quad (229)$$

Notons que la formule explicite (229) est applicable pour $\Lambda/\varepsilon \geq 50$, avec une erreur relative maximale inférieure à 1,3 %.

En ce qui concerne les faibles valeurs de Λ/ε ($\Lambda/\varepsilon < 50$), il faut appliquer la relation (226) ou (227), en s'appuyant sur un procédé itératif.

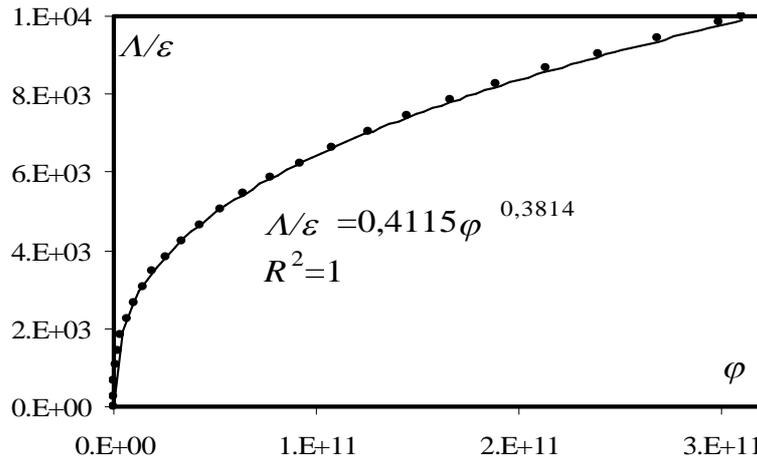


Figure 17: (—) Courbe tracée suivant la relation (229), (●●●●) Points obtenus selon la relation (228)

Application

Soit à déterminer, sous un gradient de perte de charge $J=9.10^{-3}$, le diamètre D d'une conduite circulaire entièrement occupée par un écoulement d'eau de débit $Q=400$ l/s. La rugosité absolue de la paroi est $\varepsilon=0,75$ mm et l'accélération de la pesanteur $g=9,81$ m/s².

L'application de la relation (96) permet le calcul du diamètre de la conduite circulaire D .

Dans le cas de la conduite circulaire pleine on a $D_0=D_{h0}=1,539$.

En utilisant un procédé itératif, la longueur fluïdo-dynamique Λ est calculée par la relation implicite (226), soit $\Lambda=0,326$ m et par suite $D=\Lambda D_0 =0,502$ m.

La vérification du gradient de perte de charge J s'effectue par l'application de la relation (195).

Le coefficient de frottement f peut être calculé par application de la relation de *Nikuradse* dans le domaine turbulent rugueux :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right)$$

soit $f = 0,0217$.

Selon la relation (195), le gradient J de la perte de charge est : $J=9,000001.10^{-3}$, ce qui montre la validité du calcul du diamètre D .

Afin de montrer la fiabilité et la simplicité de la relation explicite (229), nous procédons comme suit :

- Calculons le paramètre sans dimension φ par la relation suivante : $\varphi = Q / \sqrt{gJ\varepsilon^5}$.

$$\varphi = \frac{0,4}{\sqrt{9,81 \cdot 0,009 \cdot 0,00075^5}} = 87387852$$

- Calculons le nombre $\frac{\Lambda}{\varepsilon}$ par la relation (229) :

$$\frac{\Lambda}{\varepsilon} = 0,4115 \varphi^{0,3814} = 0,4115 \cdot 87387852^{0,3814} = 439,78$$

Comme nous l'avons indiquée précédemment, la formule (229) est applicable pour $\Lambda/\varepsilon \geq 50$.

$$\frac{\Lambda}{\varepsilon} = 439,78 > 50 \rightarrow \text{condition vérifiée.}$$

- Calculons la valeur de Λ :

$$\Lambda = 439,78 \varepsilon = 439,78 \cdot 0,00075 = 0,3298 \text{ m}$$

L'écart relatif entre Λ calculée par la relation implicite (226) et celle calculée par la relation explicite (229) est : $\frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} = 1,12\%$, cette écart est inférieur à l'écart relatif maximal (1,3%).

- Le diamètre D est évalué par la relation (96) :

$$D = \Lambda D_0 = 0,3298 \cdot 1,539 = 0,508 \text{ m.}$$

I.3.5. Cas de la conduite circulaire partiellement occupée par l'écoulement

Dans le cas de la conduite circulaire partiellement occupée par l'écoulement nous avons choisi une série de valeurs variant entre 0,1 et 0,9 pour le taux de remplissage (paramètre de forme) ξ .

