

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Génie Civil et Hydrauliques
Réf :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم: الهندسة المدنية والري
المرجع:

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de

Doctorat LMD en Génie Civil

Spécialité : Modélisation des matériaux et structures

**La conception optimale des structures en
coques.**

Présentée par :

TOUZOUT Mohamed Amine

Soutenue publiquement le 18/05/2017

Devant le jury composé de :

Mr. MELLAS Mekki	Professeur	Président	Université de Biskra
Mr. CHEBILI Rachid	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Mr. OUNIS Abdelhafid	Professeur	Examineur	Université de Biskra
Mr. HAMADI Djamel	Professeur	Examineur	Université de Biskra
Mr. KADID Abdelkrim	Professeur	Examineur	Université de Batna
Mr. Tuğrul Talashoğlu	Professeur	Co-rapporteur	Osmaniye Korkut Ata

« For since the fabric of the universe is most perfect and the work of a most wise Creator, nothing at all takes place in the universe in which some rule of maximum or minimum does not appear. »

Leonhard Euler

Remerciements

Tout d'abord je tiens à exprimer ma sincère gratitude et mes remerciements les plus chaleureux à mon directeur de thèse, le Professeur Rachid CHEBILI, pour avoir accepté de m'accueillir dans sa formation doctorale, proposé le sujet, et pour ses orientations et les questions pertinentes soulevées à chacun de nos échanges, ainsi que pour les différentes corrections qu'il a apportées à ce manuscrit. Je remercie également le Professeur Tuğrul Talaslıoğlu, mon co-directeur de thèse, je tiens à le remercier pour ses conseils précieux et pour son hospitalité chaleureuse lors de mon séjour de recherche au département du génie civil à l'université Osmaniye Korkut Ata.

Je remercie également les membres de jury, Professeur MELLAS Mekki pour avoir accepté d'être le président du jury, les professeurs OUNIS Abdelhafid, HAMMADI Djamal, et Kadid Abdelkrim pour avoir acceptés de faire l'expertise de mes travaux et d'assister à la soutenance.

Aussi je veux exprimer ma gratitude au Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique et à l'université Mohamed Khider de BISKRA pour m'avoir accordé le stage de perfectionnement à l'étranger afin de compléter cette thèse et approfondir mes connaissances scientifiques.

Je n'oublierai pas de remercier également tous mes camarades de l'équipe de recherche « Modélisation numérique des matériaux et structures » MMS, le Laboratoire de Recherche en génie civil LRGC, ainsi que tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour mener à bien ce travail.

Enfin, je remercie profondément tous les membres de ma famille, pour leur soutien indéfectible et leurs encouragements tout au long de ces cinq années consacrées à mes travaux de thèse, et tous mes amis, qui étaient toujours à mes côtés dans les moments difficiles.

Résumé

Dans cette thèse, on présente une forme d'approche d'optimisation des structures en coques dans deux types de formes de structures, le dôme et la voûte en béton armé, où le moment de flexion maximale et l'énergie de déformation ont été utilisés comme des fonctions objectives à minimiser. Il est utilisé un procédé de réduction de modèle après une étude paramétrique de la géométrie par la méthode des éléments finis basée sur la méthode de la décomposition orthogonale aux valeurs propres « Proper orthogonal decomposition - POD », en couplage avec les fonctions de base radiales « Radial Basis Functions - RBF ». Les fonctions RBF sont appliquées pour estimer principalement les valeurs des fonctions objectives dans les structures étudiées, qui correspondent aux nouveaux paramètres géométriques de la forme. L'optimisation est faite en utilisant l'algorithme génétique (GA) afin d'identifier la combinaison paramétrique optimale.

L'efficacité et la précision de cette méthodologie sont testées par rapport à la méthode des éléments finis (MEF) dans l'estimation de fonctions objectives utilisées, mais aussi la simplicité de l'implémentation des problèmes de l'optimisation de forme des coques dans cet algorithme peut être utilisée efficacement par une grande communauté d'ingénieurs et concepteurs.

Mots-clés

Optimisation structurelle, structures en voutes et dômes, l'analyse par éléments finis, Décomposition orthogonale aux valeurs propres, Algorithme génétique, Fonctions à bases radiales.

Abstract

In the present thesis it is presented, a form of optimization approach of shell structures for two types of structures, the dome and the vault in reinforced concrete material, where the maximum bending moment and strain energy were used as objective functions to be minimized. A model reduction process after a parametric study of geometry using the finite element method (FEM) based on the method of (Proper orthogonal decomposition - POD), coupled with the networks of (radial basis functions - RBF), is used. These functions are applied to estimate the values of objective functions in the studied structures, which correspond to the new geometric shape parameters. The optimization is made using the genetic algorithm (GA) to identify the optimal parameter's combination.

The effectiveness of this methodology is tested through measurement accuracy compared to the finite element method (FEM) in the estimation of the utilized objective functions, also the simplicity of the implementation of shape optimization problems of shell structures in the proposed algorithm can be attractive and effectively used by a large community of engineers and designers.

Keywords

Structural optimization, Vault and dome structures, Finite element analysis, Proper orthogonal decomposition, Genetic algorithm, Radial basis functions.

المخلص

في مذكرة هذا البحث، سوف نقدم منهجية تحسين الهياكل القشرية في نوعين من الاشكال الهندسية، قبة إهليجية وقبو أسطواني من مادة الخرسانة المسلحة، حيث تم استخدام الحد الأقصى لعزم الانحناء وكمية الطاقة الناتجة من التشوهات كدوال موضوعية للتقليل منها الى اقصى حد. بعد اجراء دراسة مبدأيه حول تأثير تغير المعاملات الهندسية للهياكل المدروسة باستخدام طريقة العناصر المحددة لبناء نموذج مخفض

. باستخدام «التحليل المتعامد للقيم الصحيحة» إلى جانب «دوال أسس شعاعية» والتي تطبق لتقدير قيم الدوال الموضوعية في الهياكل المدروسة، والتي تتوافق مع المعاملات الهندسية للأشكال الجديدة. ويتم ايجاد الابعاد الهندسية المثلى عن طريق الخوارزمية الجينية.

تم اختبار فعالية هذه المنهجية من خلال قياس الدقة بالمقارنة مع طريقة العناصر المحدودة في حساب قيم الدوال الموضوعية المستخدمة، بساطة تنفيذ مشاكل تصميم الشكل الأمثل للهياكل القشرية في الخوارزمية المقترحة يمكن من استخدامها بشكل فعال يجذب المهندسين والمصممين.

الكلمات المفتاحية

التصميم الامثل للهياكل، الهياكل الخرسانية الاهليجية والاسطوانية، طريقة العناصر المحددة، التحليل المتعامد للقيم الصحيحة، الخوارزمية الجينية، دوال أسس شعاعية.

Table des matières

RESUME	I
ABSTRACT	II
المخلص	III
CHAPITRE I : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES STRUCTURES EN COQUES ET L’OPTIMISATION	4
I.1 INTRODUCTION.....	4
I.2 L’HISTOIRE DE LA THEORIE DES COQUES	4
I.3 LA CONCEPTION OPTIMALE DES STRUCTURES	7
I.4 L’OPTIMISATION D’EPAISSEUR ET DE FORME DES STRUCTURES EN COQUES.....	7
I.5 OPTIMISATION TOPOLOGIQUE	12
I.6 PROBLEMATIQUE D’OPTIMISATION STRUCTURELLE.....	15
I.7 MOTIVATION	17
I.8 OBJECTIFS DE LA THESE.....	17
I.9 CONCLUSION	18
CHAPITRE 2 : METHODES PRINCIPALES D’OPTIMISATION DES STRUCTURES EN COQUES	19
CHAPITRE II : METHODES PRINCIPALES D’OPTIMISATION DES STRUCTURES EN COQUES	19
II.1 INTRODUCTION.....	19
II.2 TYPES D’OPTIMISATION DANS LES STRUCTURES EN COQUES :.....	19
II.2.1 <i>Optimisation de la taille</i>	19
II.2.2 <i>Optimisation matérielle</i>	19
II.3 OPTIMISATION DE FORME	20
II.4 OPTIMISATION DE FORME PAR METHODES EXPERIMENTALES	20
II.4.1 <i>Modèle d’inversion de la chaîne ou surface pendue</i>	20
II.4.2 <i>Le film de savon et le principe de surface minimale (Bubble soap)</i>	21
II.4.3 <i>Surfaces minimales avec restrictions dans l’espace tridimensionnel</i>	23
II.5 OPTIMISATION PAR MODELISATION NUMERIQUE	24
II.6 OPTIMISATION DE FORME PAR IDENTIFICATION PARAMETRIQUE DE LA GEOMETRIE	32
II.6.1 <i>Optimisation par analyse classique du calcul de variation</i>	32
II.6.2 <i>Optimisation par étude paramétrique de la géométrie</i>	32
II.7 SYNTHÈSE SUR LES ETAPES DE FORMULATION DU PROBLÈME D’OPTIMISATION STRUCTURELLE	33
II.8 ANALYSE DES DOMES	34
II.8.1 <i>Moments et forces dans la structure</i>	34
II.8.2 <i>Mode de comportement des dômes selon les conditions d’appuis</i>	35
II.8.3 <i>Paramètre de conception des structures en coques</i>	37
II.8.3.1 <i>Ouverture / courbure / Rayon de courbure</i>	38
II.8.3.2 <i>L’épaisseur de la coque</i>	39
II.8.3.3 <i>Forme initiale du dôme</i> :	39

II.9 ANALYSE PAR ELEMENTS FINIS	40
II.9.1 Développement de la méthode.....	40
II.9.2 Modélisation des structures en coque axisymétriques	41
II.9.3 Logiciels de modélisation et le choix des éléments finis	43
II.10 CONCLUSION.....	46
CHAPITRE III : APPROXIMATION PAR POD-RBF POUR L’OPTIMISATION DES COQUES.....	47
III.1 REDUCTION DE MODELE.....	47
III.2 REDUCTION DE MODELE A POSTERIORI	48
III.2.1 Historique	48
III.2.2 Approximation.....	49
III.3 THEORIE DE DECOMPOSITION ORTHOGONALE	51
III.3.1 Analyse de composantes principales	55
III.4 CHOIX DU POINT DE TRONCATION.....	57
III.5 RESEAU RADIAL DE FONCTIONS DE BASE.....	58
III.6 OPTIMISATION BASEE SUR POD-RBF	60
III.7 SYNTHESE DE MISE EN ŒUVRE DE LA METHODE POD-RBF	64
III.8 ESTIMATION DE LA REPONSE STRUCTURELLE PAR POD-RBF	64
III.9 CONCLUSION	66
CHAPITRE 4 : APPORT DE POD-RBF COUPLEE AVEC L’ALGORITHME GENETIQUE DANS L’OPTIMISATION DES STRUCTURES EN COQUES.....	67
CHAPITRE IV : APPORT DE POD-RBF COUPLEE AVEC L’ALGORITHME GENETIQUE DANS L’OPTIMISATION DES STRUCTURES EN COQUES.....	67
IV.1 INTRODUCTION	67
IV.2 CLASSIFICATION DES METHODES D’OPTIMISATION	67
IV.2.1 Méthodes déterministes.....	67
IV.2.2 Les algorithmes évolutionnaires (Méthodes stochastiques)	68
IV.3 PROBLEMATIQUE D’OPTIMISATION NUMERIQUE DES STRUCTURES	70
IV.4 CHOIX D’ALGORITHME D’OPTIMISATION	71
IV.5 CONVEXITE DES FONCTIONS ET UNICITE DE POINTS OPTIMAUX.....	71
IV.6 ALGORITHME GENETIQUE CLASSIQUE.....	73
IV.6.1 AVANTAGES D’UTILISATION DE L’ALGORITHME GENETIQUE AG.....	74
IV.6.2 ÉTAPES DE LA PROCEDURE D’OPTIMISATION DE L’ALGORITHME GENETIQUE CLASSIQUE	74
IV.6.2.1 Le codage :.....	74
IV.6.2.2 La sélection :	74
IV.6.2.3 Croisement	75
IV.6.2.4 Operateur de mutation :.....	76
IV.6.2.5 L’évaluation de la fitness des nouvelles générations.....	76
IV.7 LE GENERIQUE DE L’ALGORITHME GENETIQUE PEUT ETRE DECLARE COMME :.....	76
IV.8 RESOLUTION DE PROBLEME D’OPTIMISATION DES COQUES PAR ALGORITHME GENETIQUE :	78
IV.9 FORMULATION DE LA METHODE D’OPTIMISATION DES STRUCTURES :.....	80
IV.10 OPTIMISATION DANS LES DOMES	81

<i>IV.10.1 Avantages de la réduction de modèle dans les problèmes d'optimisation des coques</i>	81
<i>IV.10.2 Approche proposée pour l'optimisation de forme de coque</i>	82
<i>IV.10.3 Etapes de construction du modèle réduit</i>	83
IV.11 ETAPE D'OPTIMISATION DE FORME	84
IV.12 APPLICATION DE L'ALGORITHME PROPOSE DANS LES STRUCTURES EN DOMES	85
IV.13 OPTIMISATION DE FORME DANS LA MARGE TRANSITOIRE PEU PROFONDE, PROFONDE .	90
IV.14 CONCEPTION DE FORME OPTIMALE DANS LES STRUCTURES EN VOUTES	96
<i>IV.14.1 Premier cas d'étude avec S2 seulement comme variable</i>	97
<i>IV.14.2 Deuxième cas S1 fixe, S2 et S3 variables</i>	99
IV.15 CONCLUSION	100
CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES	101
REFERENCE BIBLIOGRAPHIQUE	105

Table des figures

Fig.1.1 Optimisation topologique d'une coque, Hinton, Sienz et al. (2012).....	13
Fig.2.1 Optimisation de forme dans une coque Hinton, Sienz et al. (2012), forme initiale à gauche et finale à droite.	20
Fig. 2.2 modèle de la pendaison (Hanging model) Adriaenssens, Block et al. (2014)	21
Fig. 2.3 Les surfaces minimales, Dorff and Rolf (2012).....	22
Fig.2.4 Conception membranaire par l'analogie du film de savon Firl (2010).....	22
Fig.2.5 L'élément CST	26
Fig.2.6 Triangle à déformation constante modifié (modified vizotto triangle) Vizotto (2010)27	
Fig.2.7 Les forces dans une structure en dôme	34
Fig.2.8 Variation du moment fléchissant par rapport aux conditions d'appuis	36
Fig.2.9. Évolution des fractions de l'énergie de déformation pour un dôme sphérique encastré Ramm (2004).....	37
Fig.2.10 CNIT de Paris (https://steamcommunity.com).	38
Fig.2.11 Concept général de la méthode MEF Hutton(2004)	41
Fig.2.12 Élément fini axisymétrique Ohmori, H., & Yamamoto, K. (1998)	42
Fig .2.13 Élément triangulaire axisymétrique à trois nœuds Oñate, E. (2013)	43
Fig.2.14 L'élément S4R, • signifie les nœuds et * signifie le point d'intégration	45
Fig.3.1 Illustration des vecteurs non corrélés et des vecteurs corrélés	52
Fig.3.2 Systèmes de coordonnées : originale et pivoté	53
Fig.3.3 Approximation d'un vecteur dans un système de coordonnées d'origine (à gauche), relatif à la méthode POD (à droite)	54
Fig.3.4. Représentations des différents types de données, faiblement corrélées (à gauche), corrélées (au milieu), fortement corrélées (à droite)	54
Fig.3. 5 Troncation des valeurs propres pour la réduction de modèle	57
Fig.3.6 Variation du moment de flexion par rapport à la hauteur dans le cas d'un dôme profond POD-RBF vs FEM.....	65
Fig.3.7 Variation de l'énergie de déformation par rapport à la hauteur dans le cas d'un dôme profond POD-RBF vs FEM.....	65
Fig.4.1 Méthodes déterministes d'optimisation	68
Fig.4.2 Méthodes stochastiques d'optimisation	70
Fig.4.3 Fonction convexes et non convexes.....	72
Fig.4.4 Chromosomes avant et après croisement.....	75
Fig.4.5 Exemple d'une mutation	76
Fig. 4.5 Approche algorithmique pour l'optimisation de forme dans les structures en coques85	
Fig.4.6 Paramètres hauteur(H) et ouverture (OU).....	87
Fig.4.7 Répartition de moment de flexion sur la surface du dôme	87
Fig.4.8 Moment de flexion Calculé par MEF en comparaison avec les valeurs estimées par POD-RBF	88
Fig.4.9 Minimisation du moment de flexion maximale dans un dôme profond	89
Figure 4.10 Moment de flexion maximale dans un dôme peut profonde.....	90
Fig.4.11 Variation du moment de flexion maximale par rapport au ratio Hauteur sur Ouverture H/Ou	91

