

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département de Génie civil et d'Hydraulique
Réf :/2016



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة المدنية والري
المرجع:/ 2016

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat en sciences

Spécialité : Hydraulique

Thème

**Contribution par la MMR au calcul de la
profondeur normale**

Présentée par:

SEHTAL Sabah

Soutenue publiquement le : *12 Mai 2016*

Devant le jury composé de:

Pr. REMINI Boualem

Pr. ACHOUR Bachir

Pr. DEBABECHE Mahmoud

Pr. BOUZIANE Med Toufik

Pr. HAMOUDI Saad

Pr. HOUICHI Larbi

Professeur

Professeur

Professeur

Professeur

Professeur

Professeur

Président

Rapporteur

Examineur

Examineur

Examineur

Examineur

Université de Blida

Université de Biskra

Université de Biskra

Université de Biskra

Université de Chelf

Université de Batna

REMERCIEMENTS

À l'issue de ce modeste travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes vifs remerciements à Monsieur *ACHOUR Bachir*, Professeur à l'Université de Biskra et directeur du laboratoire de recherche *LARHYSS*, qui a accepté de diriger ce travail, pour ses nombreux conseils, ses encouragements, pour la confiance qu'il m'a accordée durant toutes les étapes de cette thèse et son soutien infaillible.

Je tiens à remercier très vivement Monsieur *REMINI Boualem*, Professeur à l'Université de Blida d'avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury.

J'exprime mes plus sincères remerciements à Monsieur *DEBABECHE Mahmoud*, Professeur à l'Université de Biskra, Monsieur *BOUZIANE Med Toufik*, Professeur à l'Université de Biskra, Monsieur *HAMOUDI Saad*, Professeur à l'Université de Chlef et Monsieur *Houichi Larbi*, Professeur à l'Université de Batna pour avoir accepté d'être examinateurs de cette thèse.

Enfin, un grand merci à tous ceux qui ont contribué à mon aide, soit de près ou de loin pour que mon travail soit à la hauteur.

DEDICACE

Je dédie ce travail à :

Mes parents ;

Mes frères et ma sœur ;

Toutes mes amies ;

Tous mes collègues ;

Tous ceux qui me sont chers.

Sehtal Sabah

R É S U M É

La profondeur normale joue un rôle important dans la conception des canaux ainsi que dans l'analyse de l'écoulement non uniforme. Actuellement, il n'existe aucune méthode analytique pour le calcul de la profondeur normale dans les canaux à surface libre. Les méthodes actuelles sont soit itératives ou approximatives. Elles considèrent aussi, de manière injustifiée, les coefficients de *Chézy* et de *Manning* comme une donnée du problème, en dépit du fait que ces coefficients dépendent de la profondeur normale recherchée.

Dans cette étude, une nouvelle approche est proposée pour estimer facilement la profondeur normale dans les canaux à surface libre. C'est la méthode du modèle rugueux (*MMR*). La méthode tient en compte, en particulier, l'effet de la rugosité absolue qui est un paramètre facilement mesurable en pratique.

Le principal avantage de la méthode proposée réside dans le fait que la détermination du coefficient de résistance à l'écoulement n'est pas requise et que son effet est implicitement considéré. L'approche théorique montre que les dimensions linéaires du canal étudié sont égales à celles du modèle rugueux de référence corrigées par les effets d'un facteur adimensionnel ψ . Celui-ci est bien défini lorsque le débit volume Q , la pente géométrique i du canal, la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne du canal et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement sont connus.

La validité de la méthode est mise en évidence à travers plusieurs applications pratiques.

Mots clés : Profondeur normale, Canaux, Ecoulement à surface libre, Méthode du modèle rugueux (*MMR*), Coefficient de *Chézy*, Coefficient de *Manning*.

ABSTRACT

Normal depth plays a significant role in the design of open channels and in the analysis of non-uniform flow as well. Currently, there is no analytical method for calculating the normal depth in the open channels. Current methods are either iterative or approximate. They also consider, unreasonably, Chezy's coefficient and Manning's roughness coefficient as a given data of the problem, despite the fact that these coefficients depend on the normal depth sought.

In this study, a new approach is proposed to easily estimate the normal depth in the open channels. This is the method of the rough model method (RMM). The method takes into account, in particular, the effect of the absolute roughness which is a readily measurable parameter in practice.

The main advantage of the proposed approach is the fact that the friction factor value is not required. The effects of the latter are implicitly taken into account. The theoretical approach clearly indicates that the linear dimensions of the studied canal are equal to those of the rough model corrected by effect of a non-dimensional factor ψ . The latter is well defined once discharge Q , the slope i , absolute roughness ε characterizing the state of the internal wall of the canal and the kinematic viscosity ν are known.

The validity of the proposed method is put forward through several practical applications.

Keywords : Normal depth, Channel, Open channel, the rough model method (RMM), coefficient of *Chezy*, *Manning* coefficient.

ملخص:

يلعب عمق الطبيعي دورا هاما في تحديد أبعاد القنوات وكذلك في تحليل التدفق غير موحد. حاليا، لا توجد أي طريقة تحليلية لحساب عمق الطبيعي في القنوات ذات الجريان السطحي. الأساليب الحالية إما متكررة أو تقريبية. ويعتبرون أيضا، بشكل غير مبرر ، معاملات شازي و مانينغ من معطيات المشكلة، على الرغم من أن هذه المعاملات مرتبطة بالعمق الطبيعي المطلوب.

في هذه الدراسة، نقترح أسلوبا جديدا لتقدير العمق الطبيعي بسهولة في القنوات ذات الجريان السطحي و تتمثل في نظرية النموذج الخشن (RMM). تأخذ الطريقة بعين الاعتبار، بشكل خاص، تأثير الخشونة المطلقة وهي معلمة قابلة للقياس بسهولة في الممارسة العملية.

والميزة الرئيسية للطريقة المقترحة تكمن في حقيقة أن تحديد معامل مقاومة تدفق غير مطلوب وأن تأثيره يعتبر ضمنا. و يبين ال منهج النظري أن الأبعاد الخطية للقناة المدروسة تكون مساوية لأبعاد النموذج الخشن المرجعي مصححة عن طريق آثار عامل غير بعدي ν . يكون هذا الأخير معرفا جيدا عندما يكون التدفق الحجمي Q ، ميل القناة i ، الخشونة المطلقة e و التي تميز حالة الجريان الداخلية للقناة واللزوجة الكينماتية ν من المعطيات.

وتتجلى صحة الطريقة من خلال العديد من التطبيقات العملية.

الكلمات المفتاحية : العمق الطبيعي ، القنوات ، الجريان السطحي ، نظرية نموذج الخشن (RMM) ، معامل شازي، معامل مانينغ .

SOMMAIRE

	PAGE
Remerciements	i
Dédicace	ii
Résumé	iii
Abstract	iv
ملخص	v
Principales notations	xiv
Liste des figures	xvii
Liste des tableaux	xix
Introduction générale	1

CHAPITRE I

Etat des connaissances sur l'écoulement uniforme	5
I.1. Introduction.....	5
I.2. Les différents types de canaux.....	5
I. 2.1. <i>Définition</i>	5
a) <i>Les canaux naturels</i>	6
b) <i>Les canaux artificiels</i>	6
I.2.2. <i>Géométrie des canaux</i>	7
I.3. Les écoulements dans les canaux.....	8
I.3.1. <i>Classification d'écoulement</i>	8
I.3.2. <i>Régime d'écoulement</i>	10
I.3.2.1. Nombre de Froude.....	10
I.3.2.2. Le nombre de <i>Reynolds</i>	10
I.4. Ecoulement uniforme.....	12
I.4.1. <i>Etablissement de l'écoulement uniforme</i>	12
I.4.2. <i>Equations hydrodynamiques</i>	16

I.4.2.1. Equation de continuité	16
I.4.2.2. Equation de mouvement.....	16
I.5. Calcul du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i>	19
I.5.1. <i>Formule de Ganguillet – Kutter</i>	19
I.5.2. <i>Formule de Bazin</i>	20
I.5.3. <i>Formule de Powell</i>	20
I.6. Formule de <i>Manning- Strickler</i>	21
I.7. Formule de <i>Darcy-Weisbach</i> et évaluation du coefficient de frottement....	23
I.7.1. <i>Présentation du diagramme de Moody</i>	26
I.8. Calcul de l'écoulement uniforme.....	28
I.8.1. <i>Position du problème</i>	28
I.8.2. <i>Calcul la vitesse moyenne <i>V</i> de l'écoulement</i>	29
I.8.2.1. Transformation de la formule de <i>Colebrook-White</i>	29
Exemple d'application 1.1.....	32
Exemple d'application 1.2.....	33
I.8.3. <i>Approche de Swamee</i>	34
Exemple d'application 1.3.....	36
I.9. Méthodes de calcul de la profondeur normale pour quelques profils de canaux à surface libre.....	38
I.9.1. <i>Canal ouvert à surface libre de forme triangulaire</i>	38
I.9.1.1. Caractéristiques du canal.....	38
I.9.1.2. Expression de la profondeur normale.....	39
a. <i>Formule de Chézy</i>	39
b. <i>Formule de Manning</i>	39
Exemple d'application 1.4.....	40
c. <i>Approche de Swamee et Rathie</i>	41
Exemple d'application 1.5.....	42
d. <i>La fonction <i>W</i> de Lambert</i>	43
Exemple d'application 1.6.....	46
I.9.2. <i>Canal ouvert à surface libre de forme rectangulaire</i>	47

I.9.2.1. Caractéristiques du canal.....	47
I.9.2.2. Expression de la profondeur normale.....	48
<i>a. Formule de Chézy</i>	48
Exemple d'application 1.7.....	51
<i>b. Formule de Manning</i>	52
Exemple d'application 1.8.....	52
Exemple d'application 1.9.....	59
Exemple d'application 1.10.....	60
I.9.2.3. Canal de forme rectangulaire infiniment large.....	61
I.9.2.3.1. Expression de la profondeur normale.....	61
<i>a. Formule de Chézy</i>	61
<i>b. Formule de Manning</i>	61
Exemple d'application 1.11.....	62
<i>c. La fonction W de Lambert</i>	63
Exemple d'application 1.12.....	65
I.9.2.4. Canal de forme rectangulaire étroit.....	66
I.9.2.4.1. Expression de la profondeur normale.....	66
<i>a. Formule de Chézy</i>	66
<i>b. Formule de Manning</i>	66
<i>c. L'Approche de Swamee</i>	67
Exemple d'application 1.13.....	67
I.9.3. Canal ouvert à surface libre de forme trapézoïdale.....	69
I.9.3.1. Caractéristiques du canal.....	69
I.9.3.2. Expression de la profondeur normale.....	71
<i>a. Formule de Chézy</i>	71
<i>b. Formule de Manning</i>	73
Exemple d'application 1.14.....	74
Exemple d'application 1.15.....	75
Exemple d'application 1.16.....	78
Exemple d'application 1.17.....	80

I.9.4. Canal ouvert à surface libre de forme parabolique	81
I.9.4.1. Caractéristiques du canal	81
I.9.4.2. Expression de la profondeur normale	82
a. Formule de Chézy	82
Exemple d'application 1.18	84
b. Formule de Manning	85
Exemple d'application 1.19	86
c. Approche de Zhang et Wu	87
Exemple d'application 1.20	88
I.9.5. Conduite fermée à surface libre de forme circulaire	89
I.9.5.1. Caractéristiques du canal	89
I.9.5.2. Le taux de remplissage η est inconnu	91
I.9.5.2.1. Expression de la profondeur normale	91
a. Formule de Chézy	91
a.1. Relation approchée au calcul de la profondeur normale	92
Exemple d'application 1.21	95
b. Formule de Manning	96
b.1. Relation approchée au calcul de la profondeur normale	99
Exemple d'application 1.22	101
c. Formule de Wong	102
Exemple d'application 1.23	103
d. Approche de Swamee	103
Exemple d'application 1.24	104
I.9.5.3. Le diamètre de la conduite D est inconnu	105
I.9.5.3.1. Expression de la profondeur normale	105
a. Approche de Swamee	105
Exemple d'application 1.25	106

<i>b. Relation Approchée</i>	107
Exemple d'application 1.26.....	108
I.10. Conclusion.....	109

CHAPITRE II

Calcul la profondeur normale dans un canal rectangulaire

par la *MMR*..... 113

II.1.Introduction.....	113
II.2. Présentation du modèle rugueux de référence.....	113
II.3. Relation de <i>Darcy-Weisbach</i> appliquée au modèle rugueux.....	117
II.4. Relation entre les caractéristiques du canal et celles du modèle	118
II.4.1. <i>Relation de base destinée au calcul des dimensions linéaires</i>	118
II.4.2. <i>Facteur de correction des dimensions linéaires</i>	119
II.5. Détermination de la profondeur normale.....	125
II.5.1. <i>Calcul de la profondeur normale par la relation de Darcy-Weisbach ..</i>	125
II.5.1.1. Le rapport d'aspect η_n est imposé.....	125
Exemple d'application 2.1.....	126
II.5.1.2. La largeur b du canal est imposée.....	128
Exemple d'application 2.2.....	132
II.5.2. <i>Calcul de la profondeur normale par la relation de Chézy</i>	135
II.5.2.1. Le rapport d'aspect η_n est imposé.....	137
II.5.2.2. La largeur b du canal est imposée.....	138
Exemple d'application 2.3.....	141
Exemple d'application 2.4.....	144
II.5.3. <i>Calcul de la profondeur normale par la relation de Manning</i>	147
Exemple d'application 2.5.....	152
II.6. Conclusion	155

CHAPITRE III

Application à quelques profils de canaux à surface

libre	159
III.1. Introduction.....	159
III.2. Canal à surface libre de forme triangulaire	159
III.2.1. <i>Caractéristiques du modèle rugueux de référence</i>	159
III.2.2. <i>Etapas de calcul de la profondeur normale du canal</i>	162
Exemple d'application 3.1.....	163
III.2.3. Calcul de la profondeur normale par la relation de <i>Chézy</i>	166
Exemple d'application 3.2.....	169
Exemple d'application 3.3.....	169
III.3. Canal à surface libre de forme triangulaire à fond arrondi.....	172
III.3.1. <i>Caractéristiques du canal</i>	172
III.3.2. <i>Caractéristiques du modèle rugueux de référence</i>	174
III.3.3. <i>Calcul du rapport d'aspect $\bar{\eta}$ du modèle rugueux de référence</i>	176
III.3.4. <i>Etapas de calcul de la profondeur normale par la relation de</i> <i>Darcy-Weisbach</i>	177
Exemple d'application 3.4.....	178
Exemple d'application 3.5.....	182
III.3.5. <i>Calcul de la profondeur normale par la relation de Manning</i>	185
III.3.5.1. La dimension linéaire r est imposée.....	185
Exemple d'application 3.6.....	189
III.3.5.2. Le rapport d'aspect η est imposé.....	192
Exemple d'application 3.7.....	194
III.4. Canal à surface libre de forme trapézoïdale.....	197
III.4.1. <i>Caractéristiques du modèle rugueux de référence</i>	197
III.4.2. <i>Calcul de la profondeur normale du canal par la relation de Darcy-</i> <i>Weisbach</i>	199
III.4.2.1. Le rapport d'aspect η_n est imposé.....	199

Exemple d'application 3.8.....	200
III.4.2.2. La dimension linéaire b est imposée.....	202
Exemple d'application 3.9.....	206
III.4.3. <i>Calcul de la profondeur normale du canal par la relation de Manning</i>	208
Exemple d'application 3.10.....	211
III.5. Canal à surface libre de forme parabolique.....	214
III.5.1. <i>Caractéristiques du modèle rugueux de référence</i>	214
III.5.2. <i>Etapas de calcul de la profondeur normale du canal par la relation de Darcy-Weisbach</i>	216
Exemple d'application 3.11.....	218
Exemple d'application 3.12.....	221
III.5.3. <i>Calcul de la profondeur normale du canal par la relation de Manning</i>	223
Exemple d'application 3.13.....	226
III.6. Canal à surface libre de forme en U.....	228
III.6.1. <i>Caractéristiques du canal</i>	228
III.6.2. <i>Caractéristiques du modèle rugueux de référence</i>	229
III.6.3. <i>Calcul de la profondeur normale du canal par la relation de Darcy-Weisbach</i>	232
III.6.3.1. Le paramètre de forme η_n est imposé.....	232
Exemple d'application 3.14.....	233
III.6.3.2. La dimension linéaire D est imposée.....	236
Exemple d'application 3.15.....	240
Exemple d'application 3.16.....	243
III.6.4. <i>Calcul de la profondeur normale du canal par la relation de Manning</i>	246
Exemple d'application 3.17.....	250
III.7. Conduite fermée à surface libre de forme circulaire.....	253
III.7.1. <i>Caractéristiques du modèle rugueux de référence</i>	253

III.7.2. <i>Calcul de la profondeur normale du canal par la relation de Darcy-Weisbach</i>	255
Exemple d'application 3.18.....	257
III.7.3. <i>Calcul de la profondeur normale du canal par la relation de Chézy</i>	259
Exemple d'application 3.19.....	262
Exemple d'application 3.20.....	265
III.7.4. <i>Calcul de la profondeur normale du canal par la relation de Manning</i>	266
III.7.4.1. Le taux de remplissage η est imposé	266
Exemple d'application 3.21.....	269
Exemple d'application 3.22.....	270
III.8. Conclusion.....	272
Conclusion générale	274
Références bibliographiques	276

PRINCIPALES NOTATIONS

A	Aire d'une section mouillée	(m^2)
\bar{A}	Aire de la section mouillée du modèle rugueux	(m^2)
C	Coefficient de <i>Chézy</i>	$(m^{0,5} / s)$
\bar{C}	Coefficient de <i>Chézy</i> du modèle rugueux	$(m^{0,5} / s)$
n	Coefficient de <i>Manning</i>	$(m^{-1/3} / s)$
\bar{n}	Coefficient de <i>Manning</i> du modèle rugueux	$(m^{-1/3} / s)$
D_h	Diamètre hydraulique	(m)
\bar{D}_h	Diamètre hydraulique dans le modèle rugueux	(m)
f	Coefficient de frottement	$(-)$
\bar{f}	Coefficient de frottement dans le modèle rugueux (=1/16)	$(-)$
g	Accélération de la pesanteur	(m / s^2)
i	La pente longitudinale du canal	$(-)$
\bar{i}	La pente longitudinale du canal dans le modèle rugueux	$(-)$
m	Cotangente de l'angle d'inclinaison d'une paroi par rapport à l'horizontale	$(-)$
P	Périmètre mouillé	(m)
\bar{P}	Périmètre mouillé dans le modèle rugueux	(m)
Q	Débit volume	(m^3 / s)
\bar{Q}	Débit volume écoulé par le modèle rugueux	(m^3 / s)
Q^*, Q_M^*	Conductivité relative du canal	$(-)$
$\bar{Q}^*, \bar{Q}^*, \bar{Q}_M^*$	Conductivité relative du modèle rugueux	$(-)$
R	Nombre de <i>Reynolds</i> d'un écoulement	$(-)$
\bar{R}	Nombre de <i>Reynolds</i> de l'écoulement dans le modèle rugueux	$(-)$
F_r	Nombre de <i>Froude</i> d'un écoulement	$(-)$
R_h	Rayon hydraulique ($D_h / 4$)	(m)
\bar{R}_h	Rayon hydraulique dans le modèle rugueux ($\bar{D}_h / 4$)	(m)
b	Dimension linéaire d'un canal	(m)
\bar{b}	Dimension linéaire du modèle rugueux	(m)
y_n	La profondeur normale de l'écoulement	(m)
\bar{y}_n	La profondeur normale de l'écoulement dans le modèle rugueux	(m)

η_n	y_n / b rapport d'aspect	(-)
$\bar{\eta}_n$	\bar{y}_n / \bar{b} rapport d'aspect du modèle rugueux	(-)
r	Dimension linéaire horizontale	(m)
\bar{r}	Dimension linéaire horizontale du modèle rugueux	(m)
y	Dimensions linéaires verticales	(m)
\bar{y}	Dimensions linéaires verticales du modèle rugueux	(m)
y_0	$r(\sqrt{1+m^2} / m) - 1$	(m)
y_1	$r(1 - \cos \theta)$	(m)
χ_1	$\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right)$	(-)
χ_2	$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{1}{m} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right)$	(-)
η	y / r	(-)
$\bar{\eta}$	\bar{y} / \bar{r}	(-)
T_m, Y_m, B	Dimension linéaire d'un canal parabolique	(m)
$\bar{T}_m, \bar{Y}_m, \bar{B}$	Dimension linéaire du modèle rugueux	
ζ_n	$\sqrt{y_n / B}$ paramètre de forme	(-)
$\bar{\zeta}_n$	$\sqrt{\bar{y}_n / \bar{B}}$ paramètre de forme du modèle rugueux	(-)
D	Diamètre d'un profil circulaire et en U	(m)
\bar{D}	Diamètre du modèle rugueux d'un profil circulaire et en U	(m)
C_0	$(1/2 - \pi/8)$	(-)
C_1	$(\pi/2 - 1)$	(-)
η	Taux de remplissage d'une section circulaire	(-)
$\bar{\eta}$	Taux de remplissage du modèle rugueux d'une section circulaire	(-)
$\sigma(\eta)$	$\cos^{-1}(1 - 2\eta)$	(-)
$\varphi(\eta)$	$1 - \left[2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1-\eta)} \right] / \cos^{-1}(1 - 2\eta)$	(-)
$\sigma(\bar{\eta})$	$\cos^{-1}(1 - 2\bar{\eta})$	(-)
$\varphi(\bar{\eta})$	$1 - \left[2(1 - 2\bar{\eta})\sqrt{\bar{\eta}(1-\bar{\eta})} \right] / \cos^{-1}(1 - 2\bar{\eta})$	(-)
α	Angle d'inclinaison d'une paroi par rapport à l'horizontale	($^\circ$)
θ	Angle d'inclinaison d'une paroi par rapport à l'horizontale	($^\circ$)
ε	Rugosité absolue d'une paroi	(m)

$\bar{\varepsilon}$	Rugosité absolue de la paroi du modèle rugueux	(m)
ε / D_h	Rugosité relative	(-)
$\bar{\varepsilon} / \bar{D}_h$	Rugosité relative du modèle rugueux (= 0,037)	(-)
ν	Viscosité cinématique	(m ² / s)
ψ	Facteur de correction de la dimension linéaire	(-)

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1. Types des canaux.....	6
Figure 1.2. Eléments géométriques de la section.....	7
Figure 1.3. Classification des écoulements.....	9
Figure 1.4. Les quatre régimes d'écoulement.....	11
Figure 1.5. Etablissement de l'écoulement uniforme	14
Figure 1.6. Schéma de définition d'équilibre des forces sur une portion d'écoulement uniforme.....	17
Figure 1.7. Diagramme universel de <i>Moody</i> (1944).....	27
Figure 1.8. Schéma de définition du canal ouvert de forme triangulaire.....	38
Figure 1.9. La fonction W de Lambert	43
Figure 1.10. Schéma de définition du canal ouvert de forme rectangulaire.....	47
Figure 1.11. Ecarts relatifs $\Delta\eta_n / \eta_n$ (%) entre les valeurs exactes et approchées du rapport d'aspect η , calculées respectivement par les relations (1.98) et (1.107).....	58
Figure 1.12. Schéma de définition du canal à surface libre trapézoïdale.....	69
Figure 1.13. Schéma de définition du canal ouvert de forme parabolique.....	81
Figure 1.14. Schéma de définition de l'écoulement uniforme en canal parabolique.....	82
Figure 1.15. Schéma de définition de l'écoulement uniforme en conduite circulaire....	89
Figure 1.16. Représentation graphique de $\eta(Q^*)$, selon la relation (1.197).....	93
Figure 1.17. Courbe de variation du taux de remplissage η de la conductivité relative Q^* de la conduite en fonction de la conductivité relative Q^* , selon le tableau 1.6 calculées par la relation (1.203).....	98

Figure 2.1. Schéma de définition d'un canal de forme rectangulaire et de son modèle rugueux.....	114
Figure 2.2. Ecarts relatifs en % entre les valeurs exactes de ψ de la relation (2.34) et celles approchées de la relation (2.35)	124
Figure 3.1. Schéma de définition du canal ouvert de forme triangulaire.....	160
Figure 3.2. Schéma de définition du canal ouvert de forme triangulaire à fond arrondi.....	172
Figure 3.3. Schéma de définition du modèle rugueux de référence du canal de forme triangulaire à fond arrondi.....	174
Figure 3.4. Schéma de définition du canal ouvert de forme trapézoïdale.....	197
Figure 3.5. Schéma de définition du canal ouvert de forme parabolique.....	214
Figure 3.6. Schéma de définition du canal ouvert de forme en U.....	228
Figure 3.7. Schéma de définition du modèle rugueux de référence du canal ouvert de forme en U.....	230
Figure 3.8. Schéma de définition de la conduite circulaire à surface libre.....	253
Figure 3.9. Tracé de l'équation (3.112) pour le modèle rugueux.....	260

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1 : Valeurs des paramètres θ et γ , calculées selon la relation (1.177).....	84
Tableau 1.2 : Valeurs des paramètres ϑ et δ , calculées selon la relation (1.182)	86
Tableau 1.3: Valeurs de $\eta(Q^*)$ calculée selon la relation (1.197).....	92
Tableau 1.3: Valeurs de $\eta(Q^*)$ calculée selon la relation (1.197) (la suite).....	93
Tableau 1.4: Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (1.199) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q^*)$ de la conduite.....	94
Tableau 1.5: Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (1.200) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q^* / Q_{\max}^*)$ de la conduite.....	95
Tableau 1.6: Valeurs de $\eta(Q^*)$ calculée selon la relation (1.203).....	98
Tableau 1.7: Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (1.204) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q^*)$ de la conduite.....	100
Tableau 1.8: Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (1.206) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q^* / Q_{\max}^*)$ de la conduite.....	101
Tableau 2.1: Caractéristiques géométriques du modèle rugueux de référence et hydrauliques de l'écoulement.....	115
Tableau 3.1 : Valeurs des paramètres α et β , calculées selon la relation (3.65)...	216

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

En pratique, l'écoulement uniforme est quasiment impossible à obtenir car, d'un point de vue théorique, le canal doit avoir une longueur infinie. Pourtant, c'est sous le caractère d'uniformité de l'écoulement que les conduites et canaux sont dimensionnés.

L'écoulement uniforme est caractérisé par l'invariabilité dans le temps et dans l'espace de ses caractéristiques. Ces caractéristiques sont la profondeur y_n de l'écoulement appelée aussi hauteur normale, l'aire de la section mouillée A et de sa pente longitudinale i . Il est en outre permanent lorsque le débit volume Q qu'il écoule demeure constant ou est indépendant du temps. On admet que la vitesse moyenne V de l'écoulement est constante ou que sa répartition est uniforme dans toute section du canal.

L'écoulement uniforme est régi par des relations que l'on appelle « relations de l'écoulement uniforme ». Les relations de type *Chézy* et *Manning* sont celles qui sont le plus souvent utilisées pour l'étude de l'écoulement uniforme. Une autre relation qui servira de base à notre étude est celle de *Darcy-Weisbach*, initialement formulée par *Weisbach* (1845) et reprise par *Darcy* (1854) dans ses recherches expérimentales. Bien que la relation de *Darcy-Weisbach* ait été développée pour le cas des conduites en charge, elle est cependant applicable aux canaux ouverts, en remplaçant D par le diamètre hydraulique D_h .

Dans le cas le plus général, l'écoulement est gouverné par la relation fonctionnelle $\phi(Q, i, a, \varepsilon, \nu, w) = 0$, où Q est le débit volume, i est la pente géométrique, a est une dimension linéaire quelconque liée à l'écoulement ou au profil géométrique du canal considéré. Cette dimension linéaire peut être à titre d'exemple la profondeur normale y_n de l'écoulement, la largeur b d'un canal rectangulaire ou la petite base d'un trapèze, le diamètre D d'une conduite circulaire, ε est la rugosité absolue de la paroi du canal,

ν est la viscosité cinématique et w est le paramètre de forme du profil liquide en écoulement, correspondant à $w = \eta_n = y_n / b$ pour le cas du canal rectangulaire ou trapézoïdal, à $w = \eta = y_n / D$ pour le cas du profil circulaire.

En pratique, trois catégories de problèmes peuvent se poser:

- La première catégorie consiste à déterminer le débit volume évacué par l'ouvrage.
- La seconde catégorie s'intéresse à la détermination de la pente géométrique i du canal.
- La troisième catégorie répond à un besoin de dimensionnement du canal, ce qui revient à la détermination de la profondeur normale de l'écoulement qui intéresse cette étude.

Pour répondre à chacune des catégories de problèmes, il est nécessaire que les autres paramètres qui régissent l'écoulement soient connus.

Le calcul de la profondeur normale dans les canaux a été l'un des principaux problèmes qui se posent dans l'étude de l'écoulement uniforme à surface libre. Les solutions proposées ont été d'abord graphiques (*Chow, 1973; French, 1986; Sinniger et Hager, 1989*) et au cours de ces dernières années les solutions sont devenues itératives.

Sous leur forme classique, les relations de l'écoulement uniforme sont difficiles à appliquer, voire même impossible à appliquer. Cela s'explique par le fait le coefficient de frottement f figurant dans la relation de *Darcy-Weisbach*, le coefficient de résistance à l'écoulement C de la relation de *Chézy* ou le coefficient n de la relation de *Manning* n'est pas une donnée du problème. Ces différents coefficients sont extrêmement difficile à évaluer, surtout lorsqu'il s'agit de dimensionner le canal, c'est-à-dire lorsque la dimension linéaire du canal n'est pas connu.

Pour les canaux et conduites à surface libre, les études les plus significatives ont été certainement celles de *Swamee* (1994;2001), de *Swamee* et *Rathie* (2004; 2012), de *Srivastava* (2006) et de *Achour* et *Khattaoui* (2008). Notons que l'étude récente de *Swamee* et *Rathie* (2004) propose de s'aider du théorème de *Lagrange* dans le but de déduire la solution exacte de la profondeur normale. Ce théorème a été appliqué à l'équation de *Chézy* et *Manning* et la solution est donnée en termes d'une série. D'un point de vue théorique, la solution du problème est exacte mais elle est obtenue à l'infini, ce qui n'est pas pratique à l'usage de l'ingénieur. La série obtenue doit être alors tronquée, ce qui mène à une solution approchée du problème.

Dans ce contexte que nous proposons la présente étude, basée sur une nouvelle méthode de calcul connue sous le nom de Méthode du Modèle Rugueux (*MMR*) (*Achour*, 2013; *Achour* et *Bedjaoui*, 2006 ; 2012; 2014). Elle énonce que la dimension linéaire d'une conduite ou d'un canal est égale à la dimension linéaire d'un modèle rugueux de référence corrigée par l'effet d'un facteur de correction adimensionnel. La méthode est basée sur les relations de *Colebrook-White* et de *Darcy-Weisbach* et est, de ce fait, valable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent.

Par cette méthode, le calcul de la profondeur normale des conduites et canaux, à surface libre, ne nécessite ni la connaissance du coefficient de frottement au sens de *Colebrook-White*, ni celle du coefficient de résistance à l'écoulement au sens de *Chézy* ou de *Manning-Strickler*. Les effets de chacun de ces coefficients sont implicitement considérés dans le développement théorique.

Notre recherche s'intéresse aux diverses possibilités que peut offrir la *MMR* lorsqu'elle est appliquée aux canaux à surface libre, plus particulièrement pour évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement.

Afin de répondre au mieux à l'objectif de notre recherche, nous avons subdivisé notre étude en trois chapitres.

Le premier chapitre est entièrement consacré à un état de connaissances sur l'écoulement uniforme. Le concept d'uniformité est expliqué à travers un schéma simplifié et l'équation de continuité est présentée. Ceci est suivi par les équations du mouvement qui mènent aux relations universellement connues de *Chézy*, de *Manning* et de *Darcy-Weisbach*.

Des relations approchées pour le calcul de la profondeur normale de l'écoulement sont présentées et des exemples d'application sont proposés.

Le second chapitre est consacré au calcul de la profondeur normale du canal rectangulaire, après avoir présenté la Méthode du Modèle Rugueux "*MMR*" et ses fondements. Le modèle rugueux de référence est décrit ainsi que les relations qui régissent l'écoulement qui s'y produit.

Le troisième chapitre est entièrement consacré aux applications pratiques, notamment au calcul de la profondeur normale de quelques profils géométriques de canaux à surface libre de forme non rectangulaire. À travers les exemples que nous considérons, la facilité du calcul ainsi que sa fiabilité sont mises en exergue lorsque la *MMR* est appliquée.

CHAPITRE I

ETAT DES CONNAISSANCES SUR L'ÉCOULEMENT UNIFORME

CHAPITRE I

ETAT DES CONNAISSANCES SUR L'ÉCOULEMENT UNIFORME

I.1. INTRODUCTION

Le présent chapitre se propose une synthèse des principales relations usuelles au calcul de l'écoulement uniforme dans les canaux et conduites à surface libre.

Après avoir défini l'écoulement uniforme et les règles qui gouvernent son établissement, les relations les plus significatives destinées au calcul de la profondeur normale sont présentées et étayées. Compte tenu de leur emploi pratique et aux résultats satisfaisants auxquels elles aboutissent, ce chapitre est exclusivement consacré à ces relations.

Notre attention est portée principalement sur les relations largement utilisées de *Chézy*, de *Manning* et de *Darcy – Weisbach*. Les coefficients de résistance liés à ces formules sont pratiquement discutés et les relations permettant leur estimation sont présentées.

I.2. LES DIFFERENTS TYPES DE CANAUX

I.2.1. Définition

On appelle canal un système de transport dans lequel l'eau s'écoule et dont la surface libre est soumise à la pression atmosphérique (*Graf et Altinaka, 2000*).

On distingue deux catégories de canaux (**Voir la figure 1.1**): (*Graf et Altinaka, 2000*)

- 1) Les canaux naturels,
- 2) Les canaux artificiels.

a) Les canaux naturels

Ce sont les cours d'eau qui existent naturellement sur (ou sous) terre; tels que les torrents, rivières, fleuves et estuaires.

Les propriétés géométriques et hydrauliques des canaux naturels sont généralement assez irrégulières. L'application de la théorie hydraulique ne donne que des résultats approximatifs obtenus à partir d'hypothèses qui s'imposent.

b) Les canaux artificiels

Ce sont des cours d'eau réalisés par l'homme sur (ou sous) terre tels que: les canaux découverts construits au ras du sol (canaux de navigation, d'adduction et d'évacuation, d'irrigation et de drainage) ou les canaux couverts dans lesquels les liquides ne remplissent pas toute la section (tunnels hydrauliques, aqueducs, drains, égouts).

Les propriétés hydrauliques des canaux artificiels sont généralement assez régulières. L'application de la théorie hydraulique donne souvent des résultats réalistes.

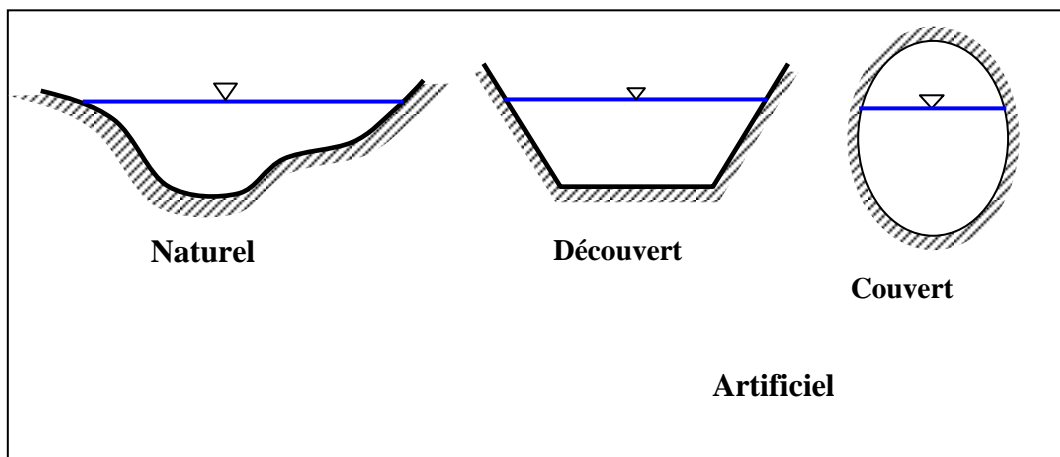


Figure 1.1. Types de canaux (*Graf et Altinaka, 2000*).

I.2.2. Géométrie des canaux

- La section transversale d'un canal est une section plane normale à la direction de l'écoulement. Pour un canal uniforme cette section est perpendiculaire à la génératrice.
- La section ou surface mouillée, A , est la portion de la section transversale occupée par le liquide. Les éléments géométriques d'une section mouillée, A , sont les suivants : (*Graf et Altinaka, 2000*)

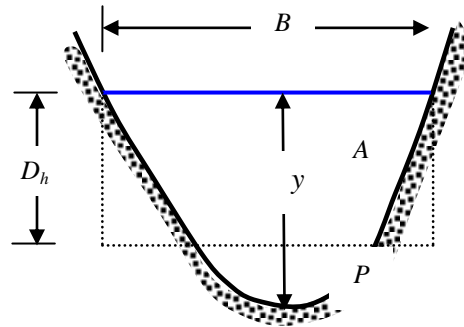


Figure 1.2.Eléments géométriques de la section (*Graf et Altinaka, 2000*).

- Le périmètre mouillé, P , du canal, formé par la longueur de la ligne de contact entre la surface mouillée et le lit y compris les berges, mais ne comprenant pas la surface libre ;
 - Le rayon hydraulique, R_h , donné par le quotient de la surface mouillée, A , et du périmètre mouillé, P , donc: $R_h = \frac{A}{P}$;
- Le diamètre hydraulique : $D_h = 4R_h = \frac{4A}{P}$;
- Largeur au miroir B : largeur de la section d'écoulement au niveau de la surface libre ;
 - Profondeur d'eau est la hauteur d'eau mesurée à partir du point le plus bas de la section perpendiculaire à l'écoulement.

I.3. LES ECOULEMENTS DANS LES CANAUX

Les écoulements dans les canaux naturels et artificiels sont des écoulements à surface libre. Cet écoulement présente par définition la particularité de comporter une surface libre en contact avec l'air, généralement soumise à la pression atmosphérique (Carlier, 1972).

L'écoulement à surface libre est dû à la pente du fond du canal et non, comme les conduites (en charge) à la différence de charge entre deux sections.

I.3.1. Classification d'écoulement

Les écoulements à surface libre peuvent être classés suivant la variation de la profondeur d'écoulement et la vitesse en fonction du temps et de l'espace.

✓ Variabilité dans le temps

- Le mouvement est permanent (ou stationnaire) si les vitesses moyennes V et la profondeur y restent invariables dans le temps en grandeur et en direction. Par conséquent, le débit est constant.

La vitesse moyenne V de l'écoulement est liée au débit Q par la relation :

$$Q = VA \tag{1.1}$$

- Le mouvement est non permanent dans le cas contraire. Au sens strict, l'écoulement dans les canaux est rarement permanent. Néanmoins les variations temporelles sont, dans certains cas, suffisamment lentes pour que l'écoulement puisse être considéré comme une succession de régime permanent. On peut alors définir ainsi le régime quasi-permanent.

✓ Variabilité dans l'espace

- Le mouvement est uniforme si les paramètres caractérisant l'écoulement restent invariables dans les diverses sections du canal. La ligne de la pente du fond est donc parallèle à la ligne de la surface libre.

- Le mouvement est non-uniforme ou varié si les paramètres caractérisant l'écoulement changent d'une section à l'autre. La pente de la surface libre diffère de celle du fond.

Un écoulement non-uniforme peut être accéléré ou décéléré suivant que la vitesse croît ou décroît dans le sens du mouvement.

- Lorsque le mouvement est graduellement varié, la profondeur ainsi que les autres paramètres varient lentement d'une section à l'autre.
- Lorsque le mouvement est rapidement varié, les paramètres caractérisant l'écoulement changent brusquement sur une courte distance.

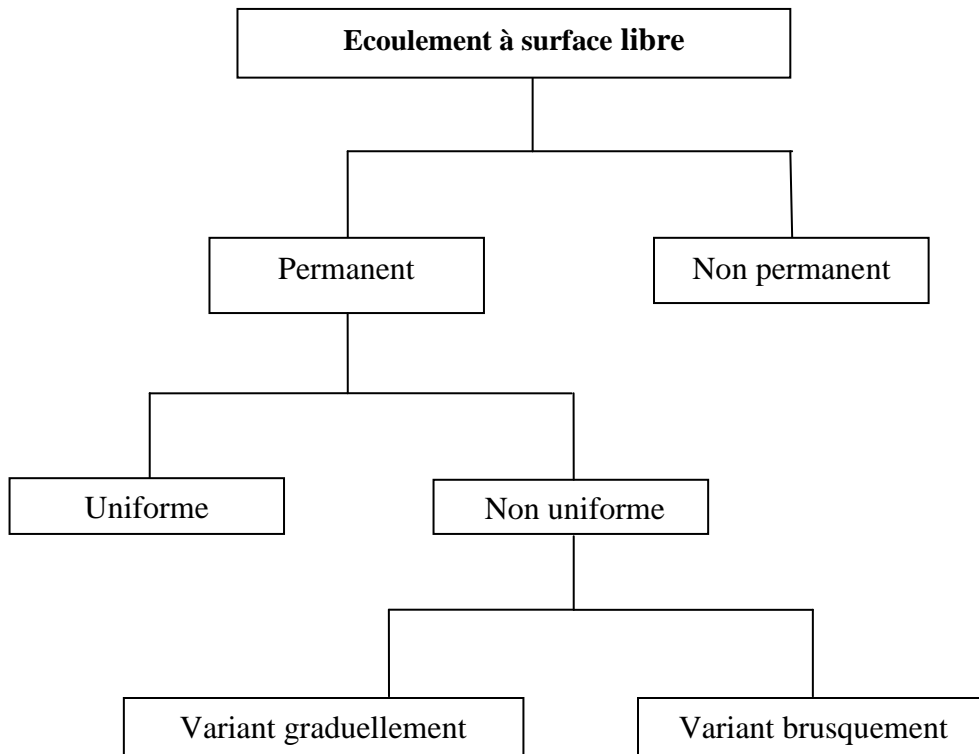


Figure 1.3. Classification des écoulements.

I.3.2. Régime d'écoulement

L'écoulement d'un fluide réel dans un canal à surface libre engendre les forces suivantes:

- Forces d'inertie;
- Forces de gravité;
- Forces de frottement (viscosité et rugosité).

Pour l'étude hydraulique des canaux, on définit habituellement les nombres adimensionnels suivants :

I.3.2.1. Nombre de *Froude*

C'est le rapport entre les forces d'inertie et celles de gravité où :

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{gy}} \quad (1.2)$$

Où V est la vitesse moyenne de l'écoulement, g est l'accélération de la pesanteur et y est la hauteur d'écoulement.

Le rôle du nombre de *Froude* est de permettre le classement des écoulements comme suit :

- Ecoulement fluvial : $F_r < 1$;
- Ecoulement critique : $F_r = 1$;
- Ecoulement torrentiel : $F_r > 1$.

I.3.2.2. Nombre de *Reynolds*

Le passage d'un régime à l'autre dépend de la valeur d'un paramètre adimensionnel, le nombre de *Reynolds*. Celui-ci est par définition le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, et s'écrit :

$$R = \frac{VD_h}{\nu} \quad (1.3)$$

Où V est la vitesse moyenne de l'écoulement, D_h est le diamètre hydraulique et ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Le rôle du nombre de *Reynolds* R' est de permettre le classement des écoulements comme suit (*Graf et Altinakar, 2000*):

- Ecoulement laminaire : $R' < 500$
- Transition : $500 < R' < 2000$
- Ecoulement turbulent : $R' > 2000$

Les expériences avec différents canaux artificiels montrent que l'écoulement est turbulent dès que le nombre de *Reynolds* atteint des valeurs de 2000 (*Chow, 1959*).

Par conséquent, les effets du nombre de *Reynolds*, $R' = R/4$ et du nombre de *Froude* F_r , donnent quatre régimes d'écoulement :

- Fluvial – laminaire $F_r < 1; R' < 500$
- Fluvial – turbulent $F_r < 1; R' > 2000$
- Torrentiel – laminaire $F_r > 1; R' < 500$
- Torrentiel – turbulent $F_r > 1; R' > 2000$

Une relation profondeur / vitesse, tirée d'expériences par *Robertson et Rouse*, est donnée à la figure suivante pour des canaux rectangulaires très larges.

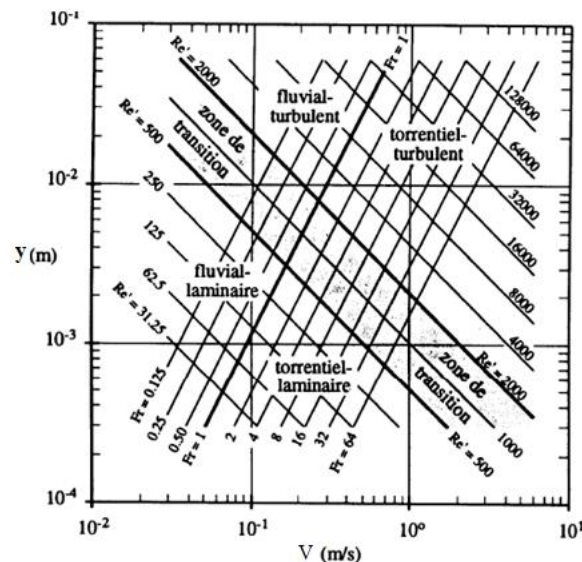


Figure 1.4. Les quatre régimes d'écoulement (*Graf et Altinakar, 2000*).

I.4. ECOULEMENT UNIFORME

I.4.1. Etablissement de l'écoulement uniforme

On dit qu'un écoulement à surface libre est considéré comme étant uniforme lorsque ses caractéristiques sont invariables dans le temps et dans l'espace tout le long de son parcours. Ces caractéristiques sont la profondeur h ou y_n de l'écoulement appelée aussi hauteur normale, l'aire de la section mouillée A , la vitesse moyenne V de l'écoulement et le débit Q . La ligne de charge totale est à la fois parallèle à la ligne piézométrique et à la pente géométrique du canal.

D'un point de vue pratique, la constance de la vitesse V est généralement associée à la celle de la vitesse moyenne V de l'écoulement; mais de façon plus rigoureuse, cela signifie que l'écoulement est caractérisé par une vitesse constante en tout point de son domaine. En d'autres termes, la distribution des vitesses dans chacune des sections transversales de l'écoulement est uniforme, correspondant à une couche limite pleinement développée.

Bien que la condition d'un écoulement uniforme, dans le sens strict du terme, ne soit pratiquement jamais satisfaite, elle est cependant fréquemment admise lors du calcul des caractéristiques d'un écoulement en canaux et rivières (*Chow, 1973*). Cette approche simplifiée donne des résultats assez satisfaisants dans bon nombre de cas pratiques.

L'écoulement uniforme peut être soit en régime laminaire soit en régime turbulent, mais il se produit sous de grandes vitesses. A vitesse élevée, l'écoulement uniforme est instable et il est le siège d'un fort entraînement d'air.

Dans les canaux ouverts, l'écoulement uniforme se développe lorsque les forces de résistance s'opposant à l'écoulement sont équilibrées par les forces de gravité. Les forces de résistance sont proportionnelles au carré de la vitesse moyenne V .

Lorsqu'un écoulement entrant dans un canal s'effectue de façon lente, la vitesse et par conséquent la résistance à l'écoulement sont faibles. Les forces de gravité sont alors prédominantes et l'écoulement subit alors une accélération depuis l'amont.

La vitesse ainsi que la résistance augmentent au fur et à mesure que l'on se déplace vers l'aval, jusqu'à ce que les forces de gravité soient équilibrées. A cet instant, l'écoulement uniforme apparaît. La zone sur laquelle s'étend l'écoulement accéléré, et au-delà de laquelle l'écoulement uniforme apparaît, est dite zone de transition. Si la longueur du canal est inférieure à la longueur de la zone transitoire, l'écoulement uniforme ne peut être atteint.

Plus à l'aval de l'écoulement uniforme, les forces de gravité deviennent de plus en plus prédominantes en raison de l'accélération que subit l'écoulement. L'écoulement uniforme disparaît alors en laissant place à un écoulement varié. La figure (1.5) montre l'état d'un écoulement à l'entrée et l'intérieur d'un canal de grande longueur et de différentes pentes géométriques i . La pente i est comparée à la pente critique i_c .

Lorsque la pente i est suave (figure 1.5.a), la zone de transition se présente sous l'aspect d'ondulations. L'écoulement uniforme au milieu du canal mais varié aux extrémités de celui-ci. D'un point de vue théorique, l'écoulement varié tend vers l'écoulement uniforme de manière graduelle et asymptotique. On considère généralement dans la pratique que la profondeur de l'écoulement reste constante si la variation qu'elle subit n'excède pas 1% de valeur moyenne de la profondeur normale.

Lorsque la pente i correspond à la pente critique i_c (figure 1.5.b), la surface libre de l'écoulement critique est instable. Des ondulations peuvent se produire au milieu du canal, mais la profondeur oscille autour d'une valeur moyenne et l'écoulement est alors considéré comme étant uniforme.

Lorsque la pente i est supercritique ou prononcée (figure 1.5.c), la surface libre dans la zone transitoire chute de manière graduelle d'un niveau subcritique ou suave à un niveau supercritique ou prononcé. Au-delà de la zone de transition, l'écoulement devient uniforme.

La longueur sur laquelle s'étend la zone transitoire dépend essentiellement du débit volume Q entrant dans le canal ainsi que des caractéristiques de celui-ci telles que la rugosité absolue, la pente et la géométrie d'entrée. D'un point de vue hydrodynamique, la longueur de la zone de transition ne doit pas être inférieure à la longueur pour laquelle, sous des conditions données de l'écoulement, la couche limite est pleinement développée.

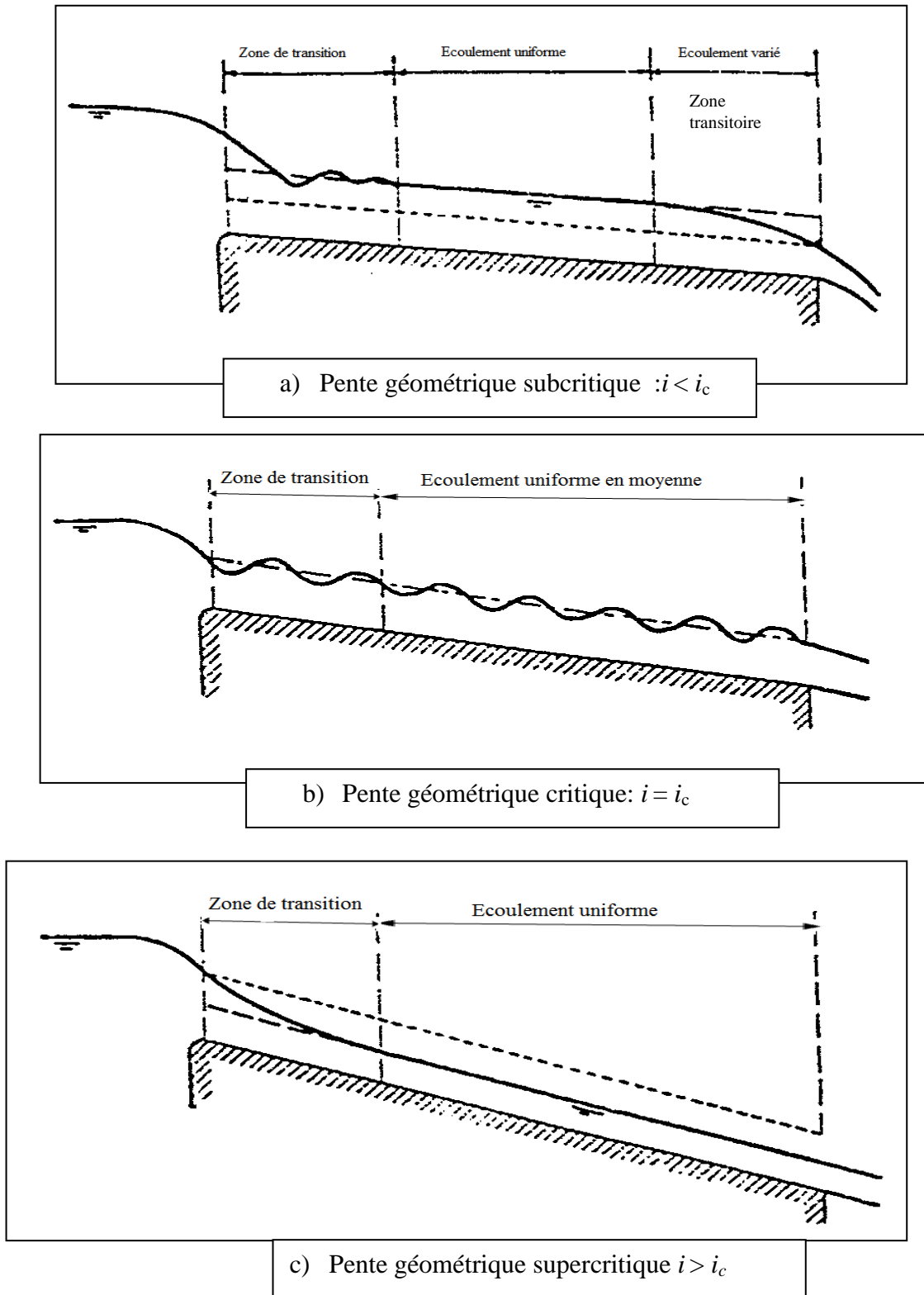


Figure 1.5. Etablissement de l'écoulement uniforme (Chow, 1959).

(- - -): Profondeur critique. (—): profondeur normale de l'écoulement uniforme.

Le calcul de la profondeur d'un écoulement uniforme, appelée profondeur normale de l'écoulement est très importante. Le classement des profils géométriques par exemple est tributaire de la valeur de la profondeur normale. Comme le montre la figure (1.4.c), la profondeur normale est inférieure à la profondeur critique et c'est cette inégalité qui permet de conclure sur le caractère supercritique ou prononcée de la pente géométrique du canal.

Le calcul de la profondeur normale dans les canaux se base sur les relations dites «relations de l'écoulement normal ».Celles-ci expriment, de manière approximative, la vitesse moyenne V de l'écoulement sous l'hypothèse d'un régime turbulent. Les formules pratiques de l'écoulement uniforme s'expriment généralement sous la forme $V = CR_h^\beta i^\gamma$ où R_h est le rayon hydraulique et i est la pente de la ligne de charge. Le paramètre C traduit la résistance de l'écoulement et dépend de V , de R_h , de la rugosité absolue ε caractérisant les parois du canal, de la viscosité du liquide ν et de beaucoup d'autres facteurs.

A travers de nombreux exemples pratiques concernant l'écoulement uniforme, on peut s'apercevoir que les formules dites de *Chézy* et de *Manning* (ou de *Manning – Strickler*) sont les plus largement utilisées. La forme de leur expression est telle que nous l'avons déjà indiqué $V = CR_h^\beta i^\gamma$ où les exposants β et γ ont des valeurs bien déterminées. En raison de leur utilisation fiable et très répandue, ces relations seront développées aussi clairement que possible, en tentant d'éclaircir leur limite et leur domaine d'applicabilité. D'autres relations seront également exposées, telle que la formule de *Darcy – Weisbach* dont l'application est universelle. Cette relation joue un rôle important dans le calcul des écoulements évoluant dans les conduites, et sa généralisation aux canaux ouverts connaît un grand succès.

I.4.2. Equations hydrodynamiques

I.4.2.1. Equation de continuité

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial(VA)}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

Lorsque l'écoulement est uniforme et permanent, la section ou surface mouillée A reste inchangée dans la direction x le long de l'écoulement et dans le temps t .

$$\frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

La relation (1.4), devient :

$$\frac{\partial(VA)}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

Avec $VA=Q$. Le débit volume Q est donc constant.

Entre deux sections transversales données 1 et 2, nous pouvons écrire :

$$V_1 A_1 = V_2 A_2 \quad (1.6)$$

I.4.2.2. Equation de mouvement

Considérons un volume d'eau dans un canal incliné de forme quelconque (figure 1.5). L'équation de conservation de quantité de mouvement peut s'écrire :

$$F_1 - F_2 - \tau_w PL + W \sin \theta = \rho Q (V_2 - V_1) \quad (1.7)$$

Où, F_1 et F_2 sont les forces de pression hydrostatique, τ_w est la contrainte de frottement entre l'eau et le périmètre mouillé P le long de la distance L , W est le poids du volume d'eau considéré et θ est l'angle du canal par rapport à l'horizontale.

Si l'écoulement est uniforme y_1 et y_2 sont égaux, par conséquent F_1 et F_2 , Q_1 et Q_2 sont aussi égaux. L'équation (1.7) se simplifie alors en :

$$\tau_w = W \sin \theta / PL$$

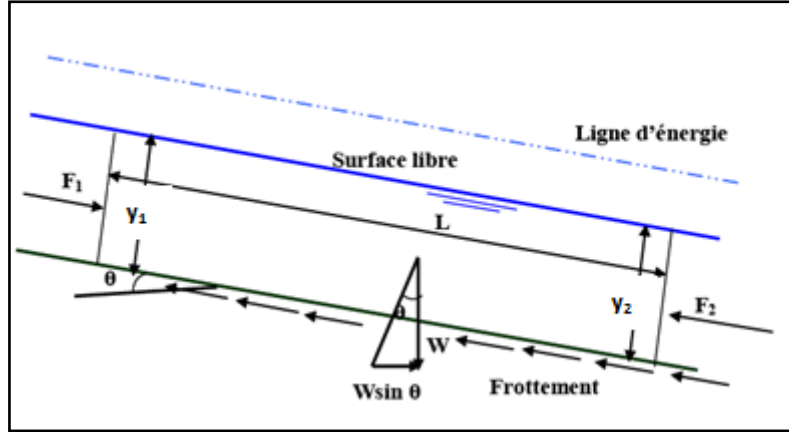


Figure 1.6: Schéma de définition d'équilibre des forces sur une portion d'écoulement uniforme.

Sur la figure 1.6, la quantité $W \sin \theta$ représente la composante tangentielle du poids propre W de la tranche liquide L , soit : $W = \rho g AL$

Où ρ est la masse volumique de l'eau et g est l'accélération de la pesanteur et le produit $A.L$ désigne le volume de liquide sur toute la longueur L . Ainsi nous pouvons écrire :

$$\tau_w = \frac{\rho g AL}{PL} \sin \theta = \rho g R_h \sin \theta$$

Où A est la section d'écoulement et R est le rayon hydraulique ($R_h = A/P$). Lorsque l'angle θ est petit, $\sin \theta = \text{tg} \theta$ est égal à la pente du canal i .

La relation précédente s'écrit finalement :

$$\tau_w = \rho g R_h i \tag{1.8}$$

La contrainte de frottement est estimée pour un écoulement turbulent par (*Graf* et *Altinakar*, 2000) :

$$\tau_w = f\rho \frac{V^2}{8} \quad (1.9)$$

Où f est un coefficient de frottement qui dépend de la rugosité du canal et du nombre de *Reynolds* de l'écoulement.

En tenant compte des relations (1.9) et (1.8), on obtient:

$$\rho g R_h i = f\rho \frac{V^2}{8}$$

Cette dernière relation s'écrit plus simplement sous la forme :

$$i = f \frac{1}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.10)$$

La relation (1.10) est connue sous le nom de relation de *Darcy-Weisbach*. Elle est très utilisée pour les écoulements dans les conduites. La relation (1.10) s'écrit souvent sous la forme :

$$V = \sqrt{8g/f} \sqrt{R_h i} \quad (1.11)$$

Ou bien :

$$V = C \sqrt{R_h i} \quad (1.12)$$

Avec :

$$C = \sqrt{8g/f} \quad (1.13)$$

La relation (1.12) est connue sous le nom de relation de *Chézy* mais elle ne peut être utilisée que pour un écoulement turbulent rugueux.