La relation (213) peut s'écrire :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = C_1 \Lambda^{5/2} \log \left(C_2 \frac{\Lambda}{\varepsilon} \right) \quad (230)$$

Avec :

$$C_1 = \frac{2^{2,8} \sqrt{g}}{D_{h0}^{0,15}} \quad (231)$$

et :

$$C_2 = 3,7 D_{h0} \quad (232)$$

Nous avons calculé les constantes C_1 et C_2 , pour chaque valeur du taux de remplissage ξ ; les résultats sont regroupés dans le tableau 3.

Le demi-angle au centre θ et le paramètre de dimension D_{h0} sont calculés respectivement par les relations (101) et (216).

Tableau 3 : calcul des constantes C_1 et C_2 par les relations (231) et (232).

| ξ | θ (rad) | D_{h0} | C_1 | C_2 |
|-------|----------------|----------|--------|-------|
| 0,1 | 0,644 | 1,669 | 20,199 | 6,177 |
| 0,2 | 0,927 | 1,852 | 19,886 | 6,854 |
| 0,3 | 1,159 | 1,942 | 19,745 | 7,187 |
| 0,4 | 1,369 | 1,986 | 19,679 | 7,349 |
| 0,5 | 1,571 | 1,999 | 19,660 | 7,397 |
| 0,6 | 1,772 | 1,987 | 19,678 | 7,353 |
| 0,7 | 1,982 | 1,952 | 19,730 | 7,223 |
| 0,8 | 2,214 | 1,891 | 19,825 | 6,998 |
| 0,9 | 2,498 | 1,793 | 19,984 | 6,635 |

Nous avons proposé en annexe de ce mémoire (tableaux A3 à A11) quelques valeurs exactes du paramètre Λ , calculées en utilisant un procédé itératif. La rugosité absolue ε et la conductivité Q/\sqrt{J} ont été variées respectivement entre 0,1 mm - 0,5 mm et 0,001 m³/s - 9 m³/s.

Application

Soit à déterminer, sous un gradient de perte de charge $J=9.10^{-3}$, les diamètres D correspondants aux différents taux de remplissage $\xi=0,1\div 0,9$ d'une conduite circulaire partiellement occupée par un écoulement d'eau de débit $Q=400$ l/s. La rugosité absolue de la paroi est $\varepsilon=0,75$ mm et l'accélération de la pesanteur est $g=9,81$ m/s².

L'application de la relation (96) permet le calcul du diamètre de la conduite circulaire D .

Vérification du gradient de perte de charge J :

La relation de *Darcy-Weisbach* peut s'écrire sous la forme suivante :

$$J = \frac{f}{8g} \frac{PQ^2}{A^3} \quad (233)$$

Les résultats de calcul sont regroupés dans le tableau 4.

Tableau 4 : Calcul de D et J pour le cas de la conduite partiellement remplie.

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|----------------|----------|-------|---------------|---------|-----------|
| ξ | θ (rad) | D_{h0} | D_0 | Λ (m) | D (m) | D_h (m) |
| 0,1 | 0,644 | 1,669 | 6,571 | 0,32640919 | 2,14 | 0,545 |
| 0,2 | 0,927 | 1,852 | 3,840 | 0,3267223 | 1,26 | 0,605 |
| 0,3 | 1,159 | 1,942 | 2,841 | 0,32686433 | 0,93 | 0,635 |
| 0,4 | 1,369 | 1,986 | 2,318 | 0,32693643 | 0,76 | 0,649 |
| 0,5 | 1,571 | 1,999 | 1,999 | 0,32695764 | 0,65 | 0,654 |
| 0,6 | 1,772 | 1,987 | 1,790 | 0,32693828 | 0,59 | 0,650 |
| 0,7 | 1,982 | 1,952 | 1,648 | 0,32688055 | 0,54 | 0,638 |
| 0,8 | 2,214 | 1,891 | 1,554 | 0,3267793 | 0,51 | 0,618 |
| 0,9 | 2,498 | 1,793 | 1,504 | 0,32661417 | 0,49 | 0,586 |

Tableau 4 (suite et fin): Calcul de D et J pour le cas de la conduite partiellement remplie.