Fig.4.12 Variation de la densité de l'énergie de déformation totale par rapport au ratio Hauteur sur Ouverture H/Ou	92
Fig.4.13 Ratio optimal dans les dômes elliptiques profonds.....	92
Fig 4.14 Variation du moment de flexion maximale par rapport au ratio de la Hauteur sur Ouverture dans le cas d'un dôme peu profond	93
Fig.4.15 Variation de l'énergie de déformation totale dans un dome peut profond par rapport au ratio Hauteur sur Ouverture.....	94
Fig.4.16 Rapport hauteur sur Ouverture optimale dans le cas des géométries peu profondes.	94
Fig.4.17 Transition du rapport optimal d'une géométrie profonde à une géométrie peu profonde.	95
Fig.4.18 Forme cylindrique initial de la structure a optimisé.	96
Fig.4.19 Paramètres géométriques optimisés dans la structure en voûtes.	97
Fig.4.20 maillage par éléments S4R.....	97
Fig.4.21 Minimisation de l'énergie de déformation dans le cas de variation de S2	98
Fig.4.22 Forme optimale de la voûte dans l'optimisation avec le variable S2.....	99
Fig.4.23 Strain energy minimization history in case of S2 and S3 variables.....	99
Fig.4.24 Optimal vault shape in case of S2 and S3 variables	100

Listes des tableau

Tab. 4.1 Les paramètres adoptés pour l'analyse du dôme sous chargement statique.	86
Tab. 4.2 Les paramètres adoptés pour l'analyse du cylindre sous chargement statique.	96

Listes des acronymes et symboles

PCA	Analyse de composantes principales
AG	Algorithmes génétiques
SVD	Décomposition en valeurs singulières
RBF	Fonctions de bases radiales
POD	Décomposition orthogonale aux valeurs propres
MEF	Méthode des éléments finis
CST	Élément triangulaire à déformation constante
MITC	Composantes tensorielle mixtes
S4R	Élément en coque à quatre nœuds avec intégration réduite
ϕ	Fonctions de base de fonction f
U	Matrice des données
A	Matrice d'amplitudes d'approximation
C	Matrice de covariance ($U^T U$)
V	Vecteurs propres de C
Q	Matrice de covariance ($U U^T$)
L	Vecteurs propres de Q
S	Matrice de vecteur singulier gauche
D	Matrice de vecteur singulier droite
Σ	Matrice des valeurs singulières
E	Matrice des composantes orthogonales
k	Point de troncation
G	Matrice des fonctions RBF
B	Matrice de coefficients d'interpolation
s_l	Borne inférieure
s_u	Borne supérieure
S_E	Energie de déformation
σ	Tenseur des contraintes
ε	Tenseur des déformations
σ_a	Contrainte objective

F_S	Fonction de niveau des contraintes
F_W	Fonction du poids
ρ	Masse volumique
V	Volume de la structure
H	Hauteur du dôme
O_u	Ouverture du dôme
S_1	Hauteur dans l'extrémité de gauche dans la voûte
S_2	Hauteur dans l'extrémité de droite dans la voûte
S_3	Hauteur dans le milieu de la voûte

Introduction générale

L'utilisation des structures en coques est d'une variété très large. Dans le domaine de génie civil et de la construction, les architectes ont une tendance au caractère esthétique qu'offrent toutes structures à courbure comme les dômes et les voûtes et mêmes aussi leur pouvoir de donner des espaces très larges non interrompus par des piliers comme dans les théâtres et les auditoriums.

La constitution mathématique des théories d'analyse mécanique des structures en coques a été établie et a progressé vers l'investigation des méthodologies de calculs, qui sont capables de déterminer la solution des systèmes d'équations différentielles générés par les théories proposées. Le calcul des réactions et des déplacements pourrait être une tâche impossible dans la majorité des cas même pour les cas très simples. Nous avons besoin de simplifier les conditions aux limites pour obtenir des solutions. L'évaluation des solutions directement à partir de la théorie d'élasticité est tellement difficile, à tel point qu'on est restreint à utiliser les méthodes numériques approchées. De nos jours, tous les ingénieurs utilisent l'option d'éléments finis dans la conception de leurs projets, grâce à la disponibilité de plusieurs logiciels de modélisation qui permettent l'évaluation des réponses de la structure étudiée d'une manière bien que approximative, mais facilite la tâche du concepteur.

L'optimisation par modélisation numérique des structures en coques, a été développée en utilisant des algorithmes basés principalement sur la réponse structurelle calculée par la méthode des éléments finis. En contrepartie, les formes finales générées par cette opération d'optimisation structurelle, devenue classique, limite leur choix d'application en résultant à des formes complexes. Sachant aussi que la formulation mathématique du problème d'optimisation structurelle classique est une tâche gouvernée par plusieurs difficultés principalement coûteuses en matière de temps de calcul. Cela persiste à conduire à la limitation de leur application.

Dans le présent travail, une méthodologie alternative est proposée, afin de réduire les difficultés rencontrées dans les méthodes d'optimisation classiques.

Afin de faciliter la tâche aux ingénieurs, et en adoptant les mêmes fonctions objectives imitant la procédure d'optimisation structurelle, mais avec une approche plus simple et pratique, basée sur une étude paramétrique initiale permettant de construire un modèle réduit en utilisant la méthode de décomposition des valeurs propre orthogonales (POD), qui offre la possibilité de

réduire les dimensions de calcul d'un processus à plusieurs paramètres en utilisant seulement les variables à grandes variances .

Le POD couplé avec les fonctions d'interpolation à bases radiales (RBF) produit un modèle qui tient à son tour la tâche de calculer la réponse par interpolation dans les marges non balayées par l'analyse paramétrique initiale. A l'aide d'un algorithme d'optimisation, dans notre cas « L'algorithme génétique GA », peut aboutir à la combinaison de paramètres optimaux recherchés.

La présentation de l'efficacité et la procédure de l'implémentation de cette méthode est l'objet de notre présent travail de recherche mené dans cette thèse.

Pour se faire, nous avons structuré cette thèse comme suit :

Dans le premier chapitre, nous avons présenté, dans un ordre historique, le développement des théories d'analyse des structures en coques et un état de l'art sur les travaux de recherche antérieurs, traitant les méthodes et outils d'optimisation des structures en coques.

Dans le deuxième chapitre, les méthodes d'optimisation de forme géométrique les plus utilisées ont été présentées, et une comparaison entre les plus importantes de ces méthodes a été effectuée suivant divers critères. Des travaux basés sur la formulation analytique du problème par le biais du calcul de variations classiques, qui reste aussi efficace dans la quête de trouver la forme de conception optimale, ont été présentées. Afin de faire une liaison entre notre approche proposée et les méthodologies les plus proches à notre idée, nous avons présenté les travaux relatifs à la conception optimale des structures en coques par l'outil de modélisation numérique basée spécifiquement sur la méthode des éléments finis MEF et les éléments choisis pour le présent travail.

Dans le troisième chapitre, nous définissons les concepts de réduction de modèle, pour cela nous avons présenté la méthode de réduction de modèle et les fondements théoriques de la décomposition orthogonale propre explicitement. Afin de compléter la construction de notre approche, la méthode d'interpolation de fonctions à bases radiales est expliquée dans le but d'exprimer le résultat de couplage POD-RBF. Nous finissons ce chapitre par une évaluation d'erreur d'estimation de l'approche POD-RBF par rapport aux calculs faits par la modélisation en éléments finis. En conclusion de ce chapitre le modèle réduit basé sur POD-RBF est validé et par la suite un deuxième couplage du POD-RBF avec l'algorithme génétique va nous

conduire à l'établissement complet de notre approche, qui sera mis en examen en étudiant deux exemples de structures en dômes et voûtes dans le chapitre final suivant.

Dans le quatrième chapitre, nous avons étudié deux exemples de structures en coques en béton armé, le premier à la forme d'un dôme elliptique et le deuxième est en voûte, en se basant sur un modèle réduit construit à partir des résultats de modélisation préliminaires. L'apport de la méthode POD-RBF en couplage avec l'algorithme génétique est évalué dans le cadre de l'optimisation de forme de coques, en montrant le procédé de mise en œuvre de l'algorithme complet.

Les chapitres sont couronnés par une conclusion générale et des perspectives de travaux de recherches dans l'axe de contribution.

**Chapitre I : Recherche bibliographique sur les structures en
coques et l'optimisation**

I.1 Introduction

En étudiant les structures en coques, on peut constater clairement l'interrelation qui existe entre le modèle numérique d'analyse et les lois de physique qui gouvernent leurs comportements.

Toute opération d'optimisation doit prendre en considération la garantie de la performance excellente et les limites physiques du comportement de certains paramètres qui en changeant peuvent engendrer l'apparition des dégâts irréversibles. C'est pourquoi la compréhension des principales caractéristiques des mécanismes de transport de charge des coques, est vital, indispensable et une précondition fondamentale qu'on est obligé de faire avant de passer à la conception en utilisant l'outil et les formulations numériques.

I.2 L'histoire de la théorie des coques

L'établissement des bases de la théorie des structures en coques est en liaison directe avec celles des plaques, car la différence entre les deux structures est liée jusqu'à l'existence d'une courbure dans les structures en coques. Selon (Love 1944), (Poisson et Cauchy 1828) ont proposé une méthode de résolution des équations des plaques basée sur l'expansion des déplacements et tensions par des séries de puissances à travers la distance de la surface moyenne de la plaque. Kirchhoff en (1850), en se basant sur les idées physiques, a présenté quelques hypothèses concernant la surface et sa déformation, et a révélé l'énergie potentielle d'une plaque fléchie en termes de courbures produites dans sa surface moyenne. De plus, les équations de cinématique et les conditions aux limites, ont été obtenues à partir du principe des travaux virtuels. Selon Novozhilov (1959), les hypothèses sont :

a / Les fibres de la section transversale d'une plaque qui sont perpendiculaires à la surface moyenne avant la déformation restent ainsi après la déformation et leur longueur reste constante.

b / Les efforts normaux transversales agissant sur un plan parallèle à la surface moyenne peuvent être négligés par rapport aux autres efforts.

En comparant les deux méthodes précédentes, par Novozhilov (1959), il a montré que la méthode de Kirchhoff est meilleure que la méthode de Poisson et Cauchy en termes de sa grande clarté, et sa signification physique. La méthode de Kirchhoff résout aussi le problème de formulation des conditions aux limites qui constituent l'un des problèmes principaux trouvés dans la méthode des séries de puissances. Cependant, la méthode de Kirchhoff est basée sur des hypothèses de simplifications, cela conduit à des résultats approximatifs où des résultats plus

précis ne peuvent pas être obtenus. Selon Love (1944), le caractère approximatif de l'expression d'énergie potentiel a été considéré de nouveau par Gehring et Kirchhoff (1860), la résultante de l'énergie potentielle consiste en deux termes : une fonction quadratique de la quantité qui définit l'extension de la surface moyenne avec un coefficient proportionnel à l'épaisseur.

L'autre fonction quadratique qui définit la courbure de la surface moyenne avec un coefficient proportionnel au cube de l'épaisseur. Une application directe de la méthode Gehring et celle de Kirchhoff a été effectuée par Clebsch pour résoudre quelques problèmes des plaques particulières. Il a formé les équations d'équilibre aux plaques en termes des efforts et des moments résultants. Ces équations ont deux critères, une impliquant des efforts et des contraintes aux cisaillements dans le plan, et l'autre impliquant des couples de contrainte et des forces de cisaillement verticales.

Basé sur le travail précédent, particulièrement sur la méthode de Clebsch, une dérivation de la théorie générale de flexion des coques a été conduite pour la première fois en utilisant les équations générales d'élasticité par H.ARON (1874). Il a déterminé la géométrie d'une surface en employant l'idée de deux paramètres, d'après la manière de Gauss. Il a obtenu une expression pour l'énergie potentielle semblable à celle de Kirchhoff obtenue pour les plaques. Selon Novozhilov (1959), le développement d'H.Aron n'était pas strictement correct, les incertitudes ont été corrigées par Love en (1888). Dans ce dernier travail, Love a proposé une théorie des coques basée sur les mêmes hypothèses de Kirchhoff nommée Kirchhoff – Love qui sont :

- a) L'élément fondamental de coque est considéré mince.
- b) Les déplacements sont petits.
- c) Les contraintes tangentielles normales sont négligeables.
- d) La normale à la surface reste normale après déformation et ne change pas de longueur.

Bouma (1962) a annoncé que, jusqu'à (1940), le développement concernait seulement les coques simples de révolution, comme la coque cylindrique, sphérique et le parabolöide-hyperbolique.

Après 1940, l'approximation de Love, qui contenait des inadéquations, a connu beaucoup de raffinement pour corriger son contenu, parmi ces raffinements, Pavlovic (1978) et KRAUSS (1967), ont suggéré que :

- a) Tous les termes impliquant t jusqu'à t^3 sont conservés dans les équations.

b) Quelques modifications dans la première hypothèse ont été apportées dans ce qui est connue comme la deuxième hypothèse de Love. Premièrement : l'effet des contraintes transversales normales ne doit pas être négligé, et ensuite : l'effet des contraintes de cisaillement transversal doit être inclus.

Koiter (1959) a montré que les raffinements mentionnés ci-dessus ont peu apporté à l'approximation de Love, dans le sens qu'ils sont basés sur des hypothèses approximatives. Ces raffinements sont dans la plupart des cas du même ordre de magnitude que les erreurs qui restent causées par les hypothèses de base. Une exception aux raffinements précédents est le travail de Sanders Jr (1959) qui a enlevé l'inconsistance de la première approximation de Love concernant les déformations de mouvement de corps rigides. Le résultat d'équations des coques dans la littérature moderne comme les équations de Koiter-Sanders.

Selon Budiansky and Sanders (1963), ces équations constituent une théorie du premier ordre, dans laquelle l'état déformé de la coque est déterminé entièrement par la configuration déformée de sa surface moyenne. Le résultat des équations de la coque sont du huitième ordre avec quatre conditions aux limites à satisfaire aux bords de la coque. Malgré l'approximation, ces équations s'avèrent trop complexe, et une solution analytique peut rarement être obtenue.

Une méthode tridimensionnelle exacte a été formulée par plusieurs auteurs, basant sur le fait que théoriquement l'idée des états de contraintes et des déformations dans la structure en coque sont de type tridimensionnelle, peu importe la minceur de la coque. Dans ce contexte, les travaux de Zerna (1962), Naghdi (1973) et Green and Zerna (1968) doivent être distingués.

Green et Zerna (1968), ont employé les équations tridimensionnelles constitutives de la théorie linéaire d'élasticité classique et les ont appliqués à quelques géométries de coques particulières où les simplifications sont disponibles. Naghdi en (1963) a tiré les équations constitutives sur la base d'un théorème variationnel et a donné une analyse vaste en discutant des simplifications existantes et des approximations dans la théorie linéaire générale des coques.

Une analyse mathématiquement exacte des états de contraintes et des déformations dans une coque par la théorie tridimensionnelle mène à des difficultés insurmontables. La plupart de ces difficultés viennent du comportement physique caractérisé dans les équations constitutives de la coque. Il semble que la cible principale de chaque théorie de coque, et le développement des modèles bidimensionnels, qui sera approprié en vue de la finesse de la coque et permettra la résolution des problèmes pratiques. Pour réaliser cette transition, les hypothèses et les approximations doivent être présentés dans l'analyse.