La relation (1.12) doit donc être utilisée avec précaution lorsque l'écoulement se situe dans les domaines de transition, lisse ou pratiquement lisse.

En tenant compte de la relation (1.1), la relation (1.12) permet alors d'exprimer le débit volume Q sous la forme :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} \quad (1.14)$$

Dans laquelle Q est le débit volume écoulé par le canal, C est le coefficient de résistance de Chézy exprime en ($m^{1/2}.s$), A est l'aire de la section mouillée, R_h le rayon hydraulique et enfin i est la pente de la ligne de charge totale ou gradient de perte de charge (i étant également la pente du canal).

I.5. CALCUL DU COEFFICIENT C DE CHEZY

Le coefficient C de Chézy est un paramètre dimensionnel ($m^{0.5}/s$). Différentes formules, d'origine empirique, ont été proposées pour le calcul du coefficient C de Chézy. Nous verrons dans ce qui suit, les plus importantes d'entre elles.

I.5.1. Formule de Ganguillet – Kutter

La formule de Ganguillet – Kutter (1869) exprime le coefficient C de Chézy en fonction de la pente i du canal, du rayon hydraulique et du coefficient de rugosité n . Elle a été élaborée à partir de mesures expérimentales, effectuées sur divers types de canaux et rivières naturelles :

$$C = \frac{23 + \frac{0.00155}{i} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{\sqrt{R_h}} \left(23 + \frac{0.00155}{i} \right)} \quad (1.15)$$

Le coefficient n figurant dans la relation (1.15) est connu sous le nom « coefficient n de Kutter ». Bien que la relation (1.15) apparaisse quelque peu encombrante, elle donne néanmoins des résultats assez satisfaisants.

De nombreux auteurs proposent d'éliminer le terme contenant la pente i , afin de simplifier la forme de l'équation (1.15). On peut en effet s'apercevoir que le terme $0.00155/i$ n'a pas d'effet significatif sur la valeur du coefficient C , pour une même valeur du coefficient de rugosité n et du rayon hydraulique R_h . A titre indicatif, pour $n = 0.01$ et $R_h = 1.20$ m, le coefficient C ne subit pratiquement aucun changement dans une large gamme de valeurs de i :

$$102 \leq C \leq 103 \text{ lorsque } 0.00005 \leq i \leq 0.01.$$

1.5.2. Formule de Bazin

La formule de *Bazin* (1897) considère le coefficient C de *Chézy* comme une fonction du rayon hydraulique R_h et d'un coefficient de rugosité m . Selon *Bazin*, le coefficient C de *Chézy* est :

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.16)$$

Le coefficient m de *Bazin* varie de $m = 0,06$ [$\text{m}^{1/2}$] pour un fond de canal lisse, à $m=1,75$ [$\text{m}^{1/2}$] pour un lit de galets ou encombré d'herbe (*Graf et Altinakar*, 2000).

La formule de *Bazin* (1897) a été, à l'origine, élaborée pour des petits canaux, bien que sa généralisation ne donne pas d'aussi bons résultats que ceux obtenus par la formule de *Ganguillet–Kutter* (1869).

1.5.2. Formule de Powell

Powell (1950) propose une relation de type logarithmique au calcul du coefficient C de *Chézy* mais elle se présente sous la forme implicite:

$$C = -23.2 \log \left(1.811 \frac{C}{R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.17)$$

« log » désigne la logarithme décimal, R est la nombre de *Reynolds*, ε est la rugosité absolue des parois du canal et R_h est le rayon hydraulique.

A l'origine, la relation de *Powell* a été présentée en unité anglaise et les constantes figurant dans la relation (1.17) sont alors différentes et beaucoup plus simples:

$$C = -42 \log \left(\frac{C}{4R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.18)$$

Pour le cas des canaux rugueux, l'écoulement est en générale turbulent rugueux correspondant aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds* R , le terme $C/(4R) \rightarrow 0$.

La relation (1.18) devient:

$$C = -42 \log \left(\frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.19)$$

Par contre les canaux lisses, l'effet de la rugosité est faible et la relation (1.18) peut s'écrire :

$$C = -42 \log \left(\frac{C}{4R} \right) \quad (1.20)$$

I.6. FORMULE DE MANNING -STRICKLER

La formule la plus utilisée en pratique est la formule de *Manning-Strickler*, appelée en bref la formule de *Manning* (1891). Elle exprime le débit volume Q comme étant :

$$Q = kAR_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (1.21)$$

La formule de *Manning-Strickler* est simple mais elle s'applique uniquement si l'équation suivante est satisfaite (*Hager*, 1987):

$$\varepsilon / D_h > 1050 / R \quad (1.22)$$

Alors l'écoulement peut être considéré comme appartenant à la zone de pleine turbulence. Le régime de l'écoulement serait donc turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux.

Cette même considération a été obtenue par *Hager* (2010), si la rugosité absolue d'un canal à surface libre est telle que :

$$\varepsilon > 30\nu [Q(gi)^2]^{0.2} \quad (1.23)$$

La relation (1.21) a été ensuite modifiée par plusieurs auteurs pour s'écrire, en unité métrique :

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (1.24)$$

Le coefficient n est le coefficient de rugosité *Manning* et dont la valeur est étroitement liée à celle du coefficient k de *Strickler* puisque $k = 1/n$.

Selon *Swamee* et *Rathie* (2004), la relation (1.24) peut être appliquée dans la gamme de valeurs $0.004 \leq \varepsilon / R_h \leq 0.04$ de la rugosité relative ε/R_h

Comme l'exige la forme de la relation (1.24), le coefficient n doit avoir pour dimension $[TL^{-1/3}]$. Cependant, il paraît physiquement injustifié que la dimension de temps T puisse intervenir dans l'unité d'une rugosité puisqu'elle celle-ci ne devrait dépendre que de la nature du matériau constituant les parois du canal considéré. Pour cette raison, certains auteurs énoncent que le numérateur de la relation (1.24) devrait contenir le terme \sqrt{g} , où g est l'accélération de la pesanteur, ce qui conduirait à donner à n la dimension $[L^{1/6}]$. En outre, il a été démontré que le coefficient de rugosité n pouvait s'écrire :

$$n = [\phi(R_h / \varepsilon)] \varepsilon^{1/6} \quad (1.25)$$

Où ε est la rugosité absolue. Si la fonction $[\phi(R_h / \varepsilon)]$ doit être considérée comme étant adimensionnelle, le coefficient de rugosité n doit alors avoir la même dimension que $\varepsilon^{1/6}$, c'est à dire $[L^{1/6}]$. *Hager* (1989) a pu montrer que la rugosité absolue ε et le coefficient k de *Strickler* sont liés par la relation :

$$k = \frac{8.2\sqrt{g}}{\varepsilon^{1/6}} \quad (1.26)$$

De nombreuses applications ont montré que les valeurs de n de *Manning* et n de *Kutter* sont pratiquement identiques lorsque la pente du canal est supérieure ou égale à 0,0001 pour un rayon hydraulique variant approximativement entre 0,30 m et 9 m.

En comparant les relations (1.14) et (1.24), on peut montrer que le coefficient C de *Chézy* est étroitement lié au coefficient de *Manning* n :

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6} \quad (1.27)$$

Ainsi, la formule de *Manning – Strickler* est souvent considérée comme une variante de la formule de *Chézy*.

I.7. FORMULE DE DARCY-WEISBACH ET EVALUATION DU COEFFICIENT DE FROTTEMENT

Nous devons savoir dans quelle mesure les formules universelles des pertes de charge applicables aux l'écoulement en charge pourraient s'appliquer aux écoulements à surface libre. Rappelons au préalable la formule générale de l'écoulement à partir de la formule de *Darcy-Weisbach* (1854,1845) :

$$i = f \frac{1}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (1.28)$$

Où Q est le débit volume, g est l'accélération de la pesanteur, A est l'aire de la section mouillée, D_h est le diamètre hydraulique et f est le coefficient de frottement.

Le coefficient de frottement f figurant dans la relation (1.28) peut être évalué par diverses relations, selon la nature du régime d'écoulement.

La formule de *Colebrook – White* permet d'évaluer le coefficient de frottement f lorsque l'écoulement est en régimes de transition, turbulent rugueux et lisse :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D_h} + \frac{2.51}{R\sqrt{f}} \right), R > 2300 \quad (1.29)$$

Dans la relation (1.29), R désigne le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement et ε est la rugosité absolue des parois du canal. Le nombre de *Reynolds* R s'exprime par :

$$R = \frac{4Q}{P\nu} \quad (1.30)$$

Où ν est la viscosité cinématique et P est le périmètre mouillé.

D'autres auteurs préfèrent utiliser la relation suivante pour le coefficient de frottement f (*Anonymous*, 1963), indiquant qu'elle est applicable à toutes les formes géométriques de canaux :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{2.5}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.31)$$

Le calcul montre que l'écart relatif entre les relations (1.29) et (1.31) est de l'ordre de 3% seulement. Notons que *Sinniger* et *Hager* (1989) affirment que la relation (1.29) est applicable à toute forme de conduites et de canaux.

Dans le cas où le régime d'écoulement est de transition, le coefficient de frottement dépend à la fois de la rugosité relative ε/D_h et du nombre de *Reynolds* R . Pour des valeurs données de ε/D_h et de R , l'évaluation du coefficient de frottement f , par application de la relation (1.29), nécessite un procédé itératif.

Une excellente relation approchée de (1.29) a été proposée par *Achour* (*Achour*, 2007):

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D_h} + \frac{4.5}{R} \log \frac{R}{6.97} \right) \quad (1.32)$$

Dans le cas d'un régime d'écoulement turbulent rugueux, correspondant aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds* R ($R \rightarrow \infty$), le terme $\left[2,51/(R\sqrt{f}) \right]$ figurant dans la relation (1.29) tend alors vers zéro et le coefficient de frottement f est alors donné par :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7D_h} \right) \quad (1.33)$$

La rugosité relative ε/D_h est donc le seul paramètre dont dépend le coefficient de frottement f lorsque l'écoulement est en régime turbulent rugueux. La relation (1.33) est également connue sous le nom de formule de *Nikuradse* en hommage à son auteur.

Dans le cas d'un régime d'écoulement pratiquement lisse $\varepsilon/D_h \rightarrow 0$, la relation (1.29) montre que le coefficient de frottement f ne dépend que de la valeur du nombre de *Reynolds* R :

$$f = \left[-2 \log \left(\frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) \right]^{-2} \quad (1.34)$$

L'évaluation de f nécessite également un procédé itératif. Dans le même domaine d'écoulement, ce procédé itératif peut être évité par l'application de la relation (1.32) :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{4.5}{R} \log \frac{R}{6.97} \right) \quad (1.35)$$

Dans la gamme $2.35 \cdot 10^3 \leq R \leq 10^9$, l'application de la relation (1.35) occasionne un écart relatif inférieur à 0.7% par rapport à (1.34).

La formule de *Swamee et Jain* (1976) permet également d'évaluer de manière explicite le coefficient f dans le domaine pratiquement lisse :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{5.74}{R^{0.9}} \right) \quad (1.36)$$

Mais, dans la même gamme de valeurs ci-dessus indiquée de R , l'application de (1.36) occasionne un écart relatif atteignant 2,8% par rapport à (1.34). Dans une gamme plus restreinte de R telle que $5 \cdot 10^3 < R < 10^5$, cet écart se réduit mais atteint tout de même 1,5%.

I.7.1. Présentation du diagramme de Moody

Pour illustrer l'influence du nombre de *Reynolds* R d'un écoulement uniforme et par conséquent celle de la viscosité cinématique ν du liquide, nous pouvons faire appel au diagramme de *Moody*. Ce diagramme est élaboré pour la conduite en charge de diamètre D et peut être étendu à l'écoulement à surface libre en substituant D par D_h .

Le digramme de *Moody* s'obtient par la représentation graphique de la fonction f ($f, R, \varepsilon/D_h$), dans un système de coordonnées à divisions logarithmiques. Ce diagramme est établi en s'appuyant sur la formule de *Colebrook-White* pour diverses valeurs de la rugosité relative ε/D_h . Ce diagramme est représenté sur la figure 1.7.

A l'exception du régime laminaire qui se traduit par la droite située à l'extrémité gauche du diagramme (figure 1.7). La relation (1.29) est en effet exclusivement destinée à l'écoulement turbulent.

Pour l'écoulement turbulent lisse, la courbe enveloppe inférieure du diagramme de la figure 1.7 correspondrait à la représentation graphique de la relation (1.34), tandis que les courbes en trait plein situées à droite du diagramme de la figure 1.7 occuperaient la zone de pleine turbulence. Cette zone s'étend au-delà de la courbe en trait discontinu. Les courbes appartenant à la zone de pleine turbulence apparaissent comme étant des lignes quasi horizontales, traduisant le fait que le coefficient de frottement f pourrait être considéré comme étant une constante, exclusivement dépendante de la valeur de la rugosité relative ε/D (ou ε/D_h). En réalité, ces lignes décroissent très lentement au fur et à mesure de l'accroissement du nombre de *Reynolds* R et quelle que soit la valeur de la rugosité relative ε/D_h . La valeur constante de f n'est théoriquement obtenue que pour $R \rightarrow \infty$ conformément à la relation (1.33). La courbe en trait discontinu correspondant à l'enveloppe inférieure de la zone de pleine turbulence (figure 1.7) a été tracée en admettant un écart de 1,5% entre les valeurs du coefficient de frottement f calculées selon la relation (1.29) et celles issues de l'application de la relation (1.33). Si tout couple de valeurs ($\varepsilon/D_h, R$) indiquait un point situé au-dessus de la courbe en trait discontinu du diagramme de la figure 1.7, il serait alors admis que l'écoulement est en régime d'écoulement turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux.

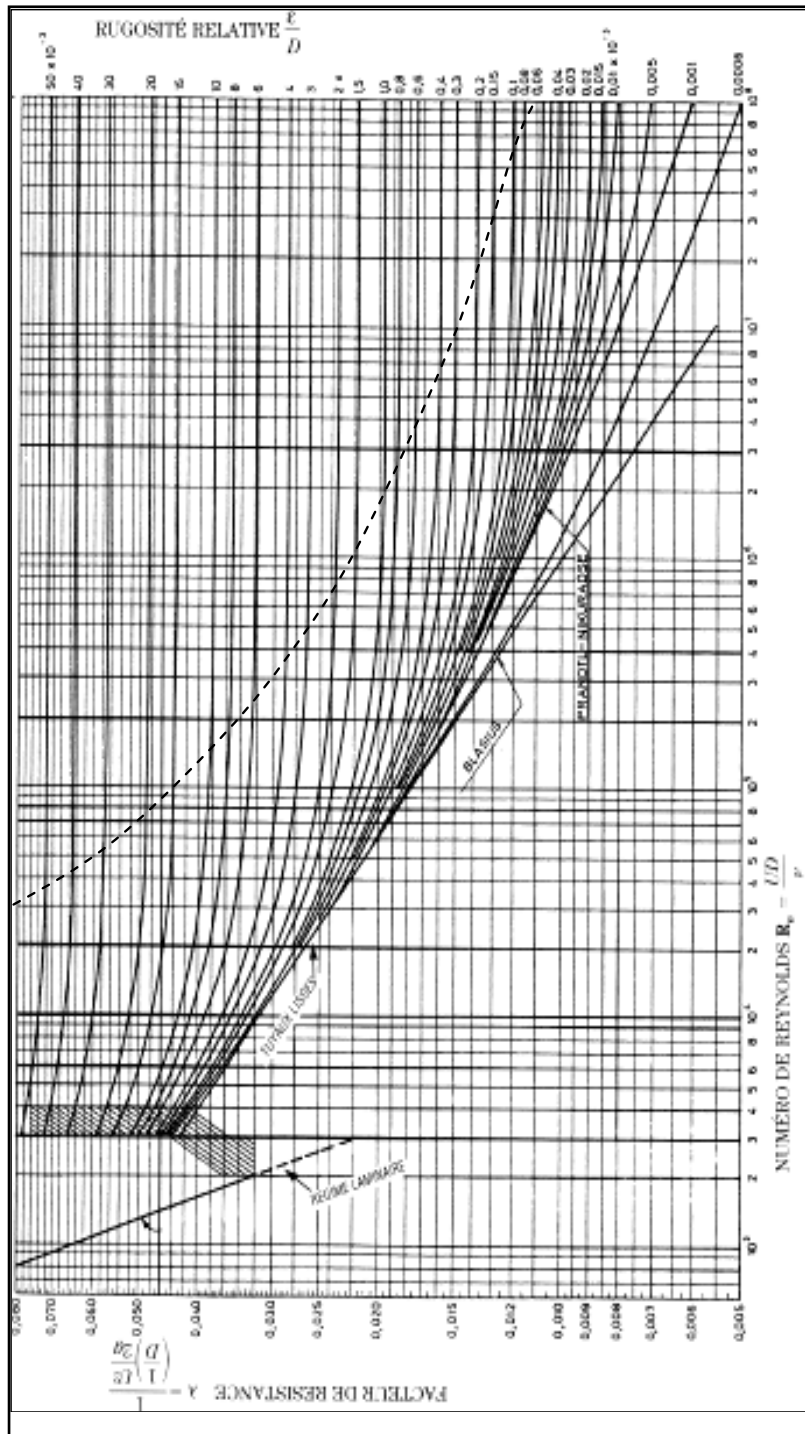


Figure 1.7 : Diagramme universel de *Moody* (1944). (—) Courbes $f(R)$ pour diverses valeurs de ϵ/D ou ϵ/D_h . (- - -) Courbe au-delà de laquelle f peut être considéré comme étant constant pour la valeur donnée de ϵ/D_h .

I.8. CALCUL DE L'ÉCOULEMENT UNIFORME

I.8.1. Position du problème

L'écoulement uniforme à surface libre dans les conduites et canaux artificiels est régi par cinq paramètres :

- Le débit volume Q .
- La dimension linéaire a quelconque liée à l'écoulement ou au profil géométrique du canal considéré. Cette dimension linéaire peut être à titre d'exemple la profondeur y_n de l'écoulement, la largeur b d'un canal rectangulaire ou la petite base d'un trapèze, le diamètre D d'une conduite circulaire
- La pente longitudinale i du canal.
- La rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne du canal.
- La viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

Dans la plupart des cas pratiques, il est extrêmement rare de rencontrer un problème lié au calcul de la rugosité ε ou à la détermination de la valeur de la viscosité ν du liquide en écoulement. Seuls les paramètres Q , a et i présentent un réel intérêt et chacun de ces paramètres représente une classe de problème. Il existe donc trois classes de problèmes qui se résument ainsi :

- i.* Connaissant a , i , ε et ν , quel serait le débit Q écoulé par le canal ? Il s'agit donc de déterminer la capacité d'évacuation du canal après avoir défini la relation fonctionnelle ϕ telle que : $Q = \phi(a, i, \varepsilon, \nu)$.
- ii.* Connaissant Q , a , ε et ν , quel serait la valeur de la pente i du canal ? Ce paramètre nous renseigne sur l'état de la ligne de charge ainsi que sur les pertes de charges linéaires. La relation fonctionnelle ϕ à définir est telle que : $i = \phi(Q, a, \varepsilon, \nu)$.
- iii.* Connaissant Q , i , ε et ν , quel serait la dimension linéaire a du canal ? Cette catégorie de problème répond à un besoin de dimensionnement, après avoir déterminé la relation fonctionnelle ϕ telle que : $a = \phi(Q, i, \varepsilon, \nu)$.

I.8.2. Calcul la vitesse moyenne V de l'écoulement

I.8.2.1. Transformation de la formule de *Colebrook – White*

L'application de la relation (1.29) de *Colebrook – White* a été généralisée aux canaux ouverts de diverses formes géométriques et de divers types de rugosité. Elle s'écrit alors sous la forme (*Graf et Altinakar, 2000*):

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{aR_h} + \frac{b}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.37)$$

Où $12 < a < 15$ et $0 < b < 6$

En introduisant le rayon hydraulique $D_h = 4R_h$, le nombre de *Reynolds* R s'écrit :

$$R = \frac{4VR_h}{\nu} \quad (1.38)$$

Où V est la vitesse moyenne de l'écoulement et ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement. En tenant compte de la relation (1.38), la relation (1.29) s'écrit:

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7(4R_h)} + \frac{2.51\nu}{V(4R_h)\sqrt{f}} \right) \quad (1.39)$$

Le rayon hydraulique R_h peut représenter une infinité de canaux de profils géométriques différents. A titre d'exemple, si b_0 et h_0 sont respectivement la largeur et la hauteur d'un profil rectangulaire, le rayon hydraulique R_h s'écrit:

$$R_h = \frac{b_0 h_0}{b_0 + 2h_0} \quad (1.40)$$

Pour une hauteur donnée h et une largeur b , le rayon hydraulique R_h s'écrit :

$$R_h = \frac{bh}{b + 2h} \quad (1.41)$$

En égalant les relations (1.40) et (1.41), il vient :

$$\frac{bh}{b_0 h_0} = \frac{b + 2h}{b_0 + 2h_0} \quad (1.42)$$

La relation (1.42) peut également s'écrire :

$$\frac{bh}{b_0 h_0} = \frac{b/b_0 + 2h/b_0}{1 + 2h_0/b_0} \quad (1.43)$$

En introduisant la fonction $\Phi = h_0/b_0$, la relation (1.43) devient :

$$\frac{bh}{b_0 h_0} = \frac{b/b_0 + 2\Phi h/h_0}{1 + 2\Phi} \quad (1.44)$$

Ainsi, toute combinaison de h et de b satisfaisant la relation (1.44) conduit au même rayon hydraulique R_h (*Sinniger et Hager, 1989*).

Bock (1966) introduit le coefficient de forme ϕ de la section qui dépend uniquement de la géométrie du profil du canal considéré :

$$\phi = R_{he} / R_h \quad (1.45)$$

où R_{he} est le rayon hydraulique effectif. Tenant compte de (1.45), la relation (1.39) s'écrit :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7(4\phi R_h)} + \frac{2.51\nu}{V(4\phi R_h)\sqrt{f}} \right) \quad (1.46)$$

En régime d'écoulement turbulent lisse, *Bock* (1966) a proposé les relations suivantes pour le calcul du coefficient de forme ϕ :

- Profil rectangulaire:

$$\phi = \left[\frac{1.629(h/b)}{1 + 2(h/b)} \right]^{1/4} \quad (1.47)$$

- Profil trapézoïdal pour une pente de talus $m = \cotg \alpha$:

$$\phi = \left[1.629(h/b) \frac{1 + (h/mb)}{1 + 2\sqrt{1+m^2}(h/mb)} \right]^{1/4} \quad (1.48)$$

- Profil triangulaire dont la pente du talus est m :

$$\phi = (2.539m)^{0.15} \quad (1.49)$$

- Profil circulaire de diamètre D :

$$\phi = (h/D)^{1/4} \quad (1.50)$$

En tenant compte de la relation (1.10), la relation (1.46) permet alors d'exprimer la vitesse moyenne V de l'écoulement sous la forme :

$$V = -4\sqrt{2giR_h} \log \left(\frac{\varepsilon}{14.8\phi R_h} + \frac{2.51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}} \right) \quad (1.51)$$

La relation (1.51) exprime la vitesse uniforme de l'écoulement dans les conduites et canaux.

Exemple d'application 1.1.

Soit un canal rectangulaire de largeur $b = 2.2m$, siège d'un écoulement de profondeur normale de $h = 1.65m$. Il est caractérisé par une pente longitudinale $i = 0.001$ et une rugosité absolue $\varepsilon = 4.10^{-4}m$. Le liquide en écoulement a une viscosité cinématique $\nu = 10^{-6}m^2/s$. Calculer la vitesse moyenne V de l'écoulement uniforme ainsi que le débit volume Q .

Le calcul doit être mené selon les étapes suivantes:

i. Le rayon hydraulique R_h est:

$$R_h = \frac{bh}{b+2h} = \frac{2.2 \times 1.65}{2.2 + 2 \times 1.65} = 0.66m$$

ii. Le paramètre h/b est :

$$h/b = 1.65/2.2 = 0.75$$

iii. Selon la relation (1.47), le paramètre ϕ est :

$$\phi = \left[\frac{1.629(h/b)}{1+2(h/b)} \right]^{1/4} = \left[\frac{1.629 \times 0.75}{1+2 \times 0.75} \right]^{1/4} = 0.83610455$$

Ainsi, la relation (1.51) donne :

$$V = -4\sqrt{2giR_h} \log \left(\frac{\varepsilon}{14.8\phi R_h} + \frac{2.51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}} \right) = -4 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.001 \times 0.66} \\ \times \log \left(\frac{4.10^{-4}}{14.8 \times 0.83610455 \times 0.66} + \frac{2.51 \times 10^{-6}}{8 \times 0.83610455 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.001 \times 0.66^3}} \right) = 1.94261808m/s$$

Ainsi : $Q = VA = Vhb = 1.94261808 \times 2.2 \times 1.65 = 7.05170364m^3/s$

En admettant $\phi = 1$, la vitesse moyenne V serait en vertu de la relation (1.51) :

$$V = -4\sqrt{2giR_h} \log\left(\frac{\varepsilon}{14.8\phi R_h} + \frac{2.51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}}\right) = -4 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.001 \times 0.66}$$

$$\times \log\left(\frac{4.10^{-4}}{14.8 \times 1 \times 0.66} + \frac{2.51 \times 10^{-6}}{8 \times 1 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.001 \times 0.66^3}}\right) = 1.97800337 \text{ m/s}$$

L'écart relatif entre les deux valeurs ainsi calculées de la vitesse moyenne V n'est que de 1.82 %. Nous pouvons donc conclure que l'effet de la forme du profil sur la vitesse moyenne V n'est que du second ordre.

Exemple d'application 1.2.

On considère un canal de forme triangulaire de profondeur normale de l'écoulement $h = 1.5 \text{ m}$, caractérisé par une rugosité absolue $\varepsilon = 4.10^{-3} \text{ m}$ et écoulant un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ sous une pente géométrique $i = 0.001$. Sachant que l'angle d'inclinaison $\alpha = 45^\circ (m = 1)$. Calculer la vitesse moyenne V de l'écoulement uniforme ainsi que le débit volume Q .

Le calcul doit être mené selon les étapes suivantes :

i. Le rayon hydraulique R_h est:

$$R_h = \frac{mh^2}{2h\sqrt{1+m^2}} = \frac{1 \times 1.5^2}{2 \times 1.5 \times \sqrt{1+1^2}} = 0.53033009 \text{ m}$$

ii. Selon la relation (1.49), le paramètre ϕ est :

$$\phi = (2.539 \text{ m})^{0.15} = (2.539 \times 1)^{0.15} = 1.15000414$$

En application de la relation (1.51), la vitesse moyenne V de l'écoulement uniforme est :

$$V = -4\sqrt{2giR_h} \log\left(\frac{\varepsilon}{14.8\phi R_h} + \frac{2.51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}}\right) = -4 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.001 \times 0.53}$$

$$\times \log\left(\frac{4.10^{-3}}{14.8 \times 1.15000414 \times 0.53} + \frac{2.51 \times 10^{-6}}{8 \times 1.15000414 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.001 \times 0.53^3}}\right) = 1.36573587 \text{ m/s}$$

Par suite, le débit volume Q est alors :

$$Q = VA = Vmh^2 = 1.36573587 \times 1 \times 1.5^2 = 3.07290571 \text{ m}^3 / \text{s}$$

iii. En admettant $\phi = 1$, la vitesse moyenne V serait en vertu de la relation (1.51) :

$$V = -4\sqrt{2giR_h} \log\left(\frac{\varepsilon}{14.8\phi R_h} + \frac{2.51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}}\right) = -4 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.001 \times 0.53}$$

$$\times \log\left(\frac{4.10^{-3}}{14.8 \times 1 \times 0.53} + \frac{2.51 \times 10^{-6}}{8 \times 1 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.001 \times 0.53^3}}\right) = 1.34097694 \text{ m/s}$$

L'écart relatif entre les deux valeurs ainsi calculées de la vitesse moyenne V n'est que de 1.82%. Nous pouvons encore conclure que l'effet de la forme du profil sur la vitesse moyenne V n'est que du second ordre.

Les exemples d'application que nous venons de considérer montrent clairement que l'effet du paramètre ϕ sur la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme n'est pas significatif. Par conséquent, l'application de la relation (1.29) de *Colebrook* peut être étendue aux canaux ouverts, sans générer d'erreur relative significative.

1.8.3. Approche de Swamee

En 1994, *Swamee* regroupe les relations de base (1.3), (1.10) et (1.31), régissant l'écoulement en canal à surface libre, en une seule relation.

La première étape consiste à écrire, à partir de la relation (1.10) de *Darcy-Weisbach*, que :

$$\sqrt{f} = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{giR_h}}{V} \quad (1.52)$$

En introduisant la relation (1.52) dans la relation (1.31), nous pouvons écrire que :

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{V}{\sqrt{giR_h}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{2.5}{R2\sqrt{2} \frac{\sqrt{giR_h}}{V}} \right)$$

Après simplifications et réarrangements, la relation précédente s'écrit plus simplement :

$$V = -4\sqrt{2} \sqrt{giR_h} \log \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{2.5V}{R2\sqrt{2} \sqrt{giR_h}} \right) \quad (1.53)$$

En remplaçant, dans la relation (1.53) le nombre de *Reynolds* R par l'expression (1.3), nous pouvons déduire que:

$$V = -4\sqrt{2} \sqrt{giR_h} \log \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{0.221\nu}{R_h \sqrt{giR_h}} \right)$$

Ou bien :

$$V = -2.457 \sqrt{gR_h i} \ln \left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{0.221\nu}{R_h \sqrt{gR_h i}} \right) \quad (1.54)$$

Comme l'indique la relation (1.54), la vitesse V moyenne de l'écoulement peut être directement calculée à partir des valeurs connues du rayon hydraulique R_h , de la pente du canal i , de la rugosité relative ε/R_h et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Selon *Swamee et al* (2002), la relation approchée (1.54) peut être appliquée dans les gammes de valeurs $10^3 \leq R \leq 10^8$ du nombre de *Reynolds* R et $10^{-6} \leq \varepsilon/R_h \leq 10^{-3}$ de la rugosité relative.

En tenant compte de la relation (1.1), la relation (1.54) s'écrit :

$$Q = -2.457 A \sqrt{g R_h i} \ln \left(\frac{\varepsilon}{12 R_h} + \frac{0.221 \nu}{R_h \sqrt{g R_h i}} \right) \quad (1.55)$$

Pour l'écoulement turbulent lisse ou pratiquement lisse, caractérisé par une rugosité relative telle que $\varepsilon / R_h \rightarrow 0$. La relation (1.55) devient :

$$Q = -2.457 A \sqrt{g R_h i} \ln \left(\frac{0.221 \nu}{R_h \sqrt{g R_h i}} \right) \quad (1.56)$$

Par contre, pour l'écoulement turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux correspondant à $R \rightarrow \infty$, nous pouvons alors écrire que $\nu \rightarrow 0$ en vertu de la relation (1.3). Ceci implique, au regard de la relation (1.55), que $(0.221 \nu / R_h \sqrt{g R_h i}) \rightarrow 0$.

La relation (1.55) devient alors :

$$Q = -2.457 A \sqrt{g R_h i} \ln \left(\frac{\varepsilon}{12 R_h} \right) \quad (1.57)$$

Exemple d'application 1.3.

Reprenons l'exemple d'application (1.1) et déterminons le débit volume Q pour les données suivantes :

$$b = 2.2m; y_n = 1.65m; i = 0.001; \varepsilon = 4.10^{-4} m; \nu = 10^{-6} m^2 / s.$$

i. L'aire de la section mouillée A est:

$$A = b y_n = 2.2 \times 1.65 = 3.63 m^2$$

ii. Le périmètre mouillé P est:

$$P = b + 2 y_n = 2.2 + 2 \times 1.65 = 5.5 m$$

iii. Le rayon hydraulique R_h est par suit:

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{3.63}{5.5} = 0.66m$$

iv. Selon la relation (1.55), le débit volume Q recherché est :

$$Q = -2.457A\sqrt{gR_h i} \ln\left(\frac{\varepsilon}{12R_h} + \frac{0.221\nu}{R_h\sqrt{gR_h i}}\right) = -2.457 \times 3.63 \times \sqrt{9.81 \times 0.66 \times 0.001}$$

$$\times \ln\left(\frac{4.10^{-4}}{12 \times 0.66} + \frac{0.221 \times 10^{-6}}{0.66 \times \sqrt{9.81 \times 0.66 \times 0.001}}\right) = 7.04329389m^3 / s$$

Avec un écart relatif de moins de 0.12%, cette valeur de Q est pratiquement égale à celle calculée lors de l'exemple d'application (1.1).

v. La présente étape procède à la vérification du régime de l'écoulement, en ayant recours à l'inégalité (1.23) qui stipule que si $\varepsilon > 30\nu[Q(gi)^2]^{0.2}$, alors le régime de l'écoulement est turbulent rugueux. A partir des valeurs de Q , i , ε et ν :

$$\varepsilon = 0.0004 > 30 \times 10^{-6} \times [7.04329389 \times (9.81 \times 0.001)^2]^{0.2} = 0.00012909$$

L'inégalité est en effet vérifiée et l'écoulement est donc en régime turbulent rugueux. Ainsi, le débit volume Q aurait donc pu être calculé en application de la relation (1.57), soit :

$$Q = -2.457A\sqrt{gR_h i} \ln\left(\frac{\varepsilon}{12R_h}\right) = -2.457 \times 3.63 \times \sqrt{9.81 \times 0.66 \times 0.001} \times \ln\left(\frac{4.10^{-4}}{12 \times 0.66}\right)$$

$$= 7.10011618m^3 / s$$

v. Cette dernière valeur du débit volume Q , comparée à la valeur exacte obtenue selon la relation (1.55), conduit ainsi un écart acceptable correspondant à :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = 100 \times (7.10011618 - 7.04329389) / 7.10011618 = 0.8\%$$

I.9. METHODES DE CALCUL DE LA PROFONDEUR NORMALE POUR QUELQUES PROFILS DE CANAUX A SURFACE LIBRE

Le présent paragraphe s'intéresse aux méthodes de calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans quelques profils de canaux à surface libre. Les méthodes les plus utilisées actuellement seront exposées et commentées en montrant leurs avantages et leurs inconvénients.

Le principe de base du calcul de la profondeur normale consiste à résoudre une équation d'écoulement en terme de débit de telle sorte que seule la profondeur normale soit inconnue.

I.9.1. Canal ouvert à surface libre de forme triangulaire

I.9.1.1. Caractéristiques du canal

Le canal considéré est représenté schématiquement sur la figure 1.8. Il est caractérisé par la dimension linéaire horizontale B , par la dimension linéaire verticale y_n , ainsi que par l'angle d'inclinaison α des parois latérales par rapport à l'horizontale.

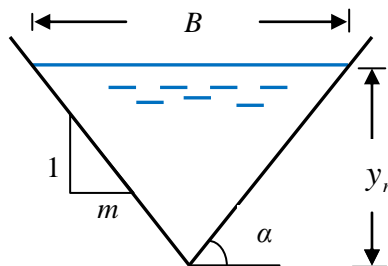


Figure 1.8: Schéma de définition du canal ouvert de forme triangulaire.

Il est aisé de montrer que :

$$B = 2my_n \quad (1.58)$$

Où : $m = \cot g(\alpha)$

L'aire de la section mouillée A du canal s'écrit :

$$A = my_n^2 \quad (1.59)$$

Le périmètre mouillé P est:

$$P = 2y_n \sqrt{1+m^2} \quad (1.60)$$

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ est par suite :

$$R_h = \frac{my_n}{2\sqrt{1+m^2}} \quad (1.61)$$

I.9.1.2. Expression de la profondeur normale

a. Formule de Chézy

En introduisant dans la relation (1.14) de *Chézy* les formules (1.59) et (1.61), nous pouvons écrire que :

$$y_n = \left(\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q}{C\sqrt{i}} \right)^{2/5} \quad (1.62)$$

b. Formule de Manning

En ayant recours aux relations (1.59) et (1.61), la relation (1.24) de *Manning* permet d'écrire que :

$$y_n = \left(\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m^{5/2}} \right)^{1/4} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8} \quad (1.63)$$

Exemple d'application 1.4.

Un canal à surface libre de forme triangulaire écoule un débit volume $Q = 6 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$, sous une pente $i = 4 \cdot 10^{-3}$ et caractérisé par une rugosité absolue $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Sachant que l'angle d'inclinaison des parois par rapport à l'horizontale $\alpha = 45^\circ$ ($m = 1$). Déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement.

i. A partir des valeurs de Q , i , ε et ν , l'inégalité (1.23) est bien satisfaite, ce qui confirme la nature rugueuse du régime de l'écoulement. En effet :

$$\varepsilon = 3 \cdot 10^{-3} > 30 \times 10^{-6} \times \left[6 \times (9.81 \times 0.004)^2 \right]^{0.2} = 7.6 \cdot 10^{-5}$$

L'inégalité est en effet vérifiée et l'écoulement est donc en régime turbulent rugueux. Ainsi, la profondeur normale y_n de l'écoulement aurait donc pu être calculée en application de la relation (1.63), soit :

$$y_n = \left(\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m^{5/2}} \right)^{1/4} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8}$$

Le seul inconnu dans cette dernière équation est le coefficient n de *Manning*.

ii. Selon *Hager* (1989), le coefficient de k de Strickler est donné par:

$$k = \frac{8.2\sqrt{g}}{\varepsilon^{1/6}} = \frac{8.2 \times \sqrt{9.81}}{(3 \cdot 10^{-3})^{1/6}} = 67.6282496$$

Le coefficient n de *Manning* est:

$$n = 1/k_s = 1/67.62822496 \approx 0.015$$

iii. La profondeur normale y_n recherchée est:

$$y_n = \left(\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m^{5/2}} \right)^{1/4} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8} = \left(\frac{2 \times \sqrt{1+1^2}}{1^{5/2}} \right)^{1/4} \times \left(\frac{0.015 \times 6}{\sqrt{0.004}} \right)^{3/8} = 1.48027001m$$

iv. La rugosité relative ε / R_h :

- Le rayon hydraulique $R_h = A / P$ est par suite :

$$R_h = \frac{my_n}{2\sqrt{1+m^2}} = \frac{1 \times 1.48027001}{2 \times \sqrt{1+1^2}} = 0.523354481m$$

Avec la valeur donnée de la rugosité absolue ε et celle calculée du rayon hydraulique R_h , la rugosité relative ε / R_h est donc :

$$\varepsilon / R_h = 0.003 / 0.523354481 = 0.005732252 \approx 0.006$$

La valeur calculée de la rugosité relative ε / R_h appartient bien à l'intervalle de validité de la relation (1.24), soit $0.004 \leq \varepsilon / R_h \leq 0.04$.

c. Approche de Swamee et Rathie

Etablie en (2004), la formule de *Swamee* et *Rathie* est destinée au calcul explicite de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans les canaux triangulaires. Cette formule se veut être une solution approchée à la relation implicite (1.55) de *Swamee*. Selon *Swamee* et *Rathie* (2004), la relation (1.55) de *Swamee* peut être remplacée, avec une bonne approximation, par la relation approchée suivante :

$$y_n = 0.468 \left[\frac{\varepsilon(1+m^2)^{2.9}}{m^{15.4}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{9.6} + \frac{7\nu(1+m^2)^{3.1}}{m^{15.6}} \frac{Q^{9.4}}{(gi)^{5.2}} \right]^{0.04} \quad (1.64)$$

Exemple d'application 1.5.

Reprenons l'exemple d'application 1.4 et recherchons la profondeur normale y_n de l'écoulement en ayant recours à la formule (1.64) pour les données suivantes :

$$Q = 6m^3 / s; m = 1; i = 0.004; \nu = 10^{-6} m^2 / s; \varepsilon = 3.10^{-3} m.$$

i. Selon la relation (1.64), la profondeur normale y_n est:

$$y_n = 0.468 \left[\frac{\varepsilon(1+m^2)^{2.9}}{m^{15.4}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{9.6} + \frac{7\nu(1+m^2)^{3.1}}{m^{15.6}} \frac{Q^{9.4}}{(gi)^{5.2}} \right]^{0.04} =$$

$$0.468 \times \left[\frac{3.10^{-3}(1+1^2)^{2.9}}{1^{15.4}} \times \left(\frac{6}{\sqrt{9.81 \times 0.004}} \right)^{9.6} + \frac{7 \times 10^{-6} \times (1+1^2)^{3.1}}{1^{15.6}} \times \frac{6^{9.4}}{(9.81 \times 0.004)^{5.2}} \right]^{0.04}$$

$$= 1.489987809m \approx 1.5m$$

Ainsi, Nous pouvons constater que l'écart relatif entre les valeurs de la profondeur normale de l'exemple d'application 1.4 et du présent exemple n'est que de 0.6% seulement, ce qui indique que les deux relations aboutissent pratiquement au même résultat.

ii. Selon l'inégalité (1.23), nous pouvons déduire que l'écoulement est en régime turbulent rugueuse puisque :

$$\varepsilon = 3.10^{-3} > 30 \times 10^{-6} \times \left[6 \times (9.81 \times 0.004)^2 \right]^{0.2} = 7.6.10^{-5}$$

Alors nous pouvons écrire que $\nu \rightarrow 0$ Pour $\nu \rightarrow 0$, la relation (1.64) devient alors :

$$y_n = 0.468 \left[\frac{\varepsilon(1+m^2)^{2.9}}{m^{15.4}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{9.6} \right]^{0.04}$$

Soit:

$$y_n = 0.468 \times \left[\frac{3.10^{-3} \times (1+1^2)^{2.9}}{1^{15.4}} \times \left(\frac{6}{\sqrt{9.81 \times 0.004}} \right)^{9.6} \right]^{0.04} = 1.489581587 \approx 1.49m$$

Cette dernière valeur de la profondeur normale y_n , comparée à la valeur exacte obtenue selon la relation (1.64), conduit ainsi un écart très acceptable, correspondant à:

$$\Delta y_n / y_n = 100 \times \left(\frac{1.489987809 - 1.489581587}{1.489987809} \right) \approx 0.027\%$$

d. La fonction W de Lambert

La figure (1.9) représente la fonction W de Lambert selon la relation suivante (Swamee et Rathie ,2012):

$$We^W = x \tag{1.65}$$

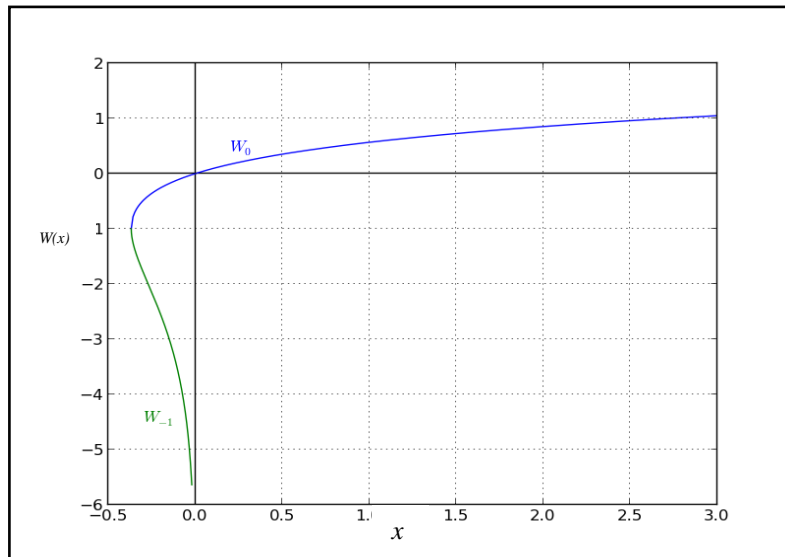


Figure 1.9 : La fonction W de Lambert (Swamee et Rathie ,2012).

En notant:

$$x^p \ln(bx^q) = c \tag{1.66}$$

(b, c, p et q comme constants).

Conduit à une solution en termes de la fonction de W comme :

$$x = \left[\frac{q}{pc} W_0 \left(\frac{pc}{q} b^{p/q} \right) \right]^{-\frac{1}{p}} \quad b, c, p, q > 0 \quad (1.67)$$

Limite de la fonction W :

Pour $x > 41.19$, *Hoorfar* et *Hassani* (2008) ont donné la limite suivante pour la fonction W :

$$\ln x - \ln \ln x \leq W_0(x) < \ln x \quad (1.68)$$

Ainsi, on peut avoir l'approximation suivante pour $x \geq 10^8$ (*Swamee* et *Rathie*, 2012):

$$W_0(x) = \ln x - \ln \ln x \quad (1.69)$$

En tenant compte des relations (1.59) et (1.61), la relation (1.55) devient alors :

$$Q = -1.737 \frac{m\sqrt{mgi}}{(1+m^2)^{0.25}} y_n^{2.5} \ln \left(\frac{\varepsilon(1+m^2)^{0.5}}{6my_n} + \frac{0.625(1+m^2)^{0.75} \nu}{m\sqrt{mgi}y_n^{1.5}} \right) \quad (1.70)$$

En introduisant les paramètres adimensionnels :

$$y_{n*} = \frac{m^{0.6}(gi)^{0.2}}{(1+m^2)^{0.1} Q^{0.4}} y_n \quad (1.71)$$

$$\varepsilon_* = \frac{(1+m^2)^{0.4}(gi)^{0.2}}{m^{0.4} Q^{0.4}} \varepsilon \quad (1.72)$$

$$\nu_* = \frac{(1+m^2)^{0.6}}{m^{0.6}(gi)^{0.2} Q^{0.6}} \nu \quad (1.73)$$

La relation (1.70) s'écrit alors plus simplement :

$$y_{n*}^{2.5} \ln \left(\frac{\varepsilon_*}{6y_{n*}} + \frac{0.625\nu_*}{y_{n*}^{1.5}} \right) + 0.5757 = 0 \quad (1.74)$$

Trois variables adimensionnelles composent donc la relation (1.74) et qui sont y_* , ε_* et ν_* . Cette relation a l'avantage de regrouper toutes les variables influençant l'écoulement uniforme en canal triangulaire à surface libre, sous forme de paramètres adimensionnels.

Pour le domaine de l'écoulement turbulent rugueux ou hydrauliquement rugueux correspondant à $\nu \rightarrow 0$, nous pouvons alors écrire que $\nu_* \rightarrow 0$ en vertu de la relation (1.73), la relation (1.74) devient :

$$y_{n*}^{2.5} \ln\left(\frac{6y_{n*}}{\varepsilon_*}\right) = 0.5757 \quad (1.75)$$

En appliquant l'équation (1.67), la solution approchée de l'équation implicite (1.75) est:

$$y_{n*} = 1.157 \left[W_0 \left(127 \varepsilon_*^{-2.5} \right) \right]^{-0.4} \quad (1.76)$$

La relation (1.76) permet d'écrire que :

$$y_n = 1.157 \frac{(1+m^2)^{0.1} Q^{0.4}}{m^{0.6} (gi)^{0.2}} \left[W_0 \left(\frac{127mQ}{(1+m^2)\varepsilon^2 \sqrt{g\epsilon i}} \right) \right]^{-0.4} \quad (1.77)$$

Pour le domaine de l'écoulement turbulent lisse caractérisé par une rugosité absolue telle que $\varepsilon \rightarrow 0$ alors $\varepsilon_* \rightarrow 0$, la profondeur relative y_* est alors régi par la relation (1.74) pour $\varepsilon_* \rightarrow 0$:

$$y_{n*}^{2.5} \ln\left(\frac{1.6y_{n*}^{1.5}}{\nu_*}\right) = 0.5757 \quad (1.78)$$

En appliquant l'équation (1.67), la solution de l'équation (1.78) est donnée par :

$$y_{n*} = 0.9836 \left[W_0 \left(2.1 \nu_*^{-5/3} \right) \right]^{-0.4} \quad (1.79)$$

Ou bien :

$$y_n = 0.9836 \frac{(1+m^2)^{0.1} Q^{0.4}}{m^{0.6} (gi)^{0.2}} \left[W_0 \left(2.1 \frac{mQ}{(1+m^2)} \left(\frac{gi}{\nu^5} \right)^{1/3} \right) \right]^{-0.4} \quad (1.80)$$

Exemple d'application 1.6.

Reprenons l'exemple d'application 1.5 et calculons la profondeur normale y_n de l'écoulement pour les données suivantes :

- $Q = 6m^3 / s; m = 1; i = 0.0004; \varepsilon = 3.10^{-3} m$
- $Q = 6m^3 / s; m = 1; i = 0.0004; \varepsilon = 0; \nu = 10^{-6} m^2 / s$

Cas 1:

i. Selon la relation (1.77):

$$y_n = 4.8523 [W_0(0.3902 \cdot 10^{10})]^{-0.4} = 4.8523 \times 19.129^{-0.4} = 1.490m$$

ii. Selon la relation (1.69):

$$y_n = 4.8523 [\ln(0.3902 \cdot 10^{10}) - \ln[\ln(0.3902 \cdot 10^{10})]]^{-0.4} = 4.8523 \times 18.98^{-0.4} = 1.495m$$

Cas 2: .

i. Selon la relation (1.80) :

$$y_n = 4.1252 [W_0(0.6743 \cdot 10^{10})]^{-0.4} = 4.1252 \times 19.65^{-0.4} = 1.253m$$

ii. Selon la relation (1.69) :

$$y_n = 4.1251 [\ln(0.6743 \cdot 10^{10}) - \ln[\ln(0.6743 \cdot 10^{10})]]^{-0.4} = 4.1251 \times 19.51^{-0.4} = 1.257m$$

Ainsi, il peut voir que pour des problèmes pratiques de l'équation (1.69) est suffisamment précise pour représenter W_0 .

I.9.2. Canal ouvert à surface libre de forme rectangulaire

I.9.2.1. Caractéristiques du canal

Le canal de forme rectangulaire est l'un des ouvrages le plus rencontré dans les aménagements hydrauliques. La figure 1.10 montre schématiquement ce canal et ses caractéristiques géométriques.

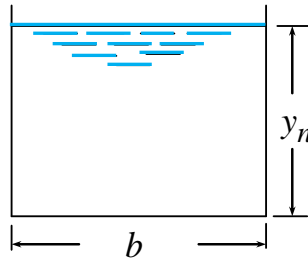


Figure 1.10: Schéma de définition du canal ouvert de forme rectangulaire.

La forme du canal considéré est définie par le paramètre de forme $\eta_n = y_n / b$, appelé aussi rapport d'aspect, où y_n est la profondeur normale de l'écoulement et b désigne la largeur du canal.

L'aire de la section mouillée A du canal s'écrit:

$$A = by_n \quad (1.81)$$

Ou bien:

$$A = \eta_n b^2 \quad (1.82)$$

Le périmètre mouillé P est donné par:

$$P = b + 2y_n \quad (1.83)$$

Soit :

$$P = b(1 + 2\eta_n) \quad (1.84)$$

En combinant les relations (1.81) et (1.83), le rayon hydraulique $R_h = A/P$ s'écrit donc :

$$R_h = \frac{by_n}{b + 2y_n} \quad (1.85)$$

Ou bien :

$$R_h = b \frac{\eta_n}{1 + 2\eta_n} \quad (1.86)$$

I.9.2.2. Expression de la profondeur normale

a. Formule de Chézy

En substituant les expressions (1.81) et (1.85) dans l'équation (1.14), celle-ci devient:

$$y_n = \left(\frac{Q}{b^{2/3} C \sqrt{i}} \right)^{3/5} \times (b + 2y_n)^{1/3} \quad (1.87)$$

En admettant que les valeurs de Q, C, b et de i soient données, la relation (1.87) montre que la valeur de la profondeur normale y_n ne peut être explicitement déterminée. La relation (1.87) est en effet implicite vis-à-vis de y_n puisque celui est contenu à la fois dans les membres gauche et droit de la relation. La détermination de la profondeur normale y_n nécessite donc un procédé itératif dans le cas où la relation (1.87) est utilisée.

1. Résolution par la méthode du point fixe

La résolution de l'équation (1.87) par la méthode du point fixe consisté à choisir une première valeur de y_{n0} arbitrairement choisie et de calculer ensuite. Selon la relation (1.87), la valeur y_{n1} telle que :

$$y_{n1} = \left(\frac{Q}{b^{2/3} C \sqrt{i}} \right)^{3/5} \times (b + 2y_{n0})^{1/3}$$

Avec la valeur ainsi calculée de y_{n1} , on calcule la valeur y_{n2} telle que:

$$y_{n2} = \left(\frac{Q}{b^{2/3} C \sqrt{i}} \right)^{3/5} \times (b + 2y_{n1})^{1/3}$$

Le procédé itératif se poursuit ainsi et nous pouvons écrire que :

$$y_{n3} = \left(\frac{Q}{b^{2/3} C \sqrt{i}} \right)^{3/5} \times (b + 2y_{n2})^{1/3}$$

.....

$$y_{ni-1} = \left(\frac{Q}{b^{2/3} C \sqrt{i}} \right)^{3/5} \times (b + 2y_{ni-2})^{1/3}$$

$$y_{ni} = \left(\frac{Q}{b^{2/3} C \sqrt{i}} \right)^{3/5} \times (b + 2y_{ni-1})^{1/3}$$

On arrête le processus itératif lorsque les valeurs calculées de y_{ni} et de y_{ni-1} sont très proches. Il est bien évident que la rapidité de convergence du processus itératif dépend fortement de la valeur initialement choisie de y_{n0} .

2. La conductivité relative

En substituant les expressions (1.82) et (1.86) dans l'équation (1.14), celle-ci devient:

$$Q = C \eta_n b^{5/2} \sqrt{\frac{\eta_n}{1 + 2\eta_n}} \sqrt{i}$$

Soit :

$$Q^2 = C^2 b^5 \frac{\eta_n^3}{1 + 2\eta_n} i \tag{1.88}$$

En considérant les variables Q , b , C et i , il est également possible de former le paramètre adimensionnel composé:

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i b^5}} \quad (1.89)$$

Tenant compte de la définition du paramètre Q^* , la relation (1.88) s'écrit plus simplement:

$$Q^{*2} = \frac{\eta_n^3}{1 + 2\eta_n} \quad (1.90)$$

La relation (1.90) s'écrit alors :

$$\eta_n^3 - 2Q^{*2}\eta_n - Q^{*2} = 0 \quad (1.91)$$

Nous obtenons ainsi une équation de troisième degré en η_n , sans terme du second ordre, qui permettrait de déterminer le rapport d'aspect η_n , à condition de connaître la valeur de la conductivité relative Q^* .

Le discriminant de l'équation (1.91) est :

$$\Delta = \frac{Q^{*4}}{4} \left(1 - \frac{32}{27} Q^{*2} \right)$$

Nous pouvons alors conclure que :

- a. Lorsque $Q^* \geq \sqrt{27/32}$, le discriminant Δ est négatif ou nul et la racine réelle de l'équation de troisième degré (1.91) est :

$$\eta_n = 2\sqrt{\frac{2}{3}} Q^* \cos \frac{\beta}{3} \quad (1.92)$$

Où l'angle β est tel que :

$$\cos \beta = \frac{1}{Q^*} \sqrt{\frac{27}{32}} \quad (1.93)$$

- b. Lorsque $Q^* \leq \sqrt{27/32}$, le discriminant Δ est positif ou nul et la racine réelle de l'équation de troisième degré (1.91) est :

$$\eta_n = \left(\frac{Q^{*2}}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} Q^{*2}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} Q^{*2}} \right)^{1/3} \right] \quad (1.94)$$

Exemple d'application 1.7.

On souhaite déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans un canal rectangulaire ainsi que le coefficient n de Manning pour les données suivantes:

$$Q = 20m^3/s; b = 7m; i = 0.001; C = 70.84m^{0.5}/s.$$

- i. Les données du problème sont telles que la conductivité relative:

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i b^5}} = \frac{20}{\sqrt{70.84^2 \times 0.001 \times 7^5}} = 0.06886624$$

Cette valeur de la conductivité relative Q^* est inférieure à $\sqrt{27/32} = 0,918558654$.

La discriminant Δ de l'équation est positif et le rapport d'aspect η_n est alors donné par la relation (1.94), soit :

$$\begin{aligned} \eta_n &= \left(\frac{Q^{*2}}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} Q^{*2}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} Q^{*2}} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{0.06886624^2}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.06886624^2} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.06886624^2} \right)^{1/3} \right] \\ &= 0.186725938 \end{aligned}$$

- ii. La valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc :

$$y_n = b \eta_n = 7 \times 0.186725938 = 1.30731567m \approx 1.3073m$$

iii. Le coefficient n de *Manning*:

- Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ est par suite :

$$R_h = b \frac{\eta_n}{1 + 2\eta_n} = 7 \times \frac{0.18675938}{1 + 2 \times 0.18675938} = 0.95180037 \text{m}$$

Avec la valeur donnée du coefficient de *Chézy* C et celle calculée du rayon hydraulique R_h , le coefficient n de *Manning* est donc:

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6} \Rightarrow n = \frac{R_h^{1/6}}{C} = \frac{0.95180037^{1/6}}{70.84} = 0.01400055 \approx 0.014 \text{ m}^{-1/3} \text{ s}$$

b. Formule de Manning

En introduisant les expressions (1.81) et (1.85) dans l'équation de *Manning*, on obtient:

$$y_n = \left(\frac{Qn}{b^{5/3} \sqrt{i}} \right)^{3/5} \times (b + 2y_n)^{2/5} \quad (1.95)$$

La relation (1.95) est également implicite vis-à-vis de la profondeur normale y_n de l'écoulement.

Exemple d'application 1.8.

Reprenons l'exemple d'application 1.7 et calculons la profondeur normale y_n de l'écoulement pour les données suivantes:

$$Q = 20 \text{m}^3 / \text{s}; b = 7 \text{m}; i = 0.001; n = 0.014 \text{m}^{-1/3} \text{ s}$$

La solution d'un tel problème peut être trouvée en respectant les étapes suivantes :

1^{ère} itération :

i. Choisissons $y_{n1} = 1.3m$ comme première estimation.

ii. Par l'application de la relation (1.95) :

$$y_{n2} = \left(\frac{Qn}{b^{5/3} \sqrt{i}} \right)^{3/5} \times (b + 2y_{n1})^{2/5} = \left(\frac{20 \times 0.014}{7^{5/3} \times \sqrt{0.001}} \right)^{3/5} \times (7 + 2 \times 1.3)^{2/5} = 1.30648m$$

On voit que $y_{n2} \neq y_{n1}$, la valeur admise pour la profondeur normale y_n de l'écoulement n'est pas encore satisfaisante. Une nouvelle itération est par conséquent nécessaire.

2^{ème} itération :

On suit la même démarche que pour la première itération.

Choisissons donc y_{n2} comme deuxième estimation.

iii. Par l'application de la relation (1.95) :

$$y_{n3} = \left(\frac{20 \times 0.014}{7^{5/3} \times \sqrt{0.001}} \right)^{3/5} \times (7 + 2 \times 1.30648)^{2/5} = 1.30719m$$

On voit que $y_{n3} \neq y_{n2}$, la valeur admise n'est pas encore satisfaisante. Une nouvelle itération est par conséquent nécessaire.

3^{ème} itération :

On suit la même démarche que pour la première itération:

$$y_{n4} = \left(\frac{20 \times 0.014}{7^{5/3} \times \sqrt{0.001}} \right)^{3/5} \times (7 + 2 \times 1.30719)^{2/5} = 1.30727m$$

On voit que $y_{n4} \neq y_{n3}$, la valeur admise n'est pas encore satisfaisante. Une nouvelle itération est par conséquent nécessaire.