| 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|-----------|--------|-----------------------|---------|-------------|-------------|
| $f^{1/2}$ | f | A (m ²) | P (m) | J | Observation |
| 6,859 | 0,0213 | 0,188 | 1,380 | 0,008998861 | Vérifié |
| 6,950 | 0,0207 | 0,176 | 1,164 | 0,008998861 | Vérifié |
| 6,992 | 0,0205 | 0,171 | 1,076 | 0,009000001 | Vérifié |
| 7,011 | 0,0203 | 0,168 | 1,038 | 0,009000001 | Vérifié |
| 7,017 | 0,0203 | 0,168 | 1,027 | 0,009000001 | Vérifié |
| 7,012 | 0,0203 | 0,168 | 1,037 | 0,009000001 | Vérifié |
| 6,996 | 0,0204 | 0,170 | 1,068 | 0,009000001 | Vérifié |
| 6,968 | 0,0206 | 0,174 | 1,125 | 0,009000001 | Vérifié |
| 6,922 | 0,0209 | 0,180 | 1,227 | 0,009000001 | Vérifié |

Nous avons procédé aux différentes étapes de calcul en utilisant les relations suivantes :

1. $\xi=0,1$ à $0,9$
2. $\theta = \cos^{-1}(1-2\xi)$ (101)

3. $D_{h0} = 2^{1,245} \left(\frac{\sqrt{\theta - \sin\theta \cos\theta}}{\theta} \right)^{0,755}$ (216)

$$4. \quad D_0 = \frac{\theta^{0,245}}{[(\theta - \sin\theta \cos\theta)/4]^{0,623}} \quad (217)$$

$$5. \quad \frac{Q}{\sqrt{J}} = C_1 A^{5/2} \log\left(C_2 \frac{\Lambda}{\varepsilon}\right) \quad (230)$$

$$6. \quad D = \Lambda D_0 \quad (96)$$

$$7. \quad D_h = \Lambda D_{h0} \quad (185)$$

$$8. \quad f^{-1/2} = -2 \log\left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7}\right) \quad (55)$$

$$10. \quad A = \frac{D^2}{4} (\theta - \sin\theta \cos\theta) \quad (97)$$

$$11. \quad P = \theta D \quad (98)$$

$$12. \quad J = \frac{f}{8g} \frac{PQ^2}{A^3} \quad (233)$$

I.3.6. Relation générale au calcul des conduites en charge et à surface libre

Afin d'établir une formule générale unique au calcul de l'écoulement uniforme turbulent rugueux, pour les conduites en charge et à surface libre, nous avons affecté au paramètre de dimension D_{h0} la moyenne géométrique calculée dans son domaine de variation [1,4 ; 2] :

$$D_{h0} = \sqrt{1,4 \times 2} = 1,673 \approx \frac{5}{3}$$

A la valeur minimale $D_{ho \min} = 1,4$ correspond la valeur $\theta \approx 0,383$ radians et $\xi \approx 0,036$. Par contre, à la valeur maximale $D_{ho \max} = 2$ correspond $\theta \approx 1,5708$ radians et $\xi = 1/2$.

En remplaçant D_{ho} par sa valeur moyenne géométrique $D_{h0} = 1,673$ dans la relation générale (214), il ressort que :

$$\varphi = \frac{Q}{\sqrt{g J \varepsilon^5}} = 6,447 \left(\frac{\Lambda}{\varepsilon}\right)^{5/2} \log\left(6,2 \frac{\Lambda}{\varepsilon}\right) \quad (234)$$

Cependant, il faut noter que l'introduction d'une valeur moyenne géométrique peut impliquer des erreurs sur le calcul de Λ et de la conductivité Q/\sqrt{J} . Pour examiner l'importance des écarts obtenus lors du calcul de ce dernier paramètre, nous avons évalué dans ce qui suit l'erreur relative maximale sur la valeur calculée de la conductivité Q/\sqrt{J} .

I.3.6.1. Calcul de l'erreur relative maximale commise sur le calcul de la conductivité

Afin de calculer l'erreur relative maximale commise sur le calcul de la conductivité, nous devons faire appel à la relation (213) :

$$\frac{Q}{\sqrt{J}} = \frac{2^{2,8} \sqrt{g}}{D_{h0}^{0,15}} A^{5/2} \log\left(\frac{\Lambda D_{h0} 3,7}{\varepsilon}\right) \quad (213)$$

Nous procédons alors à la dérivée de la conductivité Q/\sqrt{J} par rapport à D_{h0} :

$$\delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right) = \frac{\Delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right)}{\frac{Q}{\sqrt{J}}} = \frac{\frac{\delta}{\delta D_{h0}}\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right)}{\frac{Q}{\sqrt{J}}} \Delta D_{h0} \quad (235)$$

Soit :

$$\delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right) = \frac{\Delta D_{h0}}{D_{h0}} \left[\frac{0,434}{\log\left(\frac{3,7}{\varepsilon/D_h}\right)} - 0,15 \right] \quad (236)$$

$D_{h0} = \frac{5}{3}$, correspondant à la moyenne géométrique de l'intervalle [1,4 ; 2].