R.Chebili (1991) a conduit sa recherche sur les conditions dans laquelle la structure en coque a tendance à transporter les charges par voie membranaire, où il a adopté la théorie membranaire pour l'action des forces statiques et les déformations inéxtentionnelles pour les conditions de cinématiques, et afin de faire travailler les coques par action membranaire des conditions relatives à la géométrie et les types d'appuis doivent être satisfaisantes. Cependant l'analyse et la conception des structures en coque à réponse structurelle membranaire s'avère d'être une tâche difficile à cause du caractère complexe des équations régissant le comportement des coques. La modélisation numérique par éléments finis offre des approches de simplifications qui aident à exploiter les résultats dans le contexte d'optimisation structurelle.

I.3 La conception optimale des structures

La conception optimale des structures ou l'optimisation structurelle, est une discipline qui synthétise la programmation mathématiques, la mécanique des structures, et l'analyse des structures par la modélisation numérique afin d'obtenir des conceptions optimales.

Le terme optimal désigne la meilleure solution possible en relation avec une combinaison de paramètres et propriétés. Cette combinaison définit un état final de la conception dont il n'y aura pas de possibilité pour plus d'amélioration de qualités.

L'optimisation structurelle traite le problème de maximisation de la performance de la structure pour un objectif et restrictions ou contraintes définies. Le choix des fonctions objectives et contraintes pourrait mener à une variété de solutions pour le problème en question, ceci est bien le cas d'optimisation multi objectives.

I.4 L'optimisation d'épaisseur et de forme des structures en coques

L'optimisation de forme dans les structures en coque est un problème mathématique inverse, où on tente de déterminer les paramètres résultants à un état de contrainte néfaste, à partir de l'observation expérimentale des effets causés par les changements de ces paramètres.

L'utilisation des structures en coque de béton armé dans la construction est motivée par leur réponse structurelle efficace à supporter un état de chargement transversal, ce qui leur a fait une solution qui répond aux besoins de couvrir de grands espaces dans les différents projets de génie civil.

Basé initialement sur la modélisation physique comme le modèle de chaîne inversée, l'une des premières œuvres de la loi d'inversion de Hooke (1676), un principe utilisé par les architectes

comme Isler Heinz, en utilisant des membranes inversées pour construire des toits à grandes portées qui travaillent uniquement en compression.

L'idée de Hooke est simple, elle présente une chaîne pendue en deux points sous l'effet des forces gravitationnelles résultant un état de contraintes de traction pure, et par l'inversion de la forme caténaire obtenue par suspension, l'arche sera en état de contraintes de compression pure, dans le cas où on applique un chargement uniforme, la forme sera parabolique.

Cette solution expérimentale peut être aussi obtenue aujourd'hui, soit par des outils de simulation numériques directe de l'expérimentation ou en utilisant les techniques d'optimisation structurelles de la forme.

La première branche est basée sur la théorie non linéaire des membranes utilisées dans l'analyse par la méthode des éléments finis. D'abord une forme de membrane plate, libre, soumise à un chargement uniforme est modélisée en état déformé et par l'inversion de cette forme déformée, nous obtenons la forme optimale comme dans l'expérimental.

La deuxième branche utilise l'énergie de déformation comme fonction objective, une forme plus proche peut être atteinte.

Le développement des matériaux en béton armé au début du 20ème siècle a été le début d'une nouvelle tradition de structures en coque minces à base de béton armé. Ceci, combiné avec le développement de nouveaux outils d'analyse numérique des structures a ouvert la voie pour l'optimisation dans la conception des structures.

A partir de 1960, avec Schmit (1960) où une première combinaison d'une analyse par éléments finis et des méthodes numériques d'optimisation non linéaires ont été utilisées, cette innovation générée par un développement progressif dans l'outil de simulation a été utilisé pour étudier les méthodes d'optimisation classiques des structures en coques.

Une bonne introduction pour les problèmes d'optimisation de forme des structures en coques peut être trouvée dans Ramm, Bletzinger et al. (1991)

Un aperçu exhaustive sur l'optimisation de forme et d'épaisseur peut être trouvé dans les articles de revue par Barnes (1994), Berke and Venkayya (1974), Haftka and Grandhi (1986), aussi dans des livres par de nombreux auteurs tels que Allaire (2012), Rao and Rao (2009), Zienkiewicz and Campbell (1973).

Plusieurs chercheurs ont proposé des méthodes pour l'optimisation de forme des structures en coques comme Bletzinger, Wüchner et al. (2005) qui ont proposé des techniques inverses pour l'obtention de forme optimale dans les structures en coques.

D'autres auteurs tels que Bennett and Botkin (1985), Kimmich and Ramm (1989) ont développé des outils de conceptions optimaux, en combinant entre le CAGD(computer aided geometric design) et l'analyse des structures par MEF pour des problèmes à contraintes ou déformations planes.

La formulation mathématique des problèmes d'optimisation se distingue par le type de représentation de variables de conception en deux catégories, continus ou discrètes.

Les premières contributions à l'analyse et la théorie d'optimisation de la forme des structures continues étaient établies par Zienkiewicz and Campbell (1973), plusieurs travaux concernant l'optimisation structurelle des systèmes discrets peuvent être trouvés dans les œuvres de Gutkowski and Bauer (1997).

Dans l'analyse de la dynamique des structures en coques et l'optimisation, on trouve des critères majeurs dans ce domaine, comme la conception basée sur une rigidité adéquate qui augmente la stabilité de la structure. La maximisation des fréquences naturelles est une bonne mesure de réduction des vibrations, ce qui est favorable pour diminuer à la fois de la réponse en régime permanent et transitoire de la structure excitée.

Les fréquences naturelles sont la mesure réelle du rapport rigidité à la masse d'un élément structurel et leur optimisation est un critère de conception plus droit que la maximisation de la rigidité seule ou la minimisation de la masse structurelle seule.

L'optimisation des coques prismatiques en utilisant des fonctions objectives comme la minimisation de l'énergie de déformation et la maximisation de la fréquence fondamentale était l'objet de recherche par Hartmann and Neumann (1989) en utilisant la méthode des bandes finies (finite strip method).

Les plaques circulaires sujettes à l'état de vibrations libres étaient l'objet d'optimisation par Olhoff (1980) pour la maximisation de la fréquence naturelle contraint par un volume de matériau spécifié.

Plusieurs chercheurs ont suivi le même objectif pour l'optimisation de forme des structures sujette à l'état de vibrations libres comme Thambiratnam, Thevendran et al. (1988) pour la maximisation des fréquences naturelles dans les structures en coques cylindriques. Soares,

Soares et al. (1989) Ont présenté un modèle numérique pour l'analyse de sensibilité et la conception optimale de coques axisymétriques.

La représentation géométriques des structures en coques est d'une nécessité vitale et s'accroît exponentiellement lors de l'opération d'optimisation de forme lorsqu'on est obligé de faire varier la géométrie à chaque itération de calcul, cela était l'objet d'étude par plusieurs chercheurs qui ont utilisé des représentations diverses.

L'utilisation des coordonnées nodales des points sur la surface de la coque, des fonctions à base polynomiales comme par Bhaviktti and Ramakrishnan (1980) ou des splines.

Aussi l'utilisation de quelques points de control de la surface géométrique nommés aussi les points clefs (key points) utilisés comme des variables de conception afin d'obtenir la forme optimale, ce qui est choisi dans notre travail où ils peuvent être rassemblés dans un vecteur, comme réalisé auparavant par Tomás and Martí (2010).

La paramétrisation géométrique par les coordonnées nodales a été utilisée par Zienkiewicz and Campbell (1973). Braibant, Fleury et al. (1985) Ont relié les points nodaux par les courbes quadratiques de Bézier et des splines cubiques.

L'optimisation des structures en coques pour les critères de stabilités a pris aussi de l'importance nécessaire d'étude, citons comme exemple les travaux de Hyman and LUCAS (1971) dans le cadre d'optimisation des coques cylindriques soumises à des pressions latérales.

La complexité des structures en coques et le besoin de trouver plus de méthodes d'investigations a été mentionnés par Rotter (1998).

La modélisation des structures en coques par la méthode des éléments finis et ces considérations basiques vis avis du comportement asymptotique de ces structures complexes ont été exprimées par Chapelle and Bathe (1998) aussi dans Chapelle and Bathe (2010).

Dans l'analyse des structures en coques par MEF Temami et al. (2016) a utilisé l'approche en déformation dans la formulation de l'élément et par comparaison avec les tests expérimentales, l'élément utilisé a prouvé un taux de convergence rapide par rapport aux autres éléments à formulation par approche en déplacement, une comparaison entre l'approche en déformation et la formulation en déplacement peut être trouvé dans Hamadi et al. (2014).L'optimisation structurelle par les algorithmes bio-inspirés comme l'algorithme génétique a été introduite par Sakamoto, Takada et al. (2001)

Le développement d'un outil d'optimisation structurelle générale n'a pas pu être fait par ce que le domaine est spécifique à chaque cas d'étude ou les techniques seront propres aux caractéristiques intrinsèques de chaque projet et l'objectif d'une conception optimale reste relatif à l'instinct basique du concepteur. Très peu de chercheurs ont donné des outils d'optimisation structurels, mais toujours en considérant la spécificité de la structure étudiée.

Le domaine d'optimisation structurelle dans la dynamique des structures a reçu une énorme attention par plusieurs chercheurs qui ont investigué l'optimisation des poutres, plaques, et structures en coques dans les dernières trois décennies. Une recherche bibliographique exhaustive sur ce domaine est rassemblée par Leissa (1993). Une revue extensive sur l'analyse vibratoire des structures en coques en faisant une analyse distinctive sur les avantages et les inconvénients de plusieurs théories des structures en coques a été élaborée.

L'optimisation des structures en coque axisymétriques minces et peu profonde pour une fréquence fondamentale maximale a été faite par Bratus (1983) où les conditions aux limites, caractéristiques de matériau utilisé, superficie de la surface et l'uniformité de l'épaisseur de la coque ont été spécifiés comme des contraintes.

Une formulation bimodale a été utilisée et une procédure de résolution itérative basée sur l'approche d'optimalité des conditions était implémentée.

Akl, Ruzzene et al. (2002) ont présenté un processus pour la conception des coques raidies soumises à une pression hydrostatique. Les variables de conception incluent le nombre de raidisseurs et leurs dimensions de la section transversale.

Une approche d'optimisation multi-objectives a été utilisée pour sélectionner les valeurs optimales des variables de conception qui réduisent au maximum l'amplitude de vibration, le niveau d'intensité sonore et le poids des anneaux, ainsi que le coût total de la structure.

Des articles revues rassemblant le progrès chronologique qu'a vu cette nouvelle discipline d'optimisation structurelle de forme comme par Qatu (2002) dans la première partie et la deuxième aussi par les mêmes auteurs Qatu (2002) qui couvre les années entre 1989-2000.

Dans le domaine de modèles de structures en coques 3D, plusieurs chercheurs ont proposé des procédures d'optimisation comme par Hernández and Fontán (1999).

L'utilisation des outils de conceptions géométriques connues en abréviation (CAD) a donné de l'aide aux chercheurs grâce aux techniques implémentées dans ces logiciels offrant un maillage automatique de différents types de géométries, facilitant la tâche d'optimisation à concentrer

seul sur le calcul de la réponse et comportement structurel sans rencontrer les difficultés de maillages classiques. Comme fait par Lindby and Santos (1999) qui ont démontrés l'importance de profiter de la multidisciplinarité du domaine d'optimisation structurelle dans deux types de structures en coques complexes dans le domaine 3D.

L'optimisation structurelle évolutionnaire ESO (evolutionary structural optimization) introduite pour la première fois par Xie and Steven (1993), où la topologie optimale de la distribution matérielle de la structure était l'objectif à poursuivre.

Le développement des algorithmes stochastiques d'optimisation, dites bio inspirés, a ouvert une nouvelle porte dans les dernières années où les chercheurs ont pris l'inclination vers la conception optimale des structures basées sur l'imitation des structures en coques existant dans la nature en utilisant l'algorithme génétique et les algorithmes basés sur les réseaux de neurones.

L'optimisation de forme par l'algorithme génétique a été présentée par Sakamoto, Takada et al. (2001). Une autre méthode présentée par Pugnale and Sassone (2007) pour générer et optimiser structurellement les formes libres de coques, au moyen de l'algorithme génétique, en représentant la forme géométrique par les b-splines rationnelles non uniformes, connues par leur acronyme anglais NURBS (Non Uniform Rational Basis Splines). Une analyse FEM est effectuée pour chaque individu généré du processus évolutif et à chaque itération, afin d'évaluer le comportement de la structure en termes de déplacement maximal dans la direction verticale dans une condition de chargement répartie.

La recherche d'une forme optimale reste un grand défi pour les chercheurs, la complexité d'analyse des structures en coque et le coût élevé de modélisation numérique nécessite l'optimisation du modèle mathématique inverse afin de réduire le temps de calcul et simplifier le caractère complexe de la formulation mathématique du problème d'optimisation de forme.

Cela était un objectif principal de notre étude en utilisant les méthodologies de réduction de modèles POD couplées avec des fonctions d'interpolation RBF et un algorithme d'optimisation stochastique GA.

I.5 Optimisation topologique

La topologie d'une structure est définie par l'arrangement spatial des éléments et les jonctions structuraux. Par conséquent, l'optimisation topologique peut être définie par la variation des connectivités entre les éléments dans les structures discrètes comme les dômes à assemblages métalliques.

Dans les structures discrètes, comme les fermes, la variation des connectivités veut dire la génération de nouveaux éléments structuraux ou l'élimination des membres déjà existants dans la configuration initiale entre les points de jonctions. Par analogie dans les structures à domaine continu, la variation des connectivités veut dire la séparation ou le rassemblement des domaines en résultant à une nouvelle topologie optimale.

La procédure d'optimisation topologique consiste à redistribuer la configuration matérielle de la structure en éliminant les parties qui subissent le minimum d'état de contraintes et compenser cette élimination par le renforcement des parties qui sont sujettes à des niveaux de contraintes élevés.

En premier lieu, les conditions aux limites relatives aux types d'appuis, le chargement appliqué et la distribution matérielle constituent les paramètres prédéfinis. A travers une analyse de la structure, les éléments recevant le plus et moins de contraintes sont distingués et sur cette base la suppression ou l'addition sera faite.

L'exécution itérative de la procédure d'optimisation topologique résulte à une distribution optimale du matériau dans l'espace de conception. Peerdeman, Walraven et al. (2008).

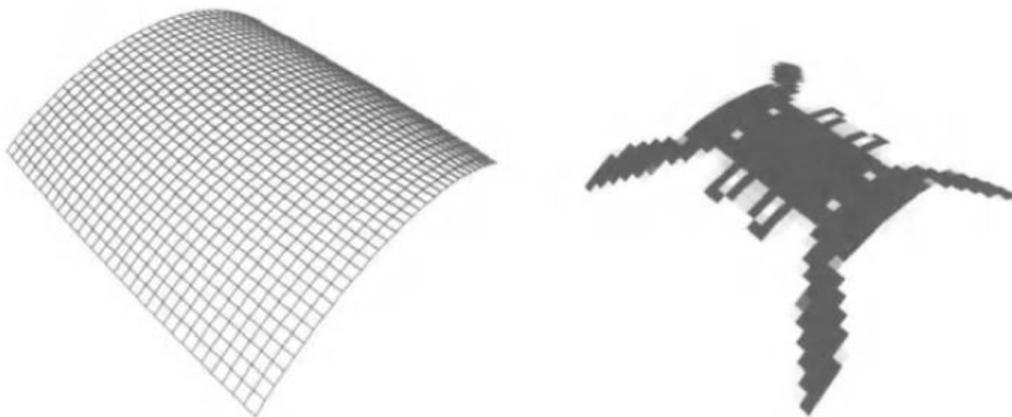


Fig.1.1 Optimisation topologique d'une coque, Hinton, Sieng et al. (2012).

Dans les structures continues, il n'est certainement pas suffisant de trouver les parties de la structure à couper seulement, la forme de ces coupures nécessite aussi la détermination de ce qui produit un couplage entre l'optimisation de forme et de topologie qui a donné cette dernière un caractère plus général. Dans les trois dernières décennies, une amélioration considérable est

constatée dans l'application de l'optimisation topologique dans la génération de conception efficace. Actuellement quelques logiciels d'optimisation de structures ont intégré des modules d'optimisation de la topologie comme Altair Opti-Struct.10.0, (2009) c'est un outil efficace qui est apparu dans la dernière décennie. Cependant, les modules d'optimisation spéciaux équipés de moins de capacités d'analyse que les codes FEM généraux, offrent une plus grande efficacité pour l'optimisation. Les raisons de cela sont relatives à la flexibilité de l'incorporation d'une nouvelle méthodologie de recherche dans un petit programme hautement spécialisé, et pour les codes spécialisés la priorité majeure est donnée à l'implémentation des méthodes d'optimisation effectives constituant le cœur du programme.