4^{ème} itération :

On suit la même démarche que pour la première itération.

$$y_{n5} = \left(\frac{20 \times 0.014}{7^{5/3} \times \sqrt{0.001}} \right)^{3/5} \times (7 + 2 \times 1.30727)^{2/5} = 1.30728m$$

On voit que $y_{n5} \neq y_{n4}$, la valeur admise n'est pas encore satisfaisante. Une nouvelle itération est par conséquent nécessaire.

5^{ème} itération :

On suit la même démarche que pour la première itération.

$$y_{n6} = \left(\frac{20 \times 0.014}{7^{5/3} \times \sqrt{0.001}} \right)^{3/5} \times (7 + 2 \times 1.30728)^{2/5} = 1.30728m$$

On voit que $y_{n6} = y_{n5}$; la valeur admise pour la profondeur normale y_n de l'écoulement au début de cette cinquième itération est donc satisfaisante. La convergence étant atteinte, le calcul itératif s'arrête.

La profondeur normale y_n recherchée est donc : $y_n = 1.3073m$

1. La conductivité relative

A partir des variables Q , b , n et i , il est également possible de former le paramètre adimensionnel composé :

$$Q_M^* = nQ / b^{8/3} \sqrt{i} \quad (1.96)$$

Dans la relation (1.24), l'aire de la section mouillée A et le rayon hydraulique R_h sont donnés respectivement par les relations (1.82) et (1.86). En introduisant ces relations dans la relation (1.24), il vient que :

$$Q = \frac{1}{n} b^{8/3} \frac{\eta_n^{5/3}}{(1 + 2\eta_n)^{2/3}} \sqrt{i}$$

Ou bien :

$$\frac{nQ}{b^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{\eta_n^{5/3}}{(1 + 2\eta_n)^{2/3}} \quad (1.97)$$

En tenant compte de la définition du paramètre adimensionnel Q_M^* , la relation (1.97) s'écrit plus simplement :

$$Q_M^* = \frac{\eta_n^{5/3}}{(1 + 2\eta_n)^{2/3}} \quad (1.98)$$

Au regard de la forme de la relation précédente, il apparaît clairement que la fonction $\eta_n(Q_M^*)$ ne peut guère s'exprimer sous une forme explicite. En élevant à la puissance 3/5 les deux membres de l'équation précédente, nous pouvons écrire :

$$\eta_n = Q_M^{*3/5} (1 + 2\eta_n)^{2/5} \quad (1.99)$$

Le problème posé consiste donc à déterminer la profondeur normale y_n , ce qui revient à évaluer le rapport d'aspect η_n et par suite $y_n = b\eta_n$. Lorsque l'on examine la forme de la relation (1.99), il apparaît que le rapport d'aspect η_n ne peut être déterminé de manière explicite.

Quelques méthodes de résolution de la relation implicite (1.99), sont présentées dans le paragraphe suivant:

i. Résolution par le théorème de Lagrange

Etabli en 1770, le théorème de *Lagrange* permet d'obtenir la solution d'une équation implicite en termes d'une série infinie. Appliqué pour la première fois par *Swamee et Rathie* (2004), il énonce que :

Sous certaines conditions, une fonction $f(y)$, où y est la racine de l'équation

$$y = a + \theta\phi(y) \quad (1.100)$$

Dans laquelle a est une constante et θ un paramètre, est donnée par :

$$f(y) = f(a) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\theta^i}{\Gamma(i+1)} \left\{ \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} [f'(x)\phi^i(x)] \right\}_{x=a} \quad (1.101)$$

Dans la relation (1.101), le paramètre Γ représente en fait la fonction bien connue Γ définie par $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ et dont les principales propriétés sont :

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1); \quad \Gamma(p+1) = p!$$

En procédant à l'identification des équations (1.99) et (1.100), nous pouvons aisément déduire que : $y = \eta_n, \quad a = 0, \quad \theta = Q_M^{* 3/5}, \quad \phi(y) = (1 + 2\eta_n)^{2/5}$

Dans la relation (1.101), il apparaît que:

$$f(y) = y = \eta_n; \quad f(a) = f(0) = 0; \quad \theta^i = Q_M^{* 3i/5}; \quad f'(x) = 1; \quad \phi^i(x) = (1 + 2x)^{2i/5}$$

Ainsi, la relation (1.101) devient :

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_M^{* 3i/5}}{\Gamma(i+1)} \left\{ \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} \left[(1 + 2x)^{2i/5} \right] \right\}_{x=0} \quad (1.102)$$

Nous pouvons également écrire que :

$$\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} (1 + 2x)^{2i/5} = C_{2i/5}^{i-1} (i-1)! (1 + 2x)^{2i/5 - (i-1)} 2^{i-1}$$

Soit :

$$\frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} (1 + 2x)^{2i/5} = C_{2i/5}^{i-1} (i-1)! (1 + 2x)^{-3i/5 + 1} 2^{i-1} \quad (1.103)$$

Or, nous savons que :

$$C_{2i/5}^{i-1} = \frac{(2i/5)!}{(i-1)!(2i/5 - i + 1)!} = \frac{\Gamma(2i/5 + 1)}{(i-1)!(-3i/5 + 1)!} = \frac{\Gamma(2i/5 + 1)}{(i-1)!\Gamma(-3i/5 + 2)} \quad (1.104)$$

En introduisant les relations (1.103) et (1.104) dans la relation (1.102), il vient que :

$$\eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{i-1} Q_M^{* 3i/5} (i-1)!}{\Gamma(i+1)(i-1)!} \frac{\Gamma[(2i/5) + 1]}{\Gamma[(-3i/5) + 2]}$$

Ou bien, après simplifications :

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1} Q_M^{* 3i/5}}{\Gamma(i+1)} \frac{\Gamma[(2i/5)+1]}{\Gamma[(-3i/5)+2]} \quad (1.105)$$

Selon la fonction Γ , nous pouvons écrire la relation (1.105) sous la forme :

$$\eta_n = Q_M^{* 3/5} + \frac{4}{5} Q_M^{* 6/5} + \frac{4}{5^2} Q_M^{* 9/5} - \frac{16}{5^3} Q_M^{* 12/5} + \frac{896}{5^6} Q_M^{* 18/5} + \dots \quad (1.106)$$

Nous obtenons, d'un point de vue purement théorique, la solution exacte du rapport d'aspect η_n , sous la forme d'une série illimitée, à condition toutefois que la conductivité relative Q_M^* soit connue. Le calcul de la conductivité Q_M^* est tributaire de la valeur du coefficient n de *Manning*.

L'inconvénient majeur de la relation (1.106) est qu'elle ne donne la valeur exacte du rapport d'aspect η_n qu'à l'infini. Pour obtenir la valeur du rapport d'aspect η_n par la relation (1.106), il est nécessaire de la tronquer, cela revient à arrêter le calcul à un certain ordre i jusqu'à ce que la valeur calculée de η_n pour l'ordre $(i-1)$ soit très proche de la valeur de η_n calculée à l'ordre i . Ainsi, l'application de la relation (1.106) ne donne qu'une valeur approchée du rapport d'aspect η_n .

ii. Résolution par une équation approchée

1. Approche de Srivastava

La formule proposée par *Srivastava* (2006) consiste la solution exacte à la relation implicite (1.98). Le rapport d'aspect η_n est exprimé sous la forme explicite suivante :

$$\eta_n \approx Q_M^{* 3/5} \left[1 + 2.404 Q_M^{* 0.6321} \left(1 + 2.030 Q_M^{* 0.9363} \right)^{0.3929} \right]^{2/5} \quad (1.107)$$

La relation approchée de (1.107) a été établie dans la large gamme $0 \leq \eta_n \leq 3$, mais elle peut être appliquée dans une gamme plus large.

Nous avons comparé les valeurs approchées de η_n calculées selon la relation (1.107) aux valeurs exactes de η_n calculées en application de la relation (1.98). Nous avons alors représenté sur la figure 1.11 les écarts relatifs $\Delta\eta_n / \eta_n$ (%) en fonction de la conductivité relative Q_M^* .

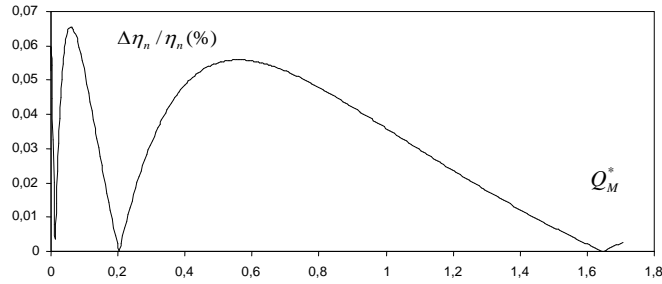


Figure 1.11: Ecarts relatifs $\Delta\eta_n / \eta_n$ (%) entre les valeurs exactes et approchées du rapport d'aspect η_n , calculées respectivement par les relations (1.98) et (1.107).

La figure 1.11 montre clairement que l'écart relatif maximal entre les valeurs exactes et approchées du rapport d'aspect η_n ne dépasse guère 0,07%, ce qui confirme bien la validité de la relation approchée (1.107) proposée. Rappelons tout de même que l'application de la relation approchée (1.107) nécessite la connaissance de la conductivité relative Q_M^* dont la valeur dépend de celle du coefficient n de *Manning*.

2. Approche de Vatankhah et al

Selon *Vatankhah et Easa* (2011), la relation (1.98) peut être remplacée, avec une bonne approximation, par la relation approchée suivante :

$$\eta_n \approx Q_M^{*3/5} \left[1 + 2Q_M^{*3/5} + 1.712Q_M^{*6/5} \right]^{2/5} \quad (1.108)$$

Exemple d'application 1.9.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 1.8, soient:

$$Q = 20m^3 / s; b = 7m; i = 0.001; n = 0.014.$$

Il s'agit de déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans un canal de forme rectangulaire, en ayant recours à la relation (1.108).

i. La conductivité relative Q_M^* est :

$$Q_M^* = nQ/b^{8/3}\sqrt{i} = 0.014 \times 20 / (7^{8/3} \times \sqrt{0.001}) = 0.049381384$$

ii. Selon la relation (1.108), le paramètre de forme de la section mouillée est par suite :

$$\begin{aligned} \eta_n &\approx Q_M^*{}^{3/5} \left[1 + 2Q_M^*{}^{3/5} + 1.712Q_M^*{}^{6/5} \right]^{2/5} \\ &= 0.049381384^{3/5} \times \left[1 + 2 \times 0.049381384^{3/5} + 1.712 \times 0.049381384^{6/5} \right]^{2/5} \\ &= 0.18685165 \end{aligned}$$

iii. La profondeur normale recherchée y_n est par suite :

$$y_n = b\eta_n = 7 \times 0.18685165 = 1.30796154m \approx 1.308m$$

Avec un écart relatif de moins de 0.05 %, cette valeur de y_n est pratiquement égale à celle calculée lors de l'exemple d'application 1.8. Ceci confirme bien la validité de la relation approchée (1.108).

iii. Approximation de Barr et Das

Dans le but de faciliter le calcul du rapport d'aspect η_n du canal rectangulaire à surface libre, *Barr* et *Das* proposent de remplacer la relation (1.98) par la relation approchée suivante (*Das*,2008):

$$\eta_n = Q_M^*{}^{3/5} \left[1 + KQ_M^*{}^{3/5} \right] \tag{1.109}$$

Où : $K = 0.855$.

La relation précédente s'écrit:

$$\eta_n = Q_M^*{}^{3/5} \left(1 + 0.855 Q_M^*{}^{3/5} \right) \quad (1.110)$$

Exemple d'application 1.10.

Reprenons l'exemple d'application 1.8 et calculons la profondeur normale y_n de l'écoulement, en ayant recours à la relation (1.110), pour les données suivantes :

$$Q = 20m^3 / s; b = 7m; i = 0.001; n = 0.014.$$

i. La conductivité relative Q_M^* est:

$$Q_M^* = nQ / b^{8/3} \sqrt{i} = 0.014 \times 20 / (7^{8/3} \times \sqrt{0.001}) = 0.049381384$$

Valeur déjà calculée lors de l'exemple d'application 1.9

ii. Selon la relation (1.110), le paramètre de forme η_n est par suite :

$$\eta_n = Q_M^*{}^{3/5} \left[1 + 0.855 Q_M^*{}^{3/5} \right] = 0.049381384^{3/5} \left[1 + 0.855 \times 0.049381384^{3/5} \right] = 0.18762295$$

iii. La valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc :

$$y_n = b \eta_n = 7 \times 0.18762295 = 1.31336065m \approx 1.3134m$$

Cette valeur calculée de la profondeur normale y_n correspond, avec un écart relatif de moins de 0.46 %, à celle calculée lors de l'exemple 1.8.

I.9.2.3. Canal de forme rectangulaire infiniment large

Pour un canal rectangulaire d'une largeur b important ($y_n \lll b$), on donne :

Le périmètre mouillé P est :

$$P = b + 2y_n \approx b \quad (1.111)$$

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ est par suite :

$$R_h = \frac{by_n}{b} = y_n \quad (1.112)$$

I.9.2.3.1. Expression de la profondeur normale

a. Formule de Chézy

En introduisant les expressions (1.81) et (1.112) dans l'équation (1.14), la profondeur normale y_n , soit :

$$y_n = \left(\frac{Q}{Cb\sqrt{i}} \right)^{2/3} \quad (1.113)$$

b. Formule de Manning

La profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal rectangulaire infiniment large est, selon la relation (1.24) de Manning:

$$y_n = \left(\frac{nQ}{b\sqrt{i}} \right)^{3/5} \quad (1.114)$$

Exemple d'application 1.11.

On demande de calculer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans un canal rectangulaire infiniment large, pour les données suivantes:

$$Q = 3m^3 / s; b = 7m; i = 0.004; \varepsilon = 2.10^{-3} m; \nu = 10^{-6} m^2 / s$$

i. Selon la formule de *Manning*, la profondeur normale y_n est par suit :

$$y_n = \left(\frac{nQ}{b\sqrt{i}} \right)^{3/5}$$

Le seul inconnu dans cette dernière équation est le coefficient n de *Manning*.

ii. Selon *Hager* (1989), le coefficient de k de Strickler est donné par :

$$k = \frac{8.2\sqrt{g}}{\varepsilon^{1/6}} = \frac{8.2 \times \sqrt{9.81}}{(2.10^{-3})^{1/6}} = 72.36$$

iii. Le coefficient n de *Manning* est :

$$n = 1/k_s = 1/72.36 = 0.0138 \approx 0.014$$

La profondeur normale y_n est par suit :

$$y_n = \left(\frac{nQ}{b\sqrt{i}} \right)^{3/5} = \left(\frac{0.014 \times 3}{7 \times \sqrt{0.004}} \right)^{3/5} = 0.243m$$

iv. La présente étape procède à la vérification du régime de l'écoulement, en ayant recours à l'inégalité (1.22) qui stipule que si $\varepsilon / D_h > 1050 / R$, alors le régime de l'écoulement est turbulent rugueux. A partir des valeurs de Q , b et ν , le nombre de *Reynolds* R est peut être évalué en vertu de la relation (1.30):

$$R = \frac{4Q}{P\nu} \Rightarrow R = \frac{4Q}{b\nu} = \frac{4 \times 3}{7 \times 10^{-6}} = 1714285.71$$

Le diamètre hydraulique D_h est par suite :

$$D_h = 4y_n = 4 \times 0.2433732 = 0.9734928m$$

La rugosité relative ε / D_h est :

$$\frac{\varepsilon}{D_h} = \frac{2.10^{-3}}{0.9734928} = 0.00205446$$

$$\text{Ainsi : } \frac{\varepsilon}{D_h} R = 0.00205446 \times 1714285.71 = 3521.92787 > 1050$$

L'inégalité (1.22) est donc bien vérifiée, ce qui confirme le caractère turbulent rugueux du régime de l'écoulement.

c. La fonction W de Lambert

En tenant compte des relations (1.81) et (1.112), la relation (1.55) devient alors :

$$Q = -2.457by_n \sqrt{\frac{by_n}{b+2y_n}} gi \ln \left(\frac{\varepsilon(b+2y_n)}{12by_n} + \frac{0.221v}{\sqrt{gi}} \left(\frac{b+2y_n}{by_n} \right)^{1.5} \right) \quad (1.115)$$

En introduisant les paramètres adimensionnels :

$$\varepsilon_+ = \varepsilon / b \quad (1.116)$$

$$v_+ = \frac{v}{b\sqrt{gbi}} \quad (1.117)$$

$$H_b = \frac{Q}{b^2\sqrt{gbi}} \quad (1.118)$$

Tenant compte les relations (1.116), (1.117) et (1.118), la relation (1.115) devient :

$$\frac{\eta_n^{1.5}}{(1+2\eta_n)^{0.5}} \ln \left(\frac{\varepsilon_+(1+2\eta_n)}{12\eta_n} + \frac{0.221v_+}{\eta_n^{1.5}} (1+2\eta_n)^{1.5} \right) + 0.407H_b = 0 \quad (1.119)$$

Ainsi, trois paramètres adimensionnels composent la relation (1.119): H_b , ε_+ et ν_+ . Cette relation a l'avantage de regrouper toutes les variables influençant l'écoulement uniforme en canal à surface libre de forme rectangulaire infiniment large, sous forme de paramètres adimensionnels.

Lorsque le canal considéré est de forme rectangulaire infiniment large, correspondant à $\eta_n \rightarrow 0$, l'équation (1.119) s'écrit :

$$\eta_n^{1.5} \ln \left(\frac{\varepsilon_+}{12\eta_n} + \frac{0.221\nu_+}{\eta_n^{1.5}} \right) + 0.407H_b = 0 \quad (1.120)$$

Pour le domaine de l'écoulement turbulent rugueux correspondant à $\nu \rightarrow 0$ alors $\nu_+ \rightarrow 0$, la relation (1.120) s'écrit :

$$\eta_n^{1.5} \ln \left(\frac{12\eta_n}{\varepsilon_+} \right) = 0.407H_b \quad (1.121)$$

Il apparaît ainsi que la détermination du rapport d'aspect η_n du rectangulaire infiniment large, ne peut s'effectuer de manière explicite. Il serait alors nécessaire d'avoir recours à un procédé itératif.

En utilisant simultanément les relations (1.66) et (1.67), la relation (1.121) devient :

$$\eta_n = 0.72 \left[\frac{b\sqrt{gi}}{Q} W_0 \left(\frac{25.378Q}{b\varepsilon\sqrt{gi}} \right) \right]^{-2/3} \quad (1.122)$$

Par contre, pour le domaine de l'écoulement pratiquement lisse correspondant à $\varepsilon \rightarrow 0$, nous pouvons alors écrire que $\varepsilon_+ \rightarrow 0$ en vertu de la relation (1.116), la relation (1.120) devient :

$$\eta_n^{1.5} \ln \left(\frac{\eta_n^{1.5}}{0.221\nu_+} \right) = 0.407H_b \quad (1.123)$$

En utilisant les équations (1.66) et (1.67), la relation (1.123) devient alors:

$$y_n = 0.5492 \left[\frac{b\sqrt{gi}}{Q} W_0 \left(1.842 \frac{Q}{vb} \right) \right]^{-2/3} \quad (1.124)$$

Exemple d'application 1.12.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 1.11, soient:

- $Q = 3m^3 / s; b = 7m; i = 0.004; \varepsilon = 2.10^{-3} m; \nu \rightarrow 0$
- $Q = 3m^3 / s; b = 7m; i = 0.004; \varepsilon = 0; \nu = 10^{-6} m^2 / s$

Calculons la profondeur normale pour les deux cas.

Cas 1 :

1. Selon la relation (1.122):

$$y_n = 1.20 [W_0(613863)]^{-2/3} = 1.20 \times 10.938^{-2/3} = 0.244m$$

2. Selon la relation (1.69):

$$y_n = 1.20 [\ln(613863) - \ln[\ln(613863)]]^{-2/3} = 1.20 \times 10.738^{-2/3} = 0.247m$$

Cas 2 :

1. Selon la relation (1.124) :

$$y_n = 0.92 [W_0(789429)]^{-2/3} = 0.92 \times 11.168^{-2/3} = 0.184m$$

2. Selon la relation (1.69) :

$$y_n = 0.92 [\ln(789429) - \ln[\ln(789429)]]^{-2/3} = 0.92 \times 10.971^{-2/3} = 0.186m$$

Ainsi, il peut voir que pour des problèmes pratiques de l'équation (1.69) est suffisamment précise pour représenter W_0 .

I.9.2.4. Canal de forme rectangulaire étroit

Pour un canal rectangulaire d'une profondeur y_n important ($y_n \gg b$), on obtient :

Le périmètre mouillé P est:

$$P \approx 2y_n \quad (1.125)$$

Et le rayon hydraulique R_h , soit :

$$R_h = b/2 \quad (1.126)$$

I.9.2.4.1. Expression de la profondeur normale

a. Formule de Chézy

En introduisant les expressions (1.81) et (1.126) dans l'équation (1.14), la profondeur normale y_n de l'écoulement est donnée par :

$$y_n = \frac{\sqrt{2}Q}{Cb\sqrt{bi}} \quad (1.127)$$

b. Formule de Manning

En insérant les relations (1.81) et (1.126) dans la relation (1.24) de *Manning*, la profondeur normale y_n s'écrit alors :

$$y_n = \frac{2^{2/3} Qn}{b^{5/3} \sqrt{i}} \quad (1.128)$$

c. L'Approche de Swamee

Pour les valeurs données de $Q; b; i; \varepsilon$ et ν , la relation (1.55) permet le calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans un canal à surface libre de forme rectangulaire étroit, à condition d'utiliser un procédé itératif.

L'étude de la relation (1.55) a montré qu'elle peut être remplacée, par la relation approchée suivante (Swamee et al., 2004):

$$y_n = \frac{0.576Q}{b\sqrt{gbi}} \left[\ln \left(\frac{6b\sqrt{gbi}}{\varepsilon\sqrt{gbi} + 3.75\nu} \right) \right]^{-1} \quad (1.129)$$

Exemple d'application 1.13.

On demande de calculer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans un canal rectangulaire étroit, pour les données suivantes :

$$Q = 10 \text{ m}^3 / \text{s}; b = 2 \text{ m}; i = 0.002; \varepsilon = 3.10^{-3} \text{ m}; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

i. La présente étape procède à la vérification du régime de l'écoulement, en ayant recours à l'inégalité (1.23) qui stipule que si $\varepsilon > 30\nu [Q(gi)^2]^{-0.2}$, alors le régime de l'écoulement est turbulent rugueux.

A partir des valeurs de Q, i, ε et ν :

$$\varepsilon = 0.003 > 30\nu [Q(gi)^2]^{-0.2} = 30 \times 10^{-6} \times [10 \times (9.81 \times 0.002)^2]^{-0.2} = 0.00009$$

Nous pouvons donc conclure que l'inégalité (1.23) est bien satisfaite et que l'écoulement peut être étudié avec suffisamment de précision dans le domaine rugueux ($\nu \rightarrow 0$).

ii. En considérant donc l'écoulement comme étant rugueux, la profondeur normale y_n de l'écoulement s'exprime par la relation (1.129), pour $\nu = 0$:

$$y_n = \frac{0.576Q}{b\sqrt{gbi}} \left[\ln \left(\frac{6b\sqrt{gbi}}{\varepsilon\sqrt{gbi}} \right) \right]^{-1} = \frac{0.576 \times 10}{1 \times \sqrt{9.81 \times 1 \times 0.002}} \times \left[\ln \left(\frac{6 \times 1 \times \sqrt{9.81 \times 1 \times 0.002}}{3.10^{-3} \times \sqrt{9.81 \times 1 \times 0.002}} \right) \right]^{-1}$$

$$= 5,41013152 \approx 5.41m$$

- iii. Cette étape vise à comparer la profondeur normale y_n de l'écoulement calculée en (ii) à celle exacte issue de la relation (1.129). Celle-ci donne:

$$y_n = \frac{0.576Q}{b\sqrt{gbi}} \left[\ln \left(\frac{6b\sqrt{gbi}}{\varepsilon\sqrt{gbi} + 3.75\nu} \right) \right]^{-1} =$$

$$\frac{0.576 \times 10}{1 \times \sqrt{9.81 \times 1 \times 0.002}} \times \left[\ln \left(\frac{6 \times 1 \times \sqrt{9.81 \times 1 \times 0.002}}{3.10^{-3} \times \sqrt{9.81 \times 1 \times 0.002} + 3.75 \times 10^{-6}} \right) \right]^{-1} = 5,41646263 \approx 5.416m$$

Ainsi, en ayant admis que l'écoulement pouvait être considéré comme étant turbulent rugueux, l'erreur relative commise sur le calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement est :

$$\frac{\Delta y_n}{y_n} = 100 \times \frac{5.416 - 5.410}{5.416} \cong 0.11\%$$

Ce faible écart conforte bien l'hypothèse selon laquelle l'écoulement peut être étudié dans le turbulent rugueux domaine.

- iv. Cette étape vise à vérifier la valeur précédemment calculée de la profondeur normale y_n de l'écoulement. Pour cela nous allons faire appel à la relation (1.128)

- Selon *Hager* (1989), le coefficient de k de Strickler est donné par :

$$k = \frac{8.2\sqrt{g}}{\varepsilon^{1/6}} = \frac{8.2 \times \sqrt{9.81}}{(3.10^{-3})^{1/6}} = 67.6282496$$

Le coefficient n de *Manning* est:

$$n = 1/k = 1/67.62822496 \approx 0.015$$

La relation (1.128) permet d'écrire que:

$$y_n = \frac{2^{2/3} Qn}{b^{5/3} \sqrt{i}} = \frac{2^{2/3} \times 10 \times 0.015}{1^{5/3} \times \sqrt{0.002}} = 5,32430499 \approx 5.324m$$

Nous pouvons donc observer que l'écart $(\Delta y_n / y_n)$ entre la valeur approchée de la profondeur normale y_n de l'écoulement de l'étape *ii* et la valeur exacte que nous venons de calculer est:

$$\frac{\Delta y_n}{y_n} = 100 \times \frac{5.410 - 5.324}{5.41} \cong 1.6\%$$

I.9.3. Canal ouvert à surface libre de forme trapézoïdale

I.9.3.1. Caractéristiques du canal

Le canal considéré est schématiquement représenté sur la figure 1.12. Il est caractérisé par sa base b et par le paramètre m ($m = \cotg(\alpha)$), où α désigne l'angle d'inclinaison des parois du canal par rapport à l'horizontale. L'écoulement est défini par la profondeur normale y_n .

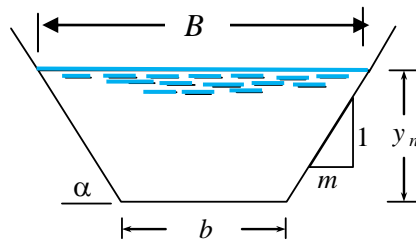


Figure 1.12: Schéma de définition du canal à surface libre trapézoïdale.

La forme de la section mouillée est définie par le paramètre de forme $\eta_n = y_n / b$, appelé aussi rapport d'aspect.

L'aire de la section mouillée A du canal s'écrit:

$$A = by_n + my_n^2 \quad (1.130)$$

qui peut également s'écrire :

$$A = \eta_n b^2 (1 + m\eta_n) \quad (1.131)$$

Le périmètre mouillé P est:

$$P = b + 2y_n \sqrt{1 + m^2} \quad (1.132)$$

Ou bien :

$$P = b \left(1 + 2\eta_n \sqrt{1 + m^2} \right) \quad (1.133)$$

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ est par suite :

$$R_h = \frac{by_n + my_n^2}{b + 2y_n \sqrt{1 + m^2}} \quad (1.134)$$

Soit :

$$R_h = b \frac{\eta_n (1 + \eta_n m)}{(1 + 2\eta_n \sqrt{1 + m^2})} \quad (1.135)$$

Remarque:

La largeur du plan d'eau B est: $B = b + 2my_n$

En posant : $\beta = b/B$

- Lorsque $m=0$, correspondant à $\alpha=90^\circ$ ou à $\beta=1$, nous retrouvons le cas du canal de forme rectangulaire représentée par la figure 1.10.

- Nous pouvons aussi noter que $\beta=0$ correspond au cas du canal de forme triangulaire.

I.9.3.2. Expression de la profondeur normale

a. Formule de Chézy

En substituant les relations (1.131) et (1.135) dans la relation (1.14), nous pouvons écrire que:

$$Q = Cb^{5/2} \frac{[\eta_n(1+m\eta_n)]^{3/2}}{(1+2\eta_n\sqrt{1+m^2})^{1/2}} \sqrt{i} \quad (1.136)$$

La relation (1.136) peut s'écrire plus simplement :

$$\frac{[1+2\eta_n\sqrt{1+m^2}]^{1/2}}{[m\eta_n(1+m\eta_n)]^{3/2}} \left(\frac{m^{1.5}Q}{Cb^2\sqrt{ib}} \right) = 1 \quad (1.137)$$

En introduisant la conductivité relative Q^* , tel que :

$$Q^* = \frac{m^{1.5}Q}{Cb^2\sqrt{ib}} \quad (1.138)$$

Tenant compte de (1.138), la relation (1.137) permet de déduire que :

$$\frac{[1+2\eta_n\sqrt{1+m^2}]^{1/2}}{[m\eta_n(1+m\eta_n)]^{3/2}} Q^* = 1 \quad (1.139)$$

En posant :

$$z = \left(\frac{1}{2} + m\eta_n \right)^2 \quad (1.140)$$

Tenant compte de (1.140), la relation (1.139) permet de déduire que:

$$z = \frac{1}{4} + Q^{*2/3} \left[1 + (2\sqrt{z} - 1)\sqrt{1 + m^{-2}} \right]^{1/3} \quad (1.141)$$

Bien que la relation (1.141) soit implicite vis-à-vis de la variable z , elle montre surtout que celle-ci, et par conséquent η_n , ne dépend que de Q^* et de m . A partir des valeurs connues de m et Q^* , il est donc possible de calculer le paramètre de forme η_n du canal étudié.

Le calcul du paramètre de forme $\eta_n = y_n / b$ du canal étudié, par application de la relation implicite (1.141), peut être effectué selon plusieurs méthodes.

- i. La première méthode que nous suggérons est la méthode numérique. Le processus de calcul est itératif et s'opère sur la relation (1.141) après avoir choisi une première valeur de z .

Admettons que cette première valeur de z soit $z_0 = 1/4$. Nous obtenons alors z_1 tel que :

$$z_1 = \frac{1}{4} + Q^{*2/3} \left[1 + (2\sqrt{z_0} - 1)\sqrt{1 + m^{-2}} \right]^{1/3}$$

Puis :

$$z_2 = \frac{1}{4} + Q^{*2/3} \left[1 + (2\sqrt{z_1} - 1)\sqrt{1 + m^{-2}} \right]^{1/3}$$

.....

$$z_n = \frac{1}{4} + Q^{*2/3} \left[1 + (2\sqrt{z_{n-1}} - 1)\sqrt{1 + m^{-2}} \right]^{1/3}$$

Le processus de calcul se poursuit ainsi jusqu'à une valeur z_i telle que $z_i \approx z_{(i-1)}$, avec une erreur relative que le projecteur pourra apprécier. Une fois la valeur finale de z adoptée, le paramètre η_n recherché est déterminé par application de la relation (1.140).

$$\eta_n = (\sqrt{z} - 1/2)m^{-1} \quad (1.142)$$

ii. La seconde méthode consiste à appliquer à la relation implicite (1.141) le théorème de *Lagrange* pour en déduire la solution exacte de z . Par suite, η_n est déduit de la relation (1.142).

En procédant à l'identification des équations (1.141) et (1.100), nous pouvons aisément déduire que :

$$f(z) = \sqrt{z} - \frac{1}{2} = m\eta_n$$

Nous pouvons finalement écrire que :

$$\eta_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q^{*2i/3}}{\Gamma(i+1)} \left\{ \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} \left[\left(1 + \sqrt{1+m^{-2}} (2\sqrt{x}-1) \right)^{i/3} \right] \right\}_{x=1/4} \quad (1.143)$$

Après simplifications, la relation précédente prend la forme suivante :

$$\eta_n = \frac{1}{m} Q^{*2/3} + \frac{1}{m} \left(-1 + \frac{2}{3} \sqrt{1+m^{-2}} \right) Q^{*4/3} + \frac{2}{m} \left(1 - \sqrt{1+m^{-2}} \right) Q^{*2} - \frac{1}{3m} \left[-15 + 20\sqrt{1+m^{-2}} - \frac{8}{3} (1+m^{-2}) - \frac{8}{27} (1+m^{-2})^{3/2} \right] Q^{*8/3} + \dots \quad (1.144)$$

La relation (1.144) constitue la solution exacte du paramètre de forme η_n . Cependant, sa convergence doit être étudiée pour répondre à la question de savoir à quel ordre i doit-on tronquer la série pour obtenir une valeur acceptable de η_n .

b. Relation de Manning

En tenant compte des relations (1.130) et (1.134), la relation de *Manning* devient :

$$Q = \frac{1}{n} (by_n + my_n^2) \left(\frac{by_n + my_n^2}{b + 2y_n \sqrt{1+m}} \right)^{2/3} \sqrt{i} \quad (1.145)$$

Au regard de la forme de la relation précédente, il apparaît clairement que la détermination de la profondeur normale y_n de l'écoulement ne peut s'effectuer de manière explicite. Il serait alors nécessaire d'avoir recours à un procédé itératif.

Exemple d'application 1.14.

On désire déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme trapézoïdale représenté par la figure 1.11, en utilisant la relation de *Manning*.

Les données du problème sont :

$$Q = 36m^3 / s; b = 7m; i = 0.001; n = 0.020m^{-1/3} s; \alpha = 45^\circ (m = 1)$$

i. Selon la relation (1.24), le débit volume Q est :

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \sqrt{i}$$

On va résoudre le problème par la méthode des approximations successives. La feuille de calcul est présentée ci-dessous.

Calcul itératif de la profondeur normale						
$Q = 36m^3 / s; b = 7.0m; i = 0.001; n = 0.020m^{-1/3} s; m = 1$						
Essais	y_n (m)	A (m^2)	P (m)	R_h (m)	Q calculé (m^3/s)	Remarque
1	1.50	12.750	11.243	1.134	21.922	21.922 < 36
2	1.80	15.840	12.091	1.310	29.985	29.985 < 36
3	2.0	18.00	12.657	1.422	35.989	35.989 \approx 36
4	2.01	18.110	12.685	1.428	36.311	36.311 > 36

La profondeur normale est donc: $y_n = 2m$

1. La conductivité relative

En introduisant les expressions de A et R_h par les relations (1.131) et (1.135) respectivement, dans l'équation (1.24), on obtient :

$$Q = \frac{b^{8/3}}{n} \frac{(\eta_n(1+m\eta_n))^{5/3}}{(1+2\eta_n\sqrt{1+m^2})^{2/3}} \sqrt{i} \quad (1.146)$$

En introduisant la conductivité relative Q_M^* , tel que:

$$Q_M^* = \frac{m^{5/3} Q n}{b^{8/3} \sqrt{i}} \quad (1.147)$$

Tenant compte de (1.147), la relation (1.146) s'écrit:

$$Q_M^* = \frac{[m\eta_n(1+m\eta_n)]^{5/3}}{(1+2\eta_n\sqrt{1+m^2})^{2/3}} \quad (1.148)$$

Tenant compte de (1.140), la relation (1.148) permet de déduire que:

$$z = \frac{1}{4} + Q_M^{*3/5} \left[1 + (2\sqrt{z} - 1)\sqrt{1+m^{-2}} \right]^{2/5} \quad (1.149)$$

Le calcul du paramètre de forme $\eta_n = y_n/b$ du canal étudié, par application de la relation implicite (1.148), peut être effectué selon plusieurs méthodes.

a) La méthode numérique

Exemple d'application 1.15.

Reprenons l'exemple d'application 1.14 et calculons profondeur normale y_n de l'écoulement, en ayant recours à la relation (1.149), pour les données suivantes :

$$Q = 36m^3 / s; b = 7m; i = 0.001; n = 0.020m^{-1/3} s; \alpha = 45^\circ (m = 1)$$

i. La conductivité relative Q_M^* est :

$$Q_M^* = m^{5/3} n Q / b^{8/3} \sqrt{i} = 1^{3/5} \times 0.02 \times 36 / (7^{8/3} \times \sqrt{0.001}) = 0.126980702$$

Considérons pour valeur première de z soit $z_0 = 1/4$.

Nous pouvons alors noter que $z_8 \approx z_7$ et que le processus numérique utilisé converge au terme de la huitième étape de calcul, soit: $z_7 \approx z_8 = z = 0.60126202$

ii. Le paramètre η_n recherché est donc:

$$\eta_n = (\sqrt{z} - 1/2) n^{-1} = (\sqrt{0.60126202} - 1/2) \times 1^{-1} = 0.27541087 \approx 0.28$$

iii. la profondeur normale recherchée $y_n = b \eta_n$, soit:

$$y_n = b \eta_n = 7 \times 0.28 = 1.96 \text{ m}$$

Cette valeur calculée de la profondeur normale correspond, avec un écart relatif de 2%, à celle calculée lors de l'exemple d'application 1.14.

b) Le théorème de *Lagrange*

La seconde méthode consiste à appliquer à la relation implicite (1.149) le théorème de *Lagrange* pour en déduire la solution exacte de z . Par suite, η_n est déduit de la relation (1.142).

En substituant les relations (1.141) et (1.148), nous pouvons aisément écrire que :

$$\eta_n = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{Q_M^{*3i/5}}{\Gamma(i+1)} \left\{ \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 + \sqrt{1+m^{-2}} (2\sqrt{x}-1) \right)^{2i/5} \right] \right\}_{x=1/4} \quad (1.150)$$

Ou bien, après simplifications:

$$\begin{aligned} \eta_n &= \frac{1}{m} Q_M^{*3/5} + \frac{1}{m} \left(-1 + \frac{4}{5} \sqrt{1+m^{-2}} \right) Q_M^{*6/5} \\ &+ \frac{2}{25m} \left(27 - 30\sqrt{1+m^{-2}} + \frac{2}{m^2} \right) Q_M^{*9/5} + \\ &\frac{1}{125m} \left[-865 + 984\sqrt{1+m^{-2}} - \frac{16}{m^2} (15 + \sqrt{1+m^{-2}}) \right] Q_M^{*12/5} + \dots \end{aligned} \quad (1.151)$$

Nous obtenons, d'un point de vue purement théorique, la solution exacte du rapport d'aspect η_n , sous la forme d'une série illimitée, à condition toutefois que la conductivité relative Q_M^* soit connue.

Pour $z = 1/\eta_n$, la relation (1.148) permet de déduire que:

$$z = \frac{[m(1+mz)]^{5/8}}{Q_M^{*3/8} (z + 2\sqrt{1+m^2})^{1/4}} \quad (1.152)$$

Nous pouvons déduire que :

$$\eta_n^{-1} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{m^{5i/8}}{Q_M^{*3i/8} \Gamma(i+1)} \left\{ \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} \left[(m+x)^{5i/8} (x + 2\sqrt{1+m^2})^{-i/4} \right] \right\}_{x=0} \quad (1.153)$$

Ou bien, après simplifications :

$$\begin{aligned} \eta_n^{-1} &= \frac{0.84090m^{5/4}}{(1+m^2)^{1/8} Q_M^{*3/8}} - \frac{0.08839m^{3/2}}{(1+m^2)^{3/4} Q_M^{*3/4}} (m - 5\sqrt{1+m^2}) + \\ &\frac{0.00465m^{7/4}}{(1+m^2)^{11/8} Q_M^{*9/8}} (35 + 42m^2 - 30m\sqrt{1+m^2}) + \dots \end{aligned} \quad (1.154)$$

La relation précédente donne la valeur exacte du rapport d'aspect η_n , mais celle-ci n'est obtenue qu'à l'infini. Cette relation n'est donc pas pratique et il serait intéressant de proposer une relation approchée.

c) Approche de Vatankhah et Easa

La formule proposée par *Vatankhah* et *Easa* (2011) constitue une solution approchée à la relation (1.148). Le rapport d'aspect η_n est exprimé sous la forme explicite suivante :

$$\eta_n = Q_M^{*3/5} \frac{\left(1 + 2\eta_{n0} \sqrt{1 + m^2}\right)^{2/5}}{1 + m\eta_{n0}} \quad (1.155)$$

Avec:

$$\eta_{n0} = \frac{1 + 0.856Q_M^{*3/5} \left(1 + m^{1.263}\right) \left(1 - 0.0585mQ_M^{*3/5}\right)}{Q_M^{*-3/5} + 1.945m} \quad (1.156)$$

Exemple d'application 1.16.

Reprenons l'exemple d'application 1.14 et calculons la profondeur normale y_n de l'écoulement, en ayant recours à la relation (1.155), pour les données suivantes:

$$Q = 36m^3 / s; b = 7m; i = 0.001; n = 0.020m^{-1/3} s; \alpha = 45^\circ (m = 1)$$

i. La conductivité relative Q_M^* est:

$$Q_M^* = m^{5/3} n Q / b^{8/3} \sqrt{i} = 1^{3/5} \times 0.02 \times 36 / (7^{8/3} \times \sqrt{0.001}) = 0.126980702 \approx 0.13$$

ii. Le rapport d'aspect η_n est:

$$\eta_{n0} = \frac{1 + 0.856Q_M^{*3/5} \left(1 + m^{1.263}\right) \left(1 - 0.0585mQ_P^{*3/5}\right)}{Q_M^{*-3/5} + 1.945m}$$

$$\begin{aligned} \eta_{n0} &= \frac{1 + 0.856 \times 0.126980701^{3/5} \times \left(1 + 1^{1.263}\right) \times \left(1 - 0.0585 \times 0.126980701^{3/5}\right)}{0.126980701^{-3/5} + 1.945 \times 1} \\ &= 0.25070419 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\eta_n = Q_M^{*3/5} \frac{(1 + 2\eta_{n0} \sqrt{1 + m^2})^{2/5}}{1 + m\eta_{n0}}$$

$$\eta_n = 0.126980701^{3/5} \times \frac{(1 + 2 \times 0.25070419 \times \sqrt{1 + 1^2})^{2/5}}{1 + 1 \times 0.25070419} = 0.2872069$$

iii. La valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc :

$$y_n = b\eta_n = 7 \times 0.2872069 = 2.0104483 \approx 2m$$

Il s'agit bien la valeur de y_n que nous avons déjà calculée au cours de l'exemple d'application 1.14.

d) Approximation de Barr et Das

La relation (1.145) s'écrit plus simplement:

$$\frac{nQ}{b^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{\eta_n^{5/3} (1 + m\eta_n)^{5/3}}{(1 + 2\eta_n \sqrt{1 + m^2})^{2/3}} \quad (1.157)$$

Selon Barr et Das , la solution approchée de l'équation implicite (1.157) est (Das, 2008):

$$\eta_n = \left(\frac{nQ}{b^{8/3} \sqrt{i}} \right)^{3/5} \left[1 - \frac{0.69}{1 + \frac{3}{\left(\frac{nQ}{b^{8/3} \sqrt{i}} \right)^{3/5} m}} \right] \quad (1.158)$$

En introduisant la conductivité relative Q_M^* , tel que :

$$Q_M^* = \frac{nQ}{b^{8/3} \sqrt{i}} \quad (1.159)$$

Ceci permet d'écrire que :

$$\eta_n = Q_M^{*3/5} \left[1 - \frac{0.69}{1 + \frac{3}{Q_M^{*3/5} m}} \right] \quad (1.160)$$

Exemple d'application 1.17.

Reprenons l'exemple d'application 1.14 et calculons la profondeur normale y_n de l'écoulement, en ayant recours à la relation (1.160), pour les données suivantes :

$$Q = 36m^3 / s; b = 7m; i = 0.001; n = 0.020m^{-1/3} s; \alpha = 45^\circ (m = 1)$$

i. La conductivité relative Q_M^* est :

$$Q_M^* = nQ / b^{8/3} \sqrt{i} = 0.02 \times 36 / (7^{8/3} \times \sqrt{0.001}) = 0.126980702 \approx 0.13$$

Selon la relation (1.160), le paramètre de forme de la section mouillée est par suite :

$$\eta_n = Q_M^{*3/5} \left[1 - \frac{0.69}{1 + \frac{3}{Q_M^{*3/5} m}} \right] = 0.13^{3/5} \times \left[1 - \frac{0.69}{1 + \frac{3}{0.13^{3/5} \times 1}} \right] = 0.27590526 \approx 0.28$$

ii. La valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc :

$$y_n = b\eta_n = 7 \times 0.28 = 1.96m$$

Nous pouvons donc observer que l'écart $(\Delta y_n / y_n)$ entre la valeur calculée lors de l'exemple d'application 1.14 et celle approchée de *Barr* et *Das* est:

$$\Delta y_n / y_n = 100 \times \frac{2 - 1.96}{2} = 2\%$$

I.9.4. Canal ouvert à surface libre de forme parabolique

I.9.4.1. Caractéristiques du canal

Le canal considéré est schématiquement représenté sur la figure 1.13. Il est défini par les dimensions linéaires T_m , Y_m et y_n . Écoulant un débit volume Q , sous une pente géométrique i , d'un liquide de viscosité cinématique ν . L'état de la paroi interne du canal est caractérisé par la rugosité absolue ε .

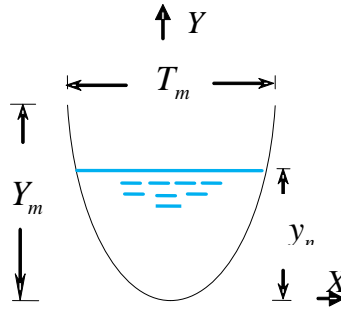


Figure 1.13. Schéma de définition du canal ouvert de forme parabolique.

La figure 1.13 permet géométriquement de montrer que :

$$Y = aX^2 \quad (1.161)$$

L'aire de la section mouillée A du canal s'écrit:

$$A = \frac{2}{3} T_n y_n \quad (1.162)$$

Le périmètre mouillé P est :

$$P = \frac{T_n^2}{8y_n} \left[\frac{4y_n}{T_n} \sqrt{1 + a^2 T_n^2} + \ln \left(a T_n + \sqrt{1 + a^2 T_n^2} \right) \right] \quad (1.163)$$

Pour $P(T_m/2, y_m)$, la relation (1.161) donne $y_m = a(T_m/2)^2$ ou:

$$a = 4y_m / T_m^2 \quad (1.164)$$

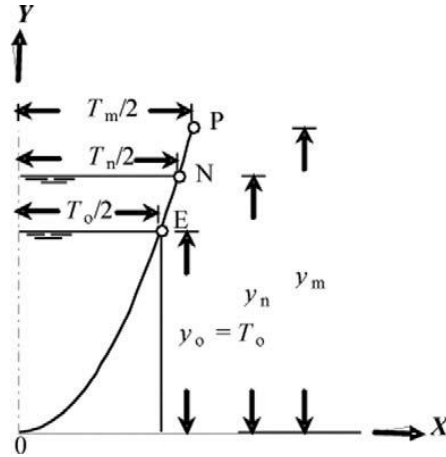


Figure 1.14. Schéma de définition de l'écoulement uniforme en canal parabolique (Achour et Khattaoui ,2008).

En substituant la relation(1.164) dans la relation(1.161), nous pouvons déduire que :

$$Y = \frac{4}{B} X^2 \tag{1.165}$$

Avec:

$$B = T_m^2 / y_m \tag{1.166}$$

Pour $N(T_n / 2, y_n)$ et $E(T_0 / 2, y_0)$, la relation(1.165) devient respectivement :

$$B = T_n^2 / y_n \tag{1.167}$$

$$B = T_0 \tag{1.168}$$

I.9.4.2. Expression de la profondeur normale

a. Relation de Chézy

Une étude particulière a montré que le rapport d'aspect de la surface de l'eau, aussi connu comme la profondeur normale sans dimension, est exprimée pour un canal parabolique par la relation suivante (Achour et Khattaoui ,2008):

$$\zeta_n = \sqrt{y_n / B} \tag{1.169}$$

La relation (1.162) peut également s'écrire :

$$A = \frac{2}{3} B^2 \zeta_n^3 \quad (1.170)$$

Et le périmètre mouillé P du canal s'écrit :

$$P = \frac{B}{8} \left[4\zeta_n \sqrt{1+16\zeta_n^2} + \ln \left(4\zeta_n + \sqrt{1+16\zeta_n^2} \right) \right] \quad (1.171)$$

En combinant les relations (1.170) et (1.171), le rayon hydraulique $R_h = A/P$ s'écrit donc:

$$R_h = \frac{16}{3} \frac{B\zeta_n^3}{\left[4\zeta_n \sqrt{1+16\zeta_n^2} + \ln \left(4\zeta_n + \sqrt{1+16\zeta_n^2} \right) \right]} \quad (1.172)$$

En introduisant les expressions (1.170) et (1.172) dans l'équation de Chézy, on obtient :

$$Q = \beta C B^{5/2} \sqrt{i} \varphi(\zeta_n) \quad (1.173)$$

Où :

$$\beta = \text{constante} = 8/(3\sqrt{3}) \cong 1.539$$

Et :

$$\varphi(\zeta_n) = \zeta_n^{9/2} \left[4\zeta_n \sqrt{1+16\zeta_n^2} + \ln \left(4\zeta_n + \sqrt{1+16\zeta_n^2} \right) \right]^{-1/2} \quad (1.174)$$

La relation(1.173) peut s'écrire en termes adimensionnels sous la forme suivante :

$$Q^* = \beta \varphi(\zeta_n) \quad (1.175)$$

Soit :

$$Q^* = \frac{Q}{C B^{5/2} \sqrt{i}} \quad (1.176)$$

Alors le paramètre de forme $\zeta_n(Q^*)$ de la relation (1.175) peut être calculé directement par la relation approchée suivante: (Achour et Khattaoui ,2008)

$$\zeta_n = \theta Q^{*\gamma} \tag{1.177}$$

Tableau 1.1: Valeurs des paramètres θ et γ , calculées selon la relation (1.177)

Q^*	ζ_n	θ	γ	L'écart maximal %
$Q^* \leq 0.00198$	$\zeta_n \leq 0.25$	1.187	0.251	0.7
$0.00198 < Q^* \leq 0.357$	$0.25 < \zeta_n \leq 1$	1.310	0.267	1
$0.357 < Q^* \leq 1215.3$	$1 < \zeta_n \leq 10$	1.329	0.284	0.6

Exemple d'application 1.18.

Soit à déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans un canal parabolique pour les données suivantes :

$$Q = 6m^3 / s; T_m = 4m; y_m = 2m; C = 75; i = 0.001.$$

i. La valeur de la dimension linéaire B est par suite:

$$B = T_m^2 / y_m = 4^2 / 2 = 8m$$

ii. La conductivité relative Q^* est:

$$Q^* = \frac{Q}{CB^{5/2} \sqrt{i}} = \frac{6}{75 \times 8^{5/2} \times \sqrt{0.001}} = 0.01397542$$

iii. La valeur du paramètre de forme ζ_n est, selon la relation (1.177):

$$\zeta_n = \theta Q^{*\gamma} = 1.31 \times 0.01397542^{0.267} = 0.41887434$$

iv. La profondeur normale y_n recherchée est:

$$y_n = B\zeta_n^2 = 8 \times 0.41887434^2 = 1.4036457 \approx 1.4\text{m}$$

Ainsi:

$$T_n = B\zeta_n = 8 \times 0.41887434 = 3.35099471 \approx 3.35\text{ m}$$

b. . Relation de Manning

En substituant les expressions (1.170) et(1.172) dans l'équation (1.24) de *Manning*, celle-ci devient :

$$Q = \frac{\alpha}{n} B^{8/3} \sqrt{i} \psi(\zeta_n) \quad (1.178)$$

Où :

$$\alpha = \text{constante} = 4 \times (2/3)^{5/3} \cong 2.035$$

Et:

$$\psi(\zeta_n) = \zeta_n^5 \left[4\zeta_n \sqrt{1+16\zeta_n^2} + \ln\left(4\zeta_n + \sqrt{1+16\zeta_n^2} \right) \right]^{-2/3} \quad (1.179)$$

La relation(1.178) peut s'écrire en termes adimensionnels sous la forme suivante:

$$Q_M^* = \alpha \psi(\zeta_n) \quad (1.180)$$

Soit:

$$Q_M^* = \frac{nQ}{B^{8/3} \sqrt{i}} \quad (1.181)$$

Le paramètre de forme $\zeta_n(Q_M^*)$ de la relation (1.180) peut être calculé directement par la relation approchée suivante (*Achour et Khattaoui* ,2008):

$$\zeta_n = \mathcal{R} Q_M^*{}^\delta \quad (1.182)$$

Tableau 1.2 : Valeurs des paramètres ϑ et δ , calculées selon la relation (1.182)

Q_M^*	ζ_n	ϑ	δ	L'écart maximal %
$Q_M^* \leq 0.00114$	$\zeta_n \leq 0.25$	1.197	0.232	0.7
$0.00114 < Q_M^* \leq 0.29$	$0.25 < \zeta_n \leq 1$	1.350	0.250	1
$0.29 < Q_M^* \leq 1484.6$	$1 < \zeta_n \leq 10$	1.388	0.270	0.6

Exemple d'application 1.19.

Soit à déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans un canal parabolique pour les données suivantes :

$$Q = 8m^3 / s; T_m = 6m; y_m = 3m; n = 0.02; i = 0.002.$$

i. La valeur la dimension linéaire B est, selon la relation (1.166):

$$B = T_m^2 / y_m = 6^2 / 3 = 12m$$

ii. Les données du problème sont telles que la conductivité relative est :

$$Q_M^* = \frac{nQ}{B^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0.02 \times 8}{12^{8/3} \sqrt{0.002}} = 0.004740109$$

iii. La valeur du paramètre de forme ζ_n est, selon la relation (1.182) :

$$\zeta_n = \vartheta Q_M^{*\delta} = 1.35 \times 0.00474011^{0.25} = 0.35422634$$

iv. La profondeur normale y_n recherchée est:

$$y_n = B \zeta_n^2 = 12 \times 0.35422634^2 = 1.50571559 \approx 1.51m$$

Ainsi:

$$T_n = B \zeta_n = 12 \times 0.35422634 = 4.25071607 \approx 4.25 m$$

c. . Approche de Zhang et Wu

L'approche de *Zhang et Wu* (2014) est destinée au calcul le rapport d'aspect ζ_n et par suite y_n dans les canaux paraboliques à surface libre.

En introduisant les relations (1.170) et (1.171), en tenant compte du fait que $R_n = A/P$, dans la relation (1.24), on obtient:

$$0.5684Q^* = \frac{\eta_P^3}{\left[2\eta_P \sqrt{1+4\eta_P^2} + \ln\left(2\eta_P + \sqrt{1+4\eta_P^2} \right) \right]} \quad (1.183)$$

Où :

$$\eta_P = \sqrt{ay_n} \quad (1.184)$$

$$Q^* = (nQ/\sqrt{i})^{3/5} a^{8/5} \quad (1.185)$$

Ainsi, si :

- $Q^* \leq 1$

La solution approchée de l'équation (1.183) est alors :

$$\eta_P = e^{-0.0016+0.075\sqrt{Q^*}+0.383\ln Q^*} \quad (1.186)$$

- $Q^* > 1$

La solution approchée de l'équation (1.183) est alors :

$$\eta_P = 0.055 + 0.99Q^{*5/11} \quad (1.187)$$

Exemple d'application 1.20.

Reprenons l'exemple d'application 1.19 et calculons la profondeur normale, y_n de l'écoulement en ayant recours à la relation (1.183), pour les données suivantes :

$$Q = 8m^3 / s; T_m = 6m; y_m = 3m; n = 0.02; i = 0.002.$$

i. Les données du problème sont telles que :

$$a = 4y_m / T_m^2 = (4 \times 3) / 6^2 = 0.33333333m^{-1}$$

Ainsi :

$$Q^* = \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/5} a^{8/5} = \left(\frac{0.02 \times 8}{\sqrt{0.002}} \right)^{3/5} \times 0.33333333^{8/5} = 0.370483596 < 1$$

ii. Nous pouvons constater que la valeur de la conductivité relative ainsi calculée est inférieure à 1.

Ceci permet de conclure que le paramètre de forme η_p est régi par la relation (1.186). Soit:

$$\eta_p = e^{-0.0016+0.075\sqrt{Q^*}+0.383\ln Q^*} = e^{-0.0016+0.075 \times \sqrt{0.370483596}+0.383\ln(0.370483596)}$$

$$\eta_p = 0.71444602$$

Ainsi, la profondeur normale y_n recherchée est :

$$y_n = \frac{\eta_p^2}{a} = \frac{0.71444602^2}{0.33333333} = 1.531299335 \approx 1.53 \text{ m}$$

La valeur ainsi calculée de la profondeur normale y_n s'écart de celle calculée lors de l'exemple d'application 1.19 de moins de 1.7%.

I.9.5. Conduite fermée à surface libre de forme circulaire

I.9.5.1. Caractéristiques du canal

La figure 1.15 montre un profil circulaire de diamètre D partiellement occupé par un écoulement de profondeur y_n .

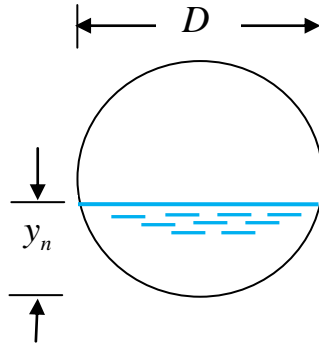


Figure 1.15. Schéma de définition de l'écoulement uniforme en conduite circulaire.

On peut définir le paramètre de forme de l'aire de la section mouillée normale par la variable adimensionnelle: $\eta = y_n / D$

La figure 1.15 permet géométriquement de montrer que :

L'aire de la section mouillée A , telle que:

$$A = \frac{D^2}{4} [\cos^{-1}(1 - 2\eta) - 2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}] \quad (1.188)$$

Il apparaît ainsi que l'aire de la section mouillée A est fonction du diamètre D de la conduite et du taux de remplissage η .

La relation (1.188) peut s'écrire :

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta)\varphi(\eta) \quad (1.189)$$

Où :

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) \quad (1.190)$$

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{[2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}]}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} \quad (1.191)$$

Pour une conduite circulaire entièrement remplie, correspondant à $\eta = 1$, nous pouvons déduire des relations (1.190) et (1.191) respectivement $\sigma(\eta = 1) = \pi$ et $\varphi(\eta = 1) = 1$.

Le périmètre mouillé P , tel que :

$$P = D \cos^{-1}(1 - 2\eta) \quad (1.192)$$

Ou bien

$$P = D\sigma(\eta) \quad (1.193)$$

Le périmètre mouillé P est donc aussi fonction du diamètre D de la conduite et du taux de remplissage η .

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$, qui s'exprime, en ayant recours aux relations (1.189) et (1.193), par :

$$R_h = \frac{D}{4} \varphi(\eta) \quad (1.194)$$

I.9.5.2. Le taux de remplissage η est inconnu

I.9.5.2.1. Expression de la profondeur normale y_n

a. Formule de Chézy

En introduisant les relations (1.189) et (1.194) dans l'équation de Chézy, on obtient :

$$Q = \frac{1}{8} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \sqrt{C^2 i D^5} \quad (1.195)$$

En introduisant la conductivité relative Q^* , tel que :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i D^5}} \quad (1.196)$$

La relation (1.195) s'écrit alors, en terme adimensionnels:

$$Q^* = \frac{1}{8} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (1.197)$$

L'un des problèmes rencontrés en pratique est la détermination de la profondeur normale y_n , à partir des valeurs connues des paramètres C, Q, i et D . Ce problème peut trouver sa solution dans la résolution de l'équation (1.197), puisque la conductivité relative Q^* est une donnée dont la valeur est tirée de la relation (1.196).