ΔD_{h0} , est l'écart maximal, soit $\Delta D_{h0} = (2 - \frac{5}{3}) = \frac{1}{3}$.

En tenant compte de ces considérations, la relation (236) s'écrit :

$$\delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right) = \frac{3}{5} \left[\frac{0,434}{\log\left(\frac{3,7}{\varepsilon/D_h}\right)} - 0,15 \right] \Delta D_{h0} \quad (237)$$

Ou bien :

$$\delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right) = f(\varepsilon/D_h) \Delta D_{h0} \quad (238)$$

Avec :

$$f(\varepsilon/D_h) = \frac{3}{5} \left[\frac{0,434}{\log\left(\frac{3,7}{\varepsilon/D_h}\right)} - 0,15 \right]$$

La relation (238) montre que l'erreur relative commise sur le calcul de la conductivité Q/\sqrt{J} est fonction de la rugosité relative ε/D_h . Pour calculer $\delta\left(\frac{Q}{\sqrt{J}}\right)$, nous avons considéré toutes les

valeurs de ε/D_h qui ont servies au tracé du diagramme de *Moody*. Les résultats sont regroupés dans le tableau 5, ce tableau montre que l'erreur relative maximale est égale à 1,65 %, correspondant à la rugosité relative maximale $\varepsilon/D_h = 5 \cdot 10^{-2}$. Ainsi, la valeur calculée de l'erreur relative maximale n'a pas une influence importante sur le calcul de la conductivité, ce qui permet d'adopter la moyenne géométrique du paramètre de dimension D_{h0} pour le calcul des conduites circulaires en charge et à surface libre lorsque l'écoulement est dans le domaine turbulent rugueux.

Tableau 5 : Calcul de $\delta(Q/\sqrt{J})$ selon la relation (238).

| ε/D_h | $f(\varepsilon/D_h)$ | ΔD_{h0} | $\delta(Q/\sqrt{J})$ | $\delta(Q/\sqrt{J})$ en (%) |
|---------------------|----------------------|-----------------|----------------------|-----------------------------|
| $5 \cdot 10^{-2}$ | 0,0494 | 1/3 | 0,0165 | 1,65 |
| $4 \cdot 10^{-2}$ | 0,0425 | 1/3 | 0,0142 | 1,42 |
| $3 \cdot 10^{-2}$ | 0,0346 | 1/3 | 0,0115 | 1,15 |
| $2,5 \cdot 10^{-2}$ | 0,0301 | 1/3 | 0,01 | 1 |
| $2 \cdot 10^{-2}$ | 0,0249 | 1/3 | 0,00831 | 0,83 |
| $1,5 \cdot 10^{-2}$ | 0,0189 | 1/3 | 0,00631 | 0,63 |
| 10^{-2} | 0,0115 | 1/3 | 0,00382 | 0,38 |
| $8 \cdot 10^{-3}$ | 0,0078 | 1/3 | 0,00259 | 0,26 |
| $6 \cdot 10^{-3}$ | 0,0034 | 1/3 | 0,00113 | 0,11 |
| $4 \cdot 10^{-3}$ | -0,0021 | 1/3 | -0,000717 | 0,07 |
| $3 \cdot 10^{-3}$ | -0,0058 | 1/3 | -0,0019 | 0,19 |
| $2 \cdot 10^{-3}$ | -0,0102 | 1/3 | -0,00341 | 0,34 |
| $1,5 \cdot 10^{-3}$ | -0,0132 | 1/3 | -0,00439 | 0,44 |
| $1 \cdot 10^{-3}$ | -0,0170 | 1/3 | -0,00566 | 0,57 |
| $8 \cdot 10^{-4}$ | -0,0189 | 1/3 | -0,0063 | 0,63 |
| $6 \cdot 10^{-4}$ | -0,0212 | 1/3 | -0,00708 | 0,71 |
| $4 \cdot 10^{-4}$ | -0,0243 | 1/3 | -0,0081 | 0,81 |
| $2 \cdot 10^{-4}$ | -0,0289 | 1/3 | -0,00964 | 0,96 |
| 10^{-4} | -0,033 | 1/3 | -0,011 | 1,1 |
| $6 \cdot 10^{-5}$ | -0,0356 | 1/3 | -0,0119 | 1,19 |
| $4 \cdot 10^{-5}$ | -0,0375 | 1/3 | -0,0125 | 1,25 |

La figure 18 montre la variation de l'erreur relative $\delta(Q/\sqrt{J})$ en pourcentage en fonction de la rugosité relative ε/D_h .