Actuellement l'optimisation de la topologie est effectuée séparément, tandis que l'optimisation d'épaisseur et de la forme peuvent être combinée en un seul processus. Les modèles topologiquement optimisés sont considérés comme des modèles de base dans les premières étapes de la conception pour réaliser l'optimisation de forme.

Mais les utilisateurs industriels insistent sur les possibilités d'examiner l'interaction des paramètres de l'épaisseur et de la forme ainsi que l'optimisation de la topologie. Une revue exhaustive sur l'optimisation topologique des structures en coque est rassemblée dans Sigmund and Petersson (1998), Rozvany (2001), Rozvany (2009) et dans les livres par Bendsoe (1995) et dans Rozvany (2014).

L'optimisation des structures continues a été traitée par Bendsøe and Kikuchi (1988) et Bendsøe, Díaz et al. (1993) où on trouve un aperçu de la méthode d'homogénéisation qui sert à trouver la disposition optimale d'une structure élastique linéaire. Le travail présenté dans cet article contient une formulation pour traiter simultanément l'optimisation de la topologie, la forme et la taille de la structure. La discussion inclut l'optimisation des plaques et les structures en coques tridimensionnelles.

Luo and Gea (1998) ont proposé une méthodologie basée sur l'approche de l'optimisation topologique dans les structures en plaques et coques avec raidisseurs pour trouver la meilleure location et orientation de ces derniers dans le domaine statique, et les problèmes aux valeurs propres.

L'optimisation topologique basée sur la minimisation du travail des forces extérieures connue en anglais (minimization of the compliance) dans les structures linéairement élastique considérées par Beckers (1999), où il a proposé une méthode de résolution directe du problème

de distribution matérielle binaire prenant la valeur 0 dans l'absence du matériau et 1 dans le cas contraire.

(Chang and Yong (1997), Pedersen (2000)) Ont utilisé l'optimisation topologique pour la maximisation des fréquences propres des structures en plaques et coques dans le domaine linéaire élastique.

La non linéarité géométrique et matérielle est une préoccupation hautement importante dans la conception optimale des structures dans les projets réelles sujettes à des déformations larges. Ceci nécessite la mise à jour des équations d'équilibre et la non linéarité matérielle qui conduit à la rupture du modèle du matériau. Buhl (2002) a proposé une méthode de distribution optimale des appuis basée sur l'optimisation topologique par la formulation géométriquement non linéaire de la méthode des éléments finis FEM. L'optimisation topologique des structures par l'algorithme génétique est faite par Tai and Akhtar (2005)

La dépendance du maillage dans le processus d'optimisation constitue une problématique majeure par ce que la solution obtenue par un certain maillage n'est pas la même dans un autre type de maillage. Hughes, Cottrell et al. (2005) ont proposé le concept d'analyse iso géométrique basé sur la définition de la géométrie de la structure par Les B-splines rationnelles non uniformes NURBS qui offre la possibilité de définir le maillage des structures complexes à l'aide des fonctions utilisées dans la conception et le dessin initiale.

Dans la phase d'analyse structurelle par éléments finis, les mêmes données initialement utilisées dans la conception seront exploitées, facilitant la paramétrisation des modèles d'optimisation.

Kang and Youn (2015) ont proposé un modèle iso géométrique basé sur la théorie de reissner-mindlin pour l'analyse des topologies des structures en coques complexes.

Le développement simultané des méthodologies de conception optimale des structures en coques dans le domaine de la forme, l'épaisseur et de la topologie a ouvert la voie pour l'hybridation de ces objectif en combinant deux ou plusieurs méthodologie dans un outil d'optimisation intégrale connue sous l'acronyme anglais (integrated design optimization).

I.6 Problématique d'optimisation structurelle

Quand on veut optimiser vers plusieurs objectifs comme le coût, le poids de la structure, et les fréquences naturelles en cas de chargement dynamique, l'opération d'optimisation s'accroît en complexités. De plus, les limitations du processus d'optimisation soulèvent la question sur la nature de la solution optimale obtenue si elle est locale ou globale. Le processus d'optimisation

est beaucoup lié aux idées basiques provenant de l'approche intuitive de l'ingénieur, où en premier lieu une forme initiale est sélectionnée. On fait l'évaluation du comportement de cette forme initiale par rapport à un type de chargement et conditions aux limites d'appuis en évaluant l'état de contraintes, déplacements, charge de flambement et faire le test avec les exigences de sécurités imposées.

Une nouvelle forme améliorée pourrait être proposée à l'aide d'une analyse de sensibilité par exemple comme dans le cas de l'approche SSO (structural Shape optimisation) (Tomás and Martí 2010), le processus est répété jusqu'à l'obtention de la forme finale désirée.

Les structures en coques sont connues par leur sensibilité extrême au changement de la forme géométrique. Cela nécessite une opération d'optimisation minutieuse afin d'arriver à une conception plus orientée à travailler en état membranaire. Cet objectif est atteint par modification de la conception de départ résultant une amélioration dans le comportement de la structure avec tendance à un mode de travail membranaire pure en compression, ce qui est l'idéal pour les structures en béton armé comme il est l'objet de notre présent travail.

L'optimisation dans les structures en coque est généralement un problème qui inclut le domaine non linéaire géométrique et matériel en prenant en compte la réponse structurelle vis-à-vis du flambement et de la plasticité.

Dans ce travail, seul la réponse structurelle dans le domaine linéaire est présentée afin d'avoir une méthodologie générale à exploiter, premièrement dans le domaine linéaire afin d'éviter les conflits résultants de la complexité de formulation du problème d'optimisation avec la motivation d'exploiter plus la méthodologie dans de futures travaux dans le domaine de la non linéarité.

Les structures en coque sont extrêmement sensibles aux changements paramétriques par ce qu'ils sont considérés comme structure déjà optimisée grâce à leur finesse et minceur ce qui peut rendre l'optimisation excessive un danger à éviter.

Les difficultés apparaissent quand on veut faire une optimisation multi objectives dans les structures en coques causée par leurs degrés de sensibilités extrêmement élevés par rapport aux petits changements de certains paramètres comme la réduction de la charge de flambement à partir des états de petites imperfections initiales.

Cet état conflictuel pousse à faire la distinction entre les objectifs d'optimisation, une classification convenable à chaque type d'objectif afin d'éviter la complexité de formulation du

problème d'optimisation et parfois l'absence de conception optimale qui répond à des objectifs multiples.

I.7 Motivation

Les structures en coques dans le génie civil, présentent de nombreux avantages mais comme dans le travail de l'homme, des restrictions et des défis conduisent toujours à un recours à une conception plus optimale.

Puisque le béton armé est le matériau de construction le plus utilisé dans ce type de structures, la naissance des fissures dues à une concentration des efforts de tractions peut dégrader l'état de la structure, donc une opération d'optimisation dans le cadre de conception pourrait aider à l'élimination de ces phénomènes agressifs.

Les structures en coques peuvent être de différentes formes regardant l'utilité et l'usage de celles-ci. Vu la taille et le volume de ce type de structures, la bonne conception nécessite la compréhension du mode de travail et fonctionnement vis-à-vis des charges appliquées.

Pour la conception, certains critères concernant la forme, le mode d'appui, les charges extérieures et la taille peuvent être rassemblés pour bien optimiser la structure tout en assurant la résistance et l'économie dans la conception de la structure.

Dans cette étude, on vise à optimiser les différents types de structures en coque suivant des critères tels que la géométrie, l'épaisseur, le mode d'appuis et le comportement. La formulation mathématique du problème de l'optimisation nécessite le bon choix des variables de conception et une fonction objective.

En se basant sur une analyse mathématique des structures en coques et par la formulation des fonctions objectives capables de traduire le concept de l'optimisation, une approche numérique est adoptée pour simplifier et étudier les différentes formes de structures en coque.

I.8 Objectifs de la thèse

Pour bien étudier les structures en coque de manière générale, il est important de présenter en premier lieu une recherche bibliographique sur le développement de la théorie des coques. Ensuite, et vu que les structures en coque sont gouvernées par leurs géométries, les principes de la courbure et l'équation de Gauss et Coddazi sont à vérifier pour les différentes formes de structure.

Les charges sur les structures en coque sont transportées de la surface jusqu'aux fondations par deux moyens qui sont la flexion et les membranes, ceci exige une analyse théorique permettant d'assurer l'équilibre et la compatibilité dans la structure quel que soit la forme géométrique. Pour une forme géométrique économique et résistante, des fonctions objectives sont déterminées en se basant soit sur le mode de travail de la structure ou sur des paramètres clés influençant le comportement.

L'objectif principal de la présente analyse donc, est d'essayer de minimiser le comportement flexionnel dans la structure qui permettra la réduction des épaisseurs de la structure en faisant travailler la coque par la rigidité membranaire et de prévoir un système de support qui élimine la naissance des flexions aux voisinages des supports.

Ceci bien entendu est réalisé par une analyse numérique en éléments finis simplifiant la convergence des résultats vers le comportement physique réel.

Notre approche à ce problème, consiste à donner aux concepteurs une méthodologie d'étude paramétrique et d'optimisation qui les aident à faire leur choix décisif en regardant toujours la réponse mécanique de l'analyse structurelle donnant un aperçu global sur le comportement de la structure d'une façon quantitative et qualitative.

L'opération d'optimisation sera dirigée vers le choix des paramètres influençant la fonction objective voulu, par une analyse multiples de combinaisons de paramètres pour un objectif de performance et esthétique définit.

Obtenir à la fin la capacité de faire cette analyse d'une manière simple et accélérée à partir d'un large nombre d'options qui va nous permettre d'identifier la combinaison de paramètres optimale pour balancer un état complexe d'exigences dans le projet.

I.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé les différentes méthodes utilisées dans le domaine d'optimisation des coques commençant par les plus anciennes et partant dans un ordre chronologique croissant vers les études numériques les plus récentes.

Nous avons présenté une synthèse sur la procédure d'optimisation de forme dans les structures en coque basée sur la formulation mathématique du problème et l'analyse par la méthode des éléments finis.

Chapitre II : Méthodes principales d'optimisation des structures en coques

II.1 Introduction

L'optimisation dans les structures en coques est une discipline qui a évolué de l'expérimentation avec des méthodes faisant appel à différentes lois physiques et outils mathématiques à la modélisation numérique, cette évolution est bien détaillée dans ce chapitre afin de justifier la nécessité d'une procédure plus simple que nous proposons par la suite dans cette thèse.

Dans le contexte de ce travail on s'intéressera aux méthodes d'optimisation par voie de modélisation numérique. Une comparaison entre les plus importantes de ces méthodes sera effectuée suivant divers critères pour les différents types d'optimisation dans les structures en coques.

II.2 Types d'optimisation dans les Structures en coques :

II.2.1 Optimisation de la taille

L'optimisation de la taille consiste à trouver les meilleures dimensions des éléments structuraux dans le projet de construction étudié. Qui est l'objectif général de conception dans l'ingénierie et même l'approche la plus utilisée dans le domaine de génie civil et architecture.

L'optimisation de la taille dans les structures en coques garde la même géométrie de la surface, seules les sections transversales des éléments seront sujettes à l'opération d'optimisation résultant à une conception plus économique, cela sera en respect des conditions aux limites prescrites et d'équilibres.

II.2.2 Optimisation matérielle

Dans la pratique le choix de matériau à utiliser et la configuration requise pour quelque matériau composite comme le béton armé qui prend la procédure d'optimisation pour quantifier le volume et les dimensions d'armature et le positionnement optimal dans le coffrage. Le but est d'obtenir un état d'usage optimal du matériau en dépendance à la distribution de contrainte. Ceci, comme l'optimisation de la taille des éléments structuraux discutés ci-dessus, est l'approche d'optimisation utilisée par les ingénieurs dans la pratique.

Les structures en coques ont cette qualité distinctive d'usage économique de matériaux de construction en couvrant des grands espaces de grande envergure avec le minimum d'usage matériel par rapport à d'autres types de conception.

II.3 Optimisation de forme

L'optimisation de forme prend comme objectif la recherche de la meilleure définition géométrique de la structure.

Dans l'optimisation de forme des structures en coque la minimisation des efforts de tensions et les contraintes flexionnelles est conduite par l'optimisation de la fonction objective de l'énergie de déformation totale comprenant les termes de flexions et de membranes afin d'obtenir une forme avec une rigidité maximale et une conception orientée à travailler par membrane (Fig.2.1).

Cette méthodologie a des racines dans les méthodes expérimentales que nous allons discuter dans la section suivante.

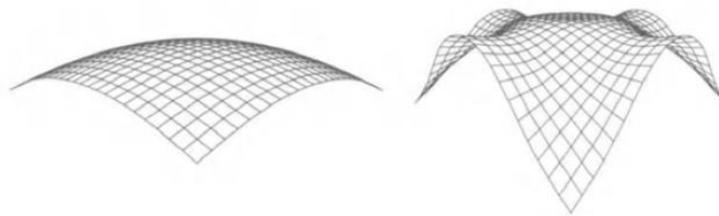


Fig.2.1 Optimisation de forme dans une coque Hinton, Sienz et al. (2012), forme initiale à gauche et finale à droite.

II.4 Optimisation de forme par méthodes expérimentales

II.4.1 Modèle d'inversion de la chaîne ou surface pendue

Trouver la forme optimale d'une structure en coque est un sujet de recherche très ancien, et continue d'être attractif dans le domaine de recherche, la première découverte était de base expérimentale, faite par HOOKE, par le modèle de la chaîne pendue.

Cette méthode peut donner une forme optimale à une structure en arc en état de compression pure, sachant que la chaîne pendue est en état de contrainte membranaire seule par définition, sans aucun effet de flexion.

Ce modèle appliqué sur une surface en pendaison (Fig2.2) donne aussi une forme optimale à la surface de la coque après inversion du modèle initialement suspendu et sujette aux forces de gravité ou même à des poids qui prennent en considération les types de chargement externes appliqués.

En utilisant cette méthode de conception, la structure est en état membranaire ce qui permet une utilisation optimale des matériaux de construction.

Cette méthode est bien connue pour son efficacité de produire des conceptions à effet de flexion minimale dans les structures en arches, et aussi pour les dômes et coques, mais la situation dans ce cas devient plus compliquée à cause de la deuxième dimension de la surface de la coque qui donne plusieurs possibilités aux modes de transports des charges vers les appuis de la structures.

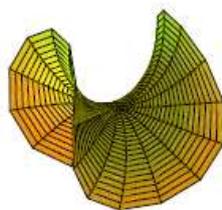


Fig. 2.2 modèle de la pendaison (Hanging model) Adriaenssens, Block et al. (2014)

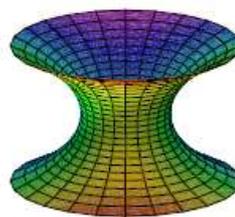
II.4.2 Le film de savon et le principe de surface minimale (Bubble soap)

La méthode expérimentale de conception optimale découverte par Hooke a inspiré d'autres concepteurs nommément Wren, Gaudi and Isler en utilisant un modèle analogue au film de savon pour trouver la surface minimale. Ce concept dérivé de la géométrie différentielle, est appliqué dans la recherche des formes des structures membranaires, travaillant en tension ou avec précontrainte de tension.

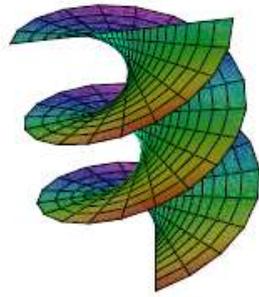
Le concept des surfaces minimales en géométrie désigne des surfaces à courbure moyenne égale à zéro. Les exemples standards de ces formes sont : la caténaire, l'hélicoïde et la surface d'ENNEPER (Fig.2.3) et (Fig2.4).