L'objectif est donc de déterminer la valeur du taux de remplissage η qui permettrait alors de déduire celle de la profondeur normale $y_n = \eta D$. Cependant, au regard de la forme de la relation (1.197), il apparaît clairement que le taux de remplissage η est implicite vis-à-vis de Q^* et que sa détermination nécessiterait un procédé itératif ou graphique.

a.1. Relation approchée au calcul de la profondeur normale

Il s'agit d'établir une relation approchée susceptible de mener à un calcul explicite de la profondeur normale y_n , pour les valeurs connues des paramètres C, Q, i et D , et par conséquent de celle la conductivité relative Q^* . La relation sera établie dans large gamme pratique $0.15 \leq \eta \leq 0.85$. Avant d'établir cette relation, il est utile de noter que (Achour, 2012) :

$$\frac{Q^*}{Q_{\max}^*} = \frac{Q}{Q_{\max}} \tag{1.198}$$

La conductivité relative Q^* est fonction du taux de remplissage η conformément à la relation (1.197). En faisant varier le du taux de remplissage η dans la gamme $0 \leq \eta \leq 1$, la relation (1.197) a permis de dresser le tableau 1.3.

Il ressort du tableau 1.3 que la conductivité relative Q^* augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η jusqu'à la valeur maximale $Q_{\max}^* \cong 0.4125$, indiquée en gras dans le tableau correspondant à $\eta = 0.95$. Au-delà de sa valeur maximale, Q^* diminue avec l'augmentation du taux de remplissage η . A l'état de remplissage, correspondant à $\eta = 1$, la conductivité relative prend la valeur $Q^* \cong 0.3927$.

Tableau 1.3: Valeurs de $\eta(Q^*)$ calculée selon la relation (1.197)

$\eta = y_n / D$	Q^*	$Q^* / Q_{\max}^* = Q / Q_{\max}$
0.15	0.02251392	0.05457967
0.2	0.03883223	0.09413954
0.25	0.05879554	0.14253582
0.3	0.08193272	0.19862644
0.35	0.10776124	0.26124155
0.4	0.13578502	0.32917856
0.45	0.1654918	0.4011956
0.5	0.19634954	0.47600286
0.55	0.22780151	0.55225069
0.65	0.29009288	0.70326133

Tableau 1.3: Valeurs de $\eta(Q^*)$ calculée selon la relation (1.197). (La suite)

$\eta = y_n / D$	Q^*	$Q^* / Q_{\max}^* = Q / Q_{\max}$
0.7	0.31961415	0.77482865
0.75	0.34705131	0.84134353
0.8	0.3715013	0.90061673
0.85	0.39183379	0.94990802
0.9	0.40645541	0.98535466
0.95	0.41249656	1
0.957	0.41232364	0.99958081
1	0.39269908	0.95200571

Les valeurs consignées dans le tableau 1.3 ont permis de tracer, sur la figure 1.16, la variation $\eta(Q^*)$. Dans le tableau 1.3, ont été aussi consignées les valeurs de Q^* / Q_{\max}^* qui correspondent également aux valeurs du rapport Q / Q_{\max} conformément à la relation (1.198).

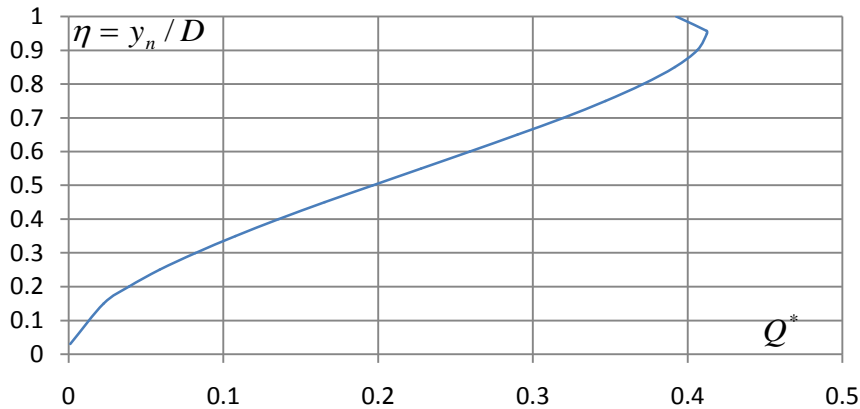


Figure 1.16 : Représentation graphique de $\eta(Q^*)$, selon la relation (1.197).

Dans la gamme pratique $0.15 \leq \eta \leq 0.85$, correspondant à $0.0225 \leq Q^* \leq 0.392$, les calculs ont montré que le taux de remplissage $\eta(Q^*)$ de la conduite pouvait s'exprimer, avec une erreur relative maximale inférieure à 0.4 % seulement (Tableau 1.4), par la relation suivante (Achour, 2012) :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11} \eta\right) = 1.525 Q^{*0.52} \tag{1.199}$$

Tableau 1.4: Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (1.199) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q^*)$ de la conduite.

$\eta = y_n / D$	Q^*	$(\eta = y_n / D)_{\text{approché}}$	Ecart relatifs %
0.15	0.02251392	0.14966789	0.22
0.2	0.03883223	0.19991141	0.04
0.25	0.05879554	0.24995564	0.02
0.3	0.08193272	0.29984209	0.05
0.35	0.10776124	0.34963851	0.10
0.4	0.13578502	0.39942434	0.14
0.45	0.1654918	0.44928319	0.16
0.5	0.19634954	0.49929713	0.14
0.55	0.22780151	0.54953958	0.08
0.6	0.25925936	0.60006298	0.01
0.65	0.29009288	0.65087439	0.13
0.7	0.31961415	0.70188349	0.27
0.75	0.34705131	0.7527856	0.37
0.8	0.3715013	0.80278095	0.35
0.85	0.39183379	0.84985538	0.02

De même, dans la gamme pratique $0.15 \leq \eta \leq 0.85$, correspondant à $0.0546 \leq Q/Q_{\max} \leq 0.95$, les calculs ont montré que le taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max})$ de la conduite pouvait s'exprimer, avec une erreur relative maximale inférieure à 0.35 % seulement (Tableau 1.5), par la relation (Achour, 2012):

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,962\left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0.52} \quad (1.200)$$

Tableau 1.5: Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (1.200) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q^* / Q_{\max}^*)$ de la conduite.

$\eta = y_n / D$	Q^* / Q_{\max}^*	$(\eta = y_n / D)_{\text{approché}}$	Ecart relatifs %
0.15	0.05457967	0.14962823	0.25
0.20	0.09413954	0.19985778	0.07
0.25	0.14253582	0.2498875	0.04
0.30	0.19862644	0.29975869	0.08
0.35	0.26124155	0.34953885	0.13
0.40	0.32917856	0.39930712	0.17
0.45	0.4011956	0.4491467	0.19
0.50	0.47600286	0.49913912	0.17
0.55	0.55225069	0.5493571	0.12
0.60	0.62851277	0.59985209	0.02
0.65	0.70326133	0.6506297	0.10
0.70	0.77482865	0.70159754	0.23
0.75	0.84134353	0.75244791	0.33
0.80	0.90061673	0.80237682	0.30
0.85	0.94990802	0.8493662	0.07

Exemple d'application 1.21.

Calculer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans une conduite circulaire de diamètre $D = 1.5m$, écoulant un débit volume $Q = 1.69m^3 / s$ sous une pente longitudinale $i = 0.001$, le coefficient de Chézy est $C = 75m^{0.5} / s$.

- i. Vérifions que la conductivité relative Q^* est bien inférieure à la conductivité relative maximale $Q_{\max}^* \cong 0.41249656$

Selon la relation (1.196), la conductivité relative de la conduite est par définition :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i D^5}} = \frac{1.69}{\sqrt{75^2 \times 0.001 \times 1.5^5}} = 0.25858141 < 0.41249656$$

ii. L'application de la relation approchée (1.199) permet de déduire que le taux de remplissage de la conduite est :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 1.525Q^{*0.52} \Rightarrow \eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}\left(1.525Q^{*0.52}\right)$$

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}\left(1.525 \times 0.25858141^{0.52}\right) = 0.59896416 \approx 0.6$$

iii. Par suite, la profondeur normale de l'écoulement est :

$$y_n = \eta D = 0.6 \times 1.5 = 0.9m$$

iv. La relation (1.200) peut également servir à la vérification des calculs, soit:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,962\left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0.52} \Rightarrow \eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}\left[0,962\left(\frac{Q^*}{Q_{\max}^*}\right)^{0.52}\right]$$

Où $Q_{\max}^* \cong 0.41249656$ conformément au tableau 1.3. Ainsi :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}\left[0,962\left(\frac{0.25858141}{0.41249656}\right)^{0.52}\right] = 0.59875393 \approx 0.6$$

Il s'agit bien de la même valeur du taux de remplissage η calculée à l'étape (ii).

b. Formule de Manning

En ayant recours aux relations (1.189) et (1.194), la relation (1.24) de Manning permet d'écrire que :

$$Q = \frac{1}{n} \sigma(\eta) [\varphi(\eta)]^{5/3} \frac{D^{8/3}}{4^{5/3}} \sqrt{i} \quad (1.201)$$

En introduisant la conductivité relative Q^* , tel que :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} \quad (1.202)$$

La relation (1.201) s'écrit alors, en terme adimensionnels:

$$Q^* = 4^{-5/3} \sigma(\eta) [\phi(\eta)]^{5/3} \quad (1.203)$$

La relation (1.176) traduit ainsi la variation de la conductivité relative Q^* de la conduite en fonction du taux de remplissage η . Les valeurs de $\eta(Q^*)$ calculées selon la relation (1.203) sont consignées dans le tableau 1.6 et elles ont permis le tracé de la figure 1.17. En outre, nous avons également porté dans le tableau 1.6 les valeurs de Q/Q_{\max} qui correspondent à celles de Q^*/Q_{\max}^* , conformément à la relation (1.198).

Les valeurs du tableau 1.6 ainsi que la figure 1.17 suggèrent les observations suivantes:

- La conductivité relative Q^* de la conduite augmente dans la premier temps avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint la valeur maximale $Q_{\max}^* \cong 0.3353$, indiquée en gras dans le tableau 1.6, pour le taux de remplissage $\eta = 0.94$. La conductivité maximale de la conduite n'est donc pas atteinte à l'état plein, mais seulement à 94% de cet état.
- Au-delà de sa valeur maximale, la conductivité relative Q^* de la conduite diminue avec l'accroissement du taux de remplissage η et atteint la valeur $Q^* \cong 0.3117$ pour le taux de remplissage $\eta = 1$.
- Lorsque la conduite est à moitié remplie, correspondant au taux de remplissage $\eta = 0.5$ indiqué en gras dans le tableau 1.6, la conductivité relative est $Q^* \cong 0.156$.

Tableau 1.6: Valeurs de $\eta(Q^*)$ calculée selon la relation (1.203)

$\eta = y_n / D$	Q^*	$Q^* / Q_{\max}^* = Q / Q_{\max}$
0.1	0.006507312	0.01940896
0.15	0.015150827	0.04518944
0.2	0.027294706	0.08141023
0.25	0.042695238	0.12734445
0.3	0.061037735	0.18205348
0.35	0.081954527	0.24444071
0.4	0.10503419	0.31327899
0.45	0.129826223	0.38722465
0.5	0.155842734	0.46482249
0.55	0.182557584	0.54450323
0.6	0.209402827	0.62457288
0.65	0.235761513	0.7031913
0.7	0.260954811	0.77833379
0.75	0.284219023	0.84772252
0.8	0.304662223	0.90869719
0.85	0.321173306	0.95794378
0.9	0.332193544	0.99081316
0.94	0.33527365	1
0.95	0.334910569	0.99891706
1	0.311685468	0.92964499

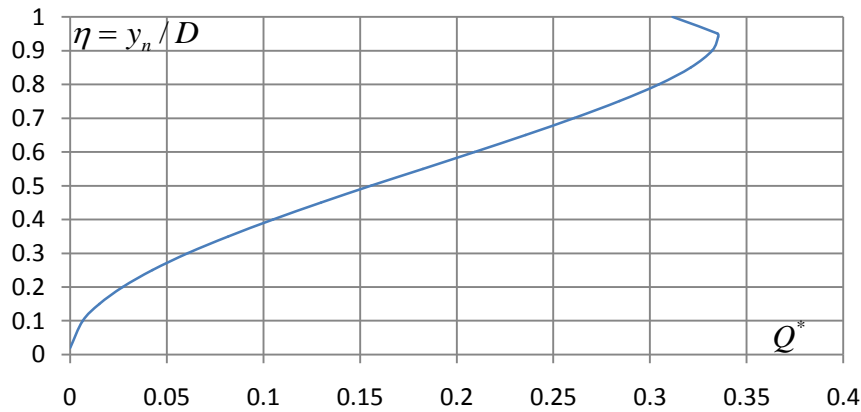


Figure 1.17: Courbe de variation du taux de remplissage η de la conductivité relative Q^* de la conduite en fonction de la conductivité relative Q^* , selon le tableau 1.6 calculées par la relation (1.203).

b.1. Relation approchée au calcul de la profondeur normale

La détermination de la profondeur normale y_n de l'écoulement passe par l'estimation du taux de remplissage η de la conduite, pour les paramètres connus C, Q, i et D , et par conséquent de la conductivité relative Q^* . Cependant, la relation (1.203) montre que η est implicite vis-à-vis de Q^* et sa détermination nécessite un procédé itératif ou graphique.

Cette partie de l'étude vise à établir une relation approchée explicite au calcul du taux de remplissage η de la conduite, impliquant ainsi celui de la profondeur normale y_n de l'écoulement. L'une des approches consiste à rechercher la meilleure courbe de tendance de la variation $\eta(Q^*)$. Le calcul a montré que la relation (1.203) pouvait être remplacée, avec une excellente approximation, par la relation explicite suivante (Achour, 2012):

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 1.614Q^{*0.485} \quad (1.204)$$

La relation (1.204) a été établie dans la large gamme pratique $0.15 \leq \eta \leq 0.75$, correspondant à $0.0152 \leq Q^* \leq 0.284$. Le tableau 1.7 montre les écarts relatifs occasionnés par la relation (1.204) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q^*)$ de la conduite. Au regard des écarts relatifs réduits ainsi obtenus, nous pouvons conclure que la relation (1.204) est une excellente relation approchée explicite. Notons que les plus grands écarts relatifs correspondent aux valeurs extrêmes de la gamme considérée de η , indiquées en gras dans le tableau 1.7.

Tableau 1.7: Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (1.204) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q^*)$ de la conduite.

$\eta = y_n / D$	Q^*	$\eta = y_n / D$ Approché	Ecart relatifs %
0.15	0.01515083	0.149273209	0.48
0.2	0.02729471	0.199793935	0.10
0.25	0.04269524	0.25014131	0.06
0.3	0.06103774	0.300321681	0.11
0.35	0.08195453	0.350374621	0.11
0.4	0.10503419	0.400352611	0.09
0.45	0.12982622	0.450309409	0.07
0.5	0.15584273	0.500290126	0.06
0.55	0.18255758	0.550318557	0.06
0.6	0.20940283	0.600376384	0.06
0.65	0.23576151	0.650364614	0.06
0.7	0.26095481	0.700027108	0.004
0.75	0.28421902	0.748790581	0.16

Une seconde approche peut être également adoptée pour établir une relation explicite au calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement. Cette approche consiste à rechercher la meilleure courbe de tendance de la variation du taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max})$, dans la gamme pratique $0.15 \leq \eta \leq 0.75$, correspondant à $0.0452 \leq Q/Q_{\max} \leq 0.8477$ (Tableau 1.6).

Le rapport entre les valeurs de Q^* données par la relation (1.203) et la valeur $Q_{\max}^* \cong 0.3353$ données par le tableau 1.6, permet de déduire que :

$$\frac{Q}{Q_{\max}} = \frac{\sigma(\eta)[\varphi(\eta)]^{5/3}}{3.379} \quad (1.205)$$

Les calculs ont montré que le taux de remplissage $\eta(Q/Q_{\max})$ de la conduite pouvait s'exprimer, avec une erreur relative maximale inférieure à 0.5 % seulement (Tableau 1.8), par la relation (Achour, 2012):

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,95\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0.485} \quad (1.206)$$

Tableau 1.8: Ecart relatifs en (%) occasionnés par la relation approchée (1.206) sur le calcul du taux de remplissage $\eta(Q^* / Q_{\max}^*)$ de la conduite.

$\eta = y_n / D$	Q / Q_{\max}	$\eta = y_n / D$ approché	Ecart relatifs %
0.15	0.04518944	0.14927368	0.48
0.2	0.08141023	0.19979458	0.10
0.25	0.12734445	0.25014213	0.06
0.3	0.18205348	0.30032268	0.11
0.35	0.24444071	0.35037582	0.11
0.4	0.31327899	0.40035402	0.01
0.45	0.38722465	0.45031105	0.07
0.5	0.46482249	0.50029202	0.06
0.55	0.54450323	0.55032074	0.06
0.6	0.62457288	0.60037891	0.06
0.65	0.7031913	0.65036754	0.06
0.7	0.77833379	0.70003051	0.004
0.75	0.84772252	0.74879457	0.16

Exemple d'application 1.22.

On souhaite déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans une conduite circulaire de diamètre $D = 2m$, écoulant un débit volume $Q = 1.85m^3 / s$ sous une pente longitudinale $i = 0.0003$, Le coefficient de résistance à l'écoulement de Manning est $n = 0.014m^{-1/3}s$.

- i. Vérifions que la conductivité relative de la conduite Q^* est bien inférieure à la conductivité relative maximale $Q_{\max}^* \cong 0.33527365$.

Selon la relation (1.202), la conductivité relative de la conduite est par définition :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0.014 \times 2}{2^{8/3} \times \sqrt{0.0003}} = 0.23550085 < 0.33527365$$

ii. L'application de la relation approchée (1.204) permet de déduire le taux de remplissage de la conduite est :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 1.614Q^{*0.485} \Rightarrow \eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}\left(1.614Q^{*0.485}\right)$$

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}\left(1.614 \times 0.23550085^{0.485}\right) = 0.64986255 \approx 0.65$$

Par suite, la profondeur normale de l'écoulement est :

$$y_n = \eta D = 0.65 \times 2 = 1.3m$$

iii. La vérification des calculs aurait pu être effectuée en déterminant le taux de remplissage par application de la relation (1.206), soit :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 0,95\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0.485} \Rightarrow \eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}\left[0,95\left(\frac{Q}{Q_{\max}}\right)^{0.485}\right]$$

Dans cette relation $Q/Q_{\max} = Q^*/Q_{\max}^*$ Où $Q_{\max}^* \cong 0.33527365$ conformément au tableau

1.6. Ainsi :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}\left[0,95\left(\frac{0.23550085}{0.33527365}\right)^{0.485}\right] = 0.65004255 \approx 0.65$$

Il s'agit bien de la valeur du taux de remplissage η calculée à l'étape (ii).

c. Formule de Wong

Etablie en 2007, la formule de Wong est destinée au calcul explicite de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans la conduite circulaire à surface libre, par :

$$y_n = 1.32DQ^*\left(0.51+0.5Q^*-2.5Q^{*2}\right) \quad (1.207)$$

La conductivité relative de la conduite Q^* est donnée par la relation(1.202).

Exemple d'application 1.23.

Reprenons l'exemple d'application 1.22 et calculons la profondeur normale, y_n de l'écoulement dans une conduite circulaire en ayant recours à la relation (1.207), pour les données suivantes:

$$Q = 1.85m^3 / s; D = 2m; i = 3.10^{-4}; n = 0.014m^{-1/3}.s$$

i. Selon la relation (1.202), la conductivité relative de la conduite est par définition :

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0.014 \times 2}{2^{8/3} \times \sqrt{0.0003}} = 0.23550085$$

Valeur déjà calculée lors de l'exemple d'application 1.22

ii. La profondeur normale y_n de l'écoulement est

$$y_n = 1.32DQ^{*\left(0.51+0.5Q^*-2.5Q^{*2}\right)} = 1.30150609 \approx 1.302m$$

Il s'agit bien, avec un écart relatif de moins de 0,15%, de la valeur de y_n calculée au cours de l'exemple d'application 1.22

d. Approche de Swamee

Selon Swamee (2004), la relation suivante donne, de façon explicite, la valeur pratique exacte de la profondeur normale y_n ou du paramètre de forme η , pour les valeurs connues de Q, i, ε, ν , et D

$$y_n = 0.943D \left(0.0683 \left[\left(\frac{Q_{\max}}{Q} \right)^{0.886} \times \left(1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{1.69} \right) - 2 \right]^{0.357} + 1 \right)^{-12.25} \quad (1.208)$$

Soit , par définition de η est donné par :

$$\eta = 0.943 \left(0.0683 \left[\left(\frac{Q_{\max}}{Q} \right)^{0.886} \times \left(1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{1.69} \right) - 2 \right]^{0.357} + 1 \right)^{-12.25} \quad (1.209)$$

La formule approchée (1.209) est applicable pour les valeurs de $\eta \leq 0.3$. Ainsi, un écart de 1.5% sur le paramètre de forme η , engendrerait le même écart dans l'évaluation de la profondeur normale y_n de l'écoulement.

Le débit volume maximal Q_{\max} figurant dans les relations (1.208) et (1.209), est donné par la relation de Swamee (2001):

$$Q_{\max} = -D^2 \sqrt{gDi} \ln \left(\frac{\varepsilon}{3.46D} + \frac{1.43\nu}{D\sqrt{gDi}} \right) \quad (1.210)$$

Exemple d'application 1.24.

Une conduite circulaire de diamètre $D = 2.1m$, siège d'un écoulement uniforme, écoule un débit volume $Q = 1m^3 / s$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6}$, sous une pente longitudinale $i = 0.001$. La paroi interne de la conduite est caractérisée par une rugosité absolue $\varepsilon = 0.001m$.

1. Calculer la valeur du taux de remplissage η .
2. Déduire la valeur de la profondeur normale la profondeur normale y_n de l'écoulement.

i. Le débit Q_{\max} est, selon la relation (1.210):

$$Q_{\max} = -D^2 \sqrt{gDi} \ln \left(\frac{\varepsilon}{3.46D} + \frac{1.43\nu}{D\sqrt{gDi}} \right) =$$

$$- 2.1^2 \times \sqrt{9.81 \times 2.10 \times 0.001} \times \ln \left(\frac{0.001}{3.46 \times 2.10} + \frac{1.43 \times 10^{-6}}{1.98 \times \sqrt{9.81 \times 2.10 \times 0.001}} \right) = 5.606254576m^3 / s$$

ii. Selon la relation (1.182), le taux de remplissage η est par suite :

$$\begin{aligned} \eta &= 0.943 \left(0.0683 \left[\left(\frac{Q_{\max}}{Q} \right)^{0.886} \times \left(1 + \left(\frac{Q}{Q_{\max}} \right)^{1.69} \right) - 2 \right]^{0.357} + 1 \right)^{-12.25} \\ &= 0.943 \times \left(0.0683 \times \left[\left(\frac{5.6062545756}{1} \right)^{0.886} \left(1 + \left(\frac{1}{5.606254576} \right)^{1.69} \right) - 2 \right]^{0.357} + 1 \right)^{-12.25} = 0.295554344 \approx 0.3 \end{aligned}$$

iii. La profondeur normale y_n recherchée est donc :

$$y_n = \eta D = 2.10 \times 0.3 = 0.63m$$

I.9.5.3. Le diamètre de la conduite D est inconnu

I.9.5.3.1. Expression de la profondeur normale y_n

Il s'agit d'établir la relation permettant le calcul explicite de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans une conduite circulaire à surface libre dont le diamètre D est le paramètre inconnu. Les données du problème sont Q, i, ε, ν et η .

a. Approche de Swamée

L'approche de Swamée (2001) consiste à évaluer le diamètre D de la conduite circulaire à surface libre. Cette approche vise à contourner la difficulté de la relation implicite (1.55) de Swamee et Rathie (2004).

Le diamètre est exprimé par:

$$D = k_D \left[\varepsilon^{1.25} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{4.75} + \frac{\nu Q^{9.4}}{(gi)^{5.2}} \right]^{0.04} \quad (1.211)$$

Ou bien:

$$y_n = \eta k_D \left[\varepsilon^{1.25} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{4.75} + \frac{\nu Q^{9.4}}{(gi)^{5.2}} \right]^{0.04} \quad (1.212)$$

Le coefficient k_D est donné par :

$$k_D = \frac{0.422}{\eta^{0.8}} + 0.164\eta + \left(\frac{\eta}{1.2} \right)^{16} \quad (1.213)$$

La relation (1.213) occasionne un écart relatif maximal de 0.5% sur le calcul de k_D .

Exemple d'application 1.25.

On souhaite déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans une conduite circulaire, pour les données suivantes :

$$Q = 1m^3 / s; \eta = 0.3; i = 0.001; \varepsilon = 0.001m; \nu = 10^{-6} m^2 / s.$$

i. Selon la relation (1.213), k_D est, :

$$k_D = \frac{0.422}{\eta^{0.8}} + 0.164\eta + \left(\frac{\eta}{1.2} \right)^{16} = \frac{0.422}{0.3^{0.8}} + 0.164 \times 0.3 + \left(\frac{0.3}{1.2} \right)^{16} = 1.154844341$$

ii. Le diamètre D de la conduite est, selon la relation (1.211) :

$$D = k_D \left[\varepsilon^{1.25} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{4.75} + \frac{\nu Q^{9.4}}{(gi)^{5.2}} \right]^{0.04}$$

$$= 1.154844341 \times \left[0.001^{1.25} \left(\frac{1^2}{9.81 \times 0.001} \right)^{4.75} + \frac{10^{-6} \times 1^{9.4}}{(9.81 \times 0.001)^{5.2}} \right]^{0.04} = 1.978411 \approx 1.98m$$

Cette valeur calculée de D s'écarte de la valeur exacte $D=2m$, donnée à l'énoncé de l'exemple d'application 1.24.

iii. La profondeur normale y_n recherchée est donc :

$$y_n = \eta D = 1.98 \times 0.3 = 0.594 \approx 0.6m$$

b. Relation approchée

Pour les valeurs données de Q, i, ε, ν et D , la relation (1.214) permet d'évaluer la valeur du paramètre d'aspect η (Swamée, 2008) :

$$\eta = 0.943 \left(0.823 \left(\frac{Q_{\max}}{Q} - 1 \right)^{0.665} + 1 \right)^{-1} \tag{1.214}$$

Ou bien:

$$y_n = 0.943 D \left(0.823 \left(\frac{Q_{\max}}{Q} - 1 \right)^{0.665} + 1 \right)^{-1} \tag{1.215}$$

Notons que le débit maximum Q_{\max} est donné par la relation (1.210).

Le diamètre D figurant dans les relations (1.215), est donné par la relation :

$$D = k_D L \tag{1.216}$$

Où $k_D = 0.6264$ est une constante dépendant de la forme de la conduite et L est une dimension linéaire dont le sens physique n'a pas été spécifié, soit:

$$L = \left[\varepsilon \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{4.8} + \frac{8\nu Q^{9.4}}{(gi)^{5.2}} \right]^{0.04} \tag{1.217}$$

Exemple d'application 1.26.

Calculons la profondeur normale y_n de l'écoulement dans la conduite circulaire étudiée, pour les données suivantes:

$$Q = 1\text{m}^3 / \text{s}; i = 0.0002; \varepsilon = 0.0002\text{m}; \nu = 10^{-6} \text{m}^2 / \text{s}.$$

i. Selon la relation (1.217), la dimension linéaire L est par suite :

$$L = \left[\varepsilon \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{4.8} + \frac{8\nu Q^{9.4}}{(gi)^{5.2}} \right]^{0.04} = \left[0.0002 \times \left(\frac{1^2}{9.81 \times 0.0002} \right)^{4.8} + \frac{8 \times 10^{-6} \times 1^{9.4}}{(9.81 \times 0.0002)^{5.2}} \right]^{0.04}$$

$$= 2.3916747\text{m}$$

ii. Le diamètre D se calcule par application de la relation (1.216), soit :

$$D = k_D L = 0.6264 \times 2.3916747 = 1.49814503 \approx 1.5\text{m}$$

iii. Le débit maximum Q_{\max} est, selon la relation (1.210) :

$$Q_{\max} = -D^2 \sqrt{gDi} \ln \left(\frac{\varepsilon}{3.46D} + \frac{1.43\nu}{D\sqrt{gDi}} \right) =$$

$$-1.5^2 \times \sqrt{9.81 \times 1.5 \times 0.0002} \times \ln \left(\frac{0.0002}{3.46 \times 1.5} + \frac{1.43 \times 10^{-6}}{1.5 \times \sqrt{9.81 \times 1.5 \times 0.0002}} \right)$$

$$= 1.194761667\text{m}^3 / \text{s}$$

iv. Le taux de remplissage η doit être évalué par la relation (1.187) :

$$\eta = 0.943 \left(0.823 \left(\frac{Q_{\max}}{Q} - 1 \right)^{0.665} + 1 \right)^{-1} = 0.943 \left(0.823 \left(\frac{1.194761667}{1} - 1 \right)^{0.665} + 1 \right)^{-1}$$

$$= 0.7382872$$

Ainsi, la profondeur normale y_n recherchée est donc :

$$y_n = \eta D = 1.5 \times 0.7382872 = 1.1074308 \approx 1.11\text{m}$$

10. CONCLUSION

Le chapitre précédent a eu pour principal objectif de passer la synthèse des études antérieures les plus significatives destinées au calcul de la profondeur normale de l'écoulement dans les canaux à surface libre.

Dans un premier temps, Nous avons précisé les conditions d'établissement d'un écoulement uniforme dont les caractéristiques ont été représentées sur la figure 1.5, en comparant la pente du canal à la pente critique.

A partir d'un schéma de définition, nous avons montré les différentes forces intervenant dans un volume de contrôle de l'écoulement uniforme, le développement théorique aboutit à l'équation fondamentale (1.11). Ceci a permis de définir la notion de la vitesse moyenne V de l'écoulement uniforme dans un canal. Nous avons indiqué que la vitesse moyenne V de l'écoulement en règle générale estimée selon la relation de *Chézy* (1775) dont l'application à l'écoulement en canaux à surface libre mène à la relation (1.12). Cette relation montre clairement que la vitesse moyenne d'écoulement V dépende de la pente longitudinale i du canal, du rayon hydraulique R_h de celle-ci et d'un coefficient appelé coefficient de résistance à l'écoulement ou coefficient de *Chézy* et représenté par C .

Dans un second temps, notre étude s'est intéressée au coefficient de *Chézy* et aux paramètres dont il dépend. Nous avons présenté trois relations permettant d'évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. La première relation est celle de *Ganguillet – Kutter* (1869) dans laquelle le coefficient C est tel que $C(n, i, R_h)$ qui désignent respectivement le coefficient de rugosité traduisant l'état physique des parois du canal, la pente de celui-ci et le rayon hydraulique. Le coefficient C , selon la relation établie par ces auteurs, est faiblement influencé par la variation de i . La seconde relation est celle de *Bazin* (1897), le coefficient C dépend à la fois de m et de R_h , où m est le coefficient de rugosité dépendant de la nature du matériau constituant le canal considéré. La troisième relation est celle de *Powell*. Elle exprime de manière implicite le coefficient C en fonction du nombre de *Reynolds*, du rayon hydraulique et de la rugosité absolue des parois du canal.

Nous avons présenté la relation de *Manning* ou de *Manning-Strickler* qui exprime le débit volume. Le coefficient n selon *Manning* et $1/n = k$ selon *Strickler* a été discuté et son unité a été précisée. Le coefficient k est lié à la rugosité absolue ε par la relation de *Hager* (1987) [Equation (1.26)]. Le coefficient n , dit de *Manning*, peut être corrélé au coefficient C de *Chézy* par la relation $C = R_h^{1/6} / n$.

La vitesse moyenne V de l'écoulement peut être également estimée selon la relation de *Darcy-Weisbach* (1854) dont l'application à l'écoulement en canaux à surface libre mène à la relation (1.10). Cette relation montre clairement que la vitesse moyenne d'écoulement V dépende de la pente du canal i , du rayon hydraulique R_h de celle-ci et d'un coefficient est représenté par f , appelé coefficient de frottement. Celui-ci peut être évalué par la relation de *Colebrook-White* en s'appuyant sur un procédé itératif. Des relations explicites au calcul de f ont été proposées par certains auteurs, tels que *Achour* (2007) et *Swamee et Jain* (1976). Le coefficient de frottement f peut être corrélé au le coefficient de *Chézy* C par la relation $C = \sqrt{8g/f}$.

Le premier chapitre s'est poursuivi par la présentation des méthodes de calcul de la profondeur normale de l'écoulement dans les canaux à surface libre qui intéresse notre étude.

Parmi les méthodes les plus récentes, destinées au calcul de ce paramètre, nous avons cité et présenté celles de *Swamee et Rathie* [Relations (1.64), (1.129)]. Celles-ci sont applicables dans gammes de valeurs $10^3 \leq R \leq 10^8$ du nombre de *Reynolds* R et $10^{-6} \leq \varepsilon / R_h \leq 10^{-3}$ de la rugosité relative.

Notons l'étude récente de *Swamee et Rathie* (2004) qui tentent d'appliquer le théorème de *Lagrange* pour aboutir à la solution exacte du rapport d'aspect $\eta_n = y_n / b$ s[Relations (1.106), (1.144),(1.151) et (1.154)]. La solution est donnée en termes d'une série illimitée dont la convergence reste à étudier. La série obtenue doit être alors tronquée, ce qui mène à une solution approchée du problème.

Le calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans un canal parabolique, selon *Achour et Khattaoui* (2008), est un calcul approché basé sur l'application de l'une des relations (1.177) ou (1.182). Pour mieux éclairer le lecteur sur l'utilité des relations (1.177) et (1.182), celles-ci sont appliquées à des exemples pratiques [Exemples d'application 1.18 et 1.19].

L'étude de l'écoulement uniforme dans une conduite à surface libre de forme circulaire, basée sur les relations de *Chézy* et de *Manning*.

En se basant sur la formule de *Chézy*, la conductivité Q^* rapportée au diamètre de la conduite a été exprimée et la courbe de remplissage de la conduite a été tracée, puis discutée. Une relation approchée, explicite et fiable, du taux de remplissage η en fonction de Q^* a été déterminée [Relations (1.199)]. L'étude s'est poursuivie par la détermination de la relation de la profondeur normale en termes de débit volume maximal Q_{\max} . Un exemple d'application détaillé a été proposé pour illustrer la démarche à suivre pour le calcul de la profondeur normale.

Le calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans une conduite circulaire par la formule de *Manning*, a mené à l'expression de la conductivité rapportée au diamètre de la conduite, puis à la relation approchée de la profondeur normale. L'étude s'est poursuivie par le tracé de la courbe de remplissage de la conduite, dont les particularités ont été commentées. Un exemple d'application a été proposé pour expliquer les étapes à suivre au calcul de la profondeur normale lorsque la relation de *Manning* est utilisée.

Parmi les méthodes les plus récentes, destinées au calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement à surface libre dans une conduite circulaire, nous avons cité et présenté celle de *Swamee*. [Relation (1.212)]. Celle-ci est applicable dans le cas où le taux de remplissage η est imposé. Un exemple d'application est présenté et explique les étapes à respecter pour le calcul de y_n .

Ainsi, à partir des valeurs connues de Q, i, ε et ν , la relation (1.216) permet le calcul du diamètre D de la conduite et la profondeur normale y_n est par suite déduit de l'application de la relation (1.215).

Après avoir passé en revue les formules usuelles de l'écoulement uniforme, le chapitre suivant sera consacré au calcul la profondeur normale du canal rectangulaire à surface libre par une nouvelle méthode dite «**MMR**».

CHAPITRE II

CALCUL LA PROFONDEUR NORMALE

DANS UN CANAL RECTANGULAIRE

PAR LA *MMR*

CHAPITRE II

CALCUL LA PROFONDEUR NORMALE DANS UN CANAL RECTANGULAIRE PAR LA MMR

II.1. INTRODUCTION

Le présent chapitre présente les fondements de la théorie du modèle rugueux de référence ainsi que les principales relations qui en découlent.

Le modèle rugueux de référence est défini et les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement qui s'y produit sont présentées et discutées.

L'intérêt du modèle rugueux de référence choisi est mis en évidence et servira de base au calcul de la profondeur normale de l'écoulement faisant l'objet de la présente étude et notamment au profil rectangulaire qui intéresse ce chapitre.

Enfin, nous terminerons ce chapitre par une présentation de quelques exemples d'applications dans le but de mieux apprécier l'intérêt de la méthode.

II.2. PRESENTATION DU MODELE RUGUEUX DE REFERENCE

Le canal de forme rectangulaire est l'un des ouvrages le plus connu et le plus rencontré dans les aménagements hydrauliques. La figure 2.1 montre schématiquement ce canal et ses caractéristiques géométriques. Le canal écoule le débit volume Q , d'un liquide de viscosité cinématique ν , sous la pente i qui correspond à la pente géométrique de l'ouvrage. L'état de la paroi interne du canal considéré est caractérisé par la rugosité absolue ε . La forme du canal considéré est définie par le paramètre de forme $\eta_n = y_n / b$, appelé aussi rapport d'aspect, où y_n est la profondeur normale de l'écoulement et b désigne la largeur du canal.

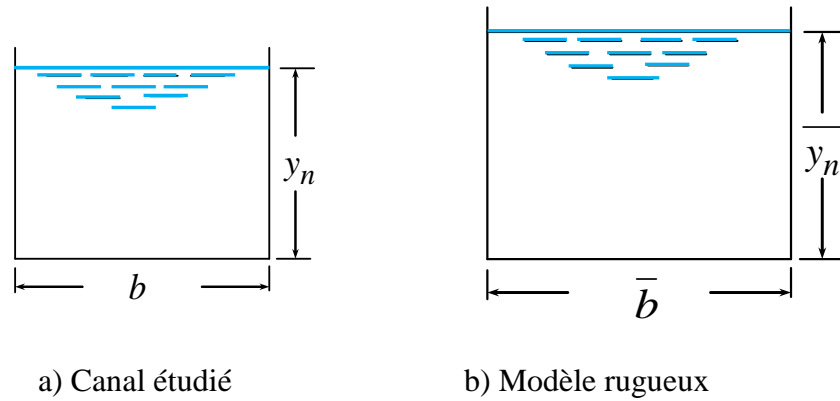


Figure 2.1 : Schéma de définition du canal de forme rectangulaire et de son modèle rugueux.

D'autre part, on associe au canal considéré un canal de référence (ou modèle de référence) de même forme mais dont les caractéristiques géométriques supérieures à celles du canal considéré, telles que $\bar{b} > b$ et $\bar{y}_n > y_n$. Cependant, le paramètre de forme $\bar{\eta}_n = \bar{y}_n / \bar{b}$ du modèle rugueux de référence est égal au paramètre de forme $\eta_n = y_n / b$ du canal à dimensionner, soit :

$$\bar{\eta}_n = \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} = \eta_n = \frac{y_n}{b} \quad (2.1)$$

En outre, le canal de référence écoule le débit volume \bar{Q} , sous une pente longitudinale \bar{i} , d'un liquide de viscosité cinématique ν . L'état de la paroi interne du canal de référence est caractérisé par la rugosité absolue $\bar{\varepsilon}$.

Le tableau 2.1 résume les caractéristiques géométriques du modèle de référence ainsi que ses caractéristiques hydrauliques.

Tableau 2.1: Caractéristiques géométriques du modèle rugueux de référence et hydrauliques de l'écoulement.

Paramètre	Symbole
Aire de la section mouillée	\bar{A}
Périmètre mouillé	\bar{P}
Rayon hydraulique	$\bar{R}_h = \bar{A} / \bar{P}$
Diamètre hydraulique	$\bar{D}_h = 4\bar{R}_h$
Rugosité absolue	$\bar{\varepsilon}$
La pente géométrique	\bar{i}
Débit volume	\bar{Q}
Coefficient de frottement	\bar{f}
Nombre de <i>Reynolds</i>	\bar{R}

Le modèle rugueux écoule le même débit volume que celui du canal considéré, sous la même pente, soit :

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i \quad (2.2)$$

En tenant compte de la relation (2.1), l'aire de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux de référence est donc :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \eta_n \quad (2.3)$$

Le périmètre mouillé est :

$$\bar{P} = \bar{b} + 2\bar{y}_n \quad (2.4)$$

qui peut s'écrire :

$$\bar{P} = \bar{b}(1 + 2\eta_n) \quad (2.5)$$

Le diamètre hydraulique $\overline{D}_h = 4\overline{A}/\overline{P}$ est par suite:

$$\overline{D}_h = 4 \frac{\overline{b}^2 \eta_n}{\overline{b}(1+2\eta_n)}$$

Soit:

$$\overline{D}_h = 4\overline{b} \frac{\eta_n}{(1+2\eta_n)} \quad (2.6)$$

Pour les canaux ouverts, le modèle rugueux de référence est caractérisé par une rugosité relative arbitrairement choisie égale à :

$$\frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{D}_h} = 3,7 \cdot 10^{-2} \quad (2.7)$$

Où $\overline{\varepsilon}$ et \overline{D}_h désignent respectivement la rugosité absolue et le diamètre hydraulique du modèle.

L'écoulement dans le modèle rugueux de référence est considéré comme étant en régime turbulent rugueux de sorte que le coefficient de frottement \overline{f} soit donné par la relation de Colebrook-White pour $\overline{R} \rightarrow \infty$. Il vient que :

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{f}}} = -2 \log \left(\frac{\overline{\varepsilon}/\overline{D}_h}{3,7} \right) = -2 \log \left(\frac{3,7 \cdot 10^{-2}}{3,7} \right) = 4$$

Ou bien :

$$\overline{f} = \frac{1}{16} \quad (2.8)$$

Ainsi, le coefficient de frottement \overline{f} de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est constant et vaut 1/16.

II.3. RELATION DE *DARCY-WEISBACH* APPLIQUEE AU MODELE RUGUEUX

L'écoulement turbulent rugueux se produisant dans le modèle rugueux de référence est donc caractérisé par un coefficient de frottement constant égal à 1/16. Cet écoulement est également régi par la relation de *Darcy-Weisbach*, exprimant la pente longitudinale i selon la formule suivante:

$$i = f \frac{1}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2}$$

Où f est le coefficient de frottement.

La relation précédente peut également d'écrire:

$$i = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2 \quad (2.9)$$

Appliquées au modèle rugueux de référence, la relation précédente mène à écrire que la pente longitudinale \bar{i} du modèle rugueux est:

$$\bar{i} = \frac{\bar{f}}{8g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} \bar{Q}^2 \quad (2.10)$$

Or, le diamètre hydraulique est $\bar{D}_h = \bar{A}/\bar{P}$, où \bar{A} et \bar{P} désignent respectivement l'aire de la section mouillée et le périmètre mouillé de l'écoulement dans le modèle rugueux.

La relation (2.10) s'écrit alors, avec $\bar{f} = 1/16$:

$$\bar{i} = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} \bar{Q}^2 \quad (2.11)$$

En ayant recours à la relation de *Darcy-Weisbach*, la relation (2.11) constitue alors la relation de base régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, applicable à tout profil géométrique.

Nous pouvons déduire que la conductivité du modèle rugueux de référence est telle que:

$$\frac{\bar{Q}}{\sqrt{\bar{i}}} = 8\sqrt{2g} \left(\frac{\bar{A}^3}{\bar{P}} \right)^{1/2} \quad (2.12)$$

D'autre part, le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence s'écrit par définition:

$$\bar{R} = \frac{\bar{V} \bar{D}_h}{\nu} \quad (2.13)$$

Où \bar{V} est la vitesse moyenne de l'écoulement dans le modèle rugueux, de viscosité cinématique ν .

Or la vitesse moyenne \bar{V} est liée au débit volume \bar{Q} par une relation identique à la relation (1.1), soit :

$$\bar{Q} = \bar{V} \bar{A} \quad (2.14)$$

La relation (2.13) s'écrit alors :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{\bar{P}\nu} \quad (2.15)$$

II.4. RELATION ENTRE LES CARACTERISTIQUES DU CANAL ET CELLES DU MODELE

II.4.1. Relations de base destinées au calcul des dimensions linéaires

Le présent paragraphe propose d'établir les relations fondamentales destinées au calcul des dimensions linéaires \bar{b} et \bar{y}_n . Les relations sont établies sous les conditions suivantes : $\bar{Q} = Q$; $\bar{i} = i$; $\bar{\eta}_n = \eta_n$.

En tenant compte des relations (2.3) et (2.5), la relation (2.11) devient alors :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{b}(1+2\eta_n)}{\bar{b}^6 \eta_n^3} Q \quad (2.16)$$

Soit :

$$\bar{b} = \left(\frac{1+2\eta_n}{128\eta_n^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{ig} \right)^{1/5} \quad (2.17)$$

La relation (2.17) permet le calcul explicite de la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence, à partir des valeurs connues du débit volume Q , de la pente i et du paramètre de forme η_n . Les effets de la viscosité cinématique ν du liquide ne sont pas pris en considération, puisque l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, ou supposé être, dans le domaine turbulent rugueux.

La profondeur normale \bar{y}_n de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est telle que $\bar{y}_n = \eta_n \bar{b}$ et qui s'écrit, en tenant compte de la relation (2.17) :

$$\bar{y}_n = \left(\frac{\eta_n^2(1+2\eta_n)}{128} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{ig} \right)^{1/5} \quad (2.18)$$

II.4.2. Facteur de correction des dimensions linéaires

L'application de la relation de *Darcy-Weisbach* à l'écoulement dans le canal considéré permet d'écrire que :

$$i = \frac{f}{8g} \frac{(1+2\eta_n) Q^2}{\eta_n^3 b^5} \quad (2.19)$$

La dimension linéaire b s'écrit alors :

$$b = \left(\frac{f}{8}\right)^{1/5} \left(\frac{(1+2\eta_n)}{\eta_n^3}\right)^{1/5} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}}\right)^{2/5} \quad (2.20)$$

La même démarche, appliquée à la relation (2.10) régissant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, mène à écrire que :

$$\bar{b} = \left(\frac{\bar{f}}{8}\right)^{1/5} \left(\frac{(1+2\bar{\eta}_n)}{\bar{\eta}_n^3}\right)^{1/5} \left(\frac{\bar{Q}}{\sqrt{g\bar{i}}}\right)^{2/5} \quad (2.21)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (2.8) :

$$\bar{b} = \left(\frac{1}{128}\right)^{1/5} \left(\frac{(1+2\bar{\eta}_n)}{\bar{\eta}_n^3}\right)^{1/5} \left(\frac{\bar{Q}}{\sqrt{g\bar{i}}}\right)^{2/5} \quad (2.22)$$

Admettons que :

- i. $\bar{Q} = Q$; $\bar{i} = i$: le modèle rugueux de référence écoule donc le même débit que celui du canal considéré, sous la même pente longitudinale .
- ii. $\bar{\eta}_n = \eta_n$: le modèle rugueux de référence et le canal considéré sont ainsi caractérisés par le même paramètre de forme de leur section mouillée, sans pour autant que leurs dimensions linéaires soient identiques.

Tenant compte de ces hypothèses, les relations (2.20) et (2.22) conduisent à écrire que :

$$\frac{b}{\bar{b}} = (16f)^{1/5} \quad (2.23)$$

Cette dernière relation peut s'écrire plus simplement :

$$b = \psi \bar{b} \quad (2.24)$$

Où :

$$\psi = (16f)^{1/5} \quad (2.25)$$

Il faut donc noter que le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est étroitement lié au coefficient de frottement f .

Au regard de la relation (2.24), nous pouvons considérer que le paramètre ψ est le facteur de correction des dimensions linéaires. En d'autres termes, la dimension linéaire b du canal considéré est égale à la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence, corrigée par les effets du facteur de correction ψ .

Etant donné que la dimension linéaire \bar{b} est plus grande que la dimension linéaire b , alors le facteur de correction ψ est inférieur à l'unité, ou bien $0 < \psi < 1$.

L'équation (2.24) est la relation fondamentale de la MMR. Elle peut être généralisée à toute forme de conduites et canaux, en écrivant que :

$$L = \psi \bar{L} \quad (2.26)$$

Où L est une dimension linéaire quelconque, telle que la largeur d'un canal rectangulaire, le rayon hydraulique, le diamètre d'une conduite circulaire, ect.

Comme le périmètre mouillé P est une dimension linéaire, alors nous pouvons écrire :

$$P = \psi \bar{P} \quad (2.27)$$

En ce qui concerne l'aire de la section mouillée A , celle-ci étant proportionnelle au carré de la dimension linéaire b , nous pouvons alors écrire que :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (2.28)$$

Dans cette étape du chapitre, il est nécessaire de faire appel à la formule de *Colebrook-White* exprimant le coefficient de frottement f , soit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{3.7 D_h} + \frac{2.51}{R \sqrt{f}} \right) \quad (2.29)$$

Le diamètre hydraulique D_h figurant dans la relation (2.29) est une dimension linéaire et peut donc s'écrire, en vertu de la relation (2.24) :

$$D_h = \psi \bar{D}_h \quad (2.30)$$

Le nombre de *Reynolds* R figurant dans la relation (2.29) s'écrit, par définition :

$$R = \frac{4Q}{P\nu} \quad (2.31)$$

Compte de la relation (2.27), la relation (2.31) devient :

$$R = \frac{4Q}{\psi P\nu} \quad (2.32)$$

Puisque $Q = \bar{Q}$ en vertu de la condition (2.2), nous pouvons alors remarquer que la quantité $4Q/\bar{P}\nu$ figurant dans la relation (2.32) correspond au fait au nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux.

En combinant les relations (2.15) et (2.32), il ressort que:

$$R = \psi^{-1} \bar{R} \quad (2.33)$$

Il apparaît clairement que les nombres de *Reynolds* R et \bar{R} sont liés par le facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

Introduisons les relations (2.25), (2.30) et (2.33) dans la relation (2.29). Nous obtenons:

$$\frac{4}{\psi^{5/2}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{3.7\psi} + \frac{2.51 \times 4}{\psi^{-1} \overline{R} \psi^{5/2}} \right)$$

Après simplifications et réarrangements, il vient que :

$$\psi = \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{3.7\psi} + \frac{10.04}{\psi^{3/2} \overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.34)$$

Selon la relation (2.34), le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est fonction de la rugosité absolue ε et des caractéristiques hydrauliques \overline{D}_h et \overline{R} de l'écoulement dans le modèle rugueux.

La relation (2.34) montre bien qu'elle est implicite vis-à-vis du facteur ψ puisque celui est contenu à la fois dans les membres gauche et droit de la relation. La détermination du facteur de correction ψ nécessite donc un procédé itératif. Afin de faciliter le calcul du facteur de correction ψ , il est recommandé d'utiliser la relation approchée suivante (Achour et Bedjaoui, 2006 a), en remplacement de la relation implicite (2.34):

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.35)$$

Afin de montrer la fiabilité de la relation approchée (2.35), nous l'avons comparée à la relation exacte (2.34). Cette comparaison a été effectuée selon les étapes suivantes:

- i. On fixe une valeur de la rugosité relative $\varepsilon / \overline{D}_h$ entre les valeurs 0 et 0,05 afin de balayer l'ensemble du diagramme universel de *Moody*.
- ii. On fait varier le nombre de *Reynolds* \overline{R} avec un pas arbitrairement choisi.
- iii. Par un procédé itératif, on calcule la valeur du coefficient de correction ψ en application de la relation exacte (2.34).

- iv. On calcule la valeur approchée de ψ selon la relation proposée (2.35).
- v. On calcule enfin l'écart relatif $\Delta\psi/\psi(\%)$ entre les valeurs de ψ déterminées au cours des étapes *iii* et *iv*.

A l'issue des étapes de calcul ci-dessus indiquées, l'écart relatif $\Delta\psi/\psi$ est représenté graphiquement le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure 2.2, en fonction de \bar{R} et pour chacune des valeurs fixées de la rugosité relative ε/\bar{D}_h .

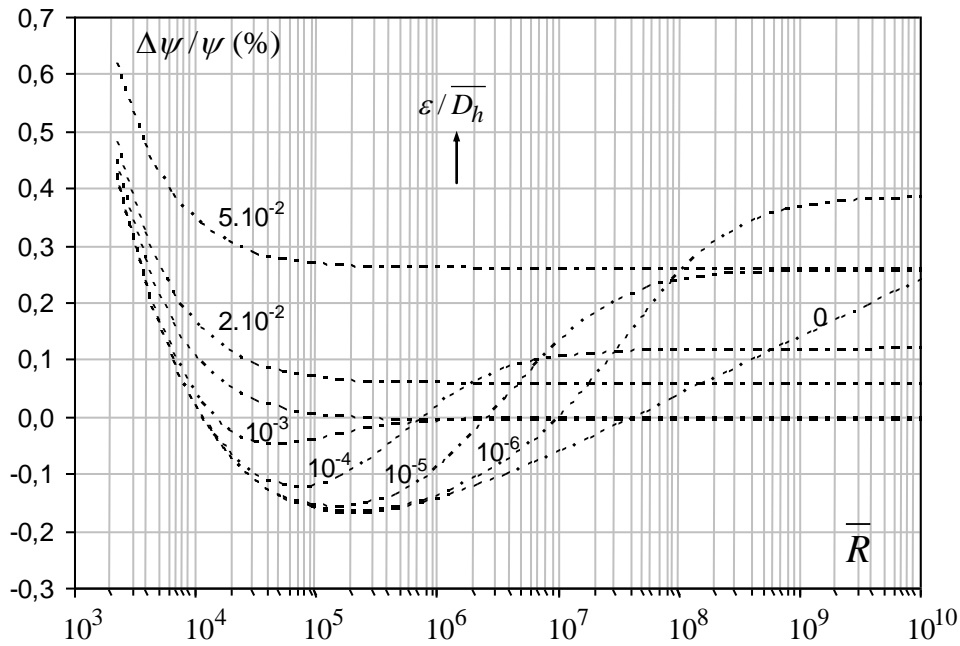


Figure 2.2 : Ecarts relatifs en % entre les valeurs exactes de ψ de la relation (2.35) et celles approchées de la relation (2.34).

Il ressort de la figure 2.2 que, pour les valeurs pratiques $\bar{R} > 10^4$, l'écart relatif entre les valeurs exactes et approchées de ψ ne dépassent guère 0,4% seulement. Ceci montre clairement la fiabilité de la relation approchée (2.35) qui peut donc être appliquée avec une erreur très acceptable. Notons que la relation approchée (2.35) est applicable à l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent, comprenant le régime d'écoulement lisse, le régime d'écoulement de transition et le régime d'écoulement turbulent rugueux.

II.5. DETERMINATION DE LA PROFONDEUR NORMALE

L'un des problèmes rencontrés dans l'étude de l'écoulement uniforme est la détermination de la profondeur normale y_n . Nous verrons dans cette partie de notre étude que le calcul est en grande partie facilité par la méthode du modèle rugueux

II.5.1. Calcul de la profondeur normale par la relation de Darcy-Weisbach

II.5.1.1. Le rapport d'aspect η_n est imposé

Pour déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal considéré par application de la relation de *Darcy-Weisbach* lorsque le rapport d'aspect η_n est imposé, il est nécessaire d'adopter les conditions suivantes: $\bar{b} \neq b; \bar{Q} = Q; \bar{i} = i; \bar{\eta}_n = \eta_n$.

Les étapes suivantes sont recommandées, à condition que les paramètres $Q, i, \eta_n, \varepsilon$ et ν soient donnés.

- i. Avec les valeurs connues des paramètres Q, i et η_n , la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence est déterminée en vertu de la relation (2.17).
- ii. Connaissant les valeurs de \bar{b} et de η_n , la relation (2.6) permet de calculer la valeur du diamètre hydraulique \bar{D}_h de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, tandis que le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux est déterminé par application de la relation (2.5).
- iii. Les valeurs connues de Q, \bar{P} et ν sont introduites dans la relation (2.15) pour l'évaluation du nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.
- iv. A partir des valeurs connues de ε/\bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.35) permet le calcul explicite du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

- v. Connaissant les valeurs de \bar{b} et de ψ , la valeur recherchée de la largeur du canal b est directement déduite de la relation fondamentale (2.24).
- vi. Enfin, connaissant les valeurs de b et de η_n , la valeur recherchée de la profondeur normale y_n est simplement déduite de l'application de la relation $y_n = \eta_n b$.

Afin d'illustrer la démarche de calcul que nous venons d'exposer et qui mène au calcul de la profondeur normale y_n , l'exemple d'application suivant est proposé.

Exemple d'application 2.1.

Un canal de forme rectangulaire écoule un débit volume $Q = 4.275 m^3 / s$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} m^2 / s$, sous une pente géométrique $i = 10^{-3}$. Sachant que la rugosité absolue caractérisant l'état des parois internes du canal est $\varepsilon = 10^{-3} m$ et que le paramètre de forme est $\eta_n = y_n / b = 0.65$, déterminer la valeur de la profondeur normale y_n de l'écoulement.

- i. La dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.17) :

$$\bar{b} = \left(\frac{1 + 2\eta_n}{128\eta_n^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{ig} \right)^{1/5} = \left(\frac{1 + 2 \times 0.65}{128 \times 0.65^3} \right)^{1/5} \left(\frac{4.275^2}{0.001 \times 9.81} \right)^{1/5} = 2.613341743 m$$

- ii. Le diamètre hydraulique \bar{D}_h du modèle rugueux de référence est:

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\eta_n}{(1 + 2\eta_n)} = 2.613341743 \times \frac{0.65}{1 + 2 \times 0.65} = 2.954212405 m$$

Tandis que le périmètre mouillé \bar{P} est, selon la relation (2.5) :

$$\bar{P} = \bar{b}(1 + 2\eta_n) = 2.613341743 \times (1 + 2 \times 0.65) = 6.010686008 m$$

- iii. Le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 4.275}{6.010686008 \times 10^{-6}} = 2844933.17$$

- iv. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\begin{aligned} \psi &\cong 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 2.954212405}{4.75} + \frac{8.5}{2844933.17} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0.765567092 \end{aligned}$$

- v. La dimension linéaire recherchée $b = \psi \bar{b}$ est donc:

$$b = \psi \bar{b} = 0.765567092 \times 2.613341743 = 2.000688439 \approx 2m$$

La profondeur normale y_n est alors :

$$y_n = b \eta_n = 0.65 \times 2 = 1.3m$$

- vi. Cette étape vise à vérifier la valeur donnée de la pente longitudinale i du canal par application de la relation de Darcy-Weisbach, pour la valeur calculée de la dimension linéaire b , soit:

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{1}{2gA^2} Q^2$$

- Le diamètre hydraulique D_h est :

$$D_h = 4b \frac{\eta_n}{1 + 2\eta_n} = 4 \times 2 \times \frac{0.65}{1 + 2 \times 0.65} = 2.26086957m$$

- L'aire de la section mouillée A est:

$$A = \eta_n b^2 = 0.65 \times 2^2 = 2.6m^2$$

- Le coefficient de frottement f est évalué par la relation (2.25), soit :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0.765567092^5}{16} = 0.01643601$$

- La pente longitudinale i est par suite, selon la relation de *Darcy-Weisbach* :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0.01643601}{2.26086957} \frac{4.275^2}{2 \times 9.81 \times 2.6^2} = 0.00100172 \cong 10^{-3}$$

Il s'agit bien de la valeur de i donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

II.5.1.2. La largeur b du canal est imposée

Le problème consiste à déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement lorsque le débit volume Q , la pente géométrique i , la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne du canal, la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement et la largeur b du canal sont les paramètres connus ou constituent les données de ce problème. Dans ce cas, le rapport d'aspect η_n n'est plus une donnée du problème et seule la largeur b du canal est imposée.