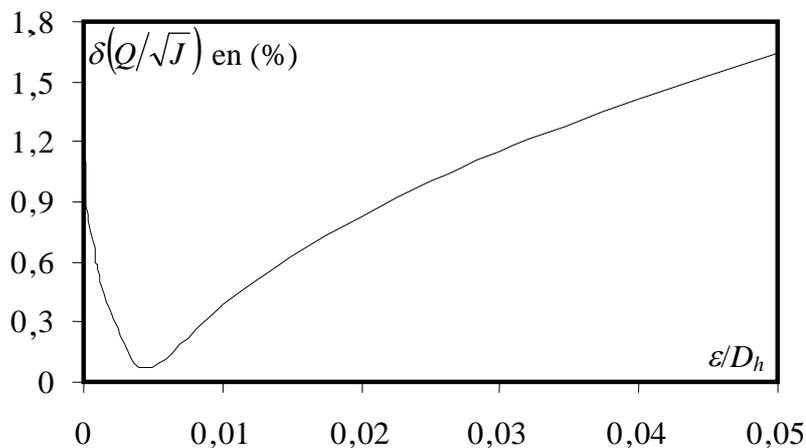


Figure 18: Variation de $\delta(Q/\sqrt{J})$ en pourcentage en fonction de ε/D_h selon le tableau 5

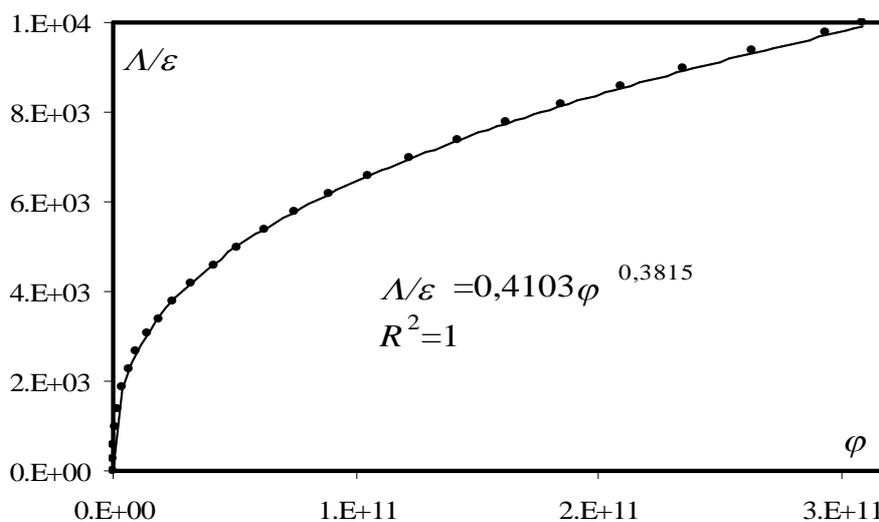


Figure 19: (—) Courbe tracée suivant la relation (239), (••••) Points obtenus selon la relation (234)

Le tableau A12 représenté en annexe, donne quelques valeurs de Λ/ε selon la relation (234).

L'ajustement, de type puissance, de la relation (234) nous a donné une formule simple et explicite (figure 19) applicable pour $\Lambda/\varepsilon \geq 50$ avec une erreur relative maximale $< 1,3\%$:

$$\frac{\Lambda}{\varepsilon} = 0,4103 \varphi^{0,3815} \quad (239)$$

Application

Soit à déterminer, sous un gradient de perte de charge $J=9.10^{-3}$, le diamètre D d'une conduite circulaire entièrement occupée par un écoulement d'eau de débit $Q=400$ l/s. La rugosité absolue de la paroi est $\varepsilon=0,75$ mm et l'accélération de la pesanteur $g=9,81\text{m/s}^2$.

L'application de la relation (96) permet le calcul du diamètre de la conduite circulaire D .