Surface d'ENNEPER



La caténaire

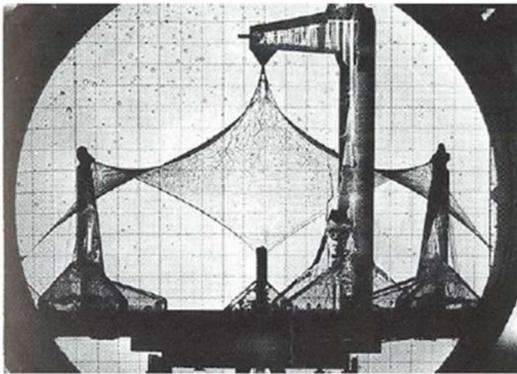


Surface d'ENNEPER

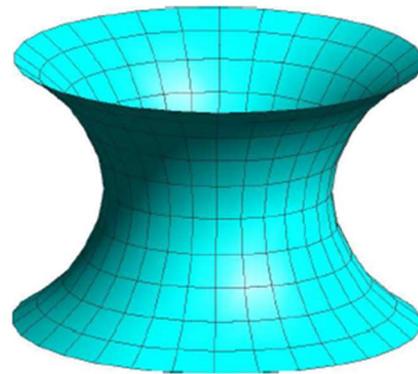


La caténaire

Fig. 2.3 Les surfaces minimales, Dorff and Rolf (2012).



a) Film de savon expérimental



b) Surface minimale numérique

Fig.2.4 Conception membranaire par l'analogie du film de savon Firl (2010).

Les surfaces minimales sont considérées comme un prototype idéale pour les structures de surface de traction en précontrainte. Leur forme anticlastique régisse une tension minimale uniforme, avec une courbure moyenne uniforme assurant la satisfaction de l'exigence fondamentale de l'équilibre statique des structures membranaires en précontrainte.

Le besoin de création des systèmes de couverture dégagées pour les espaces clos a motivé le développement des toits en membrane tendue basé sur des matériaux en tissu.

Dans le contraire des formes de structures conventionnelles, la forme d'une membrane en tension est inconnue, cela nécessite de faire une investigation sur la forme nommée (form

finding) processus de constatation de forme, généralement en utilisant une surface en tissu dans un état de précontrainte.

Le développement d'une méthode expérimentale pour une surface à courbure moyenne uniforme a trouvé l'analogie dans les bulles de savons, où les molécules de l'eau exercent l'une sur l'autre, proche de la surface de l'eau une force maximale tirant les molécules vers le centre de l'eau.

Cette force donne une surface de tension qui tend vers la minimisation de la surface de la forme qui couvre le même plan, la solution du savon à une surface de tension inférieure de celle de l'eau ce qui permet à la formation de film de savon, Dorff and Rolf (2012).

II.4.3 Surfaces minimales avec restrictions dans l'espace tridimensionnel

L'architecte allemand Frei Otto a utilisé les bulles et films de savon comme modèles pour la conception de ces fameuses structures tendues.

Les films de savon sont des surfaces à courbure moyenne constante ce qui rend l'idée de faire une analogie à partir de ces bulles une variante potentielle dans le processus de constatation de forme.

La connaissance des surfaces minimales est d'une importance cruciale dans la conception des membranes et les structures en filet attachées par des câbles, cependant, les surfaces minimales ne sont pas toujours la forme optimale des structures membranaires. Car surface minimale définit seulement la moindre surface avec une courbe ferme ce qui est purement relatif à la géométrie.

Une surface minimale est identique à une membrane en état de contraintes uniforme dans toutes les directions, elle possède aussi la qualité d'être la forme la plus économique posée sur un system d'appuis et supports.

Quand la membrane est soumise à des chargements additionnels, la surface minimale n'est pas toujours la forme optimale à prévoir. Il est parfois nécessaire de changer la forme de la surface minimale pour satisfaire une grande rigidité pour certaine zone de la membrane par augmentation de la courbure, cela va nous faire dévier de la surface minimale ce qui augmente la surface totale qu'on veut au départ l'optimiser.

Malgré ces majeures inconvénients, la détermination de la surface minimale reste essentielle dans l'opération de (form finding) Otto, Trostel et al. (1973).

Le problème essentielle pose aux concepteurs est de mesurer les modèles de films de savon, un problème difficile à résoudre, l'équipe de Frei OTTO dans les années entre 1959 à 1962 ont introduit une technique pour visualiser les modèles de films de savon.

Pour obtenir une évaluation en photogrammétrie. Dans les années suivantes entre 1960 à 1964 ils ont faits d'autres expérimentations pour tester la forme de film de savon pour différentes courbes avec différentes conditions aux limites, ou ils ont réussies à résoudre expérimentalement plusieurs problèmes.

Dans la construction, le problème de la membrane est de trouver la surface minimale qui touche la base des appuis et puis remonte jusqu'aux points extrêmes en élévation. Williams and Ostwald (2015)

II.5 Optimisation par modélisation numérique

On observant les phénomènes et les comportements dans la nature, les chercheurs ont développées des modèles structurales qui conduisent le processus de l'optimisation de formes.

L'étude est basée sur une sélections de paramètres comme l'ouverture de la structure en plan , la hauteur, type de chargement, et l'état de contrainte désirée dans l'objectif de trouver une combinaison de paramètres possible à exister résultants à des formes optimales et élégantes.

Les premières études d'optimisation de formes étaient basées sur la simulation numérique des méthodes expérimentales mentionnées précédemment. Comme le modèle de la chaine pendue qui est remplacé par l'analyse des structures par la méthode des éléments finis dans le domaine de non linéarité géométrique a grandes déplacement.

II.5.1 Simulation du modèle de la pendance

Les méthodes expérimentales mentionnes dans la section précédentes étaient l'objet d'imitation par des modèles numériques depuis plusieurs décennies maintenant. Les coques sujettes à ces méthodes d'optimisation de forme sont connues sous le nom de coque à formes libres.

Un développement considérable a était fait par des chercheurs, ingénieurs et aussi des architectes. Grace aux développements des outils de calcul électronique la simulation de ces expériences physique devenue possible, avec un potentiel de trouver de nouvelle formes considérant plus de combinaisons de paramètres.

L'avantage principal de la simulation est sa capacité à résoudre des problèmes avec des degrés de complexités avancés, ou certains projets sont impossibles à résoudre avec les méthodes expérimentales seulement, ce qui prouve la supériorité de l'optimisation numérique de formes.

Dans les structures en coques la configuration géométrique de la forme est très importante pour la détermination de la réponse structurelle correcte.

Ces techniques de numérisation des modèles physiques pour les structures en coque de forme libre sont inspirées principalement par la philosophie du fameux architecte GAUDI avec la technique funiculaire. L'extension de ces concepts nous conduit aux plus importants modèles physiques de génération de coques de formes libres comme les méthodes développées par Isler (1967). Ces modèles physiques ont été utilisés extensivement dans les travaux de ISLER à partir de 1954. Isler a développé aussi des modèles physiques pour plusieurs coques en béton armé dérivés de formes obtenues expérimentalement à partir de l'exposition d'une feuille ou membrane exposée à une variété de forces et points de pendants.

ISLER a réussi dans le développement de son concept produisant des centaines de coques minces en béton armé avec différentes formes.

Les modèles physiques de coques en formes libres pourraient être simulés par des modèles numériques basés sur la théorie non linéaire géométrique de membranes et structures en coque. En utilisant les méthodes numériques des mathématiques appliquées et la modélisation numérique des structures par la méthode des éléments finis ou l'objectif est de trouver la forme déformée sous chargement.

La conception par ordinateur de ces structures est un domaine récemment développé et en croissance continue bénéficiant de l'avancement rapide de la technologie des outils de modélisation et calcul numérique, cela a contribué largement dans l'amélioration de la conception architecturale.

Smith dans sa thèse de doctorat 'formes membranaires pour les structures en coque' dans UC Berkeley, Californie, en 1969 a développé un modèle numérique par la méthode des éléments finis basée sur la technique expérimentale de Fialho, en considérant les petits et grands déplacements avec un matériau linéairement élastique, homogène et isotrope Liang (2007).

Le travail de Smith a été poursuivi par d'autres travaux de plusieurs chercheurs, nous allons mentionner un modèle récemment développé par Vizotto (2010) qui synthétise l'approche de modélisation numérique inspirée à partir des méthodes expérimentales.

II.5.2 Simulation numérique des modèles physiques

La terminologie de formes libres peut être utilisée pour les projets structuraux ou les structures résistant aux chargements externes grâce à leurs formes, parfois présentant un degré élevé de complexité ou on ne peut pas leur donner une définition par les concepts géométrique de base. Les conceptions d'architectures de formes libres sont motivées par le choix du concepteur de donner une forme particulière à un projet reflétant ces ambitions artistiques Wendland (2000).

En utilisant un modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis, il est possible d'estimer l'état déformé d'une membrane isotrope de toutes formes soumise à des conditions aux limites différentes.

Les structures membranaires sont capables à supporter plusieurs types de chargements comprenant les charges de pression. Dans le but de générer une forme de coque en accord avec la théorie membranaire, la membrane se déforme sous chargement vers une des configurations des états d'équilibres. Cet état final définit la forme de la coque qui va être mise à la construction.

Vizotto (2010) a présenté une méthode de simulation de cette expérience physique en se basant sur une combinaison de programmation mathématique et la méthode des éléments finis.

L'élément utilisé est le CST (constant strain triangle) (Fig.2.5) le plus simple des éléments 2D pour les structures plane modifiée avec un degré de liberté supplémentaire pour prendre en compte le déplacement hors plan (Fig.2.6).

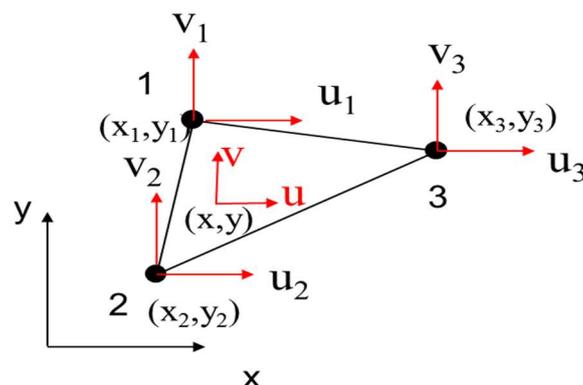


Fig.2.5 l'élément CST

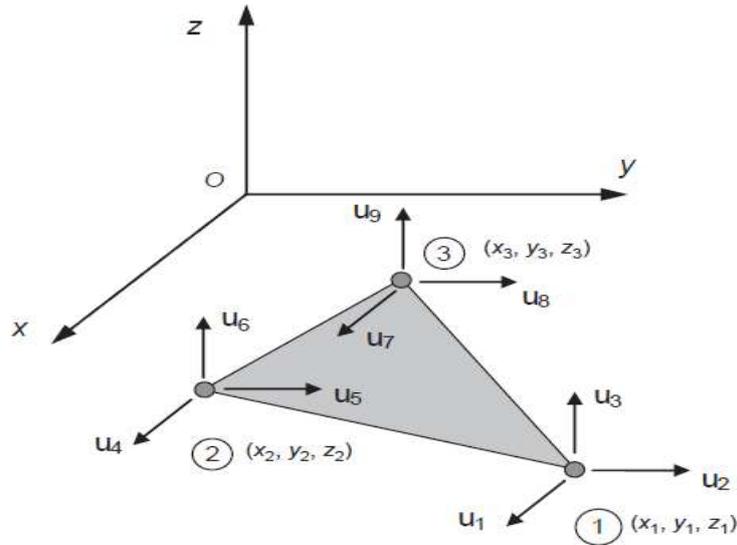


Fig.2.6 Triangle à déformation constante modifié (modified vizotto triangle) Vizotto (2010)

Le matériau est pris en compte avec l'équation d'élasticité linéaire. La formulation exacte des larges déplacements et déformation utilisée pour la membrane est de Green's strains.

Quand la fonction de l'énergie potentielle totale existe et les déplacements sont imposés. La configuration d'équilibre stable correspond aux points de minimum locaux de cette fonction. La fonction de l'énergie potentielle totale est optimisée pour obtenir une forme de coque avec une réponse structurale membranaire, dans ce modèle il est aussi possible d'imposer un état de déplacement prédéfinis à la membrane pour obtenir la forme géométrique finale convenable simplement par la distorsion de la configuration initiale.

Quand la fonction de l'énergie potentielle totale n'existe pas, comme dans le cas de chargement de pression, il est préférable d'utiliser une méthode incrémentale de type NEWTON-RAPHSON pour l'évaluation des solutions des systèmes d'équations non linéaire donnée par l'état d'équilibre.

II.5.3 L'implémentation dans l'algorithme par étapes

1. Le périmètre de la forme et les points de supports sont déterminés à partir des exigences fonctionnelles de la construction.
2. La modélisation d'une membrane flexible et horizontale construite d'un matériau élastique et linéaire, posée sur des points d'appuis et supports en concordance avec le périmètre prédéfinis.

3. Introduire les états de chargements réels appliqués sur la structure dans la simulation.
4. Sous l'action de chargement, la membrane est déformée due aux déplacements larges jusqu'à ce qu'elle atteigne une de ces configurations d'équilibre. Dans cet état la membrane est principalement sujette à un état de contraintes de traction.
5. Finalement l'inversion de la forme déformée obtenue conduit à l'obtention d'une forme qui est principalement en état de contrainte de compression.

Ce modèle définit l'approche d'imitation basée sur l'observation des anciennes méthodes.

Ces étapes récapitulent la transition entre modélisation physique et numérique pour l'optimisation de forme des structures en coque basée sur une méthodologie inverse à partir d'une analyse directe de la structure par la méthode des éléments finis. Bletzinger, Wüchner et al. (2005)

II.5.4 Conception de forme optimale par formulation mathématique d'optimisation structurelle

Dans la section précédente nous avons parlé de la méthode de constatation et recherche de forme basée sur les anciennes méthodologies expérimentales, puis la modélisation numérique d'un problème inverse.

Les solutions résultantes sont généralement utilisées dans les domaines des membranes à précontraintes et les structures à câbles ce qui rétrécit leur domaine d'utilisation.

Alors que les méthodes basées sur l'optimisation structurelle sont plus générales et peuvent être appliquées pour tous les types de structures.

II.5.6 Optimisation structurelle

Les méthodes d'optimisation structurelle sont les outils les plus utilisés lors des traitements de problèmes de conception des structures, basées sur une formulation mathématique qui fusionne.

La conception géométrique assistée par ordinateur avec la modélisation numérique de la mécanique des structures, et la programmation mathématique non linéaire résultant à l'obtention d'un module de traitement complet.

II.5.7 Formulation standard de problèmes d'optimisation structurelle

Chaque problème d'optimisation structurelle peut être formulé dans la forme standard suivante :

$$\text{Minimiser : } F(s,u) \quad s \in R^n \quad (2.1) \text{ La fonction objective}$$

Tel que : Ces conditions sont respectés

$$g_i(s, u) \leq 0, i = \{1, \dots, n^g\} \quad (2.2)$$

$$h_j(s, u) = 0, j = \{1, \dots, n^h\} \quad (2.3)$$

$$s_l \leq s \leq s_u \quad (2.4)$$

(F) est la fonction objective ou la fonction cout, elle est la mesure de la qualité de la conception, cette fonction peut rassembler plusieurs fonctions résultant à un problème d'optimisation multi-objectives. Notre travail se concentre sur la définition du problème avec une seule fonction objective à la fois. L'indice n définit la taille de l'espace des variables de conception R^n et aussi le nombre de variables indépendants qui déterminent l'algorithme d'optimisation applicable au problème et le degré d'effort de calcul numérique.

(s) est le vecteur des variables de conception, qui pourrait être introduit comme un vecteur ou fonction qui représente les paramètres de la conception, comme la géométrie dans notre présent travail ou le choix de propriétés du matériau utilisé, quand les variables de conception sont relatifs à la géométrie leur définition parfois se fait à travers des fonctions d'interpolation sophistiquées qui décrivent la surface. Les types des variables de conception conduit le choix de stratégie d'optimisation convenable.

(u) est le variable de conception relatif à la réponse de la structure, par exemple les déplacements, déformations, contraintes, forces de réactions ou énergies.