Pour les données de ce problème, il est nécessaire de considérer que le rapport d'aspect η_n dans le canal étudié est différent du rapport d'aspect dans le modèle rugueux de référence, soit $\eta_n \neq \bar{\eta}_n$, et que la dimension linéaire b du canal considéré est, dans un premier temps, égale à celle \bar{b} du modèle rugueux. Sous la condition $\eta_n \neq \bar{\eta}_n$, la relation (2.17) devient :

$$\bar{b} = \left(\frac{1 + 2\bar{\eta}_n}{128\bar{\eta}_n^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (2.36)$$

En introduisant la conductivité relative \bar{Q}^* , tel que :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} \quad (2.37)$$

Tenant compte de (2.37), la relation (2.36) permet de déduire que :

$$\bar{Q}^{*2} = \frac{128\bar{\eta}_n^3}{1+2\bar{\eta}_n} \quad (2.38)$$

La relation précédente devient :

$$\bar{\eta}_n^3 - \frac{1}{64}\bar{Q}^{*2}\bar{\eta}_n - \frac{1}{128}\bar{Q}^{*2} = 0 \quad (2.39)$$

La conductivité relative \bar{Q}^* est la variable connue de l'équation (2.39) et celle-ci permet alors de déterminer le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$. L'équation (2.39) se présente sous la forme :

$$x^3 + px + q = 0 \quad (2.40)$$

Avec:

$$x = \bar{\eta}_n, p = -\bar{Q}^{*2} / 64, q = -\bar{Q}^{*2} / 128$$

Le discriminant de l'équation en x est :

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

Soit, après simplifications et réarrangements :

$$\Delta = \left(\frac{\bar{Q}^*}{16}\right)^4 \left(1 - \frac{\bar{Q}^*}{6\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{\bar{Q}^*}{6\sqrt{3}}\right)$$

Nous pouvons donc écrire que :

1. Lorsque $\bar{Q}^* \geq 6\sqrt{3}$, le discriminant Δ est négatif ou nul et la racine réelle de l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}_n$ exprimée par (2.39) s'écrit :

$$\bar{\eta}_n = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos(\beta/3)$$

Soit :

$$\bar{\eta}_n = \frac{\bar{Q}^*}{4\sqrt{3}} \cos(\beta/3) \quad (2.41)$$

où l'angle β est tel que : $\cos(\beta) = \frac{3q}{2\sqrt{\frac{p^3}{3}}}$

Soit :

$$\cos(\beta) = \frac{6\sqrt{3}}{\bar{Q}^*} \quad (2.42)$$

2. Lorsque $\bar{Q}^* \leq 6\sqrt{3}$, le discriminant Δ est positif ou nul et la racine réelle de l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}_n$ exprimée par (2.39) s'écrit :

$$\bar{\eta}_n = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \operatorname{ch}(\beta/3)$$

Soit :

$$\bar{\eta}_n = \frac{\bar{Q}^*}{4\sqrt{3}} \operatorname{ch}(\beta/3) \quad (2.43)$$

Où l'angle β est tel que :

$$\operatorname{ch}(\beta) = \frac{3q}{2\sqrt{\frac{p^3}{3}}}$$

Soit :

$$\operatorname{ch}(\beta) = \frac{6\sqrt{3}}{\bar{Q}^*} \quad (2.44)$$

Notons que, par des considérations trigonométriques, la racine réelle exprimée par la relation (2.43) peut s'écrire:

$$\bar{\eta}_n = \left(\frac{\bar{Q}^{*2}}{256} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\bar{Q}^{*2}}{108}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\bar{Q}^{*2}}{108}} \right)^{1/3} \right] \quad (2.45)$$

Afin de mieux préciser cette démarche de calcul qui consiste à évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement pour une valeur imposée de la largeur b , les étapes suivantes sont recommandées:

- i. Pour les valeurs connues des paramètres Q , i et b , et en admettant dans un premier temps que $b = \bar{b}$, calculer selon la relation (2.37) la conductivité relative :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{ig\bar{b}^5}} = \frac{Q}{\sqrt{igb^5}}$$

- ii. Pour la valeur connue de la conductivité relative \bar{Q}^* , les relations (2.41), (2.43) ou (2.45) donnent la valeur du rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux de référence.
- iii. Pour les valeurs ainsi connues des paramètres $b = \bar{b}$ et de $\bar{\eta}_n$, les relations (2.5), (2.6) et (2.15) permettent d'évaluer respectivement le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de Reynolds \bar{R} .
- iv. Les valeurs connues des paramètres ε , \bar{D}_h et \bar{R} seront introduites dans la relation (2.35) pour la détermination du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- v. Une fois la valeur de ψ déterminée, il faut maintenant affecter à l'écoulement dans le modèle rugueux la dimension linéaire $\bar{b} = b/\psi$, pour la valeur imposée de la largeur b .

- vi. On calcule pour la valeur de la largeur \bar{b} de l'étape v, la nouvelle valeur de la conductivité relative:

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{ig\bar{b}^5}} = \frac{Q}{\sqrt{ig(b/\psi)^5}}$$

- vii. Cette nouvelle valeur de la conductivité relative permet de calculer, selon les relations (2.41), (2.43) ou (2.45), la valeur du rapport d'aspect $\eta_n = \bar{\eta}_n$.
- viii. Après avoir évalué η_n , la valeur de la profondeur normale y_n est alors directement déduite de la relation $y_n = \eta_n b$.

L'exemple d'application suivant est proposé pour mieux illustrer les étapes de calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement lorsque la largeur b du canal est imposée. Par souci de comparaison, cet exemple d'application reconduit les données de l'exemple d'application 2.1.

Exemple d'application 2.2.

On souhaite déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans un canal rectangulaire, pour les données suivantes:

$$Q = 4.275 m^3 / s; b = 2m; i = 10^{-3}; \varepsilon = 10^{-3} m; \nu = 10^{-6} m^2 / s$$

La largeur b du canal a été évaluée au cours de l'exemple d'application 2.1 et elle est imposée dans le présent exemple. Le résultat attendu devra être le même que celui obtenu lors de la solution de l'exemple d'application 2.1.

- i. Le problème peut être résolu en considérant les conditions :

$$\bar{Q} = Q; \bar{b} = b; \bar{i} = i$$

Ces conditions impliquent que $\bar{y}_n \neq y_n$ et par conséquent $\eta_n \neq \bar{\eta}_n$.

ii. Les données du problème sont telles que le débit relatif \bar{Q}^* est:

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{ig\bar{b}^5}} = \frac{4.275}{\sqrt{10^{-3} \times 9.81 \times 2^5}} = 7.630036688 < 6\sqrt{3} = 10.39230485$$

Le discriminant Δ de l'équation est par suite positif et le paramètre de forme $\bar{\eta}_n$ est alors donné par l'une des relations (2.45), soit :

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_n &= \left(\frac{\bar{Q}^{*2}}{256}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\bar{Q}^{*2}}{108}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\bar{Q}^{*2}}{108}}\right)^{1/3} \right] \\ \bar{\eta}_n &= \left(\frac{7.630036688^2}{256}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{7.630036688^2}{108}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{7.630036688^2}{108}}\right)^{1/3} \right] \\ &= 1.143425134 \end{aligned}$$

iii. Avec la valeur donnée de $b = \bar{b}$ et celle calculée de $\bar{\eta}_n$, les relations (2.5), (2.6) et (2.15) permettent de déterminer le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de Reynolds \bar{R} . Soit :

$$\bullet \bar{P} = \bar{b}(1 + 2\bar{\eta}_n) = 2 \times (1 + 2 \times 1.1434425134) = 6.573700536m$$

$$\bullet \bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\bar{\eta}_n}{1 + 2\bar{\eta}_n} = 4 \times 2 \times \frac{1.1434425134}{1 + 2 \times 1.1434425134} = 2.783029443m$$

$$\bullet \bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}v} = \frac{4 \times 4.274}{6.573700536 \times 10^{-6}} = 2601274.565$$

iv. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est alors :

$$\begin{aligned} \psi &\cong 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3}}{4.75 \times 2.783029443} + \frac{8.5}{2601274.565} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0.767537679 \end{aligned}$$

v. Si l'on affectait au modèle rugueux de référence la dimension linéaire \bar{b} :

$$\bar{b} = b/\psi = 2/0.767537679 = 2.605735269m$$

alors l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}_n$ donnerait une valeur de $\bar{\eta}_n$ égale à celle de la section mouillée de l'écoulement dans le canal étudié, soit $\eta_n = \bar{\eta}_n$. Cette nouvelle valeur de $\bar{\eta}_n$ doit être calculée pour la conductivité relative \bar{Q}^* exprimée par la relation (2.37):

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{Jg(b/\psi)^5}} = \frac{4.275}{\sqrt{10^{-3} \times 9.81 \times 2.605735269^5}} = 3.93800159 < 6\sqrt{3}$$

Le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ est, selon la relation (2.45) :

$$\eta_n = \bar{\eta}_n = \left(\frac{\bar{Q}^{*2}}{256}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\bar{Q}^{*2}}{108}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\bar{Q}^{*2}}{108}}\right)^{1/3} \right] =$$

$$\left(\frac{3.93800159^2}{256}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{3.93800159^2}{108}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3.93800159^2}{108}}\right)^{1/3} \right] = 0.65390369$$

vi. La valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc :

$$y_n = b\eta_n = 2 \times 0.65390369 = 1.307807378 \approx 1.308m$$

Le calcul effectué au cours de l'exemple d'application (2.1) a conduit à la valeur de la profondeur normale $y_n = 1.3m$. Nous pouvons donc noter que l'écart relatif entre les valeurs de la profondeur normale de l'exemple d'application 2.1 et du présent exemple n'est que de 0,6% seulement, ce qui indique que les calculs que nous venons d'effectuer sont tout à fait acceptables.

II.5.2. Calcul de la profondeur normale par la relation de Chézy

La relation de *Chézy* peut être utilisée pour déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans un canal de forme rectangulaire. Pour calculer y_n par la relation de *Chézy*, il est nécessaire de connaître le débit volume Q , la pente géométrique i , l'aire de la section mouillée A , le rayon hydraulique R_h et enfin le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. En pratique, la valeur de ce coefficient n'est pas donnée et seule la valeur de la rugosité absolue ε peut être évaluée. Pour contourner cette difficulté, le recours à la méthode du modèle rugueux de référence est d'une grande utilité.

Le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est étroitement lié au coefficient de frottement f par la relation bien connue:

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (2.46)$$

Définissons pour le modèle rugueux de référence le coefficient de résistance à l'écoulement \bar{C} de *Chézy*. Selon la relation (2.46), nous pouvons écrire que:

$$\bar{C} = \sqrt{\frac{8g}{\bar{f}}} \quad (2.47)$$

Or, nous avons déjà établi au cours des paragraphes précédents que le coefficient de frottement \bar{f} de l'écoulement dans le modèle rugueux est constant ($\bar{f} = 1/16$).

En introduisant cette valeur dans la relation (2.47), il vient que:

$$\bar{C} = 8\sqrt{2g} \quad (2.48)$$

Ainsi, le coefficient de résistance \bar{C} de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, au sens de *Chézy*, est donc constant et vaut : $\bar{C} = 35,4355753 \text{ m}^{0,5} / \text{s}$

Il faut noter que dans le canal étudié, le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* n'est pas une constante. Il dépend à la fois essentiellement de la dimension linéaire b , de la rugosité absolue ε et du rapport d'aspect η_n .

En combinant les relations (2.25) et (2.46), nous pouvons aisément déduire que :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (2.49)$$

Ainsi, comme pour le coefficient de frottement f , le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est étroitement lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

Pour déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal considéré, admettons les conditions suivantes : $Q = \bar{Q}, i = \bar{i}$

Sous ces conditions, il faut appliquer la relation (1.13) de *Chézy* au modèle rugueux de référence, soit:

$$Q = \bar{C} \bar{A} \sqrt{\bar{R}_h} \bar{i} \quad (2.50)$$

En tenant compte du fait que le rayon hydraulique \bar{R}_h est tel que $\bar{R}_h = \bar{A} / \bar{P}$, la relation (2.50) permet alors d'écrire que :

$$Q = \bar{C} \left(\frac{\bar{A}^3}{\bar{P}} \right)^{1/2} \sqrt{\bar{i}} \quad (2.51)$$

En tenant compte des relations (2.3) et (2.5), la relation (2.51) s'écrit :

$$Q = \bar{C} \frac{\bar{b}^{5/2} \eta_n^{3/2}}{(1 + 2\eta_n)^{1/2}} \sqrt{\bar{i}} \quad (2.52)$$

La relation (2.52) permet de déduire que :

$$\bar{b} = \left(\frac{1 + 2\bar{\eta}_n}{\bar{\eta}_n^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{C^2 i} \right)^{1/5} \quad (2.53)$$

En tenant compte de la relation (2.48), la relation (2.53) devient :

$$\bar{b} = \left(\frac{1 + 2\bar{\eta}_n}{\bar{\eta}_n^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{128 g i} \right)^{1/5} \quad (2.54)$$

II.5.2.1. Le rapport d'aspect η_n est imposé

Le problème consiste à déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement pour les valeurs connues du débit volume Q , de la rugosité absolue ε , de la pente géométrique i , de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement et pour la valeur imposée du rapport d'aspect η_n ou paramètre de forme

Admettons, dans un premier, que le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux soit le même que celui de l'écoulement dans le canal étudié, soit $\eta_n = \bar{\eta}_n$. La relation (2.54) s'écrit alors:

$$\bar{b} = \left(\frac{1 + 2\eta_n}{128\eta_n^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{g i} \right)^{1/5} \quad (2.55)$$

Ainsi, tous les paramètres figurant dans le membre droit de l'équation (2.55) sont bien déterminés et cette équation permet donc d'évaluer de manière explicite la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux. Ce qu'il faut noter c'est que la relation (2.55) est identique à la relation (2.17) obtenue par la transformation de la relation de *Darcy-Weisbach*. Ceci revient à dire que le calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement par application de la relation de *Chézy* s'effectue selon les mêmes étapes que celles indiquées dans le paragraphe **II.5.1.1**.

II.5.2.2. La largeur b du canal est imposée

Le problème consiste à déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal étudié pour les valeurs connues du débit volume Q , de la rugosité absolue ε , de la pente géométrique i , de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement et pour la valeur imposée de la largeur b du canal.

Pour les données de ce problème, il est nécessaire de considérer que le rapport d'aspect η_n dans le canal étudié est différent du rapport d'aspect dans le modèle rugueux de référence $\bar{\eta}_n$, soit $\eta_n \neq \bar{\eta}_n$, et que la largeur b du canal considéré est, dans un premier temps, égale à celle \bar{b} du modèle rugueux.

Au cours du paragraphe II.5.2, nous avons établi la relation (2.54) qui regroupe les paramètres de l'écoulement dans le modèle rugueux par l'usage de la formule de Chézy.

En introduisant la conductivité relative \bar{Q}^* , tel que:

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i b^5}} = \frac{Q}{\sqrt{128 g i b^5}} \quad (2.56)$$

La relation (2.54) devient :

$$\bar{\eta}_n^3 - 2\bar{Q}^{*2} \bar{\eta}_n - \bar{Q}^{*2} = 0 \quad (2.57)$$

L'équation précédente est donc de troisième ordre sans terme du second degré. Son discriminant est :

$$\Delta = \frac{\bar{Q}^{*4}}{4} \left(1 - \frac{27}{32} \bar{Q}^{*2} \right)$$

Nous pouvons donc conclure que:

1. Lorsque $\bar{Q}^* \geq \sqrt{27/32}$, alors $\Delta \leq 0$

La racine réelle de l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}_n$ exprimée par (2.57) s'écrit:

$$\bar{\eta}_n = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\bar{Q}^* \cos \frac{\beta}{3} \quad (2.58)$$

Où l'angle β est tel que:

$$\cos(\beta) = \frac{1}{\bar{Q}^*} \sqrt{\frac{27}{32}} \quad (2.59)$$

2. Lorsque $\bar{Q}^* \leq \sqrt{27/32}$, alors $\Delta \geq 0$

La racine réelle de l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}_n$ exprimée par (2.57) s'écrit :

$$\bar{\eta}_n = \left(\frac{\bar{Q}^{*2}}{2}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27}\bar{Q}^{*2}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27}\bar{Q}^{*2}}\right)^{1/3} \right] \quad (2.60)$$

Pour résoudre le problème de la détermination de la profondeur normale y_n par l'usage des relations (2.58) ou (2.60), les étapes suivantes sont recommandées pour mener à bien le calcul.

- i. Pour les valeurs connues des paramètres Q , i et b en admettant dans un premier temps que $b = \bar{b}$, calculer selon la relation (2.56) la conductivité relative:

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gib^{-5}}} = \frac{Q}{\sqrt{128gib^5}}$$

- ii. Cette conductivité relative doit être ensuite comparée à la valeur $\sqrt{27/32}$, ce qui permettra de choisir l'une des relations (2.58) ou (2.60) pour le calcul explicite du rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux.

- iii. Pour les valeurs ainsi connues des paramètres $b = \bar{b}$ et de $\bar{\eta}_n$, les relations (2.5), (2.6) et (2.15) permettent d'évaluer respectivement le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de *Reynolds* \bar{R} .
- iv. Les valeurs connues des paramètres ε , \bar{D}_h et \bar{R} seront introduites dans la relation (2.35) pour la détermination du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- v. Une fois la valeur de ψ déterminée, il faut maintenant affecter à l'écoulement dans le modèle rugueux la dimension linéaire $\bar{b} = b / \psi$, pour la valeur imposée de la largeur b .
- vi. On calcule pour la valeur de la largeur \bar{b} de l'étape v, la nouvelle valeur de la conductivité relative :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128ig\bar{b}^5}} = \frac{Q}{\sqrt{128ig(b/\psi)^5}}$$

- vii. Cette nouvelle valeur de la conductivité relative permet de calculer, selon les relations (2.58) ou (2.60) la valeur du rapport d'aspect $\eta_n = \bar{\eta}_n$.
- viii. Une fois le rapport d'aspect $\eta_n = \bar{\eta}_n$ déterminé, la valeur de la profondeur normale y_n recherchée est déduite de la relation $y_n = b\eta$.

Afin de mieux apprécier les étapes de calcul ci-dessus indiquées de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme rectangulaire par l'usage de la relation de *Chézy*, considérons alors l'exemple d'application suivant. Il s'agit de l'exemple d'application 2.1 dont nous reprenons les données par souci de comparaison.

Exemple d'application 2.3.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 2.1, soient:

$$Q = 4.275m^3 / s; b = 2m; i = 10^{-3}; \varepsilon = 10^{-3}m; \nu = 10^{-6}m^2 / s$$

Il s'agit de calculer la valeur de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme rectangulaire étudié en ayant recours à la relation de Chézy.

Le problème peut être résolu en considérant les conditions :

$$\bar{Q} = Q; \bar{b} = b; \bar{i} = i$$

Ces conditions impliquent que $\bar{y}_n \neq y_n$ et par conséquent $\bar{\eta}_n \neq \eta_n$.

- i. Calculons la conductivité relative \bar{Q}^* dans le modèle rugueux de référence pour le coefficient de résistance $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$. Pour se faire, utilisons la relation (2.56):

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128ig\bar{b}^5}} = \frac{4.275}{\sqrt{128 \times 10^{-3} \times 9.81 \times 2^5}} = 0.674406335 < \sqrt{27/32}$$

- ii. Cette valeur de la conductivité relative \bar{Q}^* est inférieure à $\sqrt{27/32} = 0,918558654$. Ceci permet de conclure que le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux doit être évalué par la relation (2.60), soit:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_n &= \left(\frac{\bar{Q}^{*2}}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2}} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{0.674406335^2}{2} \right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.674406335^2} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.674406335^2} \right)^{1/3} \right] \\ &= 1.143425134 \end{aligned}$$

vii. Avec la valeur donnée de $b = \bar{b}$ et celle calculée de $\bar{\eta}$, les relations (2.5), (2.6) et (2.15) permettent de déterminer le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de Reynolds \bar{R} :

$$\bullet \bar{P} = \bar{b}(1 + 2\bar{\eta}_n) = 2 \times (1 + 2 \times 1.1434425134) = 6.573700536m$$

$$\bullet \bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\bar{\eta}_n}{1 + 2\bar{\eta}_n} = 4 \times 2 \times \frac{1.1434425134}{1 + 2 \times 1.1434425134} = 2.783029443m$$

$$\bullet \bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 4.274}{6.573700536 \times 10^{-6}} = 2601274.565$$

Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est alors :

$$\psi \cong 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3}}{4.75 \times 2.783029443} + \frac{8.5}{2601274.565} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 0.767537679$$

viii. Si l'on affectait au modèle rugueux de référence la dimension linéaire:

$$\bar{b} = b / \psi = 2 / 0.767537679 = 2.605735269m$$

Alors le paramètre de forme $\bar{\eta}_n$ serait égal au paramètre de forme η_n . Celui-ci est donné par la relation du troisième degré établie à l'étape i , dans laquelle le débit relatif est :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128ig(b/\psi)^5}} = \frac{4.275}{\sqrt{128 \times 10^{-3} \times 9.81 \times 2.605735269^5}} = 0.348073454$$

ix. Cette valeur de la conductivité relative \bar{Q}^* est toujours inférieure à la valeur $\sqrt{27/32} = 0.91855865$, ce qui permet de conclure que le rapport d'aspect η_n dans le canal étudié doit être évalué par la relation (2.60), soit :

$$\bar{\eta}_n = \eta_n = \left(\frac{\bar{Q}^{*2}}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2}} \right)^{1/3} \right]$$

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_n = \eta_n &= \left(\frac{\bar{Q}^{*2}}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{Q}^{*2}} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{0.348073454^2}{2} \right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.348073454^2} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.348073454^2} \right)^{1/3} \right] \\ &= 0.653903689\end{aligned}$$

x. La valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc :

$$y_n = b\eta_n = 2 \times 0.65390369 = 1.307807378 \approx 1.308m$$

Le calcul effectué au cours de l'exemple d'application (2.1) a conduit à la valeur de la profondeur normale $y_n = 1.3m$. Nous pouvons donc noter que l'écart relatif entre les valeurs de la profondeur normale de l'exemple d'application 2.1 et du présent exemple n'est que de 0.6% seulement, ce qui indique que les calculs que nous venons d'effectuer sont tout à fait acceptables.

Notons aussi que le rapport d'aspect η_n peut être calculé par l'usage des relations (1.92) ou (1.94), les étapes suivantes sont recommandées pour mener à bien le calcul:

i. Pour les valeurs connues des paramètres Q , i et b en admettant dans un premier temps que $b = \bar{b}$, calculer selon la relation (2.56) la conductivité relative :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128gib^{-5}}} = \frac{Q}{\sqrt{128gib^5}}$$

ii. Cette conductivité relative doit être ensuite comparée à la valeur $\sqrt{27/32}$, ce qui permettra de choisir l'une des relations (2.58) ou (2.60) pour le calcul explicite du rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux.

iii. Pour les valeurs ainsi connues des paramètres $b = \bar{b}$ et de $\bar{\eta}_n$, les relations (2.5), (2.6) et (2.15) permettent d'évaluer respectivement le périmètre mouillé \bar{P} ,

le diamètre hydraulique \overline{D}_h et le nombre de Reynolds \overline{R} .

- iv. Les valeurs connues des paramètres ε , \overline{D}_h et \overline{R} seront introduites dans la relation (2.35) pour la détermination du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- v. Avec la valeur ainsi calculé du coefficient de correction ψ , appliquons la relation (2.49) pour évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy dans le canal considéré.
- vi. Une fois la valeur du coefficient de résistance C déterminée, calculons alors la conductivité relative Q^* dans le canal étudié, en application de la relation (1.89).
- vii. Comparons ensuite la valeur de la conductivité relative Q^* que nous venons de calculer à la valeur $\sqrt{27/32}$, ce qui permettra de choisir l'une ou l'autre des relations (1.92) ou (1.94) pour le calcul explicite du rapport d'aspect η_n dans le canal.
- viii. La valeur ainsi déterminée du rapport d'aspect η_n permet de déduire celle de la profondeur normale $y_n = b\eta_n$.

Exemple d'application 2.4.

Reprenons l'exemple d'application 2.3 et calculons le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy du canal ainsi que la profondeur normale y_n de l'écoulement.

Les données du problème sont donc:

$$Q = 4.275 m^3 / s; b = 2m; i = 10^{-3}; \varepsilon = 10^{-3} m; \nu = 10^{-6} m^2 / s$$

Le problème peut être résolu en considérant les conditions :

$$\overline{Q} = Q; \overline{b} = b; \overline{i} = i \quad \text{Ces conditions impliquent que } \overline{y}_n \neq y_n \text{ et par conséquent } \overline{\eta}_n \neq \eta_n.$$

- i. Calculons la conductivité relative \bar{Q}^* dans le modèle rugueux de référence pour le coefficient de résistance $\bar{C} = 8\sqrt{2g}$. Pour se faire, utilisons la relation (2.56):

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{128ig\bar{b}^5}} = \frac{4.275}{\sqrt{128 \times 10^{-3} \times 9.81 \times 2^5}} = 0.674406335 < \sqrt{27/32}$$

- ii. Cette valeur de la conductivité relative \bar{Q}^* est inférieure à $\sqrt{27/32} = 0,918558654$. Ceci permet de conclure que le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux doit être évalué par la relation (2.60), soit:

$$\bar{\eta}_n = \left(\frac{\bar{Q}^{*2}}{2}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27}\bar{Q}^{*2}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27}\bar{Q}^{*2}}\right)^{1/3} \right]$$

$$\bar{\eta}_n = \left(\frac{0.674406335^2}{2}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.674406335^2}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.674406335^2}\right)^{1/3} \right] = 1.143425134$$

- iii. Avec la valeur donnée de $b = \bar{b}$ et celle calculée de $\bar{\eta}_n$, les relations (2.5), (2.6) et (2.15) permettent de déterminer le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de Reynolds \bar{R} :

- $\bar{P} = \bar{b}(1 + 2\bar{\eta}_n) = 2 \times (1 + 2 \times 1.1434425134) = 6.573700536m$
- $\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\bar{\eta}_n}{1 + 2\bar{\eta}_n} = 4 \times 2 \times \frac{1.1434425134}{1 + 2 \times 1.1434425134} = 2.783029443m$
- $\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}v} = \frac{4 \times 4.274}{6.573700536 \times 10^{-6}} = 2601274.565$

- iv. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est alors :

$$\psi \cong 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3}}{4.75 \times 2.783029443} + \frac{8.5}{2601274.565} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 0.767537679$$

- v. Selon la relation (2.49), le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy dans le canal considéré est :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8\sqrt{2 \times 9.81}}{0.767537679} = 68.6578544 \text{ m}^{0.5} / \text{s}$$

- vi. Pour cette valeur du coefficient de résistance C de Chézy, déterminons celle de la conductivité relative Q^* dans le canal considéré par application de la relation (1.89):

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 ib^5}} = \frac{4.275}{\sqrt{68.6578544^2 \times 0.001 \times 2^5}} = 0.348073454$$

- vii. Cette valeur de la conductivité relative Q^* est toujours inférieure à la valeur $\sqrt{27/32} = 0,918558654$, ce qui permet de conclure que le rapport d'aspect η_n dans le canal étudié doit être évalué par la relation (1.94), soit:

$$\eta_n = \left(\frac{Q^{*2}}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} Q^{*2}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} Q^{*2}} \right)^{1/3} \right]$$

$$\eta_n = \left(\frac{0.348073454^2}{2} \right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.348073454^2} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.348073454^2} \right)^{1/3} \right] = 0.653903689$$

- viii. Finalement, la profondeur normale y_n recherchée est:

$$y_n = b\eta_n = 2 \times 0.653903689 = 1.307807379 \approx 1.308m$$

Il s'agit bien de la valeur de la profondeur normale calculée au cours de l'exemple d'application 2.3

II.5.3. Calcul de la profondeur normale par la relation de Manning

Le problème posé consiste donc à déterminer la profondeur normale y_n , ce qui revient à évaluer le rapport d'aspect η_n et par suite $y_n = b\eta_n$. Lorsque l'on examine la forme de la relation (1.98), il apparaît que le rapport d'aspect η_n ne peut être déterminé de manière explicite. En pratique, les paramètres connus du problème sont la largeur b du canal, la rugosité absolue ε , la pente géométrique i du canal, le débit volume Q et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Le coefficient n de *Manning* n'est donc pas une donnée du problème et, de ce fait, la conductivité relative Q^* de la relation (1.98) ne peut être évaluée. Ainsi, la détermination du rapport d'aspect η_n par application de la relation implicite (1.98) n'est pas aisée, voire impossible sous sa forme actuelle.

Appliquons la relation (1.24), issue de la relation de *Manning*, au modèle rugueux de référence sous les conditions, $Q = \bar{Q}$, $i = \bar{i}$ Nous obtenons :

$$Q = \frac{1}{n} \bar{A} \bar{R}_h^{2/3} \sqrt{\bar{i}} \quad (2.61)$$

Où \bar{n} est le coefficient de *Manning* pour l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.

Compte tenu du fait que le coefficient n de *Manning* soit lié au coefficient C de *Chézy* par la relation (1.27), nous pouvons déduire que:

$$n = C^{-1} R_h^{1/6} \quad (2.62)$$

Rappelons d'une part que le coefficient C de *Chézy* est lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ par la relation (2.49).

D'autre part, étant donné que le rayon hydraulique R_h est une dimension linéaire, nous pouvons écrire, selon la relation (2.30):

$$R_h = \psi \bar{R}_h \quad (2.63)$$

En introduisant les relations (2.49) et (2.63) dans la relation (2.62), il vient que:

$$n = \frac{\psi^{1/6} \overline{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g} / \psi^{5/2}}$$

Soit, après simplifications:

$$n = \frac{\psi^{8/3} \overline{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (2.64)$$

La relation (2.64) montre bien que le coefficient n de *Manning* est lié au coefficient de correction des dimensions linéaires ψ .

Appliquée au modèle rugueux de référence, la relation (2.62) s'écrit:

$$\overline{n} = \frac{\overline{R}_h^{-1/6}}{\overline{C}} \quad (2.65)$$

En combinant les relations (2.48) et (2.65), il vient que:

$$\overline{n} = \frac{\overline{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (2.66)$$

En introduisant la relation (2.66) dans la relation (2.61), il vient que:

$$Q = \frac{8\sqrt{2g}}{\overline{R}_h^{-1/6}} \overline{A} \overline{R}_h^{2/3} \sqrt{i}$$

Soit:

$$Q = 8\sqrt{2g} \overline{A} \overline{R}_h^{-1/2} \sqrt{i} \quad (2.67)$$

En tenant compte du fait que le rayon hydraulique \overline{R}_h est tel que $\overline{R}_h = \overline{A} / \overline{P}$, la relation (2.67) permet alors d'écrire :

$$Q = 8\sqrt{2g} \frac{\overline{A}^{-3/2}}{\overline{P}^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.68)$$

En tenant compte des relations (2.3) et (2.5), la relation (2.68) devient :

$$Q = 8\sqrt{2g} \frac{\bar{b}^{-5/2} \bar{\eta}_n^{-3/2}}{(1 + 2\bar{\eta}_n)^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.69)$$

La relation (2.69) permet d'écrire que :

$$\frac{Q}{8\sqrt{2g} \bar{b}^{-5/2} \sqrt{i}} = \frac{\bar{\eta}_n^{-3/2}}{(1 + 2\bar{\eta}_n)^{1/2}} \quad (2.70)$$

Le membre gauche de l'équation (2.70) représente la conductivité relative \bar{Q}_M^* dans le modèle rugueux telle que:

$$\bar{Q}_M^* = \frac{Q}{8\sqrt{2g} \bar{b}^{-5/2} \sqrt{i}} \quad (2.71)$$

La relation (2.70) s'écrit alors :

$$\bar{Q}_M^* = \frac{\bar{\eta}_n^{-3/2}}{(1 + 2\bar{\eta}_n)^{1/2}} \quad (2.72)$$

En élevant au carré les deux membres de l'équation (2.72), nous obtenons :

$$\bar{Q}_M^{*2} = \frac{\bar{\eta}_n^{-3}}{(1 + 2\bar{\eta}_n)} \quad (2.73)$$

Nous obtenons finalement l'équation de troisième degré en $\bar{\eta}_n$ suivante:

$$\bar{\eta}_n^3 - 2\bar{Q}_M^{*2} \bar{\eta}_n - \bar{Q}_M^{*2} = 0 \quad (2.74)$$

La forme de l'équation (2.74) est identique à celle de l'équation (2.57) et admet donc la même résolution.

Nous pouvons alors conclure que :

1. Lorsque $\overline{Q_M^*} \geq \sqrt{27/32}$, alors $\Delta \leq 0$ et la racine réelle de l'équation du troisième degré en $\overline{\eta_n}$ exprimée par (2.74) s'écrit:

$$\overline{\eta_n} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\overline{Q_M^*} \cos \frac{\beta}{3} \quad (2.75)$$

Où l'angle β est tel que :

$$\cos(\beta) = \frac{1}{\overline{Q_M^*}} \sqrt{\frac{27}{32}} \quad (2.76)$$

2. Lorsque $\overline{Q_M^*} \leq \sqrt{27/32}$, alors $\Delta \geq 0$ et la racine réelle de l'équation du troisième degré en $\overline{\eta_n}$ exprimée par (2.74) s'écrit :

$$\overline{\eta_n} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\overline{Q_M^*} \operatorname{ch}(\beta/3) \quad (2.77)$$

Où l'angle β est tel que :

$$\operatorname{ch}(\beta) = \frac{1}{\overline{Q_M^*}} \sqrt{\frac{27}{32}} \quad (2.78)$$

Notons que, par des considérations trigonométriques, la racine réelle exprimée par la relation (2.77) peut s'écrire :

$$\overline{\eta_n} = \left(\frac{\overline{Q_M^*}^2}{2}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27}\overline{Q_M^*}^2}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27}\overline{Q_M^*}^2}\right)^{1/3} \right] \quad (2.79)$$

Pour résoudre le problème de la détermination de la profondeur normale y_n de l'écoulement par l'usage de relation de *Manning*, les étapes suivantes sont recommandées pour mener à bien le calcul :

- i. Les données du problème sont le débit volume Q , la pente géométrique i , la dimension linéaire b correspondant à la largeur du canal, la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique du liquide en écoulement ν .

En admettant dans un premier temps que $b = \bar{b}$, pour ces données, on calcule la conductivité relative \bar{Q}_M^* selon la relation (2.71), soit :

$$\bar{Q}_M^* = \frac{Q}{8\sqrt{2g}\bar{b}^{5/2}\sqrt{i}} = \frac{Q}{8\sqrt{2g}b^{5/2}\sqrt{i}}$$

- ii. Cette conductivité relative doit être ensuite comparée à la valeur $\sqrt{27/32}$, ce qui permettra de choisir l'une des relations (2.75), (2.77) ou (2.79) pour le calcul explicite du rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux.
- iii. Admettons encore que $\bar{b} = b$. Pour les valeurs connues de la dimension linéaire \bar{b} et du rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$, appliquons respectivement les relations (2.5), (2.6) et (2.15) pour calculer tour à tour le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de *Reynolds* \bar{R} .
- iv. Puisque les valeurs de \bar{D}_h , ε et \bar{R} sont maintenant connues, appliquons la relation (2.35) pour l'évaluation du coefficient de correction des dimensions linéaires ψ .
- v. Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique \bar{R}_h , appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de *Manning*, soit :

$$n = \frac{\psi^{8/3}\bar{R}_h^{1/6}}{8\sqrt{2g}}$$

- vi. Une fois la valeur du coefficient de n déterminée, calculons alors la conductivité relative Q_M^* dans le canal étudié, en application de la relation (1.96):

$$Q_M^* = nQ/b^{8/3} \sqrt{i}$$

- vii. Une fois la conductivité relative Q_M^* calculée, il faut appliquer soit la relation (1.106) issue du théorème de *Lagrange*, soit par les relations approchées (1.107) ou (1.108) pour l'évaluation du rapport d'aspect η_n .

- viii. La valeur ainsi déterminée du rapport d'aspect η_n permet de déduire celle de la profondeur normale recherchée $y_n = b\eta_n$.

Notons aussi que le rapport d'aspect η_n peut être calculé par l'une des relations (2.75), (2.77) ou (2.79) pour la conductivité relative $\overline{Q_M^*}$ telle que:

$$\overline{Q_M^*} = \frac{Q}{8\sqrt{2g}(b/\psi)^{5/2} \sqrt{i}}$$

Afin d'illustrer la méthode de calcul de la profondeur normale y_n par la relation de *Manning*, considérons alors un exemple d'application. Reprenons pour se faire les données de l'exemple d'application 2.1, par souci de comparaison.

Exemple d'application 2.5.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 2.1, soient:

$$Q = 4.275 m^3 / s; b = 2m; i = 10^{-3}; \varepsilon = 10^{-3} m; \nu = 10^{-6} m^2 / s$$

Il s'agit de calculer la valeur de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme rectangulaire étudié en ayant recours à la relation de *Manning*.

Le problème peut être résolu en considérant les conditions :

$$\bar{Q} = Q; \bar{b} = b; \bar{i} = i$$

Ces conditions impliquent que $\bar{y}_n \neq y_n$ et par conséquent $\bar{\eta}_n \neq \eta_n$.

- i. Pour ces données, on calcule la conductivité relative \bar{Q}_M^* selon la relation (2.71), soit :

$$\bar{Q}_M^* = \frac{Q}{8\sqrt{2}gb^{5/2}\sqrt{i}} = \frac{4.275}{8\sqrt{2} \times 9.81 \times 2^{5/2} \times \sqrt{0.001}} = 0.674406335$$

- ii. Cette valeur de la conductivité relative \bar{Q}_M^* est inférieure à la valeur $\sqrt{27/32} = 0,918558654$, ce qui permet de conclure que le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux est régi par la relation (2.79), soit:

$$\bar{\eta}_n = \left(\frac{\bar{Q}_M^{*2}}{2}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27}\bar{Q}_M^{*2}}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27}\bar{Q}_M^{*2}}\right)^{1/3} \right]$$

$$\bar{\eta}_n = \left(\frac{0.674406335^2}{2}\right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.674406335^2}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.674406335^2}\right)^{1/3} \right] = 1.143425134$$

- iii. Avec la valeur donnée de $b = \bar{b}$ et celle calculée de $\bar{\eta}_n$, les relations (2.5), (2.6) et (2.15) permettent de déterminer le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de Reynolds \bar{R} :

$$\bullet \bar{P} = \bar{b}(1 + 2\bar{\eta}_n) = 2 \times (1 + 2 \times 1.1434425134) = 6.573700536m$$

$$\bullet \bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\bar{\eta}_n}{1 + 2\bar{\eta}_n} = 4 \times 2 \times \frac{1.1434425134}{1 + 2 \times 1.1434425134} = 2.783029443m$$

$$\bullet \bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}\nu} = \frac{4 \times 4.274}{6.573700536 \times 10^{-6}} = 2601274.565$$

iv. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est alors :

$$\psi \cong 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3}}{4.75 \times 2.783029443} + \frac{8.5}{2601274.565} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 0.767537679$$

v. Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique $\overline{R}_h = \overline{D}_h / 4 = 0.695757361m$, appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de Manning, soit :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \overline{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} = \frac{0.767537679^{8/3} \times 0.695757361^{1/6}}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}} = 0.013119059$$

vi. Une fois la valeur de n ainsi déterminée, calculons alors la conductivité relative Q_M^* dans le canal étudié, en application de la relation (1.96), soit:

$$Q_M^* = \frac{nQ}{b^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0.013119059 \times 4.275}{2^{8/3} \times \sqrt{0.001}} = 0.27931365$$

vii. Appliquons la relation approchée (1.107) pour l'évaluation explicite du rapport d'aspect η_n , soit:

$$\eta_n \approx Q_M^{*3/5} \left[1 + 2.404 Q_M^{*0.6321} \left(1 + 2.030 Q_M^{*0.9363} \right)^{0.3929} \right]^{2/5}$$

$$\eta_n \approx 0.27931365^{3/5} \times \left[1 + 2.404 \times 0.27931365^{0.6321} \times \left(1 + 2.030 \times 0.27931365^{0.9363} \right)^{0.3929} \right]^{2/5}$$

$$= 0.64869849 \approx 0.65$$

viii. La valeur ainsi déterminée du rapport d'aspect η_n permet de déduire celle de la profondeur normale recherchée $y_n = b\eta_n$, soit :

$$y_n = b\eta_n = 2 \times 0.65 = 1.3 m$$

Il s'agit bien de la valeur de la profondeur normale calculée au cours de l'exemple d'application 2.1.

ix. Résolvons le problème par les relations (2.75), (2.77) ou (2.79)

Calculons pour cela la conductivité relative :

$$\overline{Q}_M^* = \frac{Q}{8\sqrt{2g}(b/\psi)^{5/2}\sqrt{i}} = \frac{4.275}{8\sqrt{2 \times 9.81} \times (2/0.767537679)^{5/2} \times \sqrt{0.001}} = 0.34807345$$

x. Cette valeur de la conductivité relative \overline{Q}_M^* est inférieure à la valeur $\sqrt{27/32} = 0,918558654$, ce qui permet de conclure que le rapport d'aspect $\overline{\eta}_n$ dans le modèle rugueux est régi par la relation (2.79), soit :

$$\begin{aligned} \eta_n = \overline{\eta}_n &= \left(\frac{\overline{Q}_M^{*2}}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \overline{Q}_M^{*2}} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \overline{Q}_M^{*2}} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{0.34807345^2}{2} \right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.34807345^2} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0.34807345^2} \right)^{1/3} \right] \\ &= 0.653903689 \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } y_n = b\eta_n = 2 \times 0.653903689 = 1.30780738 \approx 1.308 \text{ m}$$

II.6. CONCLUSION

L'objectif principal de ce chapitre a été de présenter le calcul de la profondeur normale dans un canal rectangulaire par la méthode du modèle rugueux de référence.

La relation de base du calcul de l'écoulement par la théorie du modèle rugueux de référence est celle de *Darcy-Weisbach*. Mais, nous avons clairement montré que les formules de type *Chézy* ou de *Manning-Strickler* peuvent être également utilisées sans aucune difficulté dans l'évaluation du coefficient de résistance à l'écoulement.

Lors de l'application de la formule de *Darcy-Weisbach*, nous avons relevé la difficulté, voire l'impossibilité, de définir le coefficient de frottement f en l'absence de la dimension linéaire du canal. Pour contourner cette difficulté, nous avons utilisé la méthode du modèle rugueux de référence. Après avoir exprimé les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux ainsi que ses caractéristiques géométriques, nous avons explicitement défini le coefficient de frottement \bar{f} de l'écoulement dans le modèle rugueux comme étant une constante. Cette particularité a permis d'établir la relation exprimant la largeur \bar{b} du modèle rugueux en fonction du rapport d'aspect η_n , du débit volume Q et de la pente géométrique i du canal.

Pour un rapport d'aspect imposé, le problème de la détermination de la profondeur normale y_n de l'écoulement a nécessité d'établir la relation liant la largeur b recherchée du canal à celle \bar{b} du modèle rugueux. Ces deux largeurs sont liées entre elles par le facteur de correction des dimensions linéaires ψ dont l'expression a été établie en ayant recours à la relation de *Colebrook-White*. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est déterminé selon la relation implicite [Equation (2.34)]. Au regard de cette relation, nous pouvons relever que le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ dépend de la rugosité relative ε/\bar{D}_h et du nombre de *Reynolds* \bar{R} qui caractérise l'écoulement.

En ce qui concerne la détermination du coefficient de correction des dimensions linéaires $\psi(\varepsilon/\bar{D}_h, \bar{R})$ par application de la relation (2.34), un procédé itératif est nécessaire. Afin de faciliter le calcul du coefficient de correction des dimensions linéaires ψ , une relation explicite a été proposée [relation (2.35)]. Comparée à la relation exacte, la relation approchée (2.35) occasionne une erreur relative maximale de l'ordre de 0,6% qui constitue aussi l'erreur relative maximale sur le calcul des dimensions linéaires recherchées. Une fois \bar{b} et ψ déterminés, la dimension linéaire b recherchée s'obtient simplement par application de la relation fondamentale de la méthode du modèle rugueux $b = \psi\bar{b}$. Enfin, la profondeur normale y_n recherchée s'obtient par application de la relation $y_n = \eta_n b$.

Le calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement a été également effectué en ayant recours à la relation de *Darcy-Weisbach* pour une largeur b du canal imposée. Une nouvelle définition de la conductivité relative à été introduite et qui se rapporte à la largeur b du canal. L'application de la relation de *Darcy-Weisbach* a alors montré que cette conductivité relative était liée au rapport d'aspect $\overline{\eta}_n$ par une équation de troisième degré. La résolution de l'équation du troisième degré appliquée au modèle rugueux permet de déterminer les caractéristiques hydrauliques de ce modèle, en particulier le rapport d'aspect $\overline{\eta}_n$, le diamètre hydraulique \overline{D}_h et le nombre de *Reynolds* \overline{R} . Ces derniers paramètres permettent à leur tour l'évaluation explicite du coefficient de correction des dimensions linéaires ψ et par conséquent la nouvelle valeur de la conductivité relative rapportée à la dimension Linéaire b/ψ . Cette nouvelle valeur de la conductivité relative est alors introduite dans l'équation du troisième degré en $\overline{\eta}_n$, ce qui conduit enfin à la valeur du rapport d'aspect η_n . La profondeur normale y_n recherchée s'obtient par application de la relation $y_n = \eta_n b$.

La détermination de la profondeur normale y_n de l'écoulement a aussi été effectuée en ayant recours à la relation de *Chézy*, pour les deux cas où la largeur b du canal et le rapport d'aspect sont imposés.

Nous avons d'abord mis l'accent sur la difficulté d'application de la relation de *Chézy* en raison du fait que le coefficient C de *Chézy* n'est pas une donnée du problème. Grâce à la méthode du modèle rugueux de référence, nous avons pu établir que le coefficient C était directement lié au coefficient de correction des dimensions linéaires ψ et qu'il pouvait donc être évalué de manière explicite.

Dans le cas où la largeur b du canal est imposée, l'application de la méthode du modèle rugueux à la relation de *Chézy* mène à une équation de troisième degré pour le coefficient de *Chézy* $\overline{C} = 8\sqrt{2g}$ et sous les conditions $b = \overline{b}, Q = \overline{Q}, i = \overline{i}$. Ceci a permis de calculer la conductivité relative \overline{Q}^* de l'écoulement dans le modèle rugueux et déterminer alors le rapport d'aspect $\overline{\eta}_n$.

Ainsi, les paramètres hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux sont alors bien définis, en particulier le périmètre mouillé \overline{P} , le diamètre hydraulique \overline{D}_h et le nombre de Reynolds \overline{R} . Ces paramètres permettent le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ et par suite la dimension linéaire b/ψ . Celle-ci permet à son tour d'évaluer la nouvelle valeur de la conductivité relative et la détermination du rapport d'aspect $\overline{\eta}_n = \eta_n$ de l'écoulement dans le canal considéré. Enfin, la profondeur normale y_n recherchée s'obtient par application de la relation $y_n = \eta_n b$.

La détermination de la profondeur normale y_n par la relation de *Manning* peut être également effectuée en ayant recours à la méthode du modèle rugueux. Nous avons alors pu établir que le coefficient n de *Manning* est étroitement lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ et l'évaluation du coefficient n est alors aisée. L'application de la méthode du modèle rugueux à la relation de *Manning* mène à une équation du troisième degré en $\overline{\eta}_n$, identique à celle que nous avons établie lors de l'application de la relation de *Chézy* et dont les étapes de calcul ont été clairement expliquées précédemment dans le paragraphe II.5.3.

Des exemples pratiques sont présentés pour expliquer le processus de calcul. Les exemples d'application que nous avons proposés ont montré la fiabilité de la méthode du modèle rugueux ainsi que sa simplicité et son efficacité.

CHAPITRE III

APPLICATION A QUELQUES PROFILS DE CANAUX A SURFACE LIBRE

CHAPITRE III

APPLICATION A QUELQUES PROFILS DE CANAUX A SURFACE LIBRE

III.1. INTRODUCTION

La présente partie de notre étude se propose d'appliquer la méthode du modèle rugueux de référence aux canaux à surface libre de forme non rectangulaire. L'objectif principal est de déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans tels canaux.

Le calcul de la profondeur normale sera donc établi pour des canaux à surface libre de forme triangulaire, trapézoïdale et bien d'autres encore.

De nombreux exemples d'application seront présentés pour mieux comprendre les différentes étapes de calcul.

III.2. CANAL A SURFACE LIBRE DE FORME TRIANGULAIRE

III.2.1. *Caractéristiques du modèle rugueux de référence*

Le canal considéré est schématiquement représenté sur la figure 3.1. Il est caractérisé par un débit volume Q écoulé par le canal, la pente longitudinale i , de la rugosité absolue ε caractérisant l'état des parois internes du canal et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Tous les paramètres ainsi indiqués sont connus et constituent les données du problème. Il s'agit alors de dimensionner le canal, ce qui revient à calculer sa profondeur normale y_n .

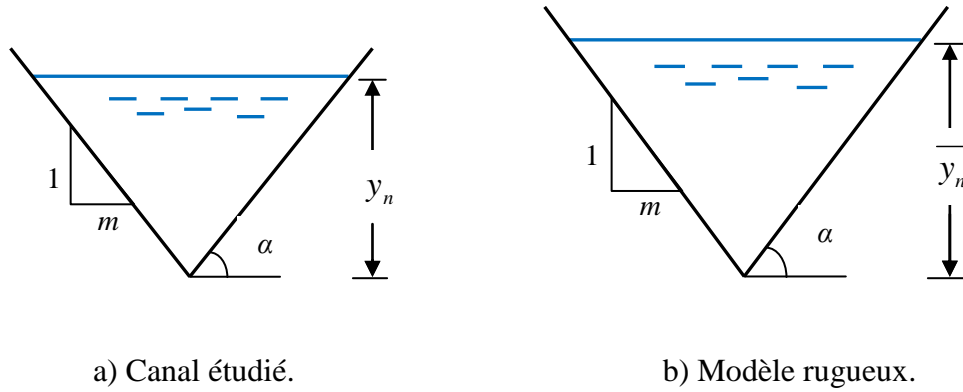


Figure 3.1: Schéma de définition du canal ouvert de forme triangulaire.

D'autre part, on associe au canal considéré un modèle de référence de même forme. Il est caractérisé par la dimension linéaire $\bar{y}_n > y_n$ et par $\bar{m} = m = \cot g(\alpha)$ où α désigne l'angle d'inclinaison des parois latérales du canal par rapport à l'horizontale.

Le modèle rugueux écoule le même débit volume que celui du canal étudié, sous la même pente longitudinale, soit:

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i \quad (3.1)$$

L'aire de la section mouillée du modèle rugueux de référence représenté par la figure 3.1 est:

$$\bar{A} = m \bar{y}_n^2 \quad (3.2)$$

L'expression du périmètre mouillé du modèle rugueux de référence peut également être déduite de la relation (1.60), en y remplaçant P par \bar{P} et y_n par \bar{y}_n , soit:

$$\bar{P} = 2\bar{y}_n \sqrt{1+m^2} \quad (3.3)$$

Le diamètre hydraulique $\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P}$ du modèle rugueux de référence est donc:

$$\bar{D}_h = \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}} \bar{y}_n \quad (3.4)$$

En tenant compte des relations (3.2) et (3.3), la relation (2.11) devient:

$$i = \frac{1}{64g} \frac{\overline{y_n} \sqrt{1+m^2}}{m^3 \overline{y_n}^6} Q^2 \quad (3.5)$$

Soit:

$$\overline{y_n} = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{64m^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (3.6)$$

La relation (3.6) permet ainsi d'évaluer la dimension linéaire $\overline{y_n}$ du modèle rugueux de référence, sachant que les paramètres Q, i et m sont connus. En comparant les relations (3.4) et (3.6), nous pouvons écrire que :

$$\overline{D_h} = \left(\frac{4\sqrt{2}m}{1+m^2} \right)^{2/5} \left(\frac{Q^2}{64gi} \right)^{1/5} \quad (3.7)$$

Le nombre de *Reynolds* \overline{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, selon les relations (2.15), (3.4) et (3.6):

$$\overline{R} = (2048)^{1/5} \left(\frac{m}{1+m^2} \right)^{6/5} \frac{(giQ^3)^{1/5}}{\nu} \quad (3.8)$$

Le nombre de *Reynolds* \overline{R} est donc bien défini, puisque Q, m, i et ν se comptent parmi les paramètres connus du problème.

L'expression de la profondeur normale y_n de l'écoulement est déduite des relations (1.61) et (2.30), soit:

$$\frac{2m}{\sqrt{1+m^2}} y_n = \psi \overline{D_h} \quad (3.9)$$

En fait, deux expressions de cette profondeur normale y_n peuvent être proposées.

La première peut être déduite de la combinaison des relations (2.35) et (3.9), après avoir éliminé le facteur de correction des dimensions ψ , soit :

$$y_n = 1.35 \frac{\sqrt{1+m^2}}{2m} \bar{D}_h \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.10)$$

La relation (3.10) occasionne un écart relatif maximal de 0.6% sur le calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement, qui se réduit à 0.4% pour les valeurs du nombre de Reynolds $\bar{R} > 10^4$. Cet écart est très acceptable pour l'ensemble des applications pratique.

Le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de Reynolds \bar{R} sont respectivement donnés par les relations (3.7) et (3.8). Il est utile de rappeler que \bar{R} peut être également évalué par application de la relation (2.15).

La seconde relation, permettant d'évaluer de manière explicite la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal étudié, peut être déduite des relations (2.34) et (3.9), soit :

$$y_n = \frac{\sqrt{1+m^2}}{2m} \bar{D}_h \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{3.7\psi} + \frac{10.04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.11)$$

En tenant compte de la relation (3.4), la relation (3.11) devient alors:

$$y_n = \bar{y}_n \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{3.7\psi} + \frac{10.04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.12)$$

La relation (3.12) est applicable dans tout le domaine de l'écoulement turbulent. Elle est d'une meilleure précision que la relation (3.10), bien que celle-ci soit largement suffisante.

III.2.2. Etapes de calcul de la profondeur normale

Les étapes suivantes indiquent la voie à suivre pour le calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal triangulaire. Le calcul est tributaire des valeurs des paramètres Q, i, m, ε et ν .

- i. Avec les valeurs connues de Q , i et m , le diamètre hydraulique \overline{D}_h du modèle rugueux de référence est déterminé par application de la relation (3.7).
- ii. Les valeurs connues des paramètres Q , i , m et ν sont introduites dans la relation (3.8) destinée au calcul du nombre de Reynolds \overline{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.
- iii. A partir des valeurs connues de \overline{D}_h , \overline{R} et ε , la relation (3.10) permet le calcul de la profondeur normale recherchée y_n de l'écoulement dans le canal étudié, avec un écart relatif maximal de 0.6%.
- iv. Si une meilleure précision sur le calcul de la profondeur normale recherchée y_n est souhaitée, celle-ci peut alors être évaluée par de la relation (3.12), après avoir déterminé le facteur de correction des dimensions ψ selon la relation (2.34), ainsi que la dimension linéaire \overline{y}_n du modèle rugueux de référence en application de la relation (3.6).

Afin d'illustrer la démarche de calcul que nous venons d'exposer et qui mène au calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal étudié, l'exemple d'application suivant est proposé.

Exemple d'application 3.1

On désire déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme triangulaire représenté par la figure 3.1, en utilisant la relation de *Darcy-Weisbach*.

Les données du problème sont :

$$Q = 2.5 \text{ m}^3 / \text{s}; i = 10^{-3}; \varepsilon = 3.10^{-3} \text{ m}; \alpha = 45^\circ (m = 1); \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

- i. Pour les valeurs données de Q, i et m , le diamètre hydraulique \bar{D}_h du modèle rugueux de référence est selon la relation (3.7):

$$\begin{aligned}\bar{D}_h &= \left(\frac{4\sqrt{2}m}{(1+m^2)} \right)^{2/5} \left(\frac{Q^2}{64gi} \right)^{1/5} = \left(\frac{4\sqrt{2} \times 1}{(1+1^2)} \right)^{2/5} \left(\frac{2.5^2}{64 \times 9.81 \times 0.001} \right)^{1/5} \\ &= 2.40007164 \approx 2.4 \text{ m}\end{aligned}$$

- ii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, selon la relation (3.8) :

$$\begin{aligned}\bar{R} &= (2048)^{1/5} \left(\sqrt{\frac{m}{1+m^2}} \right)^{6/5} \frac{(giQ^3)^{1/5}}{\nu} = (2048)^{1/5} \left(\sqrt{\frac{1}{1+1^2}} \right)^{6/5} \frac{(9.81 \times 0.001 \times 2.5^3)^{1/5}}{10^{-6}} \\ &= 2083271.15\end{aligned}$$

- iii. La profondeur normale y_n est, selon la relation (3.10):

$$\begin{aligned}y_n &= 1.35 \frac{\sqrt{1+m^2}}{2m} \bar{D}_h \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = \\ &1.35 \times \frac{\sqrt{1+1^2}}{2 \times 1} \times 2.40007164 \times \left[-\log \left(\frac{0.003 / 2.40007164}{4.75} + \frac{8.5}{2083271.15} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1.3766521 \approx 1.38 \text{ m}\end{aligned}$$

- iv. Cette étape vise à vérifier la valeur donnée de la pente longitudinale par application de la relation de *Darcy-Weisbach*, pour les valeurs calculées de y_n , soit:

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{1}{2gA^2} Q^2$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (1.59):

$$A = my_n^2 = 1 \times 1.38^2 = 1.9044 \text{ m}^2$$

- Le diamètre hydraulique D_h est:

$$D_h = \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}} y_n = \frac{2 \times 1}{\sqrt{1+1^2}} \times 1.38 = 1.95161472 \text{ m}$$

- Le coefficient de frottement f est évalué par la relation (2.25), soit:

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0.81117582^5}{16} = 0.02195103$$

- La pente longitudinale i est par suite, selon la relation de *Darcy-Weisbach*:

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0.02195103}{1.95161472} \times \frac{2.5^2}{2 \times 9.81 \times 1.9044^2} = 0.00098793 \cong 10^{-3}$$

Il s'agit bien de la valeur donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

- v. Quelle serait la valeur de la profondeur normale y_n , si l'on utilisait la relation (3.12)?

Le calcul doit être mené selon les étapes suivantes:

- La profondeur normale $\overline{y_n}$ de l'écoulement dans le modèle rugueux est par application de la relation (3.6):

$$\overline{y_n} = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{64m^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5}$$

$$\overline{y_n} = \left(\frac{\sqrt{1+1^2}}{64 \times 1^3} \right)^{1/5} \left(\frac{2.5^2}{9.81 \times 0.001} \right)^{1/5} = 1.69710693 \text{ m}$$

- Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est selon la relation (2.34):

$$\begin{aligned}\psi &= 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{R} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.003 / 2.40007164}{4.75} + \frac{8.5}{2083271.15} \right) \right]^{-2/5} = 0.81117582\end{aligned}$$

Ainsi , la relation (3.12) donne:

$$\begin{aligned}y_n &= \overline{y}_n \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{3.7\psi} + \frac{10.04}{\psi^{3/2} R} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1.69710693 \times \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{0.003 / 2.40007164}{3.7 \times 0.81117582} + \frac{10.04}{0.81117582^{3/2} \times 2083271.15} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1.37684181 \approx 1.38 \text{ m}\end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons constater que l'écart relatif entre les valeurs de y_n calculées selon la relation (3.10) que nous avons présentée et la relation (3.12) est de:

$$\Delta y_n / y_n = 100 \times (1.3768418 - 1.3766521) / 1.3768418 = 0.01\%$$

Nous pouvons alors conclure, tenant compte du faible écart relatif obtenu, que les deux relations aboutissent pratiquement au même résultat.