En utilisant un procédé itératif, la longueur fluïdo-dynamique Λ est calculée par la relation implicite (234) $\Rightarrow \Lambda=0,326$ m et par suite, $D=0,502$ m.

Vérification de J :

La vérification du gradient de perte de charge J s'effectue par l'application de la relation (195).

Le coefficient de frottement f peut être calculé par la relation de *Nikuradse* :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right) \Rightarrow f = 0,0217$$

Selon la relation (195) : $J=8,965941.10^{-3} \approx 9.10^{-3}$ et l'écart est donc de 0,38%. Ce qui peut être considéré comme étant très satisfaisant.

I.4. Conclusion

L'objectif principal du chapitre précédent a été de proposer, par une approche nouvelle, un développement théorique au calcul de l'écoulement uniforme.

Nous nous sommes intéressés exclusivement au domaine d'écoulement turbulent rugueux qui demeure, selon plusieurs auteurs, l'écoulement le plus répandu dans la pratique.

Bien que le but premier de notre recherche soit l'approfondissement des connaissances de l'écoulement uniforme dans les conduites circulaires, notre développement théorique demeure valable pour tout profil géométrique de canaux.

Lors de notre développement théorique, nous nous sommes fixés pour but d'établir la relation exprimant la conductivité d'un canal ou d'une conduite. La bibliographie a montré que cette relation a déjà été établie, mais nous avons discuté le contexte et les hypothèses ayant servis à son établissement.

Afin d'atteindre notre objectif, nous avons considéré la relation de *Nikuradse*, établie en conduite circulaire, et que nous avons voulu généraliser à tout profil géométrique. Le tracé graphique du coefficient de frottement f de *Nikuradse* en fonction du diamètre hydraulique et pour une rugosité absolue donnée des parois du canal ou de la conduite considéré, indique une courbe relativement plate. En raison de cette particularité, nous avons suggéré de la remplacer et de l'équilibrer par une série de droites sécantes. Nous avons suggéré, dans un premier temps, d'affecter à ces droites une

penne unique correspondant à celle proposée par *Strickler*, soit 1/6. Dans un second temps, notre calcul a montré que la valeur moyenne de la pente des droites sécantes était de 0,15, valeur proche en définitive de celle de *Strickler*.

En tenant compte de ces considérations, le développement théorique a abouti à l'établissement de la relation exprimant la vitesse moyenne de l'écoulement. La relation obtenue pouvait, par sa forme, se rapprocher de celle proposée par *Strickler*. Cependant, une différence notable a été observée dans l'expression du coefficient de résistance de l'écoulement qui, selon *Strickler*, prend une valeur unique pour un canal donné. Or, notre développement théorique a montré que le coefficient de résistance dépendait à la fois de la rugosité absolue des parois du canal ainsi que du diamètre hydraulique de l'écoulement. Ce résultat nous paraît physiquement justifié puisque le coefficient de résistance devrait varier en fonction de la nature de la paroi du canal mais aussi et surtout en fonction de la profondeur de l'écoulement. Il nous paraît donc inadmissible de suggérer, que le coefficient de résistance de l'écoulement soit identique pour différentes profondeurs d'écoulement dans un canal donné.

Ainsi, notre développement théorique a pu mener à l'établissement de la relation (214) liant trois

paramètres composés qui sont la conductivité relative $\frac{Q}{\sqrt{gJ\varepsilon^5}}$, le paramètre de dimension D_{h0}

dépendant du paramètre de forme de l'écoulement et la longueur Λ . Lorsque l'écoulement s'effectue dans une conduite circulaire en charge, le paramètre de dimension prend une valeur constante et la relation (214) se réduit à une relation fonctionnelle de deux paramètres composés seulement.

Nous avons montré que la relation (214) pouvait servir à évaluer le diamètre de conduites à surface libre ou en charge, à partir de la valeur généralement connue de la conductivité. La relation (214) est donc destinée à répondre à un besoin de dimensionnement.

Dans le cas des conduites à surface libre, notre étude a montré que le paramètre de dimension D_{h0} variait dans un intervalle de valeurs relativement restreint. En suggérant de remplacer cet intervalle de valeurs par sa moyenne géométrique, il a été possible d'établir une relation généralisée applicable à la fois aux cas des écoulement à surface libre et en charge en conduites circulaires.

Le caractère implicite de la relation obtenue nous a conduit, par un ajustement adéquat, à la remplacer par une équation simplifiée et pratique.