(g) représente la contrainte d'inégalité, (h) représentent les fonctions de contraintes d'égalité. Ces fonctions spécifient le domaine de faisabilité où on cherche les solutions, le nombre de contraintes d'inégalité et contraintes d'égalité est spécifié par n^g et n^h respectivement. Dans le processus d'optimisation une contrainte d'inégalité peut être active, inactive ou même redondante. Les contraintes d'égalité seront seulement actives ou redondantes. Une propriété basique de l'optimisation est que le nombre des équations de contraintes actives sera toujours inférieure ou égale au nombre de variable de conception.

s_l et s_u sont les limites inférieures et supérieures imposées sur l'espace des variables de conceptions. Christensen and Klarbring (2008)

II.5.8 Fonctions objectives utilisées dans l'optimisation structurelle des structures en coque

Maintenant il est possible de considérer une fonction objective comme par exemple l'énergie de déformation S_E est une fonction appropriée pour la conception des structures à effet membranaire dominant, ce qui veut dire travaillant par compression ou traction mais pas de flexion.

$$S_E = \int_V \sigma \epsilon dV \quad (2.5)$$

La minimisation de l'énergie de déformation dans le calcul des structures est équivalent à la maximisation de la rigidité, l'obtention d'une structure à caractère rigide garantissant une grande résistance aux déformations est considéré structurellement comme une conception efficace.

Pour l'obtention de forme travaillant majoritairement par compression, la fonction du niveau de contraintes F_S (stress levelling), Bletzinger and Ramm (1993).

$$F_S = \int_V (\sigma - \sigma_a)^2 dV \quad (2.6)$$

σ_a Spécifie la valeur de la contrainte à ne pas dépasser comme la contrainte objective prescrite.

D'autres fonctions peuvent être formulées comme par exemple le cout total de la construction ou la fabrication, aussi la minimisation du volume ou le poids totale de la structure est d'une grande importance spécialement dans les projets de l'industrie aérospatiale, où la conception donne plus d'importance à l'objectif d'obtenir des structures à poids minimum et moins d'importance au cout totale de la fabrication.

$$F_W = \int \rho dV \quad (2.7)$$

F_W Est la fonction objective poids totale de la structure, ρ est la densité du matériau utilisé.

Afin d'améliorer la conception des objectifs, comme l'étude de la réponse à l'excitation dynamique mesurée principalement par la fréquence fondamentale de la structure, mais aussi la minimisation de la charge de flambement, sont tous des buts extrêmement favorables à achever.

La maximisation des fréquences naturelles et fondamentales est une bonne démarche à suivre pour la minimisation de la réponse dynamique d'une structure excitée à régime permanent ou transitoire.

La fréquence naturelle est le moyen convenable pour mesurer le rapport masse-rigidité des éléments structuraux. Mallika and Rao (2010), est parmi les premiers travaux d'optimisation des vibrations des plaques circulaires qui ont pris le problème de maximisation de la fréquence fondamentale des vibrations pour un volume de matériau constant, ce qui a été fait par Hinton, Sienz et al. (2012), l'analyse était basée sur la théorie classique des plaques minces.

II.5.9 Sélection des équations de contrainte d'égalité et d'inégalité

Afin de compléter la formulation du problème, quelques restrictions seront imposées sur les valeurs de variables de conception pour que le modèle mathématique soit éloquent.

Généralement dans ce type de problème de la mécanique des structures les restrictions seront imposées sur les contraintes et les déplacements comme suit :

a) Restrictions sur les contraintes :

$$g^{\sigma} = 1 - \frac{\sigma}{\sigma_{all}} \geq 0 \quad (2.8)$$

b) Restrictions sur les déplacements :

$$g^d = 1 - \frac{d}{d_{all}} \geq 0 \quad (2.9)$$

Où σ et d sont la contrainte et le déplacement dans un certain point respectivement. Et σ_{all} , d_{all} représentent les valeurs admissibles de contraintes et déplacements dans la structure entière. Ce type de restrictions est classé dans la catégorie non linéaire.

Une autre classe de restrictions est représentée dans les équations d'égalités, connue sous la nomination de restrictions linéaire ou géométrique, comme exemple sur ce type, les restrictions sur le volume total de la structure où le poids sera fixé dans leurs valeurs initiales.

$V = V_{initial}$ est le volume initial de la structure.

D'autres contraintes importantes imposées sur l'espace de variables de conception nommées les restrictions latérales, ce type de restrictions prend en considérations certaines limites sur la technologie de fabrication des éléments structuraux, les équations sont de la forme suivante :

$$s_i^l \leq s_i \leq s_i^u \quad (2.10)$$

Ces restrictions imposent des conditions précises sur le problème d'optimisation qui seront obligatoirement satisfaites pour que la conception rentre dans la marge de faisabilité.

Les bornes sont basées sur les considérations d'analyse et de construction. Dans les structures en coques on peut imposer des bornes sur les variables de conception de dimension géométriques comme suit :

$$0 \leq s_i \leq b \quad (2.11)$$

Où b est une dimension donnée, ces types de restrictions limitent la recherche de la solution optimale graphiquement par des droites dans la région de recherche.

II.6 Optimisation de forme par identification paramétrique de la géométrie

Les structures en coque appliquées dans le domaine de génie civil sont principalement connues sous la nomination du dôme. Les concepteurs de ces derniers sont à la recherche de la combinaison paramétrique optimale qui répond aux exigences structurelles et une performance optimale. Les procédures d'optimisation de ces paramètres utilisées par les ingénieurs sont mentionnées ci-dessous en deux types :

II.6.1 Optimisation par analyse classique du calcul de variation

La théorie membranaire des structures en coque offre de la simplicité dans la formulation de fonctions destinées à l'optimisation géométrique de forme par identification de rapport optimal entre paramètres étudiés. Dans un exemple d'optimisation de forme d'un dôme sujette au chargement de vent où il a été l'objet d'une étude par Narayan, Yaragal et al. (2012), l'objectif était la minimisation du volume total de matériaux utilisés à partir de l'identification d'un rapport de hauteur sur ouverture optimale dans le dôme, en utilisant les équations simplifiées de la théorie membranaire, ce rapport est de 0.2236 dans ce cas d'étude.

Cette approche est une alternative simple et élégante par rapport aux méthodes d'optimisation structurelle caractérisée par une extrême rigueur dans leur formulation et la complexité de résolution. La même approche a été utilisée par K. Riemens (2011) en étudiant la forme optimale d'un dôme sphérique pour un volume minimal de matériaux de construction.

II.6.2 Optimisation par étude paramétrique de la géométrie

Dans la majorité des cas d'étude réelle, le concepteur est restreint par le temps de recherche à choisir une combinaison de paramètres idéale à l'aide de l'analyse par outils de modélisation numérique. L'étude paramétrique présente une démarche efficace, où un changement graduel

d'un paramètre de la géométrie va donner les marges et les rapports recherchés par le concepteur. Plusieurs travaux d'investigation ont été menés dans cette voie, prenant le rapport de la hauteur d'un dôme par rapport à son ouverture pour différents objectifs, M. Hosseini et al (2012) ont étudié l'effet de ce rapport de trois types de dômes dans un environnement sismique pour l'objectif d'une géométrie optimale basée sur ces deux paramètres géométriques.

Dans la poursuite du même objectif, F. Liu et al (2006) ont pris un dôme à structure métallique, et leur étude paramétrique du rapport Hauteur/Ouverture, en soumettant la structure à une excitation dynamique, a révélé un mode de comportement convexe ou un ratio optimal est observé par rapport à la variation des fréquences propres de la structure.

L'investigation de ce ratio dans le domaine de la stabilité a été conduite par P. N Khakina et al (2011) pour un dôme sphérique où l'effet de changement de Hauteur/Ouverture était lié à la charge critique de flambement.

Dans le présent travail, la même philosophie basique de conception est utilisée et couplée par la méthode POD-RBF et l'algorithme génétique, afin de trouver des géométries optimales basées sur des rapports entre paramètres géométriques.

II.7 Synthèse sur les étapes de formulation du problème d'optimisation structurelle

En résumé de la procédure d'optimisation structurelle, la conception du problème consiste à :

1. La sélection de variables de conception pour décrire les choix alternatifs proposés.
2. La sélection des objectifs formulés en fonctions mathématiques précisant le critère d'optimalité de conception en termes de variables de conceptions choisis. Ces fonctions seront optimisées soit par minimisation ou maximisation.
3. La détermination d'un ensemble de conditions restrictives sur les variables de conceptions et qui définissent les résultats acceptables.
4. L'opération d'optimisation qui est le choix de combinaisons de variables optimales et qui minimise ou maximise les fonctions objectives.

Les problèmes de l'optimisation structurelle sont caractérisés par plusieurs objectifs et restrictions qui sont généralement des fonctions non linéaires en termes de variables de conceptions.

Les fonctions objectives pourraient être implicites, discontinues et non convexes, et selon le type de fonctions utilisées les algorithmes d'optimisations seront sélectionnés.

II.8 Analyse des dômes

Une structure en dôme est simplement une courbe en rotation sur un axe de symétrie formant une surface utilisée dans la couverture de plusieurs projets de construction civile. La courbe pourrait avoir une variété de formes infinies en choisissant différentes combinaisons de paramètres géométriques comme l'ouverture, la hauteur, les centres de courbures, et la direction de courbures.

Dans notre thèse deux types de dômes sont examinés, un dôme construit à partir de la rotation d'un ellipsoïde avec une courbure de GAUSS positive, et un parabolöide passant d'une courbure de GAUSS positive a la forme hyperbolique avec courbure de GAUSS négative.

II.8.1 Moments et forces dans la structure

La théorie classique des coupöles avec leurs équations simplifiées sont bien documentée par Billington (1982). La procédure de solution consiste à résoudre pour les forces de la membrane et des déformations sans restrictions (supports sur les bords) sur la structure, puis la correction de ces résultats en appliquant un dispositif de retenue de support. Deux ensembles d'équations existent dans cette solution. Ce sont les équations de la membrane et de la flexion. Les moments et les forces dans une structure en dôme sont illustrés dans (Fig.2.7).

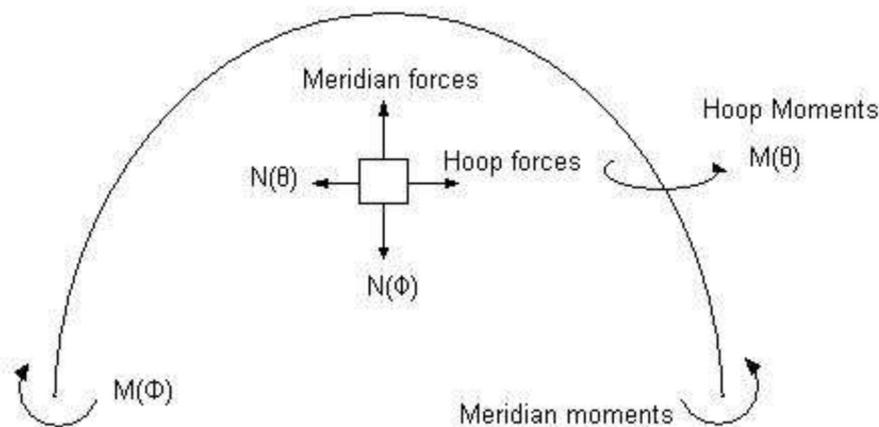


Fig.2.7 Les forces dans une structure en dôme

La procédure de solution classique est basée sur la méthode des forces appliquées aux coques axisymétriques qui est déterminée par les étapes suivantes :

1. Une Analyse membranaire.
2. Analyse flexionnelle pour quantifier les effets dans les frontières.
3. Superposition des équations décrivant les effets membranaires et flexionnelles afin de satisfaire les conditions de compatibilité naturelle et cinématiques.
4. Les inconnues recherchées dans notre cas sont les forces de flexions dans les frontières des supports de la coque, une fois ces forces sont déterminées, les autres inconnues comme les efforts internes et les déplacements de la coque peuvent être obtenus par la superposition des domaines membranaires et flexionnels. Les coefficients d'influence de la flexibilité sont d'utilité pour obtenir les relations de comptabilité et les forces redondantes aux frontières limitant la structure. Enfin les efforts tranchant, les déformations et les moments de flexions aux bords de la coque sont calculés.

II.8.2 Mode de comportement des dômes selon les conditions d'appuis

Le transport des charges dans les structures en coques se réalise principalement par deux voies, soit membranaire où flexionnelle. Il est préférable d'atteindre une conception permettant un transport de charge membranaire ou chaque fibre dans le domaine matériel de la coque est également déformée, ceci est obtenu grâce à l'élimination des effets de flexions, sachant qu'un moment de flexion conduit à un état de déformations inéxtensionnelles qui produit des fibres en traction, ce qui est défavorable dans le cas du béton.

Contrairement à cela, un état de flexion est habituellement défavorable, caractérisé par une situation dégradante lorsque l'épaisseur de la coque diminue comme dans le cas des coques minces. Dans un état de flexion dominant, on observe un état de grandes déformations inéxtensionnelles de la surface moyenne.

Le mode de comportement est principalement affecté par le mode d'appuis de la coque, dans (Fig.2.8). Un exemple classique d'une calotte sphérique soumise aux différents types d'appuis qui illustre cette relation entre appuis est mode de comportement majeure.

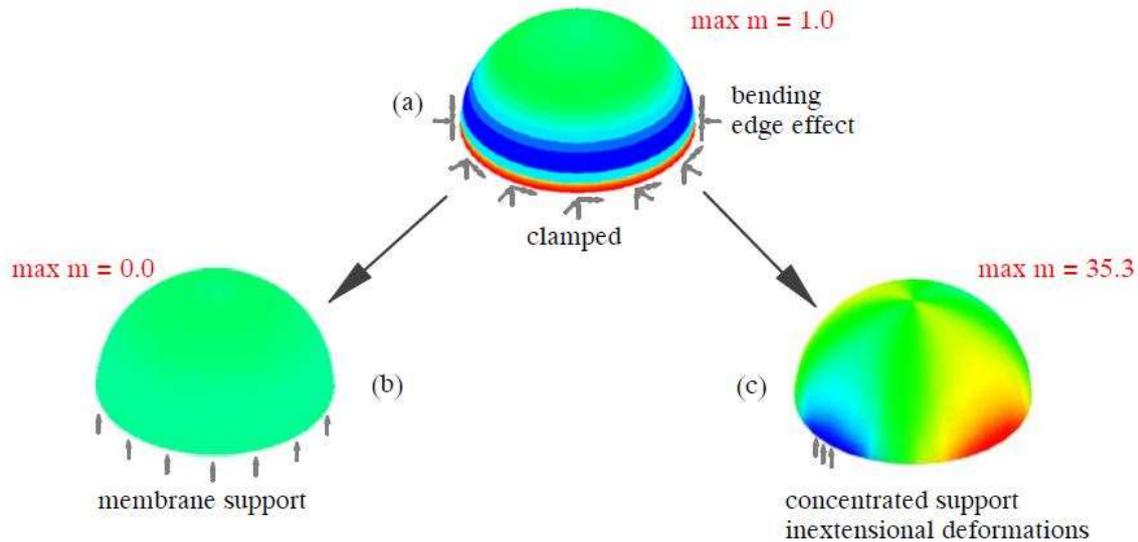


Fig.2.8 Variation du moment fléchissant par rapport aux conditions d'appuis

a) Coque encastrée : flexion + membrane .b) Coque simplement appuyée : état membranaire pure

c) Appuis concentrées : effet flexionnelle dominant Ramm (2004)

La charge appliquée dans l'exemple ci-dessus était choisie de façon que le moment maximal dans le cas d'encastrement soit égal à un, et faire de la référence pour les autres types d'appuis. Un dôme encastré porte le chargement principalement par voie membranaire mais présente un effet typique dans les bords de la coque causé par ces appuis géométriques. Ce dernier effet était l'objet de notre cas d'étude pour une géométrie d'un dôme ellipsoïdal.

La coque simplement appuyée n'a pas d'effet de flexion, et la coque avec appuis concentré en un point présente un moment de flexion de grande valeur conduisant à des déformations inéxtentionnelles et des contraintes de larges amplitudes.

L'évolution des trois fractions dans la totalité de l'énergie de déformation W_{tot} , pour chaque terme de cette énergie soit par effet membranaire, cisaillement transversal et de flexion par rapport à un taux d'élancement (slenderness) décroissant sont représentés dans (Fig.2.9) ci-dessous pour une calotte sphérique encastrée à la base.