III.2.3. Calcul de la profondeur normale par la relation de Chézy

La relation de *Chézy* peut être utilisée pour déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans un canal de forme triangulaire. Pour calculer y_n par la relation de *Chézy*, il est nécessaire de connaître le débit volume Q , la pente géométrique i , m et enfin le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. Cependant, c'est ce coefficient de résistance qui n'est pas connu en pratique et il n'existe aucune relation explicite qui permet de l'évaluer. En pratique, seule la valeur de la rugosité absolue, liée à la nature du matériau constituant la paroi interne du canal, peut être définie et bien déterminée. Cette impossibilité de disposer de la valeur du coefficient de résistance C de *Chézy* a été levée au cours du chapitre II, puisque nous avons établi la relation 2.49 qui lie le coefficient C au facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

C'est donc grâce à la méthode du modèle rugueux de référence que le coefficient de résistance C a pu être évalué, lors de la résolution du problème de dimensionnement du canal. Pour le calcul de la profondeur normale, le coefficient de résistance C n'est pas une donnée du problème et il est, à juste titre, légitime de se demander si le coefficient C peut aussi être évalué en ayant recours à la méthode du modèle rugueux.

Au cours du chapitre I, nous avons établi la relation (1.62) qui regroupe les paramètres de l'écoulement uniforme par l'usage de la formule de *Chézy*.

Appliquons la relation (1.62) au modèle rugueux, sous les conditions suivantes:

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i \quad \text{Ceci implique que: } \bar{y}_n \neq y_n$$

Nous obtenons alors:

$$\bar{y}_n = \left(\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q}{C\sqrt{i}} \right)^{2/5} \quad (3.13)$$

En tenant compte de la relation (2.48), la relation ci-dessus devient alors :

$$\bar{y}_n = \left(\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q}{8\sqrt{2gi}} \right)^{2/5}$$

Ou bien:

$$\bar{y}_n = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{64m^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5} \quad (3.14)$$

Il faut noter c'est que la relation (3.14) est identique à la relation (3.6) obtenue par la transformation de la relation de *Darcy-Weisbach*. Ceci revient à dire que le calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal étudié par application de la relation de *Chézy* s'effectue selon les mêmes étapes que celles indiquées dans le paragraphe III.2.2.

Afin de mieux apprécier les étapes de calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme traingulaire par l'usage de la relation de *Chézy*, considérons alors l'exemple d'application suivant.

Exemple d'application 3.2.

Reprenons l'exemple d'application 3.1 et calculons le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* ainsi que la profondeur normale y_n de l'écoulement.

Les données du problème sont :

$$Q = 2.5 \text{ m}^3 / \text{s}; i = 10^{-3}; \varepsilon = 3.10^{-3} \text{ m}; \alpha = 45^\circ (m = 1); \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

- La profondeur normale \bar{y}_n de l'écoulement dans le modèle rugueux est:

$$\bar{y}_n = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{64m^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} = \left(\frac{\sqrt{1+1^2}}{64 \times 1^3} \right)^{1/5} \left(\frac{2.5^2}{9.81 \times 0.001} \right)^{1/5} = 1.69710693 \text{ m}$$

- Selon la relation (3.4), le diamètre hydraulique \bar{D}_h du modèle rugueux de référence est:

$$\bar{D}_h = \frac{2m}{\sqrt{1+m^2}} \bar{y}_n = \frac{2 \times 1}{\sqrt{1+1^2}} \times 1.69710693 = 2.40007164 \approx 2.4 \text{ m}$$

- Le périmètre mouillé \bar{P} dans le modèle rugueux est:

$$\bar{P} = 2\bar{y}_n \sqrt{1+m^2} = 2 \times 1.69710693 \times \sqrt{1+1^2} = 4.80014327 \text{ m}$$

- Le nombre de *Reynolds* \bar{R} est, en vertu de la relation (2.15) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}\nu} = \frac{4 \times 2.5}{4.80014327 \times 10^{-6}} = 2083271.15$$

- Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite, selon la relation (2.35):

$$\psi = 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.003 / 2.40007164}{4.75} + \frac{8.5}{2083271.15} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 0.81117582$$

- Selon *Achour et Bedjaoui* (2006a), le coefficient de résistance C de *Chézy* peut s'exprimer par :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{3.7\psi} + \frac{10.04}{\psi^{3/2}\overline{R}} \right)$$

$$C = -4 \times \sqrt{2 \times 9.81} \times \log \left(\frac{0.003 / 2.40007164}{3.7 \times 0.81117582} + \frac{10.04}{0.81117582^{3/2} \times 2083271.15} \right)$$

$$= 59.7726341$$

- vi. La profondeur normale y_n est, selon la relation (1.62):

$$y_n = \left(\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q}{C\sqrt{i}} \right)^{2/5} = \left(\frac{2\sqrt{1+1^2}}{1^3} \right)^{1/5} \left(\frac{2.5}{59.7726341 \times \sqrt{0.001}} \right)^{2/5}$$

$$= 1.37684181 \approx 1.38\text{m}$$

Il s'agit bien la valeur de y_n que nous avons déjà calculée au cours de l'exemple d'application 3.1.

Exemple d'application 3.3.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.1, soient:

$$Q = 2.5\text{m}^3 / \text{s}; i = 10^{-3}; \varepsilon = 3.10^{-3}\text{m}; \alpha = 45^\circ (m = 1); \nu = 10^{-6}\text{m}^2 / \text{s}$$

Il s'agit de calculer la valeur de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme triangulaire étudié en ayant recours à la relation de *Manning*.

i. Selon la formule de *Manning*, la profondeur normale y_n est par suit:

$$y_n = \left(\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m^{5/2}} \right)^{1/4} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8}$$

Ainsi, en absence de la valeur coefficient de résistance n de *Manning*, la relation précédente ne permet pas le calcul de la profondeur normale y_n .

ii. Appliquons la relation précédente au modèle rugueux, sous les conditions suivantes:

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i \quad \text{Ceci implique nécessairement que: } \bar{y}_n \neq y_n$$

Nous obtenons alors:

$$\bar{y}_n = \left(\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m^{5/2}} \right)^{1/4} \left(\frac{\bar{n}Q}{\sqrt{i}} \right)^{3/8}$$

Rappelons ici que le coefficient \bar{n} est le coefficient de *Manning* pour l'écoulement dans le modèle rugueux de référence et qu'il est régi par la relation (2.66), soit.

$$\bar{n} = \frac{\bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}}$$

Selon la relation (3.4), le rayon hydraulique \bar{R}_h dans le modèle rugueux s'écrit :

$$\bar{R}_h = \bar{D}_h / 4 = \frac{m}{2\sqrt{1+m^2}} \bar{y}_n$$

En tenant compte de ces relations, la relation ci-dessus devient alors:

$$\bar{y}_n = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{64m^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{2/5}$$

iii. Les données de problème sont telles que:

$$\bar{y}_n = \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{64m^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} = \left(\frac{\sqrt{1+1^2}}{64 \times 1^3} \right)^{1/5} \left(\frac{2.5^2}{9.81 \times 0.001} \right)^{1/5} = 1.69710693 \text{ m}$$

iv. Par suite, les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence sont :

- $\bar{R}_h = \bar{D}_h / 4 = \frac{m}{2\sqrt{1+m^2}} \bar{y}_n = \frac{1}{2 \times \sqrt{1+1^2}} \times 1.69710693 = 0.60001791 \text{ m}$

- $\bar{P} = 2\bar{y}_n \sqrt{1+m^2} = 2 \times 1.69710693 \times \sqrt{1+1^2} = 4.80014327 \text{ m}$

- $\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 2.5}{4.80014327 \times 10^{-6}} = 2083271.15$

- Le facteur de correction ψ des dimensions linéaires est :

$$\psi = 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.003 / 2.40007164}{4.75} + \frac{8.5}{2083271.15} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 0.81117582$$

v. Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique $\bar{R}_h = \bar{D}_h / 4 = 0.60001791 \text{ m}$, appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de Manning, soit:

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{1/6}}{8\sqrt{2g}} = \frac{0.81117582^{8/3} \times 0.60001791^{1/6}}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}} = 0.01483296$$

vi. La profondeur normale y_n est selon la relation (1.63):

$$y_n = \left(\frac{2\sqrt{1+m^2}}{m^{5/2}} \right)^{1/4} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8} = \left(\frac{2\sqrt{1+1^2}}{1^{5/2}} \right)^{1/4} \left(\frac{0.01483296 \times 2.5}{\sqrt{0.001}} \right)^{3/8}$$

$$= 1.3766521 \text{ m}$$

Il s'agit bien de la même valeur de y_n calculée à l'étape iii de l'exemple d'application 3.1.

III.3. CANAL A SURFACE LIBRE DE FORME TRIANGULAIRE A FOND ARRONDI

III.3.1. Caractéristiques du canal

Le canal considéré est schématiquement représenté sur la figure 3.2. Il est caractérisé par la dimension linéaire horizontale r , par les dimensions linéaires verticales y et y_n , ainsi par l'angle d'inclinaison θ des parois latérales du canal par rapport à l'horizontale.

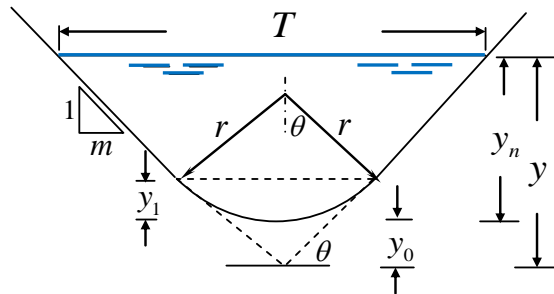


Figure 3.2: Schéma de définition du canal ouvert de forme triangulaire à fond arrondi.

Le canal représenté par la figure 3.2 écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν , sous une pente géométrique i . Ses parois internes sont caractérisées par la rugosité absolue ε .

La figure 3.2 permet géométriquement d'écrire que :

$$y_0 = r \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} - 1 \right) \quad (3.15)$$

Où: $m = \cot g(\theta)$

Ainsi:

$$y_1 = r(1 - \cos \theta) \quad (3.16)$$

Nous pouvons montrer que l'aire de la section mouillée A du canal étudié s'écrit:

$$A = my^2 - m(y_0 + y_1) + r^2(\theta - \sin \theta \cos \theta) \quad (3.17)$$

Où: $\sin \theta = 1/\sqrt{1+m^2}$ et $\cos \theta = m/\sqrt{1+m^2}$.

La relation précédente s'écrit alors:

$$A = mr^2(\eta^2 - \chi_1) \quad (3.18)$$

Où:

$$\eta = y/r \quad (3.19)$$

et

$$\chi_1 = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) \quad (3.20)$$

Il est également aisé de montrer que le périmètre mouillé P du canal s'écrit :

$$P = 2y\sqrt{1+m^2} - 2(y_0 + y_1)\sqrt{1+m^2} + 2r\theta \quad (3.21)$$

Ou bien :

$$P = 2r\sqrt{1+m^2}(\eta - \chi_2) \quad (3.22)$$

Où:

$$\chi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{1}{m} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) \quad (3.23)$$

III.3.2. Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux de référence du canal étudié est représenté schématiquement sur la figure 3.3. Il est caractérisé par $\bar{r} = r$, $\bar{y}_n > y_n$, m , le paramètre de forme $\bar{\eta}_n = \bar{y}_n / r \neq \eta_n = y_n / r$, la pente géométrique $\bar{i} = i$ et le débit volume $\bar{Q} = Q$.

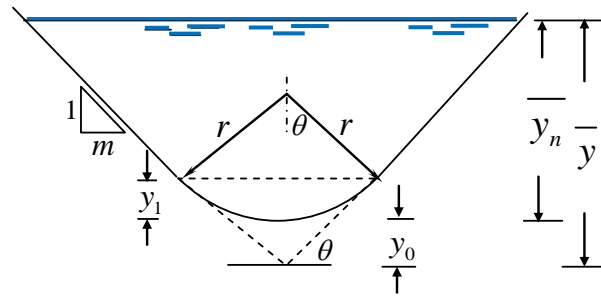


Figure 3.3: Schéma de définition du modèle rugueux de référence du canal de forme triangulaire à fond arrondi.

En outre, les dimensions du modèle rugueux de référence sont telles que:

$$\bar{y}_n \geq y_1 = r(1 - \cos \theta)$$

Ou bien:

$$\bar{y}_n \geq r \left(1 - \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$

L'aire de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux de référence est:

$$\bar{A} = mr^2 \left(\bar{\eta}^2 - \chi_1 \right) \tag{3.24}$$

Où:

$$\bar{\eta} = \bar{y} / r$$

Le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux s'écrit:

$$\bar{P} = 2r\sqrt{1+m^2}(\bar{\eta} - \chi_2) \quad (3.25)$$

En insérant les relations (3.24) et (3.25) dans la relation (2.11), il vient que:

$$\bar{Q}^{*2/3} = \frac{(\bar{\eta}^{-2} - \chi_1)}{(\bar{\eta} - \chi_2)^{1/3}} \quad (3.26)$$

Où:

$$\bar{Q}^* = \frac{(1+m^2)^{1/4}}{8m^{3/2}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gir^5}} \right) \quad (3.27)$$

Posons, pour simplifier l'écriture :

$$z = \bar{\eta}^{-2} - \chi_1 \quad (3.28)$$

La relation (3.26) permet de déduire qu:

$$z = \bar{Q}^{*2/3} (\sqrt{z + \chi_1} - \chi_2)^{1/3} \quad (3.29)$$

Rappelons que les paramètres χ_1 et χ_2 ne dépendent que de m . La relation (3.29) indique clairement que la variable z et par conséquent le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ du modèle rugueux de référence dépend exclusivement de m et \bar{Q}^* . Bien que la relation (3.29) soit implicite vis-à-vis de la variable z . A partir des valeurs connues de m et \bar{Q}^* , il est donc possible de calculer le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ du modèle rugueux de référence du canal étudié.

La méthode de résolutions de la relation implicite (3.29) est présentée dans le paragraphe suivant.

III.3.3. Calcul du rapport d'aspect $\bar{\eta}$ du modèle rugueux de référence

Le calcul du rapport d'aspect $\bar{\eta}$ du modèle rugueux de référence, par application de la relation implicite (3.29), peut être effectué selon la méthode numérique.

Le processus de calcul est itératif et s'opère sur la relation (3.29) après avoir choisi une première valeur de z .

Admettons que cette première valeur de z soit z_0 . Nous obtenons alors z_1 tel que :

$$z_1 = \bar{Q}^{*2/3} \left(\sqrt{z_0 + \chi_1 - \chi_2} \right)^{1/3}$$

$$z_2 = \bar{Q}^{*2/3} \left(\sqrt{z_1 + \chi_1 - \chi_2} \right)^{1/3} \dots \text{Et ainsi de suite}$$

Le processus de calcul s'arrête lorsque z_i et z_{i+1} sont suffisamment proches. Il est bien évident que la rapidité de convergence du processus itératif ainsi décrit dépend fortement de la valeur z_0 initialement choisie. Nous suggérons de calculer la valeur de z_0 au lieu de la choisir de manière arbitraire. Le calcul a montré que la valeur la plus appropriée de z_0 est χ_1 .

Cette démarche permet d'évaluer z avec une erreur relative extrêmement faible, à l'issue de la huitième étape de calcul.

Une fois la valeur finale de z adoptée, le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ du modèle rugueux recherché est déduit de la relation (3.28), soit:

$$\bar{\eta} = \sqrt{z + \chi_1} \tag{3.30}$$

Par conséquent, le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n = \bar{y}_n / r$ est exprimée par:

$$\bar{\eta}_n = \bar{\eta} - y_0 / r \tag{3.31}$$

III.3.4. Etapes de calcul de la profondeur normale par la relation de Darcy-Weisbach

Afin de calculer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal considéré, les étapes suivantes sont recommandées, à condition que les paramètres Q , r , i , m , ε et ν soient donnés.

- i. La première étape consiste à évaluer la conductivité relative \bar{Q}^* du modèle rugueux de référence par application de l'équation (3.27), pour les valeurs connues de Q , r , i et m .
- ii. Pour la valeur connue de m , appliquons respectivement les relations (3.20) et (3.23) pour calculer tour à tour les paramètres χ_1 et χ_2 .
- iii. Puisque les valeurs de \bar{Q}^* , χ_1 et χ_2 sont maintenant connues, appliquons la relation (3.29) pour évaluer la valeur de z .
- iv. Avec la valeur ainsi calculée de z , appliquons la relation (3.30) pour évaluer le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux.
- v. L'air de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux de référence est déterminée par application de la relation (3.24), pour les valeurs connues de r , $\bar{\eta}$, χ_1 et m .
- vi. Les valeurs connues des paramètres r , $\bar{\eta}$, χ_2 et m sont introduites dans la relation (3.25) destinée au calcul le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux.
- vii. Le diamètre hydraulique \bar{D}_h du modèle rugueux de référence est déterminé par application de la relation $\bar{D}_h = \bar{A} / \bar{P}$.
- viii. Connaissant les valeurs de Q , \bar{P} et ν , la relation (2.15) permet de calculer la valeur du nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.

- ix. A partir des valeurs connues de ε / \bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- x. Une fois la valeur de ψ déterminée, il faut maintenant affecter à l'écoulement dans le modèle rugueux la dimension linéaire $\bar{r} = r / \psi$, En introduisant cette valeur de \bar{r} dans l'équation (3.27), on obtient une nouvelle valeur de la conductivité relative:

$$\bar{Q}^* = \frac{(1 + m^2)^{1/4}}{8m^{3/2}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi(r/\psi)^5}} \right)$$

- xi. Cette nouvelle valeur de la conductivité relative permet de calculer la valeur de z , selon la relation (3.29).
- xii. En introduisant cette valeur de z dans l'équation (3.30), on obtient le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux égal au rapport d'aspect η du canal.
- xiii. Connaissant les valeurs de η et m , la valeur recherchée du rapport d'aspect η_n est déduite par application de la relation (3.31).
- xiv. Une fois le rapport d'aspect η_n déterminé, la valeur de la profondeur normale y_n recherchée est déduite de la relation $y_n = \eta_n r$.

Afin d'illustrer la démarche de calcul que nous venons d'exposer et qui mène au calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement, l'exemple d'application suivant est proposé.

Exemple d'application 3.4.

On souhaite déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme triangulaire à fond arrondi étudié. Pour les données suivantes:

$$Q = 7 \text{ m}^3 / \text{s}; r = 0.8 \text{ m}; i = 2 \times 10^{-3}; \varepsilon = 10^{-3} \text{ m}; \theta = 45^\circ (m = 1); \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

i. Selon la relation (3.27), la conductivité relative \bar{Q}^* est:

$$\bar{Q}^* = \frac{(1+m^2)^{1/4}}{8m^{3/2}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gir^5}} \right) = \frac{(1+1^2)^{1/4}}{8 \times 1^{3/2}} \left(\frac{7}{\sqrt{9.81 \times 0.002 \times 0.8^5}} \right) = 12.9775014$$

ii. Les données du problème permettent de calculer les paramètres suivants :

$$\chi_1 = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) = \frac{1}{1} \times \left(\frac{1}{1} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \right) = 0.21460184$$

$$\chi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{1}{m} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \times \left(\frac{1}{1} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \right) = 0.15174641$$

iii. En insérant la valeur de \bar{Q}^* dans la relation (3.29), et admettons que cette première valeur de z soit $z_o = \chi_1$ pour le processus de calcul itératif. La valeur finale de z est telle que:

$$z_7 \cong z_8 = z = 7.643441962$$

iv. Le paramètre $\bar{\eta}$ est, selon la relation (3.30) :

$$\bar{\eta} = \sqrt{z + \chi_1} = \sqrt{7.643441962 + 0.21460184} = 2.80322026$$

v. L'aire de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux de référence est:

$$\bar{A} = mr^2 (\bar{\eta}^2 - \chi_1) = 1 \times 0.8^2 \times (2.80322026^2 - 0.21460184) = 4.89180286 \text{ m}^2$$

vi. Le périmètre mouillé \bar{P} est:

$$\bar{P} = 2r\sqrt{1+m^2} (\bar{\eta} - \chi_2) = 2 \times 0.8 \times \sqrt{1+1^2} \times (2.80322026 - 0.15174641) = 5.99960043 \text{ m}$$

Ainsi, le diamètre hydraulique \bar{D}_h est:

$$\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}} = 4 \times \frac{4.89180286}{5.99960043} = 3.2614191 \text{ m}$$

- vii. Le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 7}{5.99960043 \times 10^{-6}} = 4666977.467$$

- viii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\begin{aligned} \psi &= 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.003 / 3.2614191}{4.75} + \frac{8.5}{4666977.467} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0.76198377 \end{aligned}$$

- ix. Si l'on affectait au modèle rugueux de référence la dimension linéaire $r / \psi = 0.8 / 0.76198377$, alors le paramètre de forme $\bar{\eta}$ serait égal au paramètre de forme η . Celui-ci est donné par la relation (2.30), pour le débit relatif \bar{Q}^* telque:

$$\begin{aligned} \bar{Q}^* &= \frac{(1+m^2)^{1/4}}{8m^{3/2}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}(r/\psi)^5} \right) = \frac{(1+1^2)^{1/4}}{8 \times 1^{3/2}} \left(\frac{7}{\sqrt{9.81 \times 0.002 \times (0.8/0.76198377)^5}} \right) \\ &= 6.57741714 \end{aligned}$$

- x. En insérant la nouvelle valeur de \bar{Q}^* dans la relation (3.29), soit:

$$z_7 \cong z_8 = z = 4.42451725$$

Ainsi:

$$\bar{\eta} = \eta = \sqrt{z + \chi_1} = \sqrt{4.42451725 + 0.21460184} = 2.153861436$$

- xi. Le paramètre de forme η_n est par suite:

$$\eta_n = \eta - \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} - 1 \right) = 2.153861436 - \left(\frac{\sqrt{1+1^2}}{1} - 1 \right) = 1.739647874$$

La valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc:

$$y_n = \eta_n r = 1.739647874 \times 0.8 = 1.3917183 \text{ m}$$

- xii. La vérification des calculs peut être également effectuée en calculant le débit volume Q par application de la relation de *Chézy*.

Le débit volume selon *Chézy* s'exprime par la relation (1.13), soit :

$$Q = CA\sqrt{R_h i}$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (3.18):

$$A = mr^2(\eta^2 - \chi_1) = 1 \times 0.8^2 \times (2.153861436^2 - 0.214601837) = 2.83169104 \text{ m}^2$$

- Le périmètre mouillé P est :

$$P = 2r\sqrt{1+m^2}(\eta - \chi_2) = 2 \times 1 \times \sqrt{1+1^2} \times (2.153861436 - 0.151746414) = 4.53026915 \text{ m}$$

- Le rayon hydraulique R_h est:

$$R_h = \frac{A}{P} = 0.62506022 \text{ m}$$

- Le coefficient de résistance de *Chézy*, C est évalué par la relation (2.49), soit:

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}}{0.76198377^{5/2}} = 69.9157766$$

Ainsi, le débit volume Q serait, selon *Chézy*:

$$Q = CA\sqrt{R_h i} = 0.76198377 \times 2.83169104 \times \sqrt{0.62506022 \times 0.001} = 6.999982938 \approx 7 \text{ m}^3/\text{s}$$

Il s'agit bien de la valeur donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

Exemple d'application 3.5.

Reprenons l'exemple d'application 3.4 et recherchons la valeur de la profondeur normale y_n de l'écoulement pour les données suivantes:

$$Q = 7m^3 / s; r = 0.8m; i = 2 \times 10^{-3}; \varepsilon = 0; \theta = 45^\circ (m = 1); \nu = 10^{-6} m^2 / s$$

i. La conductivité relative \bar{Q}^* a déjà été calculée et vaut :

$$\bar{Q}^* = \frac{(1+m^2)^{1/4}}{8m^{3/2}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gir^5}} \right) = \frac{(1+1^2)^{1/4}}{8 \times 1^{3/2}} \left(\frac{7}{\sqrt{9.81 \times 0.002 \times 0.8^5}} \right) = 12.9775014$$

ii. Les paramètres χ_1 et χ_2 sont tels que:

$$\chi_1 = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) = \frac{1}{1} \times \left(\frac{1}{1} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \right) = 0.21460184$$

$$\chi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{1}{m} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \times \left(\frac{1}{1} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \right) = 0.15174641$$

iii. Ainsi, la valeur finale de z est telle que:

$$z_7 \cong z_8 = z = 7.643441962$$

Le paramètre $\bar{\eta}$ est alors :

$$\bar{\eta} = \sqrt{z + \chi_1} = \sqrt{7.643441962 + 0.21460184} = 2.80322026$$

iv. Le périmètre mouillé \bar{P} est:

$$\bar{P} = 2r\sqrt{1+m^2}(\bar{\eta} - \chi_2) = 2 \times 0.8 \times \sqrt{1+1^2} \times (2.80322026 - 0.15174641) = 5.99960043 \text{ m}$$

Valeur déjà calculée lors de l'exemple d'application 3.4.

- v. De même que le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence a été évalué à:

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 7}{5.99960043 \times 10^{-6}} = 4666977.467$$

- vi. Le facteur de correction ψ des dimensions linéaires est alors:

$$\psi = 1.35 \left[-\log\left(\frac{8.5}{\bar{R}}\right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log\left(\frac{8.5}{4666977.467}\right) \right]^{-2/5} = 0.67108976$$

- vii. Si l'on affectait au modèle rugueux la dimension linéaire:

$$\bar{r} = r/\psi = 0.8/0.67108976 = 1.19209091$$

Alors la relation (2.30) donnerait une valeur de $\bar{\eta}$ égale à celle de η dans le canal étudié.

Cette valeur de $\bar{\eta} = \eta$ doit être calculée avec la conductivité relative:

$$\begin{aligned} \bar{Q}^* &= \frac{(1+m^2)^{1/4}}{8m^{3/2}} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}(r/\psi)^5} \right) = \frac{(1+1^2)^{1/4}}{8 \times 1^{3/2}} \left(\frac{7}{\sqrt{9.81 \times 0.002 \times (0.8/0.67108976)^5}} \right) \\ &= 4.787872842 \end{aligned}$$

- vi. En insérant la nouvelle valeur de \bar{Q}^* dans la relation (3.29), soit:

$$z_7 \cong z_8 = z = 3.427640455$$

Ainsi:

$$\bar{\eta} = \eta = \sqrt{z + \chi_1} = \sqrt{3.427640455 + 0.21460184} = 1.908465952$$

- vii. Le paramètre de forme η_n est par suite:

$$\eta_n = \eta - \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} - 1 \right) = 1.908465952 - \left(\frac{\sqrt{1+1^2}}{1} - 1 \right) = 1.49425239$$

La valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc :

$$y_n = \eta_n r = 1.49425239 \times 0.8 = 1.195401912 \approx 1.2 \text{ m}$$

viii. Vérifions la validité de nos calculs en déterminant la pente longitudinale i du canal pour le rapport d'aspect η calculé, selon *Darcy-Weisbach*.

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{1}{2gA^2} Q^2$$

- Les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le canal considéré sont par suite:
 - $A = mr^2(\eta^2 - \chi_1) = 1 \times 0.8^2 \times (1.908465952^2 - 0.214601837) = 2.193689891 \text{ m}^2$
 - $P = 2r\sqrt{1+m^2}(\eta - \chi_2) = 2 \times 1 \times \sqrt{1+1^2} \times (1.908465952 - 0.151746414) = 3.975002554 \text{ m}$
 - $D_h = 4 \frac{A}{P} = 4 \times \frac{2.193689891}{3.975002554} = 2.20748526 \text{ m}$
 - $f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0.67108976^5}{16} = 0.00850713$

La pente longitudinale i du canal serait donc égal à:

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0.00850713}{2.20748526} \times \frac{7^2}{2 \times 9.81 \times 2.19368989^2} = 0.00200001 \cong 2.10^{-3}$$

Nous retrouvons ainsi la valeur de i donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

III.3.5. Calcul de la profondeur normale par la relation de Manning

III.3.5.1. La dimension linéaire r est imposée

La formule de *Manning* exprime le débit volume Q sous la forme:

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \sqrt{i}$$

Où: n ($m^{-1/3} s$) est le coefficient de *Manning*.

En considérant que le rayon hydraulique $R_h = A/P$, la formule de *Manning* devient:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} \sqrt{i} \quad (3.32)$$

L'aire de la section mouillée ainsi que le périmètre mouillé sont donnés respectivement par les relations (3.18) et (3.22). En tenant compte de ces relations, la formule de *Manning* prend la forme suivante :

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[mr^2(\eta^2 - \chi_1)]^{5/3}}{[2r\sqrt{1+m^2}(\eta - \chi_2)]^{2/3}} \sqrt{i} \quad (3.33)$$

Nous pouvons tirer de la relation (3.33) le paramètre adimensionnel ou conductivité relative:

$$Q_M^* = \frac{(2\sqrt{1+m^2})^{2/3}}{m^{5/3}} \left(\frac{nQ}{r^{8/3}\sqrt{i}} \right) \quad (3.34)$$

En combinant les relations (3.33) et (3.34), il vient que :

$$Q_M^{*3/5} = \frac{(\eta^2 - \chi_1)}{(\eta - \chi_2)^{2/5}} \quad (3.35)$$

Le problème posé consiste donc à déterminer le rapport d'aspect η_n , ce qui revient à évaluer le rapport d'aspect η et par suite η_n . Lorsque l'on examine la forme de la relation (3.35), il apparaît que le rapport d'aspect η ne peut être déterminé de manière explicite.

En posant :

$$q = \eta^2 - \chi_1 \quad (3.36)$$

Ou bien:

$$\eta = \sqrt{q + \chi_1} \quad (3.37)$$

La relation (3.35) permet d'écrire que:

$$q = Q_M^{*3/5} \left(\sqrt{q + \chi_1} - \chi_2 \right)^{2/5} \quad (3.38)$$

En pratique, les paramètres connus du problème sont la dimension linéaire r , la rugosité absolue ε , m , la pente longitudinale i du canal, le débit volume Q et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Le coefficient n de *Manning* n'est donc pas une donnée du problème et, de ce fait, la conductivité relative Q_M^* de la relation (3.34) ne peut être évaluée.

Appliquons la relation (3.32) au modèle rugueux, sous les conditions suivantes:

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i; \bar{r} = r$$

Ceci implique nécessairement que: $\bar{\eta} \neq \eta$

Nous obtenons alors:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{\bar{A}^{-5/2}}{\bar{P}^{3/2}} \sqrt{\bar{i}}$$

En tenant compte des relations (3.24), (3.25) et (2.66) et de fait que le rayon hydraulique $\bar{R}_h = \bar{A} / \bar{P}$, la relation précédente s'écrit :

$$Q = 8\sqrt{2g} \frac{\left[mr^2(\bar{\eta}^2 - \chi_1) \right]^{3/2}}{\left[2r\sqrt{1+m^2(\bar{\eta} - \chi_2)} \right]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (3.39)$$

Ou bien

$$\bar{Q}_M^{*2/3} = \frac{(\bar{\eta}^2 - \chi_1)}{(\bar{\eta} - \chi_2)^{1/3}} \quad (3.40)$$

Il faut noter c'est que la relation (3.40) est identique à la relation (3.26) obtenue par la transformation de la relation de *Darcy-Weisbach*. Ceci revient à dire que le calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal étudié par application de la relation de *Manning* s'effectue selon les mêmes étapes que celles indiquées dans le paragraphe **III.3.4**.

Etapes de calcul de la profondeur normale

Pour résoudre le problème de la détermination de la profondeur normale y_n par l'usage de la relation de *Manning* pour une valeur imposée de la dimension linéaire r , les étapes suivantes sont recommandées, à condition que les paramètres Q , r , i , m , ε et ν soient donnés:

- i. La première étape consiste à évaluer la conductivité relative \bar{Q}^* du modèle rugueux de référence par application de l'équation (3.27), pour les valeurs connues de Q , r , i et m .
- ii. Pour la valeur connue de m , appliquons respectivement les relations (3.20) et (3.23) pour calculer tour à tour les paramètres χ_1 et χ_2 .
- iii. Puisque les valeurs de \bar{Q}^* , χ_1 et χ_2 sont maintenant connues, appliquons la relation (3.29) pour évaluer la valeur de z .

- iv. Avec la valeur ainsi calculée de z , appliquons la relation (3.30) pour évaluer le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux.
- v. Avec les valeurs connues de $r, \bar{\eta}, \chi_1$ et m , l'aire de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux de référence est déterminée par application de la relation (3.24).
- vi. Les valeurs connues des paramètres $r, \bar{\eta}, \chi_2$ et m sont introduites dans la relation (3.25) destinée au calcul le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux.
- vii. Le diamètre hydraulique \bar{D}_h du modèle rugueux de référence est déterminé par application de la relation $\bar{D}_h = \bar{A} / \bar{P}$.
- viii. Connaissant les valeurs de Q, \bar{P} et ν , la relation (2.15) permet de calculer la valeur du nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.
- ix. A partir des valeurs connues de ε / \bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- x. Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique \bar{R}_h , appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de *Manning*, soit:

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{1/6}}{8\sqrt{2g}}$$
- xi. Une fois la valeur du coefficient de n déterminée, calculons alors la conductivité relative Q_m^* dans le canal étudié, en application de la relation (3.34).
- xii. Cette nouvelle valeur de la conductivité relative permet de calculer, selon la relation (3.38) la valeur de q en adoptant le processus itératif.

- xiii. Avec la valeur connue de q , l'application de la relation (3.37), conduit à la valeur du rapport d'aspect η .
- xiv. Le rapport d'aspect η_n est déterminé selon la relation (3.31) pour les valeurs connues de $\eta = \bar{\eta}$, de m et de r .
- xv. Une fois la valeur de η_n déterminée, la profondeur normale recherchée y_n est directement déduite de la relation $y_n = \eta_n r$.

Afin de mieux apprécier les étapes de calcul ci-dessus indiquées de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme triangulaire à fond arrondi par l'usage de la relation de *Manning*, considérons alors l'exemple d'application suivant. Il s'agit de l'exemple d'application 3.4 dont nous reprenons les données par souci de comparaison.

Exemple d'application 3.6.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.4, soient:

$$Q = 7 \text{ m}^3 / \text{s}; r = 0.8 \text{ m}; i = 2 \times 10^{-3}; \varepsilon = 10^{-3} \text{ m}; \theta = 45^\circ (m = 1); \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Il s'agit de déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme triangulaire à fond arrondi, en ayant recours à la formule de *Manning*. Il faut noter que le coefficient de résistance à l'écoulement n de *Manning* n'est pas une donnée du problème. Seule la rugosité absolue ε , liée à la nature du matériau constituant la paroi interne du canal, est connue.

- i. Le calcul de la conductivité relative \bar{Q}^* , de χ_1 et de χ_2 est le même que celui effectué au cours des étapes *i* et *ii* de l'exemple d'application (3.4). Nous obtenons :

$$\bar{Q}^* = \frac{(1+m^2)^{1/4}}{8m^{3/2}} \left(\frac{Q}{\sqrt{g}ir^5} \right) = \frac{(1+1^2)^{1/4}}{8 \times 1^{3/2}} \left(\frac{7}{\sqrt{9.81 \times 0.002 \times 0.8^5}} \right) = 12.9775014$$

$$\chi_1 = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) = \frac{1}{1} \times \left(\frac{1}{1} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \right) = 0.21460184$$

$$\chi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{1}{m} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \times \left(\frac{1}{1} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \right) = 0.15174641$$

ii. La valeur finale de z a déjà été calculée et vaut :

$$z_7 \cong z_8 = z = 7.643441962$$

Ainsi, le paramètre $\bar{\eta}$ est alors :

$$\bar{\eta} = \sqrt{z + \chi_1} = \sqrt{7.643441962 + 0.21460184} = 2.80322026$$

iii. Par suite, les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence sont :

$$\bullet \bar{A} = mr^2 (\bar{\eta}^2 - \chi_1) = 1 \times 0.8^2 \times (2.80322026^2 - 0.21460184) = 4.89180286 \text{ m}^2$$

$$\bullet \bar{P} = 2r\sqrt{1+m^2} (\bar{\eta} - \chi_2) = 2 \times 0.8 \times \sqrt{1+1^2} \times (2.80322026 - 0.15174641) = 5.99960043 \text{ m}$$

$$\bullet \bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}} = 4 \times \frac{4.89180286}{5.99960043} = 3.2614191 \text{ m}$$

$$\bullet \bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 7}{5.99960043 \times 10^{-6}} = 4666977.467$$

iv. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est:

$$\psi \cong 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 3.2614191}{4.75} + \frac{8.5}{4666977.467} \right) \right]^{-2/5} = 0.76198377$$

- v. Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique $\overline{R}_h = \overline{D}_h / 4 = 0.815354775 \text{ m}$.

Appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de *Manning*, soit:

$$n = \frac{\psi^{8/3} \overline{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} = \frac{0.76198377^{8/3} \times 0.815354775^{1/6}}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}} = 0.013212151$$

- vi. Une fois la valeur du coefficient de n ainsi déterminée, calculons alors la conductivité relative Q_M^* dans le canal étudié, en application de la relation (3.34), soit:

$$Q_M^* = \frac{(2\sqrt{1+m^2})^{2/3}}{m^{5/3}} \left(\frac{nQ}{r^{8/3} \sqrt{i}} \right) = \frac{(2\sqrt{1+1^2})^{2/3}}{1^{5/3}} \left(\frac{0.013212151 \times 7}{0.8^{8/3} \times \sqrt{0.001}} \right) = 7.499171342$$

- vii. Considérons donc pour valeur première de q :

$$q_o = \chi_1$$

La valeur finale de q est telle que:

$$q_7 \cong q_8 = q = 4.4211189$$

Le rapport d'aspect η est, selon la relation (3.37):

$$\eta = \sqrt{q + \chi_1} = \sqrt{4.4211189 + 0.21460184} = 2.153072394$$

- viii. Selon la relation (3.31), le rapport d'aspect η_n est tel que :

$$\eta_n = \eta - \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} - 1 \right) = 2.153072394 - \left(\frac{\sqrt{1+1^2}}{1} - 1 \right) = 1.738858832$$

Ainsi, la valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc :

$$y_n = \eta_n r = 1.738858832 \times 0.8 = 1.391087066 \approx 1.39 \text{ m}$$

Il s'agit bien de la valeur de y_n que nous avons déjà calculée au cours de l'exemple d'application 3.4.

III.3.5.2. Le rapport d'aspect η est imposé

Le problème consiste à déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal étudié lorsque le débit volume Q , l'angle d'inclinaison θ , la rugosité absolue ε , la pente longitudinale i , la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement et la valeur imposée du paramètre de forme η sont les paramètres connus ou constituent les données de ce problème. Dans ce cas, la dimension linéaire r n'est plus une donnée du problème.

Reprenons la relation (3.33), soit:

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[mr^2(\eta^2 - \chi_1)]^{5/3}}{[2r\sqrt{1+m^2}(\eta - \chi_2)]^{2/3}} \sqrt{i}$$

De cette relation, nous pouvons déduire que la dimension linéaire r est:

$$r = \frac{[2\sqrt{1+m^2}(\eta - \chi_2)]^{1/4}}{[m(\eta^2 - \chi_1)]^{5/8}} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}} \right)^{3/8} \quad (3.41)$$

Les paramètres connus dans la relation (3.41) sont le débit volume Q , la pente longitudinale i , m et le rapport d'aspect η . Le coefficient n de *Manning* n'est pas connu et la relation (3.41) ne peut donc permettre sous sa forme actuelle l'évaluation de la dimension linéaire r . Cette difficulté peut être contournée en ayant recours à la méthode du modèle rugueux.

Au cours du paragraphe III.3.5.1, nous avons établi la relation (3.39) qui regroupe les paramètres de l'écoulement dans modèle rugueux de référence. Pour rappel, cette relation est :

$$Q = 8\sqrt{2g} \frac{\left[mr^2(\bar{\eta}^2 - \chi_1) \right]^{3/2}}{\left[2r\sqrt{1+m^2(\bar{\eta} - \chi_2)} \right]^{1/2}} \sqrt{i}$$

Pour les données de ce problème, il est nécessaire de considérer que :

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i; \bar{\eta} = \eta; \bar{r} \neq r$$

Ceci permet d'écrire que :

$$\bar{r} = \frac{\left[\sqrt{1+m^2(\eta - \chi_2)} \right]^{1/5}}{\left[m(\eta^2 - \chi_1) \right]^{3/5}} \left(\frac{Q^2}{64ig} \right)^{1/5} \quad (3.42)$$

Etapes de calcul de la profondeur normale

Les étapes suivantes sont recommandées pour déterminer la profondeur normale recherchée y_n de l'écoulement dans le canal étudié, à condition que les paramètres Q , m , i , η , ε et ν soient donnés.

- i. Pour la valeur connue de m , appliquons respectivement les relations (3.20) et (3.23) pour calculer tour à tour les paramètres χ_1 et χ_2 .
- ii. Avec les valeurs connues des paramètres Q , i , m et η , la dimension linéaire \bar{r} du modèle rugueux de référence est déterminée en vertu de la relation (3.42).
- iii. Connaissant les valeurs de \bar{r} , η , χ_1 et m , l'aire de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux de référence est déterminée par application de la relation (3.24).
- iv. Les valeurs connues des paramètres \bar{r} , η , χ_2 et m sont introduites dans la relation (3.25) destinée au calcul le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux.

- v. Le diamètre hydraulique \overline{D}_h du modèle rugueux de référence est déterminé par application de la relation $\overline{D}_h = \overline{A} / \overline{P}$.
- vi. Connaissant les valeurs de Q , \overline{P} et ν , la relation (2.15) permet de calculer la valeur du nombre de Reynolds \overline{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.
- vii. A partir des valeurs connues de $\varepsilon / \overline{D}_h$ et de \overline{R} , la relation (2.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- viii. Connaissant les valeurs de \overline{r} et de ψ , la valeur recherchée de la dimension linéaire r du canal est directement déduite de la relation fondamentale de la MMR (2.26).
- ix. Une fois la valeur de r déterminée, le rapport d'aspect η_n est directement déduite de la relation (3.31) et par suite $y_n = \eta_n r$.

L'exemple d'application suivant est proposé pour mieux illustrer les étapes de calcul ci-dessus indiquées de la profondeur normale de l'écoulement dans le canal étudié lorsque le rapport d'aspect η est imposé. Par souci de comparaison, cet exemple d'application reconduit les données de l'exemple d'application 3.6.

Exemple d'application 3.7.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.6, soient :

$$Q = 7 \text{ m}^3 / \text{s}; \eta = 2.153072394; i = 2 \times 10^{-3}; \varepsilon = 10^{-3} \text{ m}; \theta = 45^\circ (m = 1); \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Le paramètre de forme η a été évalué au cours de l'exemple d'application 3.6 et il est imposé dans le présent exemple. Il s'agit alors d'évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal étudié.

i. Les données du problème permettent de calculer les paramètres suivants :

- $\eta_n = \eta - \left(\frac{\sqrt{1+m^2}}{m} - 1 \right) = 2.153072394 - \left(\frac{\sqrt{1+1^2}}{1} - 1 \right) = 1.738858832$
- $\chi_1 = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) = \frac{1}{1} \times \left(\frac{1}{1} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \right) = 0.21460184$
- $\chi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(\frac{1}{m} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \times \left(\frac{1}{1} - \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+1^2}} \right) = 0.15174641$

ii. Ainsi, la dimension linéaire \bar{r} du modèle rugueux de référence est :

$$\bar{r} = \frac{\left[\sqrt{1+m^2}(\eta - \chi_2) \right]^{1/5} \left(\frac{Q^2}{64ig} \right)^{1/5}}{\left[m(\eta^2 - \chi_1) \right]^{3/5}} = \frac{\left[\sqrt{1+1^2} \times (2.15 - 0.15174641) \right]^{1/5} \left(\frac{7^2}{64 \times 0.002 \times 9.81} \right)^{1/5}}{\left[1 \times (2.15^2 - 0.21460184) \right]^{3/5}} = 1.0518592$$

iii. Par suite, les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence sont :

- $\bar{A} = m\bar{r}^2(\eta^2 - \chi_1) = 1 \times 1.0518592^2 \times (2.153072394^2 - 0.21460184) = 4.877008749 \text{ m}^2$
- $\bar{P} = 2\bar{r}\sqrt{1+m^2}(\eta - \chi_2) = 2 \times 1.0518592 \times \sqrt{1+1^2} \times (2.153072394 - 0.15174641) = 5.945296204 \text{ m}$
- $\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}} = 4 \times \frac{4.877008749}{5.945296204} = 3.281255353 \text{ m}$
- $\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}\nu} = \frac{4 \times 7}{5.945296204 \times 10^{-6}} = 4709605.55$

iv. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\psi = 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.003 / 3.281255353}{4.75} + \frac{8.5}{4709605.55} \right) \right]^{-2/5} = 0.761789115$$

v. La dimension linéaire recherchée $r = \psi \bar{r}$ est donc:

$$r = \psi \bar{r} = 0.761789115 \times 1.050293481 = 0.800102142 \approx 0.8m$$

La profondeur normale y_n est alors :

$$y_n = \eta_n r = 1.738858832 \times 0.800102142 = 1.391264676 \approx 1.39 m$$

Il s'agit bien de la valeur de la profondeur normale calculée au cours de l'exemple d'application 3.6.

vi. Résolvons le problème par application de la relation (3.41). Calculons pour cela le coefficient n de *Manning*:

- Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique $\bar{R}_h = \bar{D}_h / 4 = 0.820313838 m$, appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de *Manning*, soit:

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} = \frac{0.761789115^{8/3} \times 0.820313838^{1/6}}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}} = 0.013216503$$

- Pour cette valeur du coefficient n de *Manning*, la relation (3.41) donne la valeur de la dimension linéaire r du canal étudié :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\left[2\sqrt{1+m^2}(\eta - \chi_2)\right]^{1/4} \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{3/8}}{\left[m(\eta^2 - \chi_1)\right]^{5/8}} \\ &= \frac{\left[2 \times \sqrt{1+1^2} \times (2.153072394 - 0.15174641)\right]^{1/4} \left(\frac{0.013216503 \times 7}{\sqrt{0.002}}\right)^{3/8}}{\left[1 \times (2.153072394^2 - 0.21460184)\right]^{5/8}} \\ &= 0.800102142 \approx 0.8m \end{aligned}$$

Ainsi :

$$y_n = \eta_n r = 1.738858832 \times 0.8 \approx 1.39 m$$

III.4. CANAL A SURFACE LIBRE DE FORME TRAPEZOÏDALE

III.4.1. Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Le canal considéré est représenté schématiquement sur la figure 3.4. Il est caractérisé par b et y_n , ainsi que par $m = \cot g(\alpha)$ où α désigne l'angle d'inclinaison des parois latérales du canal par rapport à l'horizontale.

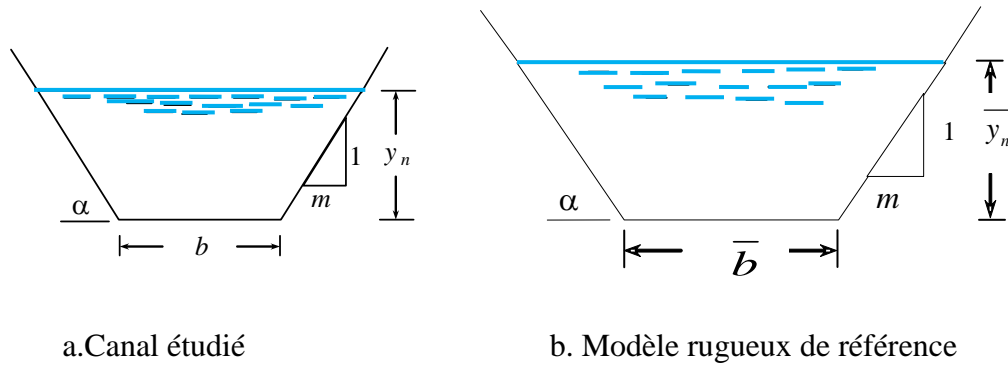


Figure 3.4: Schéma de définition du canal ouvert de forme trapézoïdale.

Le modèle rugueux de référence du canal considéré est schématiquement représenté sur la figure 3.4. Il est caractérisé par les paramètres m , \bar{b} et \bar{y}_n , le paramètre de forme $\bar{\eta}_n = \bar{y}_n / \bar{b}$.

Le débit volume Q ainsi que la pente longitudinale i sont les mêmes dans le canal et dans le modèle rugueux, c'est-à-dire:

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i \quad (3.43)$$

L'aire de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux de référence est donc:

$$\bar{A} = \bar{\eta}_n \bar{b}^2 (1 + m \bar{\eta}_n) \quad (3.44)$$

Tandis que le périmètre mouillé \bar{P} est:

$$\bar{P} = \bar{b} \left(1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1 + m^2} \right) \quad (3.45)$$

Le diamètre hydraulique $\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P}$ du modèle rugueux de référence est donc:

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\bar{\eta}_n (1 + m\bar{\eta}_n)}{(1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1 + m^2})} \quad (3.46)$$

En tenant compte des relations (3.44) et (3.45), la relation (2.11) s'écrit:

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{b} (1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1 + m^2})}{\bar{b}^6 \bar{\eta}_n^3 (1 + m\bar{\eta}_n)^3} Q^2 \quad (3.47)$$

Soit:

$$\bar{b} = \left(\frac{1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1 + m^2}}{\bar{\eta}_n^3 (1 + m\bar{\eta}_n)^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q}{8\sqrt{2gi}} \right)^{2/5}$$

Ou bien :

$$\bar{b} = \frac{\left[1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1 + m^2} \right]^{1/5}}{\left[\bar{\eta}_n (1 + m\bar{\eta}_n) \right]^{3/5}} \left(\frac{Q}{8\sqrt{2gi}} \right)^{2/5} \quad (3.48)$$

La profondeur normale \bar{y}_n de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est telle

que $\bar{y}_n = \bar{\eta}_n \bar{b}$ et qui s'écrit, en tenant compte de la relation (3.48):

$$\bar{y}_n = \left(\frac{1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1 + m^2}}{\bar{\eta}_n^2 (1 + m\bar{\eta}_n)^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q}{8\sqrt{2gi}} \right)^{2/5} \quad (3.49)$$

Les relations (3.48) et (3.49) permettent le calcul explicite des dimensions linéaires \bar{b} et \bar{y}_n du modèle rugueux de référence, à partir des valeurs connues du débit volume Q , de la pente longitudinale i , m et du paramètre de forme $\bar{\eta}_n$.

III.4.2. Calcul de la profondeur normale par la relation de Darcy-Weisbach

III.4.2.1. Le rapport d'aspect η_n est imposé

Le problème consiste à déterminer la profondeur normale pour les valeurs connues de débit volume Q , de la rugosité absolue ε , de la pente géométrique i , de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement, l'angle d'inclinaison α ($m = \cot g(\alpha)$) et pour la valeur imposée du rapport d'aspect η_n .

Admettons, dans un premier, que le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n = \bar{y}_n / \bar{b}$ dans le modèle rugueux soit le même que celui de l'écoulement dans le canal étudié, soit $\eta_n = \bar{\eta}_n$. La relation (3.48) s'écrit alors

$$\bar{b} = \frac{\left[1 + 2\eta_n \sqrt{1 + m^2}\right]^{1/5}}{\left[\eta_n (1 + m\eta_n)\right]^{3/5}} \left(\frac{Q}{8\sqrt{2gi}}\right)^{2/5} \quad (3.50)$$

A partir des valeurs connues des paramètres $m, \eta_n, Q, i, \varepsilon$ et ν , les étapes suivantes sont recommandées pour déterminer la profondeur normale recherchée y_n de l'écoulement :

- i. La première étape consiste à déterminer la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence, par application de la relation (3.50).
- ii. Le périmètre mouillé \bar{P} est déterminé selon la relation (3.45) pour $\eta_n = \bar{\eta}_n$ et pour les valeurs connues de \bar{b} , m et η_n .
- iii. Le diamètre hydraulique \bar{D}_h du modèle rugueux de référence est calculé selon la relation (3.46).

- iv. Le nombre de Reynolds \bar{R} est ensuite évalué par application de la relation (2.15).
- v. A partir des valeurs connues de ε / \bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- vi. Connaissant les valeurs de \bar{b} et de ψ , la valeur recherchée de la dimension linéaire b du canal est directement déduite de la relation fondamentale (2.24).
- vii. Une fois la dimension linéaire b du canal déterminée, la profondeur normale y_n est simplement déduite de la relation $y_n = \eta_n b$, pour les valeurs connues de b et de η_n .

Afin d'illustrer la démarche de calcul que nous venons d'exposer et qui mène au calcul de la profondeur normale y_n , l'exemple d'application suivant est proposé.

Exemple d'application 3.8

On désire déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme trapézoïdale représenté par la figure 3.4, en utilisant la relation de Darcy-Weisbach.

Les données du problème sont:

$$Q = 2.255 \text{ m}^3 / \text{s}; i = 10^{-4}; \eta_n = 0.6; \varepsilon = 10^{-3} \text{ m}; \alpha = 45^\circ (m = 1); \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

- i. La relation (3.50) permet le calcul de la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence, pour $\eta_n = \bar{\eta}_n$. Soit :

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \frac{\left[1 + 2\eta_n \sqrt{1 + m^2}\right]^{1/5}}{\left[\eta_n(1 + m\eta_n)\right]^{3/5}} \left(\frac{Q}{8\sqrt{2gi}}\right)^{2/5} = \left(\frac{1 + 2 \times 0.6 \times \sqrt{1 + 1^2}}{0.6^3 \times (1 + 1 \times 0.6)^3}\right)^{1/5} \times \left(\frac{2.255}{8 \times \sqrt{2} \times 9.81 \times 0.0001}\right)^{2/5} \\ &= 2.619980656 \text{ m} \end{aligned}$$

- ii. Le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (3.45) pour $\eta_n = \bar{\eta}_n$:

$$\bar{P} = \bar{b} \left(1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1+m^2} \right) = 2.619980656 \times \left(1 + 2 \times 0.6 \times \sqrt{1+1^2} \right) = 7.06623527 \text{ m}$$

iii. Le diamètre hydraulique \bar{D}_h est par suite :

$$\begin{aligned} \bar{D}_h &= 4\bar{b} \frac{\bar{\eta}_n (1 + \bar{\eta}_n m)}{(1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1+m^2})} = 4 \times 2.619980656 \times \frac{0.6 \times (1 + 0.6 \times 1)}{(1 + 2 \times 0.6 \times \sqrt{1+1^2})} \\ &= 3.730261699 \text{ m} \end{aligned}$$

iv. En vertu de la relation (2.15), le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 2.255}{7.06623527 \times 10^{-6}} = 1276493.02$$

v. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\begin{aligned} \psi &= 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.001 / 3.730261699}{4.75} + \frac{8.5}{1276493.02} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0.760386168 \end{aligned}$$

vi. Selon la relation (2.24), la dimension linéaire b est :

$$b = \psi \bar{b} = 0.760386168 \times 2.619980656 = 1.992197051 \approx 2 \text{ m}$$

La profondeur normale y_n est alors :

$$y_n = b \eta_n = 0.6 \times 1.992197051 = 1.19531823 \approx 1.2 \text{ m}$$

vii. Cette étape du calcul consiste à vérifier la valeur donnée à l'énoncé, de la pente longitudinale i , par application de la relation de Darcy-Weisbach.

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{1}{2gA^2} Q^2$$

L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (1.131):

•

$$A = \eta_n b^2 (1 + m \eta_n) = 0.6 \times 1.992197051^2 \times (1 + 1 \times 0.6) = 3.810095126 m^2$$

• Le diamètre hydraulique D_h est $D_h = 4R_h$, en vertu de la relation (1.135) :

$$D_h = 4b \frac{\eta_n (1 + \eta_n m)}{(1 + 2\eta_n \sqrt{1 + m^2})} = 4 \times 1.992197051 \times \frac{0.6 \times (1 + 0.6 \times 1)}{(1 + 2 \times 0.6 \times \sqrt{1 + 1^2})}$$

$$= 2.836439397 \text{ m}$$

• Le coefficient de frottement f est évalué par la relation (2.25), soit :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0.760386168^5}{16} = 0.015887335$$

Ainsi, selon la relation de *Darcy-Weisbach*, la pente longitudinale i est :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0.015887335}{2.836439397} \times \frac{2.255^2}{2 \times 9.81 \times 3.810095126^2} = 10^{-4}$$

Il s'agit bien de la valeur de i donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

III.4.2.2. La dimension linéaire b est imposée

On considère un modèle rugueux de référence de forme trapézoïdale dont la dimension linéaire est $\bar{b} = b$, écoulant un débit $\bar{Q} = Q$ sous une pente longitudinale $\bar{i} = i$. La dimension linéaire b , le débit volume Q , l'angle d'inclinaison α ($m = \cot g(\alpha)$) et la pente longitudinale i sont donc identiques dans le canal étudié et dans le modèle rugueux.

Le paramètre de forme ou rapport d'aspect de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est donc tel que $\eta_n \neq \bar{\eta}_n$, correspondant à $y_n \neq \bar{y}_n$.

La relation (3.47) peut s'écrire plus simplement :

$$\frac{1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1 + m^2}}{m^3 \bar{\eta}_n^3 (1 + m\bar{\eta}_n)^3} \left(\frac{m^{1.5} Q}{8\sqrt{2gib}^{-5}} \right)^2 = 1 \quad (3.51)$$

En introduisant la conductivité relative \bar{Q}^* , tel que:

$$\bar{Q}^* = \frac{m^{1.5} Q}{8\sqrt{2gib}^{-5}} \quad (3.52)$$

Ainsi, l'équation (3.51) est réduite à:

$$\frac{[1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1 + m^2}]^{1/2}}{[m\bar{\eta}_n (1 + m\bar{\eta}_n)]^{3/2}} \bar{Q}^* = 1 \quad (3.53)$$

En outre, si l'on désignait par :

$$z = \left(\frac{1}{2} + m\bar{\eta}_n \right)^2 \quad (3.54)$$

Tenant compte de (3.54), la relation (3.53) permet de déduire que:

$$z = \frac{1}{4} + \bar{Q}^{*2/3} \left[1 + (2\sqrt{z} - 1)\sqrt{1 + m^{-2}} \right]^{1/3} \quad (3.55)$$

Bien que la relation (3.55) soit implicite vis-à-vis de la variable z . A partir des valeurs connues de m et \bar{Q}^* , il est donc possible de calculer le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ du modèle rugueux de référence du canal étudié.

Le calcul du rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ du modèle rugueux de référence, par application de la relation implicite (3.55), peut être effectué selon la méthode numérique. Le processus de calcul est itératif et s'opère sur la relation (3.55) après avoir choisi une première valeur de z

Admettons que cette première valeur de z soit z_0 . Nous obtenons alors z_1 tel que:

$$z_1 = \frac{1}{4} + \bar{Q}^{*2/3} \left[1 + (2\sqrt{z_0} - 1)\sqrt{1 + m^{-2}} \right]^{1/3}$$

$$z_2 = \frac{1}{4} + \bar{Q}^{*2/3} \left[1 + (2\sqrt{z_1} - 1)\sqrt{1 + m^{-2}} \right]^{1/3} \dots\dots \text{Et ainsi de suite}$$

Le processus de calcul se poursuit ainsi jusqu'à une valeur z_i telle que $z_i \approx z_{(i-1)}$, avec une erreur relative que le projeteur pourra apprécier.

Il est bien évident que la rapidité de convergence du processus itératif ainsi décrit dépend fortement de la valeur z_0 initialement choisie. Nous suggérons de calculer la valeur de z_0 au lieu de la choisir de manière arbitraire. Selon la relation (3.55), nous admettons que

$$z_0 = \frac{1}{4} \text{ correspondant à } \bar{\eta}_n = 0.$$

Cette démarche permet d'évaluer z avec une erreur relative extrêmement faible, à l'issue de la sixième étape de calcul.

Une fois la valeur finale de z est déterminé, le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux est déduit de l'équation (3.54), soit:

$$\bar{\eta}_n = (\sqrt{z} - 1/2)m^{-1} \tag{3.56}$$

Afin de mieux préciser cette démarche de calcul qui consiste à évaluer la profondeur normale pour une valeur imposée de la dimension linéaire b du canal, les étapes suivantes sont recommandées:

- i. Pour les valeurs connues des paramètres Q , i , m et b , et en admettant dans un premier temps que $b = \bar{b}$, calculer selon la relation (3.52) la conductivité relative \bar{Q}^*

$$\bar{Q}^* = \frac{m^{1.5} Q}{8\sqrt{2gib^5}}$$

- ii. Puisque les valeurs de \bar{Q}^* et m sont connues, appliquons la relation (3.55) pour évaluer la valeur de z (en adoptant le processus itératif).
- iii. Avec la valeur ainsi calculée de z , appliquons la relation (3.56) pour évaluer le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux.
- iv. Connaissant les valeurs de \bar{b} et $\bar{\eta}_n$, la relation (3.46) permet de calculer la valeur du diamètre hydraulique \bar{D}_h de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, tandis que le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux est déterminé par application de la relation (3.45).
- v. Les valeurs connues des paramètres Q , \bar{P} et ν sont introduites dans la relation (2.15) pour l'évaluation du nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.
- vi. A partir des valeurs connues de ε/\bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- vii. Une fois la valeur de ψ déterminée, il faut maintenant affecter à l'écoulement dans le modèle rugueux la dimension linéaire $\bar{b} = b/\psi$. En introduisant cette valeur de \bar{b} dans l'équation (3.52), on obtient une nouvelle valeur de la conductivité relative:

$$\bar{Q}^* = \frac{m^{1.5} Q}{8\sqrt{2gi}(b/\psi)^5}$$
- viii. Cette nouvelle valeur de la conductivité relative permet de calculer, selon la relation (3.55) la valeur de z (l'étape ii).
- ix. En introduisant cette valeur de z dans l'équation (3.56), on obtient le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux égal au rapport d'aspect η_n du canal.

- x. Une fois le rapport d'aspect η_n déterminé, la valeur de la profondeur normale y_n recherchée est déduite de la relation $y_n = \eta_n b$.

Afin d'illustrer la démarche de calcul que nous venons d'exposer et qui mène au calcul de la profondeur normale y_n , l'exemple d'application suivant est proposé.

Exemple d'application 3.9.

Reprenons l'exemple d'application 3.8 et recherchons la profondeur normale y_n de l'écoulement pour les données suivantes:

$$Q = 2.255 \text{ m}^3 / \text{s}; b = 2 \text{ m}; i = 10^{-4}; \varepsilon = 10^{-3} \text{ m}; \alpha = 45^\circ (m = 1); \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

- i. Pour ces données, on calcule la conductivité relative \bar{Q}^* selon la relation (3.52), soit :

$$\bar{Q}^* = \frac{m^{1.5} Q}{8 \sqrt{2 g i b^5}} = \frac{1^{1.5} \times 2.255}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.0001 \times 2^5}} = 1.12494702$$

- ii. Selon la relation (3.55), la valeur finale de z est telle que:

$$z_5 \cong z_6 = z = 1.88781194$$

- iii. Le paramètre $\bar{\eta}_n$ est, selon la relation (3.56) :

$$\bar{\eta}_n = (\sqrt{z} - 1/2) m^{-1} = (\sqrt{1.88781194} - 1/2) \times 1^{-1} = 0.873976688$$

- iv. Le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (3.45):

$$\bar{P} = \bar{b} \left(1 + 2 \bar{\eta}_n \sqrt{1 + m^2} \right) = 2 \times \left(1 + 2 \times 0.873976688 \times \sqrt{1 + 1^2} \right) = 6.943958743 \text{ m}$$

Ainsi, le diamètre hydraulique \overline{D}_h est par suite:

$$\overline{D}_h = 4b \frac{\overline{\eta}_n (1 + \overline{\eta}_n m)}{(1 + 2\overline{\eta}_n \sqrt{1 + m^2})} = 4 \times 2 \times \frac{0.873976688 \times (1 + 0.873976688 \times 1)}{(1 + 2 \times 0.873976688 \times \sqrt{1 + 1^2})} = 3.773782652 \text{ m}$$

v. Le nombre de Reynolds \overline{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est :

$$\overline{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 2.255}{6.943958743 \times 10^{-6}} = 1298970.851$$

vi. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\psi = 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.001 / 3.77378265}{4.75} + \frac{8.5}{1298970.85} \right) \right]^{-2/5} = 0.76000231$$

vii. Si l'on affectait au modèle rugueux la dimension linéaire $\overline{b} = b / \psi$ alors la relation (3.56) donnerait une valeur de $\overline{\eta}_n$ égale à celle de η_n dans le canal étudié.

Cette valeur $\overline{\eta}_n = \eta_n$ doit être calculée avec la conductivité relative:

$$\overline{Q}^* = \frac{m^{1.5} Q}{8\sqrt{2gi(b/\psi)^5}} = \frac{1^{1.5} \times 2.255}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.0001 \times (2/0.76000231)^5}} = 0.56646013$$

viii. En insérant la nouvelle valeur de \overline{Q}^* dans la relation (3.55), soit:

$$z_5 \cong z_6 = z = 1.20167837$$

ix. Par suite, la relation (3.56) mène à:

$$\eta_n = \overline{\eta}_n = (\sqrt{z} - 1/2)m^{-1} = (\sqrt{1.20167837} - 1/2) \times 1^{-1} = 0.59621092 \approx 0.6$$

x. La valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc:

$$y_n = \eta_n b = 2 \times 0.6 = 1.2 \text{ m}$$

Il s'agit bien de la valeur de y_n calculée au cours de l'exemple d'application 3.8.

v. Vérifions nos calculs par la détermination du débit volume Q selon la relation de Chézy :

$$Q = CA\sqrt{R_h i}$$

- Les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le canal considéré sont:

$$A = \eta_n b^2 (1 + m\eta_n) = 0.59621092 \times 2^2 (1 + 1 \times 0.59621092) = 3.80671349 \text{ m}$$

$$P = b \left(1 + 2\eta_n \sqrt{1 + m^2} \right) = 2 \times \left(1 + 2 \times 0.59621092 \times \sqrt{1 + 1^2} \right) = 5.37267825 \text{ m}$$

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{3.80671349}{5.37267825} = 0.70853182 \text{ m}$$

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}}{0.76000231^{5/2}} = 70.3723751$$

Ainsi, le débit volume Q serait, selon Chézy:

$$Q = CA\sqrt{R_h i} = 70.3723751 \times 3.806713486 \times \sqrt{0.708531817 \times 0.0001} \approx 2.255 \text{ m}^3/\text{s}$$

Il s'agit bien de la valeur de Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

III.4.3. Calcul de la profondeur normale par la relation de Manning

Le problème posé consiste donc à déterminer la profondeur normale y_n , ce qui revient à évaluer le rapport d'aspect η_n et par suite $y_n = b\eta_n$. Lorsque l'on examine la forme de la relation (1.148), il apparaît que le rapport d'aspect η_n ne peut être déterminé de manière explicite.

En pratique, les paramètres connus du problème sont la dimension linéaire b , la rugosité absolue ε , la pente longitudinale i du canal, le débit volume Q , la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement et α l'angle d'inclinaison des parois latérales du canal par rapport à l'horizontale ($m = \cot g(\alpha)$). Le coefficient n de *Manning* n'est donc pas une donnée du problème et, de ce fait, la conductivité relative Q_M^* de la relation (1.148) ne peut être évaluée. Ainsi, la détermination du rapport d'aspect η_n par application de la relation implicite (1.148) n'est pas aisée, voire impossible sous sa forme actuelle.

Appliquons la relation (1.146), issue de la relation de *Manning*, au modèle rugueux de référence sous les conditions: $b = \bar{b}$, $Q = \bar{Q}$, $i = \bar{i}$ et $\eta_n \neq \bar{\eta}_n$.

Nous obtenons:

$$Q = 8\sqrt{2g} \frac{(\bar{\eta}_n \bar{b}^2 (1 + m\bar{\eta}_n))^{3/2}}{(\bar{b}(1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1 + m^2}))^{1/2}} \sqrt{\bar{i}} \quad (3.57)$$

La relation (3.57) peut s'écrire plus simplement :

$$\frac{1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1 + m^2}}{m^3 \bar{\eta}_n^3 (1 + m\bar{\eta}_n)^3} \left(\frac{m^{1.5} Q}{8\sqrt{2g} \bar{i} \bar{b}^5} \right)^2 = 1 \quad (3.58)$$

Il faut noter c'est que la relation (3.58) est identique à la relation (3.51) obtenue par la transformation de la relation de *Darcy-Weisbach*. Ceci revient à dire que le calcul de la profondeur normale par application de la relation de *Manning* s'effectue selon les mêmes étapes que celles indiquées dans le paragraphe **III.4.2.2**.

Etapes de calcul de la profondeur normale

Pour résoudre le problème de la détermination de la profondeur normale y_n par l'usage de la relation de *Manning*, les étapes suivantes sont recommandées pour mener à bien le calcul:

- i. Les données du problème sont: le débit volume Q , la pente longitudinale i , la dimension linéaire b du canal, $m = \cot g(\alpha)$, la rugosité absolue ε et la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Pour ces données, on calcule la conductivité relative \bar{Q}^* selon la relation (3.52), soit :

$$\bar{Q}^* = \frac{m^{1.5} Q}{8\sqrt{2gib^5}}$$

- ii. Puisque les valeurs de \bar{Q}^* et m sont connues, appliquons la relation (3.55) pour évaluer la valeur de z .
- iii. Avec la valeur ainsi calculée de z , appliquons la relation (3.56) pour évaluer le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux.
- iv. Connaissant les valeurs de \bar{b} et $\bar{\eta}_n$, la relation (3.46) permet de calculer la valeur du diamètre hydraulique \bar{D}_h de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, tandis que le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux est déterminé par application de la relation (3.45).
- v. Les valeurs connues des paramètres Q , \bar{P} et ν sont introduites dans la relation (2.15) pour l'évaluation du nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.
- vi. A partir des valeurs connues de ε/\bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- vii. Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique \bar{R}_h , appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de Manning.
- viii. Une fois la valeur du coefficient de n déterminée, calculons alors la conductivité relative Q_M^* dans le canal étudié, en application de la relation (1.147).

- ix. Une fois la conductivité relative Q_M^* calculée, il faut appliquer soit la relation (1.151) où (1.154) issue du théorème de *Lagrange*, soit la relation (1.149) par la méthode numérique ou bien la relation approchée (1.155) pour l'évaluation du rapport d'aspect η_n .
- x. Une fois le rapport d'aspect η_n déterminé, la valeur de la profondeur normale y_n recherchée est déduite de la relation $y_n = \eta_n b$.

Afin de mieux apprécier les étapes de calcul ci-dessus indiquées de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme trapézoïdale par l'usage de la relation de *Manning*, considérons alors l'exemple d'application suivant.

Exemple d'application 3.10.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.9, soient:

$$Q = 2.255 m^3 / s; b = 2m; i = 10^{-4}; \varepsilon = 10^{-3} m; \alpha = 45^\circ (m = 1); \nu = 10^{-6} m^2 / s$$

Il s'agit de calculer la valeur de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme trapézoïdale étudié en ayant recours à la relation de *Manning*.

- i. Le calcul de la conductivité relative \bar{Q}^* , de z et $\bar{\eta}_n$ est le même que celui effectué au cours des étapes *i*, *ii* et *iii* de l'exemple d'application (3.9). Nous obtenons :

- $\bar{Q}^* = \frac{m^{1.5} Q}{8\sqrt{2gib^5}} = \frac{1^{1.5} \times 2.255}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.0001 \times 2^5}} = 1.12494702$
- $z_5 \cong z_6 = z = 1.88781194$
- $\bar{\eta}_n = (\sqrt{z} - 1/2)m^{-1} = (\sqrt{1.88781194} - 1/2) \times 1^{-1} = 0.873976688$

- ii. Par suite, les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence sont :

- $\bar{P} = \bar{b} \left(1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1+m^2} \right) = 2 \times \left(1 + 2 \times 0.873976688 \times \sqrt{1+1^2} \right) = 6.943958743 \text{ m}$
- $\bar{D}_h = 4b \frac{\bar{\eta}_n (1 + \bar{\eta}_n m)}{(1 + 2\bar{\eta}_n \sqrt{1+m^2})} = 4 \times 2 \times \frac{0.873976688 \times (1 + 0.873976688 \times 1)}{(1 + 2 \times 0.873976688 \times \sqrt{1+1^2})}$
 $= 3.773782652 \text{ m}$
- $\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 2.255}{6.943958743 \times 10^{-6}} = 1298970.851$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\psi = 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.001 / 3.77378265}{4.75} + \frac{8.5}{1298970.85} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 0.76000231$$

iv. Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique $\bar{R}_h = \bar{D}_h / 4 = 0.815354775 \text{ m}$, appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de Manning, soit :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{1/6}}{8\sqrt{2g}} = \frac{0.760002309^{8/3} \times 0.94344566^{1/6}}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}} = 0.013443729$$

viii. Calculons alors la conductivité relative Q_M^* dans le canal étudié, en application de la relation (1.147), soit :

$$Q_M^* = \frac{m^{5/3} Qn}{b^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{1^{5/3} \times 0.013443729 \times 2.255}{2^{8/3} \times \sqrt{0.0001}} = 0.477440932$$

ix. Appliquons la relation approchée (1.155) pour l'évaluation explicite du rapport d'aspect η_n , soit:

$$\eta_{n0} = \frac{1 + 0.856Q_p^{*3/5} (1 + m^{1.263}) (1 - 0.0585mQ_p^{*3/5})}{Q_p^{*-3/5} + 1.945m}$$

$$= \frac{1 + 0.856 \times 0.477440932^{3/5} \times (1 + 1^{1.263}) \times (1 - 0.0585 \times 1 \times 0.477440932^{3/5})}{0.477440932^{-3/5} + 1.945 \times 1} = 0.587275471$$

Soit:

$$\eta_n = Q_M^{*3/5} \frac{(1 + 2\eta_{n0} \sqrt{1 + m^2})^{2/5}}{1 + m\eta_{n0}} = 0.477440932^{3/5} \times \frac{(1 + 2 \times 0.587275471 \times \sqrt{1 + 1^2})^{2/5}}{1 + 1 \times 0.587275471}$$

$$= 0.598028298 \approx 0.6$$

x. La valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc :

$$y_n = b\eta_n = 2 \times 0.6 = 1.2m$$

Il s'agit bien de la valeur de y_n calculée au cours des exemples d'application (3.8) et (3.9).

xi. Pour vérifier la validité des calculs, déterminons la pente longitudinale i du canal par la relation de *Darcy-Weisbach* :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{1}{2gA^2} Q^2$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (1.131):

$$A = \eta_n b^2 (1 + m\eta_n) = 0.596210916 \times 2^2 \times (1 + 1 \times 0.596210916) = 3.806713486m^2$$

- Le diamètre hydraulique $D_h = 4R_h$, en vertu de la relation (1.135):

$$D_h = 4b \frac{\eta_n (1 + \eta_n m)}{(1 + 2\eta_n \sqrt{1 + m^2})} = 4 \times 2 \times \frac{0.596210916 \times (1 + 0.596210916 \times 1)}{(1 + 2 \times 0.596210916 \times \sqrt{1 + 1^2})} = 2.83412727 \text{ m}$$

- Le coefficient de frottement f est évalué par la relation (2.25), soit:

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0.760002309^5}{16} = 0.01584727$$

- Selon la relation de *Darcy-Weisbach*, la pente longitudinale i serait égale à :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0.01584727}{2.83412727} \times \frac{2.255^2}{2 \times 9.81 \times 3.806713486^2} = 0.000100007 \approx 10^{-4}$$

Il s'agit bien de la valeur donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

III.5. CANAL A SURFACE LIBRE DE FORME PARABOLIQUE

III.5.1. Caractéristiques du modèle rugueux de référence

La figure 3.5 montre schématiquement le canal ouvert de forme parabolique et ses caractéristiques géométriques.

Le canal est caractérisé par la rugosité absolue ε et écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν , sous une pente longitudinale i . La forme du canal considéré est définie par le paramètre de forme $\zeta_n = \sqrt{y_n / B}$, appelé aussi rapport d'aspect où B est un paramètre connu depuis les éléments géométriques T_m et Y_m sont donnés dans la pratique.

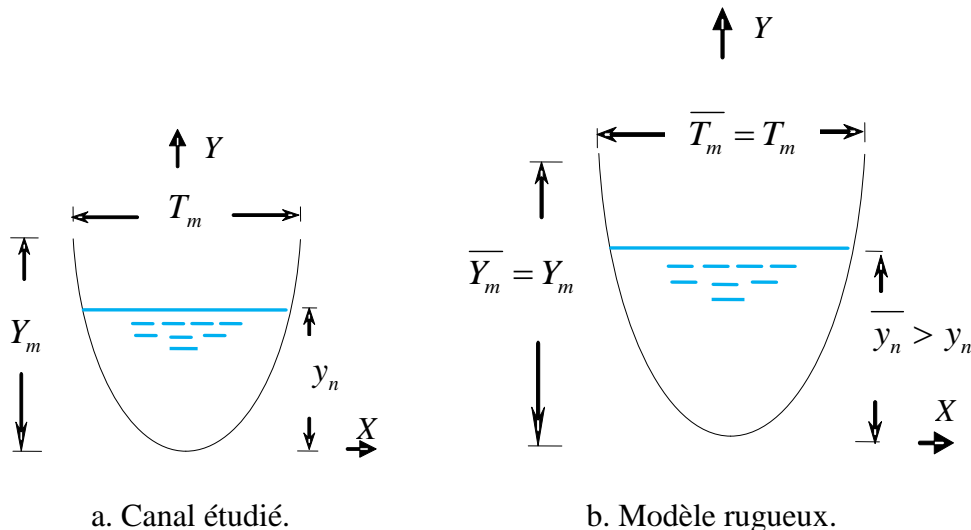


Figure 3.5: Schéma de définition du canal ouvert de forme parabolique.

D'autre part, on associe au canal considéré un canal de référence (ou modèle de référence) de même forme. Il est également caractérisée par $\bar{T}_m = T_m$, $\bar{Y}_m = Y_m$, $\bar{B} = B$ et sa profondeur normale \bar{y}_n (Figure 3.5) est telle que: $\bar{y}_n > y_n$. Cependant, le paramètre de forme $\bar{\zeta}_n = \sqrt{\bar{y}_n / \bar{B}}$ dans le modèle rugueux de référence est différent au paramètre de $\zeta_n = \sqrt{y_n / B}$ dans le canal étudié, soit $\bar{\zeta}_n \neq \zeta_n$.

Le modèle rugueux écoule le même débit volume que celui du canal, sous la même pente longitudinale, soit:

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i$$

De même que pour le canal étudié, la section mouillée \bar{A} ainsi que le périmètre mouillé \bar{P} de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence s'écrivent respectivement :

$$\bar{A} = \frac{2}{3} B^2 \bar{\zeta}_n^3 \quad (3.59)$$

$$\bar{P} = \frac{B}{8} \left[4\bar{\zeta}_n \sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2} + \ln \left(4\bar{\zeta}_n + \sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2} \right) \right] \quad (3.60)$$

Où:

$$\bar{\zeta}_n = \sqrt{\bar{y}_n / B} \quad (3.61)$$

et

$$B = T_m^2 / Y_m \quad (3.62)$$

En tenant compte des relations (3.59) et (3.60), la relation (2.11) s'écrit:

$$Q^* = \frac{\bar{\zeta}_n^{9/2}}{\left[4\bar{\zeta}_n \sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2} + \ln \left(4\bar{\zeta}_n + \sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2} \right) \right]^{1/2}} \quad (3.63)$$

Où, la conductivité relative Q^* est donné par :

$$Q^* = \frac{3\sqrt{3}Q}{64\sqrt{2giB^5}} \quad (3.64)$$

La relation (3.63) peut permettre de la détermination du rapport d'aspect $\bar{\zeta}_n$ pour les valeurs connues des paramètres Q, i et B . Cependant, la relation (3.63) montre que le rapport d'aspect $\bar{\zeta}_n$ est implicite vis-à-vis de Q^* et sa détermination nécessiterait une procédé itératif ou graphique.

Afin de faciliter le calcul du rapport d'aspect $\bar{\zeta}_n$, il recommandé d'utiliser la relation approchée suivante:

$$\bar{\zeta}_n = \alpha Q^{*\beta} \quad (3.65)$$

Les valeurs obtenues des paramètres α et β de l'équation (3.65) sont consignées dans le tableau 3.1.

Tableau 3.1: Valeurs des paramètres α et β , calculées selon la relation (3.65).

Q^*	$\bar{\zeta}_n$	α	β	Ecart maximal %
$Q^* \leq 0.00261$	$\bar{\zeta}_n \leq 0.30$	1.366	0.255	0.26
$0.00261 < Q^* \leq 0.0182$	$0.30 < \bar{\zeta}_n \leq 0.5$	1.441	0.264	0.15
$0.0182 < Q^* \leq 0.232$	$0.50 < \bar{\zeta}_n \leq 1$	1.487	0.272	0.26
$0.232 < Q^* \leq 69.5$	$1 < \bar{\zeta}_n \leq 5$	1.507	0.282	0.32

III.5.2. Etapes de calcul de la profondeur normale par la relation de Darcy-Weisbach

Pour résoudre le problème de la détermination de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans un canal parabolique par la méthode du modèle rugueux de référence, les étapes suivantes sont recommandées pour mener à bien le calcul:

- i. Avec les valeurs connues des paramètres T_m et y_m , la dimension linéaire B est déterminée en vertu de la relation (3.62).
- ii. Pour les valeurs connues des paramètres Q , i et B , calculer selon la relation (3.64) la conductivité relative Q^* .
- iii. Puisque les valeurs de Q^* , α et β sont connues, appliquons la relation (3.65) pour évaluer le rapport d'aspect $\bar{\zeta}_n$ dans le modèle rugueux de référence.
- iv. Connaissant les valeurs de B et $\bar{\zeta}_n$, les relations (3.59) et (3.60) permettent de calculer l'aire de la section mouillée \bar{A} et le périmètre mouillé \bar{P} respectivement. Ceci permet de déduire le diamètre hydraulique \bar{D}_h de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence ($\bar{D}_h = \bar{A} / \bar{P}$).
- v. Les valeurs connues des paramètres Q , \bar{P} et ν sont introduites dans la relation (2.15) destinée au calcul du nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.
- vi. A partir des valeurs connues de ε / \bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- vii. Une fois la valeur de ψ déterminée, il faut maintenant affecter à l'écoulement dans le modèle rugueux la dimension linéaire $\bar{B} = B / \psi$. En introduisant cette valeur de \bar{B} dans l'équation (3.64), on obtient une nouvelle valeur de la conductivité relative:

$$Q^* = \frac{3\sqrt{3}Q}{64\sqrt{2gi(B/\psi)^5}}$$

- vi. Cette nouvelle valeur de la conductivité relative permet de calculer, selon la relation (3.65) la valeur du rapport d'aspect $\bar{\zeta}_n = \zeta_n$.

- vii. Une fois le rapport d'aspect ζ_n déterminé, la valeur de la profondeur normale y_n recherchée est déduite de la relation $y_n = B\zeta_n^2$.

Afin d'illustrer la démarche de calcul que nous venons d'exposer et qui mène au calcul de la profondeur normale y_n , l'exemple d'application suivant est proposé.

Exemple d'application 3.11.

On souhaite déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal parabolique représenté par la figure (3.5). Les données du problème sont :

$$Q = 6m^3/s; T_m = 4m; y_m = 2m; i = 10^{-3}; \varepsilon = 2.10^{-3}m; \nu = 10^{-6}m^2/s$$

- i. La dimension linéaire B est, selon la relation (3.62) :

$$B = T_m^2 / y_m = 4^2 / 2 = 8m$$

- ii. La conductivité relative Q^* est donc:

$$Q^* = \frac{3\sqrt{3}Q}{64\sqrt{2giB^5}} = \frac{3 \times \sqrt{3} \times 6}{64 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.001 \times 8^5}} = 0.01921227$$

- iii. Selon la relation (3.65), le rapport d'aspect est tel que:

$$\bar{\zeta}_n = \alpha Q^{*\beta} = 1.487 \times 0.01921227^{0.272} = 0.50750973$$

- iv. L'aire de la section mouillée \bar{A} du modèle rugueux de référence est:

$$\bar{A} = \frac{2}{3} B^2 \bar{\zeta}_n^3 = \frac{2}{3} \times 8^2 \times 0.50750973^3 = 5.57727207 m^2$$

Tandis que le périmètre mouillé \bar{P} est:

$$\bar{P} = \frac{B}{8} \left[4\bar{\zeta}_n \sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2} + \ln \left(4\bar{\zeta}_n + \sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2} \right) \right]$$

$$\bar{P} = \frac{8}{8} \times \left[4 \times 0.50750973 \times \sqrt{1+16 \times 0.50750973^2} + \ln \left(4 \times 0.50750973 + \sqrt{1+16 \times 0.50750973^2} \right) \right] = 6.05091742 \text{ m}$$

Ainsi, le diamètre hydraulique \bar{D}_h est par suite:

$$\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}} = 3.68689353 \text{ m}$$

v. Le nombre de *Reynolds* \bar{R} , caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est:

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 6}{6.05270292 \times 10^{-6}} = 6509545.17$$

vi. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\begin{aligned} \psi &= 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.002 / 3.68689353}{4.75} + \frac{8.5}{6509545.17} \right) \right]^{-2/5} = 0.780280115 \end{aligned}$$

vii. Si l'on affectait au modèle rugueux de référence la dimension linéaire $\bar{B} = B/\psi$, alors le rapport d'aspect $\bar{\zeta}_n$ serait égal au rapport d'aspect ζ_n . Celui-ci est donné par la relation approchée établie à l'étape *iii*, pour la conductivité relative Q^* donnée par la relation (3.64), soit:

$$Q^* = \frac{3\sqrt{3}Q}{64\sqrt{2}gi(B/\psi)^5} = \frac{3 \times \sqrt{3} \times 6}{64 \times \sqrt{2} \times 9.81 \times 0.001 \times (8/0.780280115)^5} = 0.010332491$$

Le rapport d'aspect est :

$$\zeta_n = \bar{\zeta}_n = \alpha Q^{*\beta} = 1.41 \times 0.010332491^{0.264} = 0.43093732$$

viii. La valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc:

$$y_n = B \zeta_n^2 = 8 \times 0.43093732^2 = 1.48565582 \approx 1.5 \text{ m}$$

xi. Cette étape vise à vérifier les calculs effectués en déterminant le débit volume Q par application de la relation de Chézy.

$$Q = CA\sqrt{R_h i}$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (1.170):

$$A = \frac{2}{3} B^2 \zeta_n^3 = \frac{2}{3} \times 8^2 \times 0.43093732^3 = 3.4145309 \text{ m}^2$$

- Il est également aisé de montrer que le périmètre mouillé P du canal s'écrit :

$$P = \frac{B}{8} \left[4\zeta_n \sqrt{1+16\zeta_n^2} + \ln \left(4\zeta_n + \sqrt{1+16\zeta_n^2} \right) \right]$$

$$= \frac{8}{8} \times \left[4 \times 0.43093732 \times \sqrt{1+16 \times 0.43093732^2} + \ln \left(4 \times 0.43093732 + \sqrt{1+16 \times 0.43093732^2} \right) \right] = 4.747913129 \text{ m}$$

- Le rayon hydraulique R_h est:

$$R_h = \frac{A}{P} = \frac{3.4145309}{4.74791313} = 0.71916457 \text{ m}$$

- Le coefficient de résistance de Chézy, C est évalué par la relation (2.49),

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}}{0.78028012^{5/2}} = 65.8890339$$

Ainsi, le débit volume Q serait, selon Chézy :

$$\begin{aligned} Q &= CA\sqrt{R_h i} = 65.8890339 \times 3.4145309 \times \sqrt{0.71916457 \times 0.001} \\ &= 6.03334735 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

La valeur ainsi calculée de Q s'écarte de celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application de moins 0.6 % seulement. Ceci confirme la validité des calculs effectués au cours de l'exemple d'application considéré.

Exemple d'application 3.12.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.11, soient :

$$Q = 6 \text{ m}^3 / \text{s}; T_m = 4 \text{ m}; y_m = 2 \text{ m}; i = 0.001; \varepsilon = 0; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Il s'agit de déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal parabolique.

i. Le calcul de la dimension linéaire B , de Q^* et $\bar{\zeta}_n$ est le même que celui effectué au cours des étapes *i*, *ii* et *iii* de l'exemple d'application (3.11). Nous obtenons :

- $B = T_m^2 / y_m = 4^2 / 2 = 8 \text{ m}$
- $Q^* = \frac{3\sqrt{3}Q}{64\sqrt{2giB^5}} = \frac{3 \times \sqrt{3} \times 6}{64 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.001 \times 8^5}} = 0.01921227$
- $\bar{\zeta}_n = \alpha Q^{*\beta} = 1.487 \times 0.01921227^{0.272} = 0.50750973$

ii. La valeur du périmètre mouillé \bar{P} a déjà été calculée et vaut :

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{B}{8} \left[4\bar{\zeta}_n \sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2} + \ln \left(4\bar{\zeta}_n + \sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2} \right) \right] \\ &= \frac{8}{8} \times \left[4 \times 0.50750973 \times \sqrt{1+16 \times 0.50750973^2} \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(4 \times 0.50750973 + \sqrt{1+16 \times 0.50750973^2} \right) \right] = 6.05091742 \text{ m} \end{aligned}$$

Le nombre de Reynolds \bar{R} est :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 6}{6.05270292 \times 10^{-6}} = 6509545.17$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite :

$$\psi = 1.35 \left[-\log\left(\frac{8.5}{\bar{R}}\right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log\left(\frac{8.5}{6509545.17}\right) \right]^{-2/5} = 0.66444772$$

iv. Si l'on affectait au modèle rugueux de référence la dimension linéaire $\bar{B} = B/\psi$, alors le rapport d'aspect $\bar{\zeta}_n$ serait égal au rapport d'aspect ζ_n , pour la conductivité relative \bar{Q}^* donnée par la relation (3.64), soit:

$$\bar{Q}^* = \frac{3\sqrt{3}Q}{64\sqrt{2}gi(B/\psi)^5} = \frac{3 \times \sqrt{3} \times 6}{64 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.001 \times (8/0.66444772)^5}} = 0.00691402$$

Le rapport d'aspect est par suite:

$$\bar{\zeta}_n = \zeta_n = \alpha \bar{Q}^{*\beta} = 1.441 \times 0.00691402^{0.264} = 0.38757244$$

v. La profondeur normale y_n recherchée est:

$$y_n = B\bar{\zeta}_n^2 = 8 \times 0.38757244^2 = 1.2016992 \approx 1.20 \text{ m}$$

xii. Cette étape vise à vérifier la valeur donnée de la pente longitudinale i par application de la relation de *Darcy-Weisbach*.

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{1}{2gA^2} Q^2$$

Les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le canal considéré sont :

$$\bullet \quad A = \frac{2}{3} B^2 \zeta_n^3 = \frac{2}{3} \times 8^2 \times 0.38757244^3 = 2.48397598 \text{ m}^2$$

$$D_h = \frac{64}{3} \frac{B \zeta_n^3}{\left[4 \zeta_n \sqrt{1 + 16 \zeta_n^2} + \ln \left(4 \zeta_n + \sqrt{1 + 16 \zeta_n^2} \right) \right]} =$$

$$\bullet \quad \frac{64}{3} \times \frac{8 \times 0.38757244^3}{\left[4 \times 0.38757244 \times \sqrt{1 + 16 \times 0.38757244^2} + \ln \left(4 \times 0.38757244 + \sqrt{1 + 16 \times 0.38757244^2} \right) \right]} = 2.433862465 \text{ m}$$

$$\bullet \quad f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0.66444772^5}{16} = 0.00809439$$

La pente longitudinale i est par suite, selon la relation de *Darcy-Weisbach* :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0.00809439}{2.43386247} \times \frac{6^2}{2 \times 9.81 \times 2.48397598^2} = 0.000989 \approx 10^{-3}$$

Il s'agit bien de la valeur donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

III.5.3. Calcul de la profondeur normale par la relation de Manning

Le problème posé consiste donc à déterminer la profondeur normale y_n , ce qui revient à évaluer le rapport d'aspect ζ_n et par suite $y_n = B \zeta_n^2$. Lorsque l'on examine la forme de la relation (1.180), il apparaît que le rapport d'aspect ζ_n ne peut être déterminé de manière explicite. En pratique, les paramètres connus du problème sont la dimension linéaire B , la rugosité absolue ε , la pente géométrique i du canal, le débit volume Q et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

Le coefficient n de *Manning* n'est donc pas une donnée du problème et, de ce fait, la conductivité relative Q_M^* de la relation (1.180) ne peut être évaluée. Ainsi, la détermination du rapport d'aspect ζ_n par application de la relation implicite (1.180) n'est pas aisée, voire impossible sous sa forme actuelle.

Pour déterminer le rapport d'aspect ζ_n , sous ces conditions de problème, la méthode du modèle rugueux (*MMR*), peut être d'un grand utile.

En tenant compte des relations (3.59) et (3.60), la relation (2.68) s'écrit:

$$Q = 8\sqrt{2g} \frac{\left(\frac{2}{3}\bar{B}^2\bar{\zeta}_n^3\right)^{3/2}}{\left(\frac{\bar{B}}{8}\left[4\bar{\zeta}_n\sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2} + \ln\left(4\bar{\zeta}_n + \sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2}\right)\right]\right)^{1/2}} \sqrt{i} \quad (3.66)$$

Ou bien:

$$Q^* = \frac{\bar{\zeta}_n^{9/2}}{\left[4\bar{\zeta}_n\sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2} + \ln\left(4\bar{\zeta}_n + \sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2}\right)\right]^{1/2}} \quad (3.67)$$

Il faut noter c'est que la relation (3.67) est identique à la relation (3.63) obtenue par la transformation de la relation de *Darcy-Weisbach*. Ceci revient à dire que le calcul de la profondeur normale y_n par application de la relation de *Manning* s'effectue selon les mêmes étapes que celles indiquées dans le paragraphe III.5.2.

Etapes de calcul de la profondeur normale

Pour résoudre le problème de la détermination de la profondeur normale y_n par la relation (1.182), les étapes suivantes sont recommandées pour mener à bien le calcul:

- i. Avec les valeurs connues des paramètres T_m et y_m , la dimension linéaire B est déterminée en vertu de la relation (3.62).
- ii. Pour les valeurs connues des paramètres Q , i et B , calculer selon la relation (3.64) la conductivité relative Q^* .

- iii. Pour les valeurs connues de Q^* , α et β , on détermine par application de la relation (3.65) la valeur du rapport d'aspect $\bar{\zeta}_n$ dans le modèle rugueux de référence.
- iv. Connaissant les valeurs de B et $\bar{\zeta}_n$, les relations (3.59) et (3.60) permettent de calculer l'aire de la section mouillée \bar{A} et le périmètre mouillé \bar{P} respectivement. Ceci permet de déduire le diamètre hydraulique \bar{D}_h de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence ($\bar{D}_h = \bar{A} / \bar{P}$).
- v. Les valeurs connues des paramètres Q , \bar{P} et ν sont introduites dans la relation (2.15) pour l'évaluation du nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.
- vi. A partir des valeurs connues de ε / \bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- vii. Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique \bar{R}_h , appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de *Manning*.
- viii. Une fois la valeur du coefficient de n déterminée, calculons alors la conductivité relative Q_M^* dans le canal étudié, en application de la relation (1.181).
- viii. La valeur ainsi calculée de Q_M^* est insérée dans la relation approchée (1.182) pour l'évaluation du rapport d'aspect ζ_n .
- ix. Après avoir évalué ζ_n , la valeur de la profondeur normale y_n recherchée est alors déduite de la relation $y_n = B \zeta_n^2$.

Afin de mieux illustrer les étapes de calcul de la profondeur normale y_n par application de la formule de *Manning* et lorsque la dimension linéaire B est imposée, l'exemple d'application suivant est proposé.

Exemple d'application 3.13.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.11, soient:

$$Q = 6m^3/s; T_m = 4m; y_m = 2m; i = 10^{-3}; \varepsilon = 2.10^{-3}m; \nu = 10^{-6}m^2/s$$

Il s'agit de calculer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal parabolique étudié en ayant recours à la relation (1.182)

i. Le calcul de la dimension linéaire B , de Q^* et $\bar{\zeta}_n$ est le même que celui effectué au cours des étapes i, ii et iii de l'exemple d'application (3.11). Nous obtenons :

- $B = T_m^2 / y_m = 4^2 / 2 = 8m$
- $Q^* = \frac{3\sqrt{3}Q}{64\sqrt{2giB^5}} = \frac{3 \times \sqrt{3} \times 6}{64 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.001 \times 8^5}} = 0.01921227$
- $\bar{\zeta}_n = \alpha Q^{*\beta} = 1.487 \times 0.01921227^{0.272} = 0.50750973$

ii. Par suite, les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence sont :

- $\bar{A} = \frac{2}{3} B^2 \bar{\zeta}_n^3 = \frac{2}{3} \times 8^2 \times 0.50750973^3 = 5.57727207 m^2$
- $\bar{P} = \frac{B}{8} \left[4\bar{\zeta}_n \sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2} + \ln \left(4\bar{\zeta}_n + \sqrt{1+16\bar{\zeta}_n^2} \right) \right]$
 $= \frac{8}{8} \times \left[4 \times 0.50750973 \times \sqrt{1+16 \times 0.50750973^2} + \ln \left(4 \times 0.50750973 + \sqrt{1+16 \times 0.50750973^2} \right) \right] = 6.05091742 m$
- $\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}} = 3.68689353 m$
- $\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}\nu} = \frac{4 \times 6}{6.05270292 \times 10^{-6}} = 6509545.17$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite :

$$\begin{aligned}\psi &= 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.002 / 3.68689353}{4.75} + \frac{8.5}{6509545.17} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0.78028012\end{aligned}$$

- iv. Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique $\overline{R}_h = \overline{D}_h / 4 = 0.92172338m$, appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de Manning, soit:

$$n = \frac{\psi^{8/3} \overline{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} = \frac{0.78028012^{8/3} \times 0.92172338^{1/6}}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}} = 0.01436576$$

- v. Une fois la valeur du coefficient de n ainsi déterminée, calculons alors la conductivité relative Q_M^* dans le canal étudié, en application de la relation (1.181), soit:

$$Q_M^* = \frac{nQ}{B^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0.014365764 \times 6}{8^{8/3} \sqrt{0.001}} = 0.010647313$$

- vi. Appliquons la relation approchée (1.182) pour l'évaluation explicite du rapport d'aspect ζ_n , soit:

$$\zeta_n = 9Q_M^{*\delta} = 1.35 \times 0.010647313^{0.25} = 0.433654412$$

La valeur recherchée de la profondeur normale y_n est donc :

$$y_n = B\zeta_n^2 = 8 \times 0.433654412^2 = 1.504449191 \approx 1.50 \text{ m}$$

Le calcul effectué au cours de l'exemple d'application 3.11 a conduit à la valeur de la profondeur normale $y_n = 1.50 \text{ m}$. Nous pouvons donc noter que l'écart relatif entre les valeurs de la profondeur normale de l'exemple d'application 3.11 et du présent exemple n'est que de 0.3 % seulement, ce qui indique que les calculs que nous venons d'effectuer sont tout à fait acceptables.

III.6. CANAL A SURFACE LIBRE DE FORME EN U

III.6.1. Caractéristiques du canal

Le canal considéré est schématiquement représenté sur la figure 3.6. Il est caractérisé par les dimensions linéaires D et y_n . La forme du canal considéré est définie par le paramètre de forme $\eta_n = y_n / D$, appelé aussi rapport d'aspect.

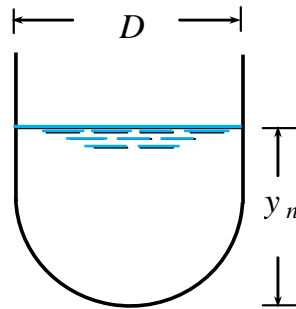


Figure 3.6: Schéma de définition du canal ouvert de forme en U.

Le canal considéré, dont la paroi interne est caractérisé par la rugosité absolue ε , écoule un débit volume Q du liquide de viscosité cinématique ν , sous une pente longitudinale i .

L'aire de la section mouillée du canal est égale à la somme des aires des sections rectangulaire et semi circulaire (Figure 3.6), soit :

$$A = \left(y_n - \frac{D}{2}\right)D + \frac{\pi}{8}D^2 \quad (3.68)$$

Ou bien :

$$A = D^2(\eta_n - C_0) \quad (3.69)$$

Avec:

$$C_0 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0.107300918$$

Le périmètre mouillé P est égal à la somme des périmètres mouillés de la partie rectangulaire et de la forme semi circulaire (Figure 3.6), soit:

$$P = 2\left(y_n - \frac{D}{2}\right) + \frac{\pi}{2}D \quad (3.70)$$

Ou bien :

$$P = D(2\eta_n + C_1) \quad (3.71)$$

Avec:

$$C_1 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0.570796327$$

Le diamètre hydraulique est donc:

$$D_h = 4 \frac{A}{P} = 4 \frac{D^2(\eta_n - C_0)}{D(2\eta_n + C_1)} \quad (3.72)$$

Soit :

$$D_h = 4 \frac{D(\eta_n - C_0)}{(2\eta_n + C_1)} \quad (3.73)$$

III.6.2. Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux de référence du canal est représenté schématiquement sur la figure 3.7. Il est caractérisé par les dimensions linéaires \bar{D} et \bar{y}_n et le paramètre de forme $\bar{\eta}_n = \bar{y}_n / \bar{D}$ du modèle rugueux de référence.

Le modèle rugueux écoule le même débit volume que celui du canal étudié et sous la même pente géométrique i , soit :

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i$$

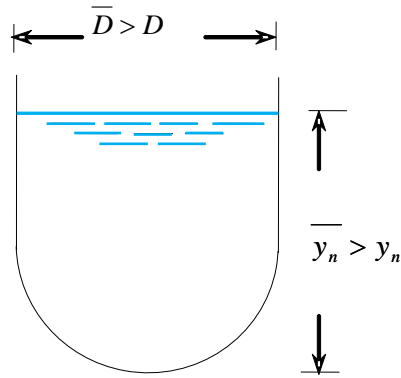


Figure 3.7: Schéma de définition du modèle rugueux de référence du canal ouvert de forme en U.

L'aire de la section mouillée du modèle rugueux de référence est :

$$\bar{A} = \bar{D}^2 (\bar{\eta}_n - C_0) \quad (3.74)$$

La relation (3.69) a été déduite de la relation (3.74) en remplaçant A par \bar{A} , D par \bar{D} et η_n par $\bar{\eta}_n$.

L'expression du périmètre mouillé du modèle rugueux de référence peut également être déduite de la relation (3.71), en y remplaçant P par \bar{P} , D par \bar{D} et η_n par $\bar{\eta}_n$, soit:

$$\bar{P} = \bar{D}(2\bar{\eta}_n + C_1) \quad (3.75)$$

Le diamètre hydraulique \bar{D}_h est par suite :

$$\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}} = 4 \frac{\bar{D}^2 (\bar{\eta}_n - C_0)}{\bar{D}(2\bar{\eta}_n + C_1)}$$

Soit :

$$\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{D}(\bar{\eta}_n - C_0)}{(2\bar{\eta}_n + C_1)} \quad (3.76)$$

La pente longitudinale i est régi par la relation (2.11) dans laquelle \bar{A} et \bar{P} sont remplacés par les relations (3.74) et (3.75) respectivement. Pour $\bar{Q} = Q; \bar{i} = i$, nous obtenons:

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{D}(2\bar{\eta}_n + C_1)}{\bar{D}^6 (\bar{\eta}_n - C_0)^3} Q^2 \quad (3.77)$$

La relation (3.77) permet aussi d'écrire que :

$$\bar{D} = (128)^{-1/5} \left(\frac{(2\bar{\eta}_n + C_1)}{(\bar{\eta}_n - C_0)^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (3.78)$$

La profondeur normale \bar{y}_n de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est telle que $\bar{y}_n = \bar{\eta}_n \bar{D}$ et qui s'écrit, en tenant compte de la relation (3.78):

$$\bar{y}_n = (128)^{-1/5} \bar{\eta}_n \left(\frac{(2\bar{\eta}_n + C_1)}{(\bar{\eta}_n - C_0)^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (3.79)$$

Les relations (3.78) et (3.79) permettent de calculer les dimensions linéaires \bar{D} et \bar{y}_n du modèle rugueux de référence représenté par la figure 3.7, à partir des valeurs connues du débit volume Q , de la pente géométrique i et du paramètre de forme $\bar{\eta}_n$. Les effets de la viscosité cinématique ν du liquide ne sont pas pris en considération, puisque l'écoulement est ou supposé être dans le domaine turbulent rugueux.

III.6.3. Calcul de la profondeur normale par la relation de Darcy-Weisbach

III.6.3.1. Le paramètre de forme η_n est imposé

Le problème consiste à déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme en U pour les valeurs connues du débit volume Q , de la rugosité absolue ε , de la pente géométrique i , de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement et le rapport d'aspect η_n ou paramètre de forme. Dans ce cas, le diamètre D du canal n'est plus une donnée du problème et seul le rapport d'aspect η_n est imposé.

Pour les données de ce problème, il est nécessaire de considérer que le paramètre de forme $\overline{\eta_n} = \overline{y_n} / \overline{D}$ du modèle rugueux de référence est égal au paramètre de forme $\eta_n = y_n / D$ du canal étudié, soit:

$$\overline{\eta_n} = \frac{\overline{y_n}}{\overline{D}} = \eta_n = \frac{y_n}{D} \quad (3.80)$$

La relation (3.78) s'écrit alors:

$$\overline{D} = (128)^{-1/5} \left(\frac{(2\eta_n + C_1)}{(\eta_n - C_0)^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (3.81)$$

A partir des valeurs connues des paramètres $\eta_n, Q, i, \varepsilon$ et ν , les étapes suivantes sont recommandées pour déterminer la profondeur normale recherchée y_n de l'écoulement dans le canal de forme en U :

- i. La première étape consiste à déterminer la dimension linéaire \overline{D} du modèle rugueux de référence, par application de la relation (3.81).
- ii. Le périmètre mouillé \overline{P} est déterminé selon la relation (3.75) pour $\eta_n = \overline{\eta_n}$ et pour les valeurs connues de \overline{D} et η_n .

- iii. Le diamètre hydraulique \overline{D}_h du modèle rugueux de référence est calculé selon la relation (3.76).
- iv. Le nombre de Reynolds \overline{R} est ensuite évalué par application de la relation (2.15).
- v. A partir des valeurs connues de $\varepsilon / \overline{D}_h$ et de \overline{R} , la relation (2.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- vi. Avec un écart relatif maximal de 0,6%, la dimension linéaire D recherchée est déterminée selon la relation $D = \psi \overline{D}$.
- vii. Enfin la profondeur normale y_n est aisément obtenue par application de la relation $y_n = \eta_n D$ pour les valeurs connues des paramètres D et η_n .

L'exemple d'application suivant est proposé pour mieux illustrer les étapes de calcul ci-dessus indiquées de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme en U et lorsque le rapport d'aspect η_n est imposé.

Exemple d'application 3.14.

Le canal à surface libre en forme en U représenté par la figure 3.6 doit être dimensionné pour écouler un débit volume $Q = 1 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ sous une pente géométrique $i = 0.0001$. Sachant que la rugosité absolue caractérisant l'état des parois internes du canal est $\varepsilon = 3.10^{-3} \text{ m}$ et que le paramètre de forme est $\eta_n = 0.65$, déterminez la valeur de la profondeur normale y_n de l'écoulement.

- i. La relation (3.81) permet de déterminer la dimension linéaire \overline{D} du modèle rugueux de référence, soit:

$$\begin{aligned}\bar{D} &= (128)^{-1/5} \left(\frac{(2\eta_n + C_1)}{(\eta_n - C_0)^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \\ &= (128)^{-1/5} \left(\frac{(2 \times 0.65_n + 0.570796327)}{(0.65 - 0.107300918)^3} \right)^{1/5} \left(\frac{1^2}{9.81 \times 0.0001} \right)^{1/5} = 2.476817767 \text{ m}\end{aligned}$$

ii. Le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux de référence est:

$$\bar{P} = \bar{D}(2\eta_n + C_1) = 2.476817767 \times (2 \times 0.65 + 0.570796327) = 4.63362158 \text{ m}$$

Ainsi, le diamètre hydraulique \bar{D}_h du modèle rugueux de référence est, selon la relation (3.76):

$$\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{D}(\eta_n - C_0)}{(2\eta_n + C_1)} = 4 \times \frac{2.476817767 \times (0.65 - 0.107300918)}{(2 \times 0.65 + 0.570796327)} = 2.873999073 \text{ m}$$

iii. Le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, en vertu de la relation (2.15):

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 1}{4.63362158 \times 10^{-6}} = 863255.6481$$

iv. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\begin{aligned}\psi &= 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.003 / 2.873999073}{4.75} + \frac{8.5}{863255.6481} \right) \right]^{-2/5} = 0.805266881\end{aligned}$$

v. Avec 0.4% d'écart au maximum, la dimension linéaire D recherchée est:

$$D = \psi \bar{D} = 0.805266881 \times 2.476817767 = 1.994499317 \approx 2 \text{ m}$$

La profondeur normale y_n demandée est alors :

$$y_n = \eta_n D = 0.65 \times 1.99449931 = 1.29642455 \approx 1.3 \text{ m}$$

vi. Si une meilleure précision est souhaitée, alors la dimension linéaire D peut être calculée en faisant appel aux relations (2.26) et (2.34). L'expression de dimension linéaire D est alors:

$$D = \bar{D} \left[-\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{3.7\psi} + \frac{10.04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) \right]^{-2/5} =$$

$$2.476817767 \times \left[-\frac{1}{2} \times \log \left(\frac{0.003 / 2.873999073}{4.75 \times 0.805266881} + \frac{10.04}{0.805266881^{3/2} \times 863255.6481} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 1.97128001 \approx 1.971 \text{ m}$$

ix. La présente étape vise à vérifier la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé, par application de la relation de Chézy.

$$Q = CA\sqrt{R_h i}$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (3.69):

$$A = D^2(\eta_n - C_0) = 1.99449931^2 \times (0.65 - 0.107300918) = 2.158871885 \text{ m}^2$$

- Le périmètre mouillé P du canal est :

$$P = D(2\eta_n + C_1) = 1.99449931 \times (2 \times 0.65 + 0.570796327) = 3.731301996 \text{ m}$$

- Le rayon hydraulique R_h est:

$$R_h = \frac{A}{P} = 0.578584067 \text{ m}$$

- Le coefficient de résistance de *Chézy*, C est évalué par la relation (2.49), soit:

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}}{0.805266881^{5/2}} = 60.89615812$$

Le débit volume Q serait alors:

$$\begin{aligned} Q &= CA\sqrt{R_h i} = 60.89615812 \times 2.158871885 \times \sqrt{0.578584067 \times 0.0001} \\ &= 1 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Il s'agit bien de la valeur de Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

III.6.3.2. La dimension linéaire D est imposée

On considère un modèle rugueux de référence de forme en U dont la dimension linéaire est $\bar{D} = D$, écoulant un débit $\bar{Q} = Q$ sous la pente longitudinale $\bar{i} = i$. La dimension linéaire D , le débit volume Q et la pente longitudinale i sont donc identiques dans le canal étudié et dans le modèle rugueux.

Le paramètre de forme ou rapport d'aspect de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est donc tel que $\eta_n \neq \bar{\eta}_n$, correspondant à $y_n \neq \bar{y}_n$.

L'application de la relation de *Darcy-Weisbach* au modèle rugueux de référence à conduit à l'établissement de la relation (3.81), soit :

$$\bar{D} = (128)^{-1/5} \left(\frac{(2\bar{\eta}_n + C_1)}{(\bar{\eta}_n - C_0)^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5}$$

Soit, après simplifications:

$$\frac{Q^2}{128gi\bar{D}^5} = \frac{(\bar{\eta}_n - C_0)^3}{2\bar{\eta}_n + C_1} \tag{3.82}$$

Introduisons la conductivité relative:

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2giD^5}} \quad (3.83)$$

La relation (3.82) prend alors la forme:

$$\bar{Q}^{*2} = \frac{(\bar{\eta}_n - C_0)^3}{2\bar{\eta}_n + C_1} \quad (3.84)$$

En posant :

$$X = \bar{\eta}_n - C_0$$

La relation précédente s'écrit alors :

$$X^3 - 2X\bar{Q}^{*2} - \frac{\pi}{4}\bar{Q}^{*2} = 0 \quad (3.85)$$

Nous obtenons ainsi une équation de troisième ordre en X , sans terme du second degré.

Son discriminant est:

$$\Delta = \bar{Q}^{*4} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\bar{Q}^* \right) \left(\frac{\pi}{8} + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\bar{Q}^* \right)$$

Ainsi si :

- $\bar{Q}^* \geq \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$, alors $\Delta \leq 0$ La racine réelle de l'équation du troisième degré en

X est alors :

$$X = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\bar{Q}^* \cos(\beta/3) \quad (3.86)$$

où l'angle β est tel que:

$$\cos(\beta) = \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} \bar{Q}^{*-1} \quad (3.87)$$

En tenant compte du changement de variables opéré précédemment, la solution de l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}_n$ est donc:

$$\bar{\eta}_n = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \bar{Q}^* \cos(\beta/3) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (3.88)$$

- $\bar{Q}^* \leq \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$, alors $\Delta \geq 0$. La racine réelle de l'équation du troisième ordre en

X est alors:

$$X = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \bar{Q}^* \operatorname{ch}(\beta/3) \quad (3.89)$$

où l'angle β est tel que :

$$\operatorname{ch}(\beta) = \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} \bar{Q}^{*-1} \quad (3.90)$$

La solution de l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}_n$ est:

$$\bar{\eta}_n = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \bar{Q}^* \operatorname{ch}(\beta/3) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \quad (3.91)$$

Afin de mieux préciser cette démarche de calcul qui consiste à évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme en U, les étapes suivantes sont recommandées:

- i. Pour les valeurs connues des paramètres Q , i et D , calculons la conductivité relative \bar{Q}^* dans le modèle rugueux, selon la relation (3.83), pour $\bar{D} = D$:

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2gi\bar{D}^5}} = \frac{Q}{8\sqrt{2giD^5}}$$

- ii. Cette conductivité relative \bar{Q}^* doit être ensuite comparée à la valeur $\frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$, ce qui permettra de choisir l'une des relations (3.88) ou (3.91) pour le calcul explicite du rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux.

- iii. Admettons encore que $\bar{D} = D$. Pour les valeurs connues de la dimension linéaire \bar{D} et le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$, les relations (3.75), (3.76) et (2.15) permettent d'évaluer respectivement le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de Reynolds \bar{R} .

- iv. A partir des valeurs connues de ε , \bar{D}_h et \bar{R} , la relation (2.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

- v. Une fois la valeur de ψ déterminée, il faut maintenant affecter à l'écoulement dans le modèle rugueux la dimension linéaire $\bar{D} = D/\psi$ et dont la valeur est bien déterminée, alors les rapports d'aspect $\bar{\eta}_n$ et η_n deviennent identiques. Ceux-ci sont donnés par les relations (3.88) ou (3.91) selon la valeur de la conductivité relative \bar{Q}^* dont la valeur doit être déterminée par application de la relation :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2gi\bar{D}^5}} = \frac{Q}{8\sqrt{2gi(D/\psi)^5}}$$

- vi. Une fois le rapport d'aspect $\eta_n = \bar{\eta}_n$ déterminé, la valeur de la profondeur normale y_n recherchée est déduite de la relation $y_n = \eta_n b$.

Afin d'illustrer la démarche de calcul que nous venons d'exposer et qui mène au calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement, l'exemple d'application suivant est proposé. Par souci de comparaison, nous reprenons les données de l'exemple d'application 3.14

Exemple d'application 3.15.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.14, soient:

$$Q = 1m^3 / s; D = 2m; i = 10^{-4}; \varepsilon = 10^{-4} m; \nu = 10^{-6} m^2 / s$$

La dimension linéaire D a été évaluée au cours de l'exemple d'application 3.14 et elle est imposée dans le présent exemple. Il s'agit alors d'évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal de forme en U.

- i. Admettons dans un premier temps que la dimension linéaire \bar{D} de l'écoulement dans le modèle rugueux soit la même que celle D dans le canal étudié.