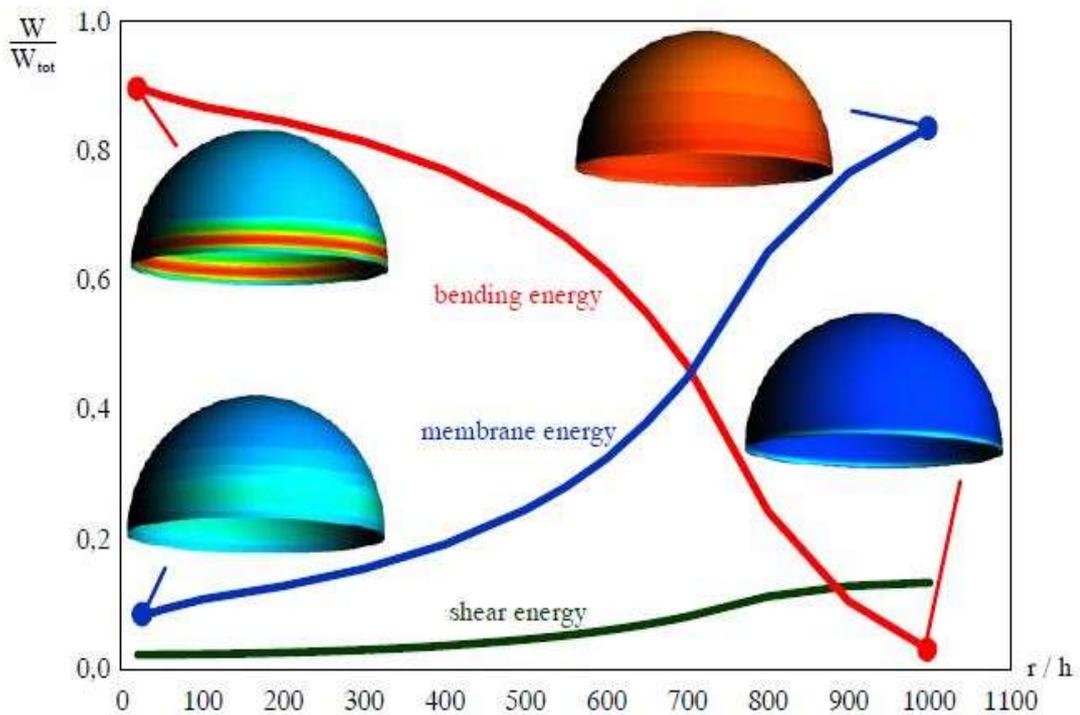


Fig.2.9. Évolution des fractions de l'énergie de déformation pour un dôme sphérique encasté Ramm (2004)

De toute évidence, l'effet de bord diminuant peut être observé en réduisant la flexion finalement à un effet de couche limitée minuscule en faisant augmenter l'ouverture de la coque à une valeur de 1100 fois l'épaisseur. Cela prouve que le moment de flexion a une liaison directe avec la géométrie de la coque. Cela nous a poussés à examiner l'effet de la géométrie en deux paramètres de l'ouverture et de la hauteur de la coque afin de trouver la géométrie optimale par rapport à un état minimum flexionnel. En conséquence, la flexion et l'énergie membranaire échangent leur dominance.

II.8.3 Paramètre de conception des structures en coques

La conception d'une structure en coque nécessite un choix de paramètres géométriques qui définit la forme de la surface et par conséquent induit une réponse structurelle affectant le choix de matériau à utiliser ou l'épaisseur de la coque. Avant de passer à l'optimisation de ces paramètres, il est important de rappeler les résultats obtenus précédemment dans la pratique de la discipline de conceptions des structures en coque concernant les rapports entre paramètres de conception. Ces résultats dérivés de l'expérience acquise à partir de la conception de nombreuses structures pourrait bien fournir aux ingénieurs un guide de travail aidant à la conception d'une coque de bonne performance.

II.8.3.1 Ouverture / courbure / Rayon de courbure

L'ouverture de la coupole est déterminée par son utilisation finale. Les dômes peuvent couvrir jusqu'à 200 m et plus. La principale préoccupation des dômes de longue portée est la question de la stabilité de la structure de la coque. Aujourd'hui, la plus grande portée d'une coque est le CNIT de Paris avec 218 m de portée (Fig2.10).



Fig.2.10 CNIT de Paris (<https://steamcommunity.com>).

Lorsque l'ouverture est connue, la hauteur et les rayons de courbure doivent être fixés. Selon le comité de l'institut américain du béton ACI 344, les dômes donnent généralement lieu à couvrir les ratios de 0.1 à 0.16, tandis que Scordelis (1981) a donné des rapports de hauteur sur ouverture de coque de 0.13 à 0.2 et un ratio de rayon de courbure sur ouverture de 1 à 0,707. L'optimalité de ratio hauteur sur ouverture dépend de l'objectif de conception voulu. Pour un volume de matériau minimal dans les arches de forme parabolique, l'état d'effort membranaire est de 0.4, pour le même objectif, un dôme sous la forme d'une calotte sphérique encastré à la base, a un rapport optimal de hauteur sur ouverture de 0.3 Hoogenboom (2011).

Coques plates. Le site de Tchernobyl a été couvé récemment par une grande voûte où le ratio de hauteur sur ouverture est de 0.4, avec des dimensions méritants d'être qualifiées d'extraordinaires où la hauteur est de 110 mètre et une ouverture de 257 mètre.

Le rapport de la hauteur sur l'ouverture fixe aussi le rayon de courbure de la coque. L'angle d'ouverture de la coque est habituellement choisi entre 60 et 90 degrés, Scordelis (1981).

Les angles centraux plus élevés donnent des géométries de coque avec des pentes extrêmes, la mise en œuvre d'emplacement du béton sur ces pentes nécessiterait alors un coffrage double. Dans le cas où l'ouverture de la coque dépasse 30 m provoque une augmentation de la hauteur ce qui nécessite un coffrage coûteux. Les grandes travées coquilles irrégulières, des dalles pliées comme des voûtes en berceau, ont besoin d'une épaisseur supplémentaire ce qui provoque un poids élevé de morts et de plus en plus de renforcement. A ce stade, la flexion transversale cesse d'être secondaire et devient critique. Avec de courts cylindres de rigidification, on obtient des arches si grand avec de grandes portées que les avantages naturels à la coque sont annulés. Un diamètre d'ouverture très large dans les coques nécessite de l'épaisseur supplémentaire avec un renforcement par acier à cause de l'augmentation des charges de poids, dans ce cas l'effet de flexion transversal devient critique.

II.8.3.2 L'épaisseur de la coque

L'épaisseur de la coque est un paramètre important dans la conception de la coque. Parce que la charge permanente de poids mort de la structure représente souvent la partie majeure de la charge totale, donc il y a un désir de réduire le volume du matériau utilisé en minimisant l'épaisseur. En outre une coque mince est susceptible de ne pas pouvoir résister aux charges de flexion. Heureusement, les perturbations de bord ont seulement un caractère local et peuvent être compensées par une augmentation locale de l'épaisseur. C'est pourquoi nous avons choisi de nous concentrer dans notre étude sur l'évaluation de la valeur maximale du moment de flexion pour le minimiser.

II.8.3.3 Forme initiale du dôme :

La forme initiale choisie affecte le résultat final de l'optimisation, si on veut garantir une architecture faisable et bien sélectionnée, parce que l'opération de l'optimisation de forme généralement ne résulte pas de grands changements dans la forme initiale, ce sont que des petits changements qui rendent la performance de la structure plus grande.

Dans cette thèse un dôme de forme ellipsoïdale sera étudié dans le contexte d'une conception optimale de la forme, cette forme de toitures en dôme est construite à partir de la rotation d'une ellipse autour d'un axe de symétrie.

La forme ellipsoïdale ou elliptique du dôme présente comme avantage la transmission des efforts membranaires dans le sens du méridien verticalement aux supports. Dans le deuxième exemple une forme cylindrique sera étudiée.

II.9 Analyse par éléments finis

II.9.1 Développement de la méthode

La méthode des éléments finis est une méthode bien établie dans l'application de l'analyse des structures, son développement a commencé dans l'industrie aéronautique par des ingénieurs de conception.

La popularité de la méthode a augmenté avec le développement de capacité de calcul des ordinateurs et les langages de programmation, par la suite la méthode est devenue un outil indispensable pour les ingénieurs afin de résoudre approximativement les problèmes d'analyse des structures gouvernées par des systèmes d'équations différentielles ou intégrales qui sont malheureusement difficiles à résoudre directement sans introduire des simplifications Oñate, E. (2013) .

Le concept général de la méthode (MEF) est dérivé du mot finis ce qui veut dire la discrétisation d'un espace matériel en portions infinitésimales dans le langage mathématique du calcul différentiel.

La géométrie d'un milieu continu sera formée d'un assemblage à partir d'une collection d'éléments généralement choisis avec une géométrie simple, soit triangulaire ou quadrilatérale en deux dimensions (2D) ou par des tétraèdres et hexaèdres dans le domaine tridimensionnel (3D).

L'assemblage de ces éléments couvre le domaine entier (Fig.2.11), l'espace de variation des paramètres du problème comme les déplacements dans le cas de la méthode des éléments finis à approche en déplacement sont définies dans chaque élément finis par une expansion polynomiale, soit linéaire ou quadratique ou même par des fonctions trigonométriques. Car la variation analytique exacte de ces paramètres est de nature très complexe est généralement inconnue. La méthode MEF donne seulement une solution approximative Hutton(2004).

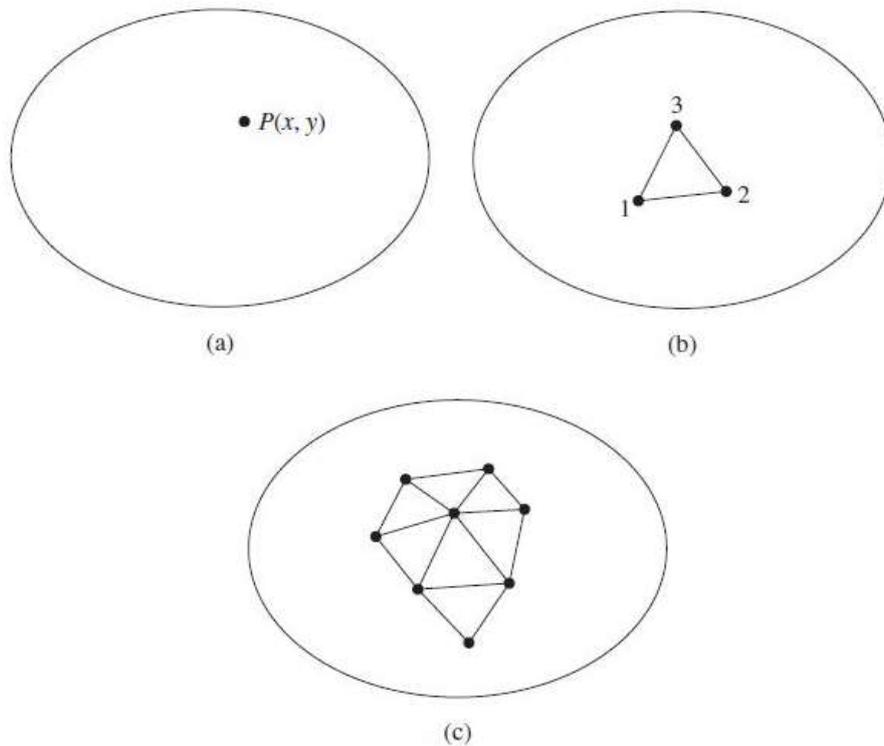


Fig.2.11 Concept général de la méthode MEF Hutton(2004)

- a) Un domaine bidimensionnel général défini par un champs de variable (x,y)
- b) Un élément fini a trois nœuds définis sur le domaine
- c) Un maillage partiel du domaine par éléments finis

Les principes de base de la méthode MEF sont simples est bien connus, donc seulement quelques notions relatives aux choix des éléments de maillage de nos structures en coque étudiés dans la thèse seront présentés.

II.9.2 Modélisation des structures en coque axisymétriques

Quand une structure présente une symétrie, il y a lieu à minimiser l'effort de calcul, les dômes et les voûtes sont des coques axisymétriques est peuvent être modélisés en profitant de ce caractère.

La majorité des solutions analytiques des coques axisymétriques est basée sur l'hypothèse de Kirchhoff pour l'orthogonalité de la rotation normale ou bien la négligence d'effet de cisaillement transversal causant cette déformation, l'hypothèse est seulement acceptable pour le cas d'une coque mince, l'hypothèse de Reissner-Mindlin est utilisée pour les coques épaisses où la différence entre les deux hypothèses est relative à la rotation de la normale.

9.2.1 Eléments axisymétrique tronconique

La plus simple manière de discrétisation des structures en coques axisymétriques est d'utiliser les éléments finis tronconiques suivant la ligne directrice du méridien connu sous la nomination de la génératrice, comme a fait Ohmori (1998) (Fig.2.12) afin d'optimiser la forme d'un dôme en utilisant le moment de flexion comme fonction objective évaluée par la méthode MEF en utilisant des éléments tronconiques simples.

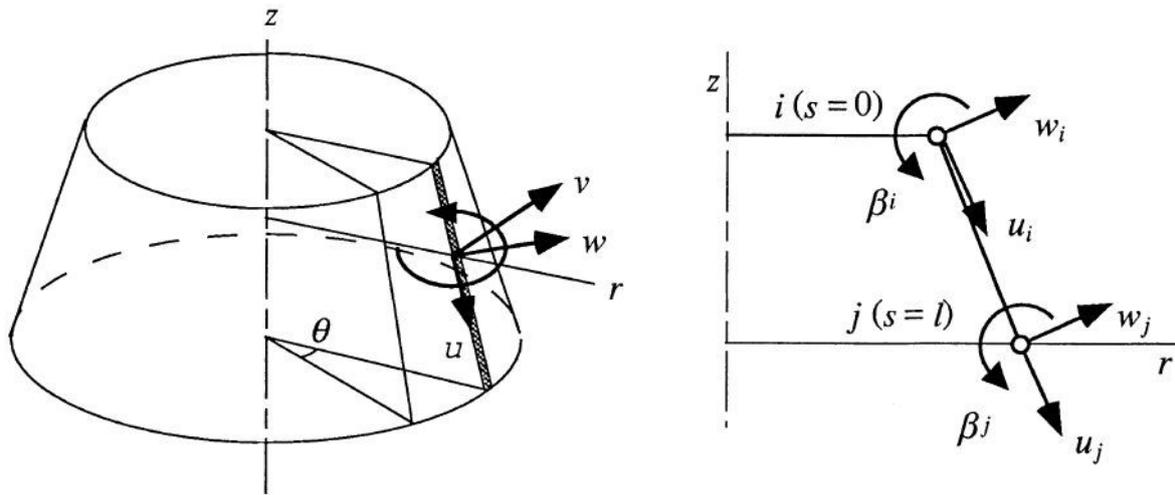


Fig.2.12 Élément fini axisymétrique Ohmori, H., & Yamamoto, K. (1998)

9.2.2 Eléments axisymétrique triangulaires

Un élément coque combine entre un comportement flexionnel (flexion et cisaillement), et un comportement membranaire en plan. L'état membranaire induit des forces axiales contenues dans la surface moyenne de la coque, donc si l'élément de coque est plat alors les états de flexion et de membranes sont typiquement découplés au niveau de l'élément. Ce Découplage s'étend à la matrice de rigidité de l'élément qui est formée par une superposition simple des contributions de flexion et de membrane. Le couplage totale entre membrane et flexion apparait lorsque les éléments plats se mets à différents angles dans l'assemblage de la matrice de rigidité globale Oñate, E. (2013). Dans (Fig.2.13) un élément triangulaire à degrés de libertés membranaire pourrait être utilisé dans la modélisation des structures en coques axisymétrique respectant les conditions aux limites de la théorie membranaire.

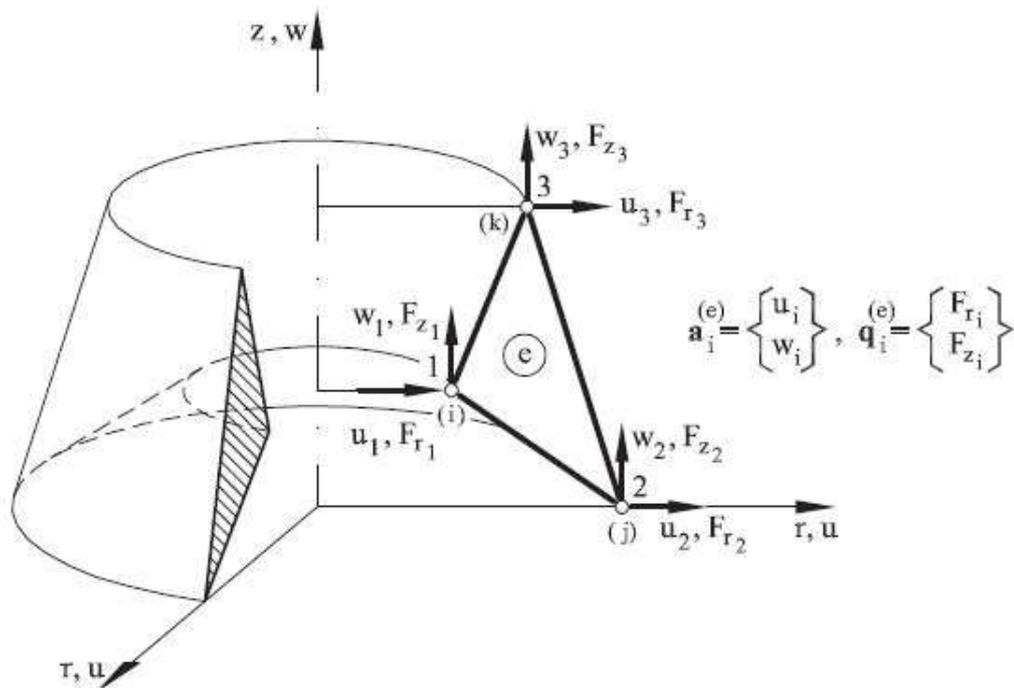


Fig .2.13 Elément triangulaire axisymétrique à trois nœuds Oñate, E. (2013)

L'élément dans (Fig.2.13) Pourrait bien être utilisé pour prendre en compte les effets de flexion en ajoutant des degrés de libertés rotationnelles.

II.9.3 Logiciels de modélisation et le choix des éléments finis

Il existe de nombreux codes d'éléments finis commerciaux à complexité variable.

Cependant, dans la pratique, la plupart des modules utilisent les mêmes étapes de pré- et post-procession, et ce n'est que la phase de la solution qui est différente.

Ces logiciels forment la matrice de rigidité et passe soit à la résolution directe des systèmes d'équations dans le domaine linéaire ou itérativement dans le cas du non linéarité.

Lorsque la solution est formulée, les informations voulues par l'utilisateur passeront à l'étape de post-traitement pour avoir ces données telles que les déplacements dans un nœud, l'énergie de déformation ou les moments de flexion. Dans les méthodes de programmation classiques les résultats seront donnés sous la forme d'un listing dans des tableaux, leur interprétation

était une tâche difficile à faire contrairement aux logiciels à capacité d'affichage graphique où les résultats seront affichés sur la surface de la structure et même tracés dans des graphes, ce qui rend la tâche d'interprétation plus facile.

Dans le présent travail deux logiciels de calcul par MEF ont été utilisés. Le code commercial COMSOL Multiphysics 4.3 (2012) a été utilisé pour l'analyse de la première structure choisie, qui est un dôme de forme elliptique. Le deuxième logiciel Abaqus 6.8. Le logiciel COMSOL utilise les éléments finis de la famille MITC (mixed tensorial components) basé sur l'approche des composantes tensorielle mixtes.

La structure en dôme de forme ellipsoïdale a été maillée par 287 éléments triangulaires. Les éléments basés sur cette approche ont prouvé leur efficacité dans l'élimination des phénomènes de verrouillage des efforts tranchants et membranaires P.-S. Lee, K.-J. Bathe (2004).

Le logiciel Abaqus a été utilisé pour modéliser la forme de coque en voûte où l'élément S4R a été appliqué dans l'analyse de la structure. Cet élément à quatre nœuds avec intégration réduite est d'application générale pour les structures en coques. Celui-ci appartient à la famille des éléments coques qui peuvent être utilisés pour l'analyse des coques minces et épaisses. Les éléments coques épais sont indispensables dans une situation où la flexibilité pour le cisaillement transversal est essentielle, ce qui veut dire que la normale à la surface moyenne peut se tourner avec un angle, et dans ce cas l'interpolation des champs de déplacements du second ordre est nécessaire Hibbit, K. Sorensen Inc.(2008) ABAQUS/CAE Version 6.8.

Les éléments de coque minces sont requis dans le cas où la flexibilité transversale au cisaillement est insignifiante et l'hypothèse de Kirchhoff doit être satisfaite avec précision, c'est-à-dire que la coque normale à la surface moyenne est bloquée de toute rotation et doit rester orthogonale.

Le S4R (4 noded reduced integration general shell element) permet à des changements d'épaisseur où il utilise les conditions cinématiques de la théorie de coques épaisses lorsque l'épaisseur de la coque augmente et devient un élément compatible avec la théorie de Kirchhoff quand l'épaisseur diminue ou la déformation transversale du cisaillement devient très faible lorsque la coque est mince.

La théorie du premier ordre (connue aussi par théorie d'ordre inférieur) qui signifie l'utilisation de fonctions d'interpolation linéaires pour les déplacements et rotations dues à la déformation

du cisaillement est la base de la formulation d'éléments S4R, dans le contexte de Mindlin-Reissner, les déformations de cisaillement sont obtenues directement à partir des déformations nodales. Cette approche est en compatibilité avec l'hypothèse que la section transversale de la coque reste droite mais pas forcément normale à la surface moyenne de Gauss de la coque. Les degrés de liberté pour cet élément sont les déplacements et les rotations à chaque nœud. Les 6 degrés de liberté S4R actifs sont indiqués ci-dessous ($u_x, u_y, u_z, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$) avec 3 déplacements u et trois rotations Φ .

L'élément S4R utilise une intégration réduite pour former la matrice de rigidité de l'élément. Dans la technique d'intégration réduite, l'ordre d'intégration en plan est inférieur à celui qui est demandé dans l'intégration de la matrice de rigidité exacte. Une intégration réduite offre habituellement des résultats avec plus de précision (comme moyen de surmonter certains éléments de rigidité dans la coque, soulage le blocage du cisaillement à condition que les éléments sont pas soumis à la torsion ou à un chargement de flexion dans le plan et réduit considérablement le temps de calcul. Le S4R est moins coûteux du point de vue du calcul puisque l'intégration est exécutée en un seul point de Gauss par élément (Fig.2.14).

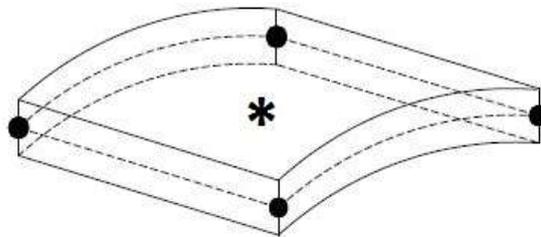


Fig.2.14 L'élément S4R, • signifie les nœuds et * signifie le point d'intégration

L'inconvénient de la procédure d'intégration réduite est qu'elle peut admettre des modes de déformation qui n'entraînent aucun point d'intégration, conduisant à une solution instable ou inexacte. Ce problème est particulièrement grave en cas de Quadrilatères. Cependant, le logiciel ABAQUS surmonte cette difficulté en considérant le contrôle de modes sabliers connu sous l'acronyme anglais Hourglass modes. Le contrôle Hourglass utilise une rigidité artificielle supplémentaire dans les éléments.

II.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les méthodes d'optimisation de forme des structures en coques en insistant sur les plus utilisées par la communauté des chercheurs du domaine.

Les méthodes expérimentales et leurs simulations physiques soit par la MEF dans le domaine de non linéarité géométrique pour la méthode de la pendaison, et par la méthode de la relaxation dynamique pour l'analogie de film de savon du concept de la surface minimale, s'avèrent d'être restreint pour les structures membranaires seules.

Les méthodes d'optimisation structurelles sont plus générales et peuvent être appliquées pour tous les types de structures en coques, mais cette méthode est très couteuse en matière de temps de calcul à cause de nombre élevé de paramètres de conception relatives aux coordonnées nodales des nœuds de maillage.

La paramétrisation de la géométrie de la coque, peut réduire le nombre de paramètres de conception nous, cependant la complexité du choix des fonctions de paramétrisation constitue aussi une restriction de plus sur l'optimisation. La minimisation de paramètres de conception est donc une problématique réelle.

Cela nous a conduits à opter pour l'utilisation de la technique de réduction de modèle POD-RBF expliquer dans le prochain chapitre, en se servant des considérations apprises dans le domaine de conception des coques pour le choix des paramètres géométriques de forme.

Chapitre III : Approximation par POD-RBF pour l'optimisation des coques

III.1 Réduction de modèle

La réduction de modèle est une terminologie utilisée principalement dans le domaine expérimentale, là où on construit des modèles de petite taille pour étudier des modèles réelles de grandes échelles.

Grace aux avancées qu'a connues l'outil informatiques, les études expérimentales sont remplacées largement par la modélisation numérique, cependant l'infinité de l'espace de conception dans le contexte de l'optimisation structurelle nécessite un grand nombre d'itération d'analyse et qui exige par conséquent un temps de calcul très élevé.

Cependant, il existe des types de structure spécifiques pour lesquels les résultats de leur optimisation structurelle peuvent être obtenus de manière beaucoup plus simple et rapide grâce à leur mode de comportement répétitifs par rapport à certaine variation paramétrique.

Dans l'objectif de réduire ce nombre d'itération et faciliter l'analyse des résultats, la réduction de modèle dans le contexte de modélisation numérique constitue un outil de filtrage de variation paramétrique a contribution majeur dans la réponse et mode de comportement de la structure étudié dans le contexte de conception optimal.

Le concept de la méthode de réduction de modèle dans la modélisation numérique a été utilisée dans des domaines d'application divers comme dans la description de l'écoulement de fluide turbulent, la dynamique des structures, théorie du traitement et du contrôle du signal, et dans les simulations de reconnaissance du visage humain, afin de réduire la taille des modèles mathématiques de simulation initiale par des modèles de petite tailles avec une approximation de haute précision.

La réduction du modèle présente aussi un autre avantage principal :

- Sa compatibilité d'usage de données discrètes générées par les méthodes expérimentales afin de filtrer les directions de variations majeures dans les vecteurs de conceptions initiales.

Les méthodes de la réduction de modèles se catégorisent en deux types selon la philosophie de d'obtention de données initiales utilisées pour la construction du modèle numérique réduit soit « a priori » ou a « posteriori ». La deuxième catégorie prene en compte la description analytique des effets par rapports a leurs causes correspondants au phénomène observé développant une intuition diriger.

Dans la première catégorie la construction du modèle réduit « a priori », est faite par des mesures initiales qui manquent de l'intuition d'analyse analytique existante dans la deuxième catégorie, et part de la cause à la déduction de l'effet ce qui est le cas idéal pour les travaux expérimentaux.

Parmi les méthodes « a priori » on trouve l'approche nommée POD-RBF (Ryckelynck 2002, Ryckelynck 2005).

Dans les méthodes "a posteriori", les données initiales nécessaires à la construction du modèle réduit sont issues à partir de quelques solutions obtenues par analyse directe du cas étudié soit par simulation ou expérimentation. Les méthodes utilisées dans ce cas, partagent le même principe ou on peut nommer :

La « Décomposition de Karhunen-Loève » (KLD) (Karhunen 1946, Loève 2012), POD « Décomposition orthogonale propre » (Chatterjee 2000), « Analyse de Composantes Principales » (PCA) (Jolliffe 2002), et la « Décomposition en Valeurs Singulières » (SVD) (Antoulas 2005).

III.2 Réduction de modèle a posteriori

III.2.1 Historique

Le développement de la méthode POD a débuté par Pearson (1901), Hotelling (1933), Loeve (1945), Karhunen (1946), Kosambi (1943), Pougachev (1953) and Obukhov (1954).

La nomination de la méthode a pris plusieurs termes selon le domaine d'application et la terminologie mathématique relatif à sa formulation comme la Décomposition Orthogonale aux valeurs propres (POD), Décomposition de Karhunen-Loève (KLD), Analyse des Composantes Principales (PCA), Analyse des Composantes Empiriques (Lorenz 1956), Décomposition Empirique des Fonctions Propres (Sirovich 1987) plus d'autres nominations.

Cependant ces différentes nominations de la méthode ne font que des distinctions mineures entre eux dans l'ensemble de leur formulation mathématique qui utilise pratiquement la même approche dans le contexte de décomposition orthogonale.

L'utilisation de la méthode POD couvre une variété très large des domaines d'applications, sa capacité d'extraction des données dominantes dans la variation des réponses des systèmes.

Cela se fait par la décomposition modale d'un ensemble de données, en classant les modes propres de variation par ordre décroissant d'où vient le caractère optimale de cette procédure dans la construction des modèles numériques réduit à partir de la simulation ou l'expérimentation.

Dans l'analyse et traitement des signaux (signal processing) la méthode POD fournit l'outil de filtrage effectif (Oja and Karhunen 1985), appliquée aussi pour le traitement d'image (Kirby and Sirovich 1990, Sornborger, Sailstad et al. 2003), la dynamique des structures (Kappagantu and Feeny 1999, Ma, Vakakis et al. 2001, Steindl and Troger 2001).

Dans (Kerschen, Golinval et al. 2005) on trouve plus de références bibliographiques sur l'application de la méthode dans le contexte de la dynamique des structures.

Le modèle réduit par POD est conçue dans l'objectif de faire une approximation a haute précision, en ordonnant les directions de variations principales une nouvelle base regroupant un sous-espace vectoriel à partir des données initiales sera donc unique et on peut donner la qualification optimale a cette méthode.

III.2.2 Approximation

Si nous avons une fonction $f(x)$ définie dans le domaine Ω , dans l'objectif de l'approximation on peut réécrire cette fonction dans une combinaison linéaire qui relie des fonctions de base, $\phi^i(x)$ par des coefficient d'amplitudes a_i comme suit :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^M a_i \phi^i(x) \quad (3.1)$$

La précision de cette approximation augmente par l'augmentation du taux d'expansion, où M tend vers l'infini. Pour finaliser cette interpolation les coefficients d'amplitudes a_i seront calculés par la minimisation de l'erreur dans l'approximation dans le sens des moindres carrés :

$$\|f(x) - \sum_{i=1}^M a_i \phi^i(x)\|^{L^2} \rightarrow \min \quad (3.2) \text{ (Buljak 2011).}$$

$\|\cdot\|^{L^2}$ Représente la norme L^2 , obtenue par :

$$\|f(x)\|^{L^2} = \int_{\Omega} |f(x)|^{L^2} d\Omega \quad (3.3)$$

Pour construire l'équation (3.1) il existe un nombre très large de probabilité de combinaisons linéaires qui peuvent être choisies. Pour chaque ensemble de fonctions de bases $\phi^i(x)$ de $f(x)$

ils existent des ensembles de coefficients d'amplitudes relativement larges et peuvent même être infinies cela illustre les difficultés de choix arbitraire afin de construire une base optimale.

Dans un choix aléatoire des fonctions de bases la précision de l'approximation peut être défavorable en termes d'itérations par l'augmentation de M , donc le choix des fonctions d'interpolation $\phi^i(x)$ doit être fait d'une façon que la meilleur approximation obtenue par le minimum nombre d'itérations M , cependant il n'y a aucune règle pour le choix des fonctions de bases dans le respect du critère précédemment mentionné.

En étudiant l'analyse mathématique on peut déduire des règles qui dicte les possibilités de type des fonctions d'interpolation a utilisées soit par des fonctions polynômiales, trigonométriques, exponentielles, ou par d'autre types (Buljak 2011).

Dans ce dilemme de choix de fonctions de base, la méthode POD offre l'outil de