Calculons alors la conductivité relative \bar{Q}^* en application de la relation (3.83):

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2gi\bar{D}^5}} = \frac{Q}{8\sqrt{2giD^5}} = \frac{1}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.0001 \times 2^5}} = 0.49886786 < \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$$

- ii. En application de la relation (3.90), nous déduisons que:

$$ch(\beta) = \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} \bar{Q}^{*-1} = \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} \times 0.49886786^{-1} = 1.446143041$$

L'angle β est alors:

$$\beta = \arg sh(1.446143041) = 0.912608081 \text{ radians}$$

Par suite:

$$ch(\beta/3) = ch(0.912608081/3) = 1.046627555$$

iii. Le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux est:

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_n &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} Q^* ch(\beta/3) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 0.498867857 \times 1.046627555 \right) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \\ &= 0.959933752\end{aligned}$$

iv. Par suite, les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence sont :

- $\bar{P} = \bar{D}(2\bar{\eta}_n + \frac{\pi}{2} - 1) = 2 \times (2 \times 0.959933752 + \frac{\pi}{2} - 1) = 4.981327663 \text{ m}$
- $\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{D}(\bar{\eta}_n - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8})}{(2\bar{\eta}_n + \frac{\pi}{2} - 1)} = 4 \times \frac{2 \times (0.959933752 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8})}{(2 \times 0.959933752 + \frac{\pi}{2} - 1)} = 2.738652477 \text{ m}$
- $\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}\bar{V}} = \frac{4 \times 1}{4.981327663 \times 10^{-6}} = 802998.7727$

v. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\begin{aligned}\psi &= 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.003 / 2.738652477}{4.75} + \frac{8.5}{802998.7727} \right) \right]^{-2/5} = 0.807169297\end{aligned}$$

vi. Si l'on affectait au modèle rugueux la dimension linéaire \bar{D} :

$$\bar{D} = D / \psi = 2 / 0.807169297 = 2.477794941 \text{ m}$$

alors l'équation du troisième degré en $\bar{\eta}_n$ donnerait une valeur de $\bar{\eta}_n$ égale à celle de la section mouillée de l'écoulement dans le canal étudié, soit $\bar{\eta}_n = \eta_n$. Cette nouvelle valeur de $\bar{\eta}_n$ doit être calculée pour la conductivité relative \bar{Q}^* exprimée par la relation (3.83):

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2gi\bar{D}^5}} = \frac{Q}{8\sqrt{2gi(D/\psi)^5}} = \frac{1}{8 \times \sqrt{2} \times 9.81 \times 0.0001 \times 2.477794941^5}$$

$$= 0.292009585$$

vii. Cette conductivité relative est aussi inférieure à $\frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$ et l'angle β doit donc être calculé par application de la relation (3.90). Soit :

$$ch(\beta) = \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} \bar{Q}^{*-1} = \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} \times 0.292009585^{-1} = 2.470584244$$

Soit :

$$\beta = 1.553870316 \text{ radians}$$

Selon la relation (3.91), le rapport d'aspect est tel que:

$$\eta_n = \bar{\eta}_n = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \bar{Q}^{*-1} ch(\beta/3) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 0.292009585 \times ch(1.553870316/3) \right) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = 0.649557877 \approx 0.65$$

La valeur ainsi calculée de η_n correspond bien à celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application (3.14).

viii. La profondeur normale recherchée y_n est par suite:

$$y_n = \eta_n D = 0.649557877 \times 2 = 1.299115755 \approx 1.3 \text{ m}$$

ix. Vérifions nos calculs en déterminant la pente longitudinale i du canal par application de la relation de *Darcy-Weisbach* :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{1}{2gA^2} Q^2$$

Les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le canal considéré sont :

- $A = D^2(\eta_n - C_0) = 2^2 \times (0.649557877 - 0.107300918) = 2.169027833 \text{ m}^2$

- $D_h = 4 \frac{D(\eta_n - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8})}{(2\eta_n + \frac{\pi}{2} - 1)} = 4 \times \frac{2 \times (0.649557877 - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8})}{(2 \times 0.649557877 + \frac{\pi}{2} - 1)} = 2.319924938 \text{ m}$

- $f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0.807169297^5}{16} = 0.021414266$

La pente longitudinale i est donc, selon la relation de *Darcy-Weisbach*:

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0.021414266}{2.319924938} \times \frac{1^2}{2 \times 9.81 \times 2.169027833^2} = 10^{-4}$$

Il s'agit bien de la valeur de i donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

Exemple d'application 3.16.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.15, soient:

$$Q = 1 \text{ m}^3 / \text{s}; D = 2 \text{ m}; i = 0.0001; \varepsilon = 0; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Il s'agit alors d'évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement.

i. Les valeurs des paramètres \bar{Q}^* , β et $\bar{\eta}_n$ sont identiques à celles calculées au cours des étapes *i,ii* et *iii* de l'exemple d'application (3.15). Nous obtenons :

- $\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2giD^5}} = \frac{Q}{8\sqrt{2giD^5}} = \frac{1}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.0001 \times 2^5}} = 0.49886786 < \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$

- $\beta = 0.912608081 \text{ radians}$

Ainsi:

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_n &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} Q^* ch(\beta/3) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 0.498867857 \times 1.046627555 \right) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \\ &= 0.959933752\end{aligned}$$

ii. Par suite, les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence sont :

- $\bar{P} = \bar{D}(2\bar{\eta}_n + \frac{\pi}{2} - 1) = 2 \times (2 \times 0.959933752 + \frac{\pi}{2} - 1) = 4.981327663 \text{ m}$
- $\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 1}{4.981327663 \times 10^{-6}} = 802998.7727$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite :

$$\psi = 1.35 \left[-\log\left(\frac{8.5}{\bar{R}}\right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log\left(\frac{8.5}{802998.7727}\right) \right]^{-2/5} = 0.710568908$$

iv. Si l'on affectait au modèle rugueux la dimension linéaire \bar{D} :

$$\bar{D} = D/\psi = 2/0.710568908 = 2.814646091 \text{ m}$$

Alors le rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle serait égal au rapport d'aspect η_n dans le canal étudié, pour la conductivité relative \bar{Q}^* donnée par la relation (3.83). Soit:

$$\begin{aligned}\bar{Q}^* &= \frac{Q}{8\sqrt{2gi\bar{D}^5}} = \frac{Q}{8\sqrt{2gi(D/\psi)^5}} = \frac{1}{8 \times \sqrt{2} \times 9.81 \times 0.0001 \times 2.814646091^5} \\ &= 0.21324947\end{aligned}$$

iv. Cette conductivité relative est aussi inférieure à $\frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$ et l'angle β doit donc être calculé par application de la relation (3.90), soit :

$$ch(\beta) = \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} Q^{*-1} = \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} \times 0.21324947^{-1} = 3.397783872$$

Soit :

$$\beta = 1.893876803 \text{ radians}$$

Selon la relation (3.91), le rapport d'aspect est tel que :

$$\begin{aligned} \eta_n = \bar{\eta}_n &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} Q^* ch(\beta/3) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 0.212324947 \times ch(1.893876803/3) \right) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = 0.525441527 \approx 0.53 \end{aligned}$$

v. La profondeur normale recherchée y_n est par suite:

$$y_n = \eta_n D = 0.525441527 \times 2 = 1.05088305 \approx 1.05 \text{ m}$$

vi. Au cours de cette étape, vérifions nos calculs en déterminant la pente longitudinale i par application de la relation de *Darcy-Weisbach* :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{1}{2gA^2} Q^2$$

Les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le canal considéré sont :

- $A = D^2(\eta_n - C_0) = 2^2 \times (0.525441527 - 0.107300918) = 1.672562436 \text{ m}^2$
- $D_h = 4 \frac{D(\eta_n - C_0)}{(2\eta_n + C_1)} = 4 \times \frac{2 \times (0.525441527 - 0.107300918)}{(2 \times 0.525441527 + 0.570796327)} = 2.062753532 \text{ m}$
- $f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0.710568908^5}{16} = 0.011321684$

La pente longitudinale i serait alors :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0.011321684}{2.062753532} \times \frac{1^2}{2 \times 9.81 \times 1.672562436^2} = 10^{-4}$$

Nous obtenons bien la valeur de i donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

III.6.4. Calcul de la profondeur normale par la relation de Manning

Selon Manning, le débit volume Q est exprimé par :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i}$$

En tenant compte des relations (3.69) et (3.71) et du fait que le rayon hydraulique est $R_h = A/P$, la relation précédente devient alors :

$$Q = \frac{1}{n} \frac{[D^2(\eta_n - C_0)]^{5/3}}{[D(2\eta_n + C_1)]^{2/3}} \sqrt{i} \quad (3.92)$$

En introduisant la conductivité relative Q_M^* , tel que:

$$Q_M^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} \quad (3.93)$$

La relation (3.92) s'écrit alors:

$$Q_M^{*3/5} = \frac{(\eta_n - C_0)}{(2\eta_n + C_1)^{2/5}} \quad (3.94)$$

Le problème posé consiste donc à déterminer la profondeur normale y_n , ce qui revient à évaluer le rapport d'aspect η_n et par suite $y_n = D\eta_n$. Lorsque l'on examine la forme de la relation (3.94), il apparaît que le rapport d'aspect η_n ne peut être déterminé de manière explicite.

Plusieurs méthodes peuvent être proposées pour résoudre l'équation (3.94) et nous présenterons les deux principales d'entre-elles.

1. Résolution par la méthode numérique

L'une des méthodes les mieux adaptées est sans doute celle basée sur un calcul numérique, pour peu que la convergence soit rapide. Cette approche est illustrée à travers ce qui suit.

Avant d'appliquer cette méthode, écrivons la relation (3.94) sous la forme suivante:

$$\chi = Q_M^{*3/5} (2(\chi + C_0) + C_1)^{2/5} \quad (3.95)$$

Ou:

$$\chi = \eta_n - C_0 \quad (3.96)$$

La méthode numérique consiste à appliquer à la relation (3.95) un procédé itératif après avoir choisi une première valeur de χ .

Admettons que cette première valeur de χ soit χ_0 . Nous obtenons alors χ_1 tel que:

$$\chi_1 = Q_M^{*3/5} (2(\chi_0 + C_0) + C_1)^{2/5}$$

$$\chi_2 = Q_M^{*3/5} (2(\chi_1 + C_0) + C_1)^{2/5} \dots \text{Et ainsi de suite}$$

On arrête le processus itératif lorsque les valeurs calculées de χ_i et χ_{i+1} sont suffisamment proches.

La rapidité de convergence du processus itératif précédemment décrit est nettement accélérée lorsque la valeur initiale de z_o est $\chi_0 = C_0$. Cette démarche permet d'évaluer χ avec une erreur relative extrêmement faible, à l'issue de la huitième étape de calcul.

Une fois la valeur finale de χ est déterminé, le rapport d'aspect η_n du canal étudié est élaboré à partir de l'équation (3.96) en tant que:

$$\eta_n = \chi + C_0 \quad (3.97)$$

En pratique, les paramètres connus du problème sont la dimension linéaire D , la rugosité absolue ε , la pente géométrique i du canal, le débit volume Q et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Le coefficient n de *Manning* n'est donc pas une donnée du problème et, de ce fait, la conductivité relative Q_M^* de la relation (3.95) ne peut être évaluée. Pour contourner cette difficulté, le recours à la méthode du modèle rugueux de référence est d'une grande utilité.

2. Résolution par la méthode du modèle rugueux

Au cours du chapitre II, nous avons établi la relation (2.68) qui regroupe les paramètres de l'écoulement dans le modèle rugueux par l'usage de la formule de *Manning*. Pour rappel, cette relation est:

$$Q = 8\sqrt{2g} \frac{A^{-3/2}}{P^{1/2}} \sqrt{i}$$

Appliquons la relation précédente, sous les conditions suivantes:

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i; \bar{D} = D \quad \text{Ceci implique nécessairement que: } \bar{\eta}_n \neq \eta_n$$

En tenant compte des relations (3.74) et (3.75), nous obtenons alors:

$$Q = 8\sqrt{2g} \frac{\left[\bar{D}^2 (\bar{\eta}_n - C_0) \right]^{3/2}}{\left[\bar{D} (2\bar{\eta}_n + C_1) \right]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (3.98)$$

Ou bien:

$$\bar{Q}^{*2} = \frac{(\bar{\eta}_n - C_0)^3}{2\bar{\eta}_n + C_1} \quad (3.99)$$

Où :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2gi}\bar{D}^5}$$

Il faut noter c'est que la relation (3.99) est identique à la relation (3.84) obtenue par la transformation de la relation de *Darcy-Weisbach*. Ceci revient à dire que le calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement par application de la relation de *Manning* s'effectue selon les mêmes étapes que celles indiquées dans le paragraphe III.6.3.2

Étapes de calcul de la profondeur normale

Afin de calculer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal considéré, les étapes suivantes sont recommandées, à condition que les paramètres Q , D , i , ε et ν soient donnés.

- i. Pour les valeurs connues des paramètres Q , i et D et en admettant dans un premier temps que $\bar{D} = D$, calculer selon la relation (3.83) la conductivité relative:

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2gi\bar{D}^5}} = \frac{Q}{8\sqrt{2giD^5}}$$

- ii. Cette conductivité relative \bar{Q}^* doit être ensuite comparée à la valeur $\frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$, ce qui permettra de choisir l'une des relations (3.88) ou (3.91) pour le calcul explicite du rapport d'aspect $\bar{\eta}_n$ dans le modèle rugueux.
- iii. Pour les valeurs ainsi connues des paramètres $\bar{D} = D$ et de $\bar{\eta}_n$, les relations (3.75), (3.76) et (2.15) permettent d'évaluer respectivement le périmètre mouillé \bar{P} , le diamètre hydraulique \bar{D}_h et le nombre de Reynolds \bar{R} .
- iv. Les valeurs connues des paramètres ε , \bar{D}_h et \bar{R} seront introduites dans la relation (2.35) pour la détermination du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- v. Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique \bar{R}_h , appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de Manning.
- vi. Une fois la valeur du coefficient de n déterminée, calculons alors la conductivité relative Q_M^* dans le canal étudié, en application de la relation (3.93).
- vii. Cette nouvelle valeur de la conductivité relative permet de calculer, selon la relation (3.95) la valeur de χ (pour $\chi_0 = C_0$).

- viii. En introduisant cette valeur de χ dans l'équation (3.97), on obtient le rapport d'aspect η_n .
- ix. Une fois le rapport d'aspect η_n déterminé, la valeur de la profondeur normale y_n recherchée est déduite de la relation $y_n = \eta_n D$.

Afin de mieux apprécier les étapes de calcul ci-dessus indiquées de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal considéré par l'usage de la relation de *Manning*, considérons alors l'exemple d'application suivant.

Exemple d'application 3.17.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.15, soient:

$$Q = 6m^3 / s; D = 2m; i = 10^{-4}; \varepsilon = 10^{-4} m; \nu = 10^{-6} m^2 / s$$

Il s'agit alors d'évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans le canal étudié.

- i. Le calcul des paramètres \bar{Q}^* , de β et $\bar{\eta}_n$ est le même que celui effectué au cours des étapes *i*, *ii* et *iii* de l'exemple d'application (3.15). Nous obtenons :

- $$\bar{Q}^* = \frac{Q}{8\sqrt{2giD^5}} = \frac{Q}{8\sqrt{2giD^5}} = \frac{1}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.0001 \times 2^5}} = 0.49886786 < \frac{3\pi\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}$$
- $$\beta = 0.912608081 \text{ radians}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_n &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \bar{Q}^* \operatorname{ch}(\beta/3) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 0.498867857 \times 1.046627555 \right) + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} \\ &= 0.959933752 \end{aligned}$$

- ii. Par suite, les caractéristiques hydrauliques de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence sont :

- $\bar{P} = \bar{D}(2\eta_n + C_1) = 2 \times (2 \times 0.959933752 + 0.570796327) = 4.981327663 \text{ m}$

- $\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{D}(\eta_n - C_0)}{(2\eta_n + C_1)} = 4 \times \frac{2 \times (0.959933752 - 0.107300918)}{(2 \times 0.959933752 + 0.570796327)} = 2.738652477 \text{ m}$

- $\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}V} = \frac{4 \times 1}{4.981327663 \times 10^{-6}} = 802998.7727$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\begin{aligned} \psi &= 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.003 / 2.738652477}{4.75} + \frac{8.5}{802998.7727} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0.807169297 \end{aligned}$$

iv. Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique $\bar{R}_h = \bar{D}_h / 4 = 0.68466312 \text{ m}$, appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de Manning, soit:

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} = \frac{0.807169297^{8/3} \times 0.68466312^{1/6}}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}} = 0.014963931$$

v. La conductivité relative Q_M^* est, selon la relation (3.93)

$$Q_M^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0.014963931 \times 1}{2^{8/3} \times \sqrt{0.0001}} = 0.235667142$$

vi. La valeur finale de χ est telle que:

$$\chi_7 \cong \chi_8 = \chi = 0.53885967$$

Le rapport d'aspect η_n dans le canal étudié doit être évalué par la relation (3.97), soit:

$$\eta_n = \chi + C_0 = 0.53885967 + 0.107300918 = 0.646160587$$

iv. Finalement, la profondeur normale y_n recherchée est :

$$y_n = \eta_n D = 0.646160587 \times 2 = 1.29232117 \approx 1.3 \text{ m}$$

La vérification des calculs peut être également effectuée par la détermination du débit volume Q par application de la relation générale de *Achour et Bedjaoui* (2006a). Cette relation générale est applicable à l'ensemble des profils géométriques connus. Selon *Achour et Bedjaoui* (2006a), le débit volume Q est donné par la relation :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right)$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (3.69):

$$\begin{aligned} A &= D^2 (\eta_n - C_0) = 2^2 \times (0.646160587 - 0.107300918) \\ &= 2.155438676 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

- Le périmètre mouillé P du canal est :

$$P = D(2\eta_n + C_1) = 2 \times (2 \times 0.646160587 + 0.570796327) = 3.726235002 \text{ m}$$

- Le rayon hydraulique R_h est:

$$R_h = \frac{A}{P} = 0.578449474 \text{ m}$$

Où \bar{R} est un nombre de *Reynolds* régi par la relation suivante (*Achour et Bedjaoui*, 2006b) :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} = 32 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9.81 \times 0.0001 \times 0.578449474^3}}{10^{-6}} = 623587.8217$$

Le débit volume Q serait donc égal à:

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14.8R_h} + \frac{10.04}{R}\right) = -4 \times \sqrt{2 \times 9.81} \times 2.155438676 \times$$

$$\sqrt{0.578449474 \times 10^{-4}} \times \log\left(\frac{0.003}{14.8 \times 0.578449474} + \frac{10.04}{623587.8217}\right)$$

$$Q = 0.997971181 \approx 1 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Cette valeur calculée du débit volume Q correspond, avec un écart relatif inférieur à 0,21% à celle donnée à l'énoncé de l'exemple d'application.

III.7. CONDUITE FERMEE A SURFACE LIBRE DE FORME CIRCULAIRE

III.7.1. Caractéristiques du modèle rugueux de référence

L'écoulement uniforme en conduite circulaire se rencontre souvent dans de nombreux cas pratiques. La conduite circulaire est utilisée pour l'évacuation des eaux dans les domaines de l'assainissement et de l'aménagement. La figure 3.8 schématise dans un premier temps l'écoulement uniforme de profondeur normale y_n dans une conduite circulaire de diamètre D . Elle est caractérisée par la rugosité absolue ε et écoule un débit volume Q d'un liquide de viscosité cinématique ν , sous une pente longitudinale i .

La forme de la conduite considérée est définie par le taux de remplissage de la conduite $\eta = y_n / D$.

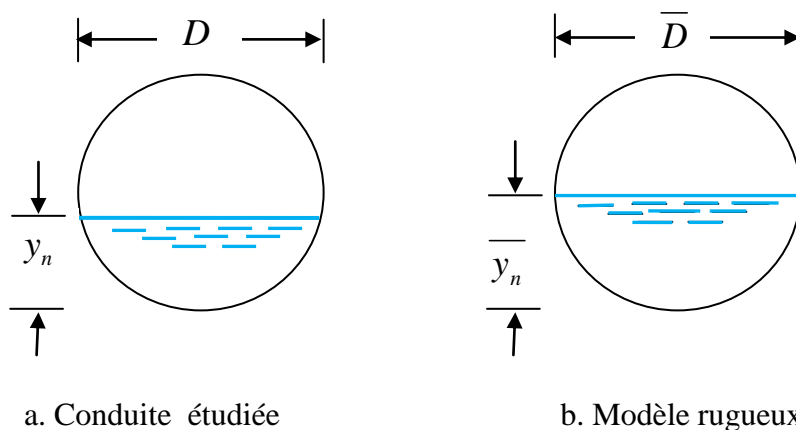


Figure 3.8: Schéma de définition de la conduite circulaire à surface libre.

Dans un second temps, on associe à la conduite considérée un modèle de référence (ou conduite de référence) de même forme mais dont les caractéristiques géométriques sont différentes. Il est caractérisé par les dimensions linéaires \bar{D} et \bar{y}_n et le paramètre de forme du modèle rugueux $\bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{D}$.

Le modèle rugueux écoule le même débit volume que celui de la conduite étudié, sous la même pente i , soit:

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i.$$

L'aire de la section mouillée \bar{A} est gouvernée par la relation suivante:

$$\bar{A} = \frac{\bar{D}^2}{4} \left[\cos^{-1}(1 - 2\bar{\eta}) - 2(1 - 2\bar{\eta})\sqrt{\bar{\eta}(1 - \bar{\eta})} \right] \quad (3.100)$$

La relation (3.100) peut d'écrire:

$$\bar{A} = \frac{\bar{D}^2}{4} \sigma(\bar{\eta})\rho(\bar{\eta}) \quad (3.101)$$

Où:

$$\sigma(\bar{\eta}) = \cos^{-1}(1 - 2\bar{\eta}) \quad (3.102)$$

$$\rho(\bar{\eta}) = 1 - \frac{2(1 - 2\bar{\eta})\sqrt{\bar{\eta}(1 - \bar{\eta})}}{\cos^{-1}(1 - 2\bar{\eta})} \quad (3.103)$$

Le périmètre mouillé \bar{P} est donné par:

$$\bar{P} = \bar{D} \cos^{-1}(1 - 2\bar{\eta}) \quad (3.104)$$

Ou bien

$$\bar{P} = \bar{D} \sigma(\bar{\eta}) \quad (3.105)$$

Le diamètre hydraulique $\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P}$ est donc:

$$\bar{D}_h = \bar{D}\varphi(\bar{\eta}) \quad (3.106)$$

III.7.2. Calcul de la profondeur normale par la relation de Darcy-Weisbach

Pour déterminer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans la conduite circulaire, nous pouvons faire appel à la relation (2.11). Celle - ci peut s'écrire, en tenant compte des relations (3.101) et (3.105):

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{D}\sigma(\bar{\eta})}{\left[\frac{\bar{D}^2}{4} \sigma(\bar{\eta})\varphi(\bar{\eta}) \right]^3} Q^2 \quad (3.107)$$

Admettons les conditions suivantes:

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i; \bar{D} \neq D; \bar{\eta} = \eta$$

Nous obtenons:

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{D}\sigma(\eta)}{\left[\frac{\bar{D}^2}{4} \sigma(\eta)\varphi(\eta) \right]^3} Q^2 \quad (3.108)$$

Soit:

$$\bar{D} = \left(\frac{1}{[\sigma(\eta)]^2 [\varphi(\eta)]^3} \right)^{1/5} \left(\frac{Q}{\sqrt{2gi}} \right)^{2/5}$$

Ou bien:

$$\bar{D} = [\sqrt{2}\sigma(\eta)]^{-0.4} [\varphi(\eta)]^{-0.6} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0.4} \quad (3.109)$$

A partir des valeurs connues des paramètres η, Q, i, ε et ν , les étapes suivantes sont recommandées pour déterminer la profondeur normale recherchée y_n de l'écoulement dans la conduite étudiée:

- i. La première étape consiste à déterminer la dimension linéaire \bar{D} du modèle rugueux de référence, par application de la relation (3.109).
- ii. La relation (3.105) permet le calcul aisé du périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux de référence, $\bar{\eta} = \eta$ et pour les valeurs connues de \bar{D} et $\bar{\eta} = \eta$.
- iii. Avec les valeurs connues des paramètres de \bar{D} et $\bar{\eta} = \eta$, le diamètre hydraulique \bar{D}_h du modèle rugueux de référence est déterminée en vertu de la relation (3.106).
- iv. Le nombre de Reynolds \bar{R} est ensuite évalué par application de la relation (2.15).
- v. A partir des valeurs connues de ε / \bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.35) permet le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- vi. Le diamètre D recherché est déterminé par application de la relation fondamentale (2.26) à partir des valeurs connues des paramètres \bar{D} et ψ .
- vii. Après avoir évalué D , la profondeur normale y_n est simplement déduite de la relation $y_n = \eta D$.

Afin de mieux illustrer les étapes de calcul de la profondeur normale y_n de l'écoulement par application de la formule de *Darcy-Weisbach* et lorsque le taux de remplissage η est imposé, l'exemple d'application suivant est proposé.

Exemple d'application 3.18.

La conduite à surface libre de forme circulaire représentée par la figure 3.8 écoule un débit volume $Q = 3 \text{ m}^3 / \text{s}$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ sous une pente longitudinale $i = 5.10^{-4}$. Si la rugosité absolue caractérisant l'état des parois internes du canal est $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}$ et que le paramètre de forme est $\eta = y_n / D = 0.64$, déterminez la valeur de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans la conduite considérée.

i. Le problème peut être résolu sous les conditions suivantes :

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i; \bar{\eta} = \eta$$

Ces conditions impliquent que $\bar{D} \neq D$ et évidemment $\bar{y}_n \neq y_n$.

Les données du problème sont telles que:

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0.64) = 1.854590436$$

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 - \frac{[2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}]}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{[2 \times (1 - 2 \times 0.64) \times \sqrt{0.64 \times (1 - 0.64)}]}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0.64)} \\ &= 1.144937661 \end{aligned}$$

ii. Le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence est:

$$\begin{aligned} \bar{D} &= [\sqrt{2}\sigma(\eta)]^{0.4} [\varphi(\eta)]^{-0.6} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0.4} \\ &= [\sqrt{2} \times 1.854590436]^{0.4} \times [1.144937661]^{-0.6} \times \left(\frac{3}{9.81 \times 0.0005} \right)^{0.4} \\ &= 2.818035043 \text{ m} \end{aligned}$$

iii. Le périmètre mouillé \bar{P} est alors:

$$\bar{P} = \bar{D}\sigma(\eta) = 2.818035043 \times 1.854590436 = 5.22630084 \text{ m}$$

iv. Le diamètre hydraulique \bar{D}_h est :

$$\bar{D}_h = \bar{D}\phi(\eta) = 2.818035043 \times 1.144937661 = 3.226474451 \text{ m}$$

v. Le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.15):

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 3}{5.22630084 \times 10^{-6}} = 2296079.075$$

vi. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\begin{aligned} \psi &= 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.0001 / 3.226474451}{4.75} + \frac{8.5}{2296079.075} \right) \right]^{-2/5} = 0.709716136 \end{aligned}$$

vii. Le diamètre D est, selon la relation fondamentale (2.26):

$$D = \psi \bar{D} = 0.709716136 \times 2.818035043 = 2.000004943 \approx 2 \text{ m}$$

La profondeur normale y_n est alors :

$$y_n = \eta D = 0.64 \times 2 = 1.28 \text{ m}$$

viii. Vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par application de la relation de Chézy :

$$Q = CA\sqrt{R_h i}$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (1.189):

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \phi(\eta) = \frac{2^2}{4} \times 1.854590436 \times 1.144937661 = 2.123390436 \text{ m}^2$$

- Le rayon hydraulique R_h est:

$$R_h = \frac{D}{4} \varphi(\eta) = \frac{2}{4} \times 1.144937661 = 0.572468831 \text{ m}$$

- Le coefficient de résistance de *Chézy*, C est évalué par la relation (2.49), soit:

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}}{0.709716136^{5/2}} = 83.50794367$$

Ainsi, le débit volume Q écoulé serait égal à:

$$\begin{aligned} Q &= CA\sqrt{R_h i} = 83.50794367 \times 2.123390436 \times \sqrt{0.572468831 \times 0.0005} \\ &= 2.999981464 \approx 3 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Il s'agit de la même valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

III.7.3. Calcul de la profondeur normale par la relation de Chézy

Pour le modèle rugueux, la relation de *Chézy* peut s'écrire sous les conditions $\bar{Q} = Q; \bar{i} = i$:

$$\bar{Q} = Q = \bar{C} \bar{A} \sqrt{\bar{R}_h i}$$

En tenant compte des relations (3.101) et (3.105) et du fait que le rayon hydraulique est $\bar{R}_h = \bar{A} / \bar{P}$, la relation précédente devient alors :

$$\bar{Q} = Q = \sqrt{2} \sqrt{g i \bar{D}^5} \sigma(\bar{\eta}) [\varphi(\bar{\eta})]^{3/2} \quad (3.110)$$

En introduisant la conductivité relative \bar{Q}^* , tel que:

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{g i \bar{D}^5}} \quad (3.111)$$

La relation (3.111) s'écrit alors, en terme adimensionnels:

$$\bar{Q}^* = \sqrt{2}\sigma(\bar{\eta})[\varphi(\bar{\eta})]^{3/2} \quad (3.112)$$

La conductivité relative \bar{Q}^* dans le modèle rugueux est donc fonction du taux de remplissage $\bar{\eta}$. La relation (3.112) a été graphiquement représentée sur la figure 3.9. Elle montre que la variation de la conductivité relative débute par une phase ascendante, atteint alors un maximum et subit ensuite une phase descendante au-delà du maximum. Le calcul a montré que la conductivité relative maximale est atteinte pour le taux de remplissage $\bar{\eta} = 0.95$ (Achour et Sehtal, 2013).

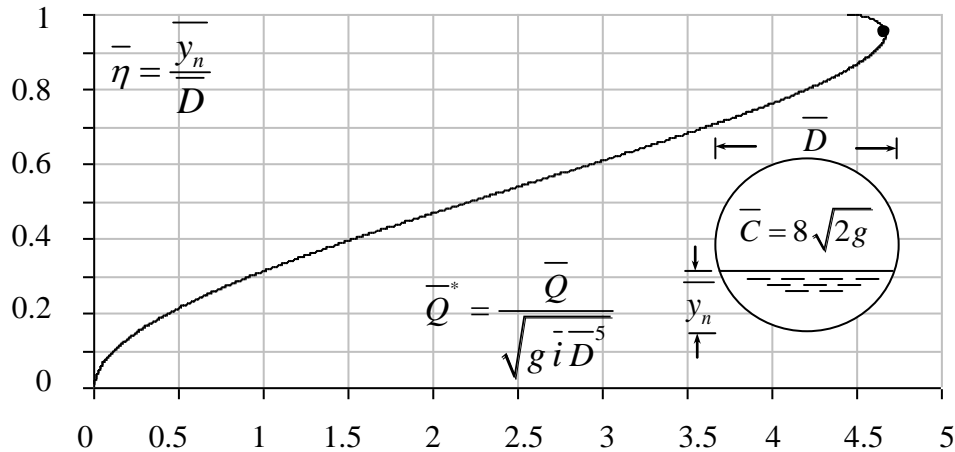


Figure 3.9 : Tracé de l'équation (3.112) pour le modèle rugueux.

(●) Conductivité relative maximale correspondent à $\bar{\eta} = 0.95$

Dans la gamme pratique $0.15 \leq \bar{\eta} \leq 0.85$, correspondant à $0.225 \leq \bar{Q}^* \leq 4.433$, une étude particulière de la relation (3.112) a montré que le taux de remplissage $\bar{\eta}$ pouvait s'exprimer, avec une erreur relative maximale inférieure à 0,3% seulement, par la relation approchée suivante (Achour et Sehtal, 2013):

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\bar{\eta}\right) = 0.432\bar{Q}^{*0.519} \quad (3.113)$$

On considère un modèle rugueux de diamètre \bar{D} égal à celui du modèle à l'état plein, correspondent à $\bar{\eta} = 1$; pour cet état, les équations (3.102) et (3.103) donnent respectivement $\sigma(\bar{\eta}) = \pi$ et $\varphi(\bar{\eta}) = 1$. Ainsi, l'équation (3.112) mène à écrire $\bar{Q}^* = \sqrt{2}\pi$.

Pour cette valeur, la figure 3.8 indique un taux de remplissage $\bar{\eta} \approx 0.852$.

Nous obtenons alors un modèle rugueux de diamètre égal à celui du modèle à l'état plein, caractérisé par un taux de remplissage $\bar{\eta} \approx 0.852$. Pour ce taux de remplissage, les relations (3.105) et (3.106) permettent d'écrire respectivement que :

$$\bar{P} = 2.352\bar{D} \quad (3.114)$$

$$\bar{D}_h = 1.2126\bar{D} \quad (3.115)$$

Le diamètre du modèle rugueux à l'état plein est obtenu pour la conductivité relative $\bar{Q}^* = \sqrt{2}\pi$, impliquant que :

$$\bar{D} = (\pi\sqrt{2})^{-0.4} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0.4} \quad (3.116)$$

A partir des valeurs connues des paramètres Q, i, ε et ν , les relations (3.116), (3.114) et (3.115) sont utilisées pour calculer respectivement $\bar{D}, \bar{P}, \bar{D}_h$ du modèle rugueux de référence et donc la valeur du nombre de Reynolds $\bar{R} = 4Q/\bar{P}\nu$. Pour les valeurs calculées de \bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.35) permet de calculer explicitement le facteur de correction adimensionnel des dimensions linéaires ψ .

Si nous affectons au modèle rugueux de référence la nouvelle dimension linéaire $\bar{D} = D/\psi$, selon la relation (2.26), le taux de remplissage $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux serait égal au taux de remplissage η de la conduite considérée. Le taux de remplissage η est donné par la relation (3.113) pour la conductivité relative :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{gi}(D/\psi)^5}$$

La profondeur normale recherchée est alors $y_n = \eta D$.

Afin d'illustrer la démarche de calcul que nous venons d'exposer et qui mène au calcul de la profondeur normale y_n , l'exemple d'application suivant est proposé. Par souci de comparaison, nous reprenons les données de l'exemple d'application 3.18.

Exemple d'application 3.19.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.18, soient:

$$Q = 3 \text{ m}^3 / \text{s}; i = 5.10^{-4}; D = 2 \text{ m}; \varepsilon = 10^{-4}; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Le diamètre D a été évalué au cours de l'exemple d'application 3.18 et il est imposé dans le présent exemple. Il s'agit alors d'évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans la conduite circulaire à surface libre.

i. Calculons le diamètre \bar{D} du modèle rugueux par la relation (3.116):

$$\bar{D} = (\pi\sqrt{2})^{-0.4} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0.4} = (\pi \times \sqrt{2})^{-0.4} \left(\frac{3}{\sqrt{9.81 \times 5.10^{-4}}} \right)^{0.4} = 2.47545338 \text{ m}$$

ii. Selon la relation (3.114), le périmètre mouillé \bar{P} est :

$$\bar{P} = 2.352\bar{D} = 2.352 \times 2.47545338 = 5.82226634 \text{ m}$$

iii. Le diamètre hydraulique \bar{D}_h du modèle rugueux est, selon la relation (3.115):

$$\bar{D}_h = 1.2126\bar{D} = 1.2126 \times 2.47545338 = 3.001734766 \text{ m}$$

iv. Le nombre de Reynolds \bar{R} est :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 3}{5.82226634 \times 10^{-6}} = 2061053.08$$

v. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\begin{aligned}\psi &= 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.0001/3.00173477}{4.75} + \frac{8.5}{2061053.08} \right) \right]^{-2/5} = 0.71183464\end{aligned}$$

vi. Si l'on affectait au modèle rugueux de référence le diamètre \bar{D} :

$$\bar{D} = D/\psi = 2/0.71183464 = 2.80964128 \text{ m}$$

Alors le taux de remplissage $\bar{\eta}$ serait égal au taux de remplissage η . Celui-ci est donné par la relation (3.113) pour calculer la conductivité relative \bar{Q}^* tel que :

$$\bar{Q}^* = \frac{Q}{\sqrt{gi(D/\psi)^5}} = \frac{3}{\sqrt{9.81 \times 0.0005 \times (2.80964128)^5}} = 3.23723748$$

vii. Selon la relation (3.113), le taux de remplissage est alors :

$$\begin{aligned}\eta = \bar{\eta} &= \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} \left(0.432 \bar{Q}^{*0.519} \right) = \frac{11}{5\pi} \times \sin^{-1} \left(0.432 \times 3.23723748^{0.519} \right) \\ &= 0.643347097\end{aligned}$$

La profondeur normale y_n est alors :

$$y_n = \eta D = 0.643347097 \times 2 = 1.286694193 \approx 1.29 \text{ m}$$

Le calcul effectué au cours de l'exemple d'application (3.18) a conduit à la valeur de la profondeur normale $y_n = 1.28 \text{ m}$. Nous pouvons donc noter que l'écart relatif entre les valeurs de la profondeur normale de l'exemple d'application 3.18 et du présent exemple n'est que de 0.5% seulement, ce qui indique que les calculs que nous venons d'effectuer sont tout à fait acceptables.

viii. Cette étape vise à vérifier la valeur donnée de la pente longitudinale par application de la relation de *Darcy-Weisbach*, pour la valeur calculée de η , soit:

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{1}{2gA^2} Q^2$$

- Les relations (1.190) et (1.191) donnent respectivement:

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0.643347097) = 1.86157072$$

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 - \frac{[2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}]}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} \\ &= 1 - \frac{[2 \times (1 - 2 \times 0.643347097) \times \sqrt{0.643347097 \times (1 - 0.643347097)}]}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0.643347097)} \\ &= 1.147541743 \end{aligned}$$

- L'aire de la section mouillée A est, selon la relation (1.189):

$$A = \frac{D^2}{4} \sigma(\eta) \varphi(\eta) = \frac{2^2}{4} \times 1.861570716 \times 1.147541743 = 2.136230103 \text{ m}^2$$

- Le diamètre hydraulique D_h est $D_h = 4R_h$, en vertu de la relation (1.194):

$$D_h = D\varphi(\eta) = 2 \times 1.147541743 = 2.295083485 \text{ m}$$

- Le coefficient de frottement f est évalué par la relation (2.25), soit:

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0.711834643^5}{16} = 0.01142288$$

- La pente longitudinale i est donc, selon la relation de *Darcy-Weisbach*:

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0.01142288}{2.295083485} \times \frac{3^2}{2 \times 9.81 \times 2.136230103^2} = 0.000500293 \approx 5.10^{-4}$$

Il s'agit bien de la même valeur de i donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

Exemple d'application 3.20.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.19, soient:

$$Q = 3 \text{ m}^3 / \text{s}; i = 5.10^{-4}; D = 2 \text{ m}; \varepsilon = 10^{-4}; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Il s'agit alors d'évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans la conduite circulaire à surface libre, en ayant recours à la relation approchée (1.199).

- i. Le calcul du diamètre \bar{D} , de \bar{P} , de \bar{D}_h et \bar{R} est le même que celui effectué au cours des étapes *i,ii,iii* et *iv* de l'exemple d'application (3.19). Nous obtenons :

$$\bullet \bar{D} = (\pi\sqrt{2})^{-0.4} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0.4} = (\pi \times \sqrt{2})^{-0.4} \left(\frac{3}{\sqrt{9.81 \times 5.10^{-4}}} \right)^{0.4} = 2.47545338 \text{ m}$$

$$\bullet \bar{P} = 2.352\bar{D} = 2.352 \times 2.47545338 = 5.82226634 \text{ m}$$

$$\bullet \bar{D}_h = 1.2126\bar{D} = 1.2126 \times 2.47545338 = 3.001734766 \text{ m}$$

$$\bullet \bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 3}{5.82226634 \times 10^{-6}} = 2061053.08$$

- ii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite:

$$\psi = 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.0001 / 3.00173477}{4.75} + \frac{8.5}{2061053.08} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 0.71183464$$

- iii. Le coefficient de résistance de Chézy, C est évalué par la relation (2.49), soit:

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}}{0.71183464^{5/2}} = 82.8880053 \approx 83$$

- iv. Vérifions que la conductivité relative Q^* est bien inférieure à la conductivité relative maximale (Tableau 1.3) $Q_{\max}^* \cong 0.41249656$. Selon la relation (1.196), la conductivité relative de la conduite est par définition:

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{C^2 i D^5}} = \frac{3}{\sqrt{83^2 \times 0.0005 \times 2^5}} = 0.28574798 < 0.41249656$$

v. L'application de la relation approchée (1.199) permet de déduire que le taux de remplissage de la conduite est:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{11}\eta\right) = 1.525Q^{*0.52} \Rightarrow \eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}\left(1.525Q^{*0.52}\right)$$

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}\left(1.525 \times 0.28574798^{0.52}\right) = 0.64359375$$

La profondeur normale y_n est alors :

$$y_n = \eta D = 0.64359375 \times 2 = 1.28718749 \approx 1.29m$$

III.7.4. Calcul de la profondeur normale par la relation de Manning

III.7.4.1. Le taux de remplissage η est imposé

Pour déterminer la profondeur normale y_n caractérisant l'écoulement dans une conduite considérée, nous pouvons faire appel à la relation (1.201). Celle - ci peut s'écrire:

$$D = \frac{(nQ/\sqrt{i})^{3/8}}{[\sigma(\eta)]^{3/8} [\varphi(\eta)/4]^{5/8}} \quad (3.117)$$

En pratique, les paramètres connus du problème sont le taux de remplissage η , la rugosité absolue ε , la pente géométrique i du canal, le débit volume Q et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Le coefficient n de Manning n'est donc pas une donnée du problème et, de ce fait, le diamètre D de la relation (3.117) ne peut être évalué.

Pour résoudre le problème de la profondeur normale y_n de l'écoulement dans la conduite considéré et lorsque le taux de remplissage η est imposé, il est nécessaire d'adopter les conditions suivantes : $\bar{Q} = Q; \bar{i} = i; \bar{\eta} = \eta$

Cela revient à dire que la conduite étudiée et le modèle rugueux écoulent le même débit volume Q , sous la même pente géométrique i et pour un même taux de remplissage η dans un premier temps.

Sous la condition $\bar{D} \neq D; \bar{\eta} = \eta$, la relation (2.68) s'écrit :

$$\bar{Q} = 8\sqrt{2g} \frac{\left[\frac{\bar{D}^2}{4} \sigma(\bar{\eta}) \varphi(\bar{\eta}) \right]^{3/2}}{[\bar{D}\sigma(\bar{\eta})]^{1/2}} \sqrt{\bar{i}} \quad (3.118)$$

Ou bien:

$$\bar{D} = [\sqrt{2}\sigma(\eta)]^{-0.4} [\varphi(\eta)]^{-0.6} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0.4} \quad (3.119)$$

Ainsi, tous les paramètres figurant dans le membre droit de l'équation (3.119) sont bien déterminés et cette équation permet donc d'évaluer de manière explicite le diamètre \bar{D} du modèle rugueux.

Selon *Achour et Bedjaoui* (2006b), le nombre de *Reynolds* \bar{R} est:

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gi\bar{R}_h^3}}{\nu} \quad (3.120)$$

En tenant compte de la relation (3.106) et du fait que le rayon hydraulique est $\bar{R}_h = \bar{D}_h / 4$, la relation précédente devient alors :

$$\bar{R} = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} [\varphi(\eta)]^{3/2}$$

Soit:

$$\bar{R} = \bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2} \quad (3.121)$$

Où :

$$\overline{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{g\overline{D}^3}}{\nu} \quad (3.122)$$

Où l'indice «P» désigne l'état plein de la conduite.

Le coefficient n de *Manning* peut être déduit par la relation (2.64):

$$n = \frac{\psi^{8/3} \overline{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}}$$

Le coefficient de correction des dimensions linéaires ψ est donné par la relation (2.35):

$$\psi = 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5}$$

En tenant compte les relations (3.106) et (3.121), la relation précédente devient alors :

$$\psi = 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}}{4.75\varphi(\eta)} + \frac{8.5}{\overline{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-2/5} \quad (3.123)$$

Tandis que \overline{R}_h s'exprime par la relation:

$$\overline{R}_h = \frac{\overline{D}}{4} \varphi(\eta) \quad (3.124)$$

Ainsi, la relation (2.64) permet d'écrire que:

$$n = \frac{0.156}{\sqrt{g}} [\overline{D}\varphi(\eta)]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \overline{D}}{4.75\varphi(\eta)} + \frac{8.5}{\overline{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} \quad (3.125)$$

Exemple d'application 3.21.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.18, soient:

$$Q = 3m^3 / s; i = 5.10^{-4}; \eta = 0.64; \varepsilon = 10^{-4} m; \nu = 10^{-6} m^2 / s$$

Il s'agit alors d'évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans la conduite circulaire à surface libre.

i. Les relations (1.190) et (1.191) donnent respectivement:

$$\sigma(\eta) = \cos^{-1}(1 - 2\eta) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0.64) = 1.854590436$$

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) &= 1 - \frac{[2(1 - 2\eta)\sqrt{\eta(1 - \eta)}]}{\cos^{-1}(1 - 2\eta)} = 1 - \frac{[2 \times (1 - 2 \times 0.64) \times \sqrt{0.64 \times (1 - 0.64)}]}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0.64)} \\ &= 1.144937661 \end{aligned}$$

ii. Calculons le diamètre \bar{D} du modèle rugueux de référence par la relation (3.119) :

$$\begin{aligned} \bar{D} &= [\sqrt{2}\sigma(\eta)]^{-0.4} [\varphi(\eta)]^{-0.6} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0.4} \\ &= [\sqrt{2} \times 1.854590436]^{-0.4} \times [1.144937661]^{-0.6} \times \left(\frac{3}{9.81 \times 0.0005} \right)^{0.4} = 2.818035043 \text{ m} \end{aligned}$$

Ceci permet de déduire que , selon la relation (3.122)

$$\bar{R}_p = 4\sqrt{2} \frac{\sqrt{gi\bar{D}^3}}{\nu} = 4 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{9.81 \times 0.0005 \times 2.818035043^3}}{10^{-6}} = 1874191.997$$

iii. En appliquant la relation (3.125) pour évaluer le coefficient n de Manning, soit:

$$n = \frac{0.156}{\sqrt{g}} [\bar{D}\varphi(\eta)]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4.75\varphi(\eta)} + \frac{8.5}{\bar{R}_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{0.156}{\sqrt{g}} [\bar{D}\varphi(\eta)]^{1/6} \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}}{4.75\varphi(\eta)} + \frac{8.5}{R_p [\varphi(\eta)]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} \\
 &= \frac{0.156}{\sqrt{g}} [2.818035043 \times 1.144937661]^{1/6} \times \\
 &\quad \left[-\log \left(\frac{0.0001 / 2.818035043}{4.75 \times 1.144937661} + \frac{8.5}{1874191.997 \times [1.144937661]^{3/2}} \right) \right]^{-16/15} \\
 &= 0.010899684
 \end{aligned}$$

Ainsi:

$$D = \frac{(nQ / \sqrt{i})^{3/8}}{[\sigma(\eta)]^{3/8} [\varphi(\eta) / 4]^{5/8}} = \frac{(0.010899684 \times 3 / \sqrt{0.0005})^{3/8}}{[1.854590436]^{3/8} \times [1.144937661 / 4]^{5/8}} = 1.996943442 \approx 2 \text{ m}$$

iv. La profondeur normale y_n est alors :

$$y_n = \eta D = 0.64 \times 1.996943442 = 1.278043803 \approx 1.28 \text{ m}$$

Nous retrouvons ainsi, avec un écart relatif de moins de 0.16 % seulement, la valeur de y_n calculée au cours de l'exemple d'application 3.18.

Exemple d'application 3.22.

Reprenons donc les données de l'exemple d'application 3.19, soient :

$$Q = 3 \text{ m}^3 / \text{s}; i = 5.10^{-4}; D = 2 \text{ m}; \varepsilon = 10^{-4}; \nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$$

Il s'agit alors d'évaluer la profondeur normale y_n de l'écoulement dans la conduite circulaire à surface libre.

i. Le calcul du diamètre \bar{D} , de \bar{P} , de \bar{D}_h et \bar{R} est le même que celui effectué au cours des étapes *i*, *ii*, *iii* et *iv* de l'exemple d'application (3.19). Nous obtenons :

$$\bullet \bar{D} = (\pi\sqrt{2})^{-0.4} \left(\frac{Q}{\sqrt{gi}} \right)^{0.4} = (\pi \times \sqrt{2})^{-0.4} \left(\frac{3}{\sqrt{9.81 \times 5.10^{-4}}} \right)^{0.4} = 2.47545338 \text{ m}$$

$$\bullet \bar{P} = 2.352\bar{D} = 2.352 \times 2.47545338 = 5.82226634 \text{ m}$$

$$\bullet \bar{D}_h = 1.2126\bar{D} = 1.2126 \times 2.47545338 = 3.001734766 \text{ m}$$

$$\bullet \bar{R} = \frac{4Q}{P\sqrt{v}} = \frac{4 \times 3}{5.82226634 \times 10^{-6}} = 2061053.08$$

ii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite :

$$\begin{aligned} \psi &= 1.35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4.75} + \frac{8.5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1.35 \times \left[-\log \left(\frac{0.0001 / 3.00173477}{4.75} + \frac{8.5}{2061053.08} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0.71183464 \end{aligned}$$

iii. Avec la valeur ainsi calculée du coefficient de correction ψ et du rayon hydraulique $\bar{R}_h = \bar{D}_h / 4 = 0.75043369 \text{ m}$, appliquons la relation (2.64) pour évaluer le coefficient n de Manning, soit :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{1/6}}{8\sqrt{2g}} = \frac{0.711834643^{8/3} \times 0.75043369^{1/6}}{8 \times \sqrt{2 \times 9.81}} = 0.01086735$$

iv. Selon la relation (1.202), la conductivité relative de la conduite est par définition:

$$Q^* = \frac{nQ}{D^{8/3} \sqrt{i}} = \frac{0.01086735 \times 3}{2^{8/3} \times \sqrt{0.0005}} = 0.22962182$$

L'application de la relation approchée (1.204) permet de déduire le taux de remplissage de la conduite est:

$$\sin \left(\frac{5\pi}{11} \eta \right) = 1.614Q^{*0.485} \Rightarrow \eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1} (1.614Q^{*0.485})$$

Soit :

$$\eta = \frac{11}{5\pi} \sin^{-1}(1.614 \times 0.22962182^{0.485}) = 0.63858799 \approx 0.64$$

Par suite, la profondeur normale de l'écoulement est:

$$y_n = \eta D = 0.63858799 \times 2 = 1.27717597 \approx 1.28m$$

Il s'agit bien encore une fois de la profondeur normale y_n calculée au cours de l'exemple d'application (3.18).

III.8. CONCLUSION

Au cours de ce chapitre, la théorie du modèle rugueux de référence a été appliquée à différents profils géométriques de canaux et conduite à surface libre. Nous nous sommes particulièrement intéressés au calcul de la profondeur normale de l'écoulement dans ces canaux.

Nous avons clairement montré que lorsque le débit volume Q écoulé par le canal, la pente longitudinale i , la rugosité absolue ε des parois internes du canal ainsi que la viscosité cinématique ν du liquide écoulé sont connus, la profondeur normale recherchée de l'écoulement dans le canal considéré peut être déterminée sous la double condition $\bar{Q} = Q$ et $\bar{i} = i$. Cela revient à considérer que le débit \bar{Q} ainsi que pente longitudinale \bar{i} du modèle rugueux de référence sont identiques à leurs homologues du canal étudié. Leurs dimensions linéaires sont par contre différentes ainsi que, par conséquent, leurs rugosités relatives.

Lorsque la double condition $\bar{Q} = Q$ et $\bar{i} = i$ est admise, l'application de la relation de *Darcy-Weisbach* au modèle rugueux de référence permet de calculer de manière aisée les dimensions linéaires de ce modèle. Celles-ci permettent à leur tour une rapide détermination du facteur de correction des dimensions linéaires ψ . Celui-ci constitue le facteur de proportionnalité entre les dimensions linéaires recherchées et celles du modèle rugueux de référence. Autrement dit, les dimensions linéaires recherchées sont égales à celles du modèle rugueux de référence corrigées par les effets du facteur ψ et par conséquent la profondeur normale. Ce résultat est extensible à tout profil géométrique connu de canaux et conduites à surface libre.

L'application de la *MMR* aux profils géométriques que nous avons considérés a montré la simplicité des calculs. Celle-ci réside dans le fait que le calcul du coefficient de frottement, au sens de *Darcy-Weisbach*, celle du coefficient de résistance à l'écoulement au sens de *Chézy* et même celle du coefficient de résistance n au sens de *Manning*, n'est pas nécessaire et que ses effets sont implicitement pris en compte.

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GÉNÉRALE

Notre recherche s'est intéressée au calcul de l'écoulement uniforme en canaux à surface libre. L'objectif principal a été surtout de proposer une nouvelle approche destinée à la détermination de la profondeur normale de l'écoulement.

Pour mener à bien notre étude, nous avons subdivisé notre travail en trois chapitres.

Le premier chapitre a été consacré à un état de connaissances sur l'écoulement uniforme dans lequel nous avons clairement rappelé les conditions d'établissement de l'écoulement dans un canal de grande longueur.

Au cours de ce chapitre, nous avons exposé les différentes relations actuellement en vigueur régissant l'écoulement uniforme, telles que les relations de *Chézy*, de *Manning* et de *Darcy-Weisbach* qui constituent les relations les plus utilisées en pratique. Nous avons également rappelé les formules usuelles destinées à l'évaluation du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy*, de *Manning* et de *Colebrook*, en mettant l'accent sur leur caractère implicite et l'impossibilité de les évaluer en l'absence de la profondeur normale de l'écoulement.

Les méthodes de calcul destinées à la détermination de la profondeur normale dans les canaux conduisent également à des relations implicites. Leurs auteurs ont proposé des relations approchées que nous avons largement discutées.

Au cours du second chapitre de notre recherche, la théorie du modèle rugueux de référence a été présentée. Il s'agit d'une théorie nouvelle capable de calcul la profondeur normale dans un canal rectangulaire. Au cours de ce chapitre, le modèle rugueux de référence a été présenté ainsi que ses caractéristiques. Celui-ci est caractérisé par une rugosité relative arbitrairement choisie, indépendante de la forme du profil géométrique considéré. Le choix de la rugosité relative est tel que l'écoulement est de nature rugueuse auquel est associé un coefficient de frottement constant au sens de *Darcy-Weisbach*.

L'application simultanée de la formule de *Darcy-Weisbach* au canal considéré et à son modèle rugueux de référence a pu montrer que les dimensions linéaires de ces ouvrages sont étroitement liées. La dimension linéaire recherchée correspond à celle du modèle rugueux de référence corrigé par les effets d'un facteur de correction que nous avons désigné par ψ . Celui-ci peut être explicitement évalué par une excellente relation approchée, à partir des valeurs connues des caractéristiques du modèle rugueux de référence.

Au cours des divers exemples que nous avons considérés, la théorie du modèle rugueux de référence s'est avéré être un outil performant pour le calcul de la profondeur normale de l'écoulement dans un canal rectangulaire. La profondeur normale de l'écoulement recherchée est déterminée de manière explicite avec un écart relatif ne dépassant guère 0,6%. Mais cet écart se réduit considérablement lorsque le nombre de *Reynolds* prend des valeurs pratiques. La détermination du coefficient de frottement, au sens de *Darcy-Weisbach*, celle du coefficient de résistance à l'écoulement au sens de *Chézy* et même celle du coefficient de résistance n au sens de *Manning*, n'est plus requise lorsque la théorie du modèle rugueux de référence est appliquée. Les effets de ces coefficients ψ sont implicitement considérés.

Le troisième chapitre du mémoire a été dédié aux applications pratiques, basées sur la théorie du modèle rugueux de référence. Ces applications ont exclusivement concerné les canaux à surface libre de forme non rectangulaire. Les exemples d'applications que nous avons considérés pour expliquer le processus de calcul ont montré la fiabilité de la méthode du modèle rugueux ainsi que sa simplicité et son efficacité.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ACHOUR, B. (2007). *Calcul des conduites et canaux par la MMR – Conduites et canaux en charge*, Larhyss Edition Capitale, Tome 1, 610 p.

ACHOUR B.(2012). *Conduite circulaire en charge et à surface libre*, Larhyss Edition Al Djazair.

ACHOUR, B. (2013). *Design of Pressurized Vaulted Rectangular Conduits Using the Rough Model Method*, *Adv. Mat. Res.*, Trans. Tech. Publications, Vols. 779-780, 414-419.

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A. (2006.a). *Contribution au calcul de la profondeur normale dans un canal rectangulaire*. *Larhyss/Journal* , N°5, 139-147.

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A. (2006.b). *Discussion of «Explicit Solutions for Normal Depth problem » by Prabhata K. Swamee, Pushpa N. Rathie*, *J. Hydraulic Research*, Vol.44, 5, 715-717.

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A. (2012). *Turbulent Pipe-flow Computation Using the Rough Model Method (RMM)*, *J. Civil. Eng. Sci.*, Vol. 1, n°1, 36-41.

ACHOUR, B., BEDJAOUI, A. (2014). *Design of a Pressurized Trapezoidal Shaped Conduit Using the Rough Model Method (Part 2)*, *Appl. Mech. Mater.*, Vols. 580-583, 1828-1841.

ACHOUR, B., KHATTAOUI, M. (2008). *Computation of Normal and Critical Depths in Parabolic Cross Sections*, *The Open Civil Engineering Journal*, Vol.2, 9-14.

ACHOUR, B., SEHTAL, S. (2013). *La méthode du modèle rugueux (MMR) application au calcul de la profondeur normale dans une conduite circulaire*, *Courrier du Savoir*, N°17, pp.99-103.

- ANONYMOUS. (1963). *Friction Factors in Open Channels, Progress Report of Task Force on Friction Factors in Open Channels, J. Hydraul. Eng. Div., ASCE, Vol. 89, no2, 97-143.*
- BAZIN, H. (1897). *Étude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts*, Mémoire N° 41, Annales des ponts et chaussées, Vol. 14, ser. 7,4ème trimestre, pp. 20-70, Paris.
- CARLIER, M. (1986). *Hydraulique générale et appliquée*, Paris, Editions Eyrolles
- CHOW, V.T. (1959). *Open Channel Hydraulics*. McGraw Hill, New York, NY.
- CHOW, V.T. (1973). *Open-Channel Hydraulics*, Ed. McGraw Hill, N.Y.
- COLEBROOK, C.F. (1939). *J. Inst. Civil Eng.*, Vol.11, 133-156.
- DARCY, H. (1854). *Sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux*. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Vol.38, 1109-1121, Paris.
- DAS, M. (2008). *Open Channel flow*, Prentice-Hall of India Private limited, New Delhi.
- FRENCH, H. (1986). *Open Channel Hydraulics*, McGraw Hill, New York
- GANGUILLET, E., KUTTER, W.R. (1869). *Versuch zur Aufstellung einer neuen allgemeinen Formel für die gleichförmige Bewegung des wassers in canälen und Flüssen*, Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines, Vol. 21, N° 1, pp. 6-25; N° 2-3, pp. 46-59, Vienna.
- GRAF, W. H., ALTINAKAR, M.S. (2000). *Hydraulique fluviale: écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple*, Traité de Génie Civil, Ed. Presses Polytechniques Romandes, Vol.16, Suisse.
- HAGER, W.H. (1987). *Die Berechnung turbulenter Rohrströmungen*, 3R-International, Vol. 26, Heft 2, pp. 116-121.

- HAGER, W.H. (1989). "Discussion of 'Noncircular Sewer Design' by Prabhata K. Swamee, Renu Bhargava, and Ashok K. Sharma". *J. Environ. Engng., ASCE*, 115(1), 274–276.
- HAGER, W.H. (2010). *Wastewater hydraulics: Theory and Practice*, 2ed, Springer, Berlin.
- HOORFAR, A., HASSANI, M. (2008). *Inequalities on the Lambert W function and hyperpower function*. *J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 9(2), Art. 51, pp 1–5.
- MANNING, R. (1891). *On the flow of water in open channels and pipes*, Transactions, Institution of Civil Engineers of Ireland, Vol. 20, 161-207, Dublin.
- MOODY, L.F. (1944). *Trans. ASME*, Vol.66, 671-684.
- POWELL, R.W. (1950). *Resistance to flow in rough channels*, Transactions, American Geophysical Union, Vol. 31, N° 4, pp. 575-582.
- SINNIGER, R.O., HAGER, W.H. (1989). *Constructions hydrauliques*, Traité de Génie Civil, Ed. Presses Polytechniques Romandes, Vol.15, Suisse.
- STRICKLER, A. (1923). *Beiträge zur Frage der Geschwindigkeitsformel und der Rauigkeitszahlen für Ströme, Kanäle und geschlossene Leitungen*, Mitteilungen des eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft, n° 16, Bern.
- SRIVASTAVA, R. (2006). *Discussion of « Explicit Solutions for Normal Depth problem »* by Prabhata K. Swamee, Pushpa N. Rathie, *J. Hydraulic Research*, Vol.44, 3, 427–428
- SWAMEE, P.K. (1994). "Normal Depth Equations for Irrigation Canals". *J. Irrig. Drain. Engng., ASCE* 120(5), 942–948.
- SWAMEE, P.K. (2001). "Design of Sewer Line". *J. Environ. Engng., ASCE* 127(9), 776–781.
- SWAMEE, P.K., MISHRA, G.C., CHAHAR, B.R. (2002). *Optimal design of transmission canal*, *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, Vol. 128, 4, pp234-243

- SWAMEE, P.K., JAIN, A.K. (1976). *Explicit equations for pipe-flow problems*. Proc. ASCE, *J. Hydraulics Division*, Vol.102, HY5.657-664
- SWAMEE, P.K., SWAMEE, N. (2008). *Design of non circular sewer sections*, *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 46, 2, 277-281.
- SWAMEE, P.K., RATHIE, P.N. (2004). *Exact solutions for normal depth problem*, *J. Hydraulic Research*, Vol.42, 5, pp 541-547.
- SWAMEE, P.K., RATHIE, P.N. (2012). *Normal depth equations for wide rectangular and triangular open channel sections involving Lambert's W function*, *ISH Journal of Hydraulic Engineering* .Vol. 18, 3, pp 252–257
- VATANKHAH, A.R., EASA, S.M. (2011). *Explicit solutions for critical and normal depths in channels with different shapes*. *Flow Measurement and Instrumentation*, 22(1), 43–9.
- ZHANG, X .Y., WU L. (2014). *Direct solutions for normal depths in curved irrigation canals*, *Flow Measurement and Instrumentation* 36, 9–13
- WEISBACH, J. (1845). *Lehrbuch der Ingenieur und Maschinenmechanik*, Brunswick, Germany.
- WONG , T .S.W. (2007) . *Discussion of « Explicit Solutions for Normal Depth problem »* by Prabhata K. Swamee, Pushpa N. Rathie, *J. Hydraulic Research*, Vol.45, 4, 567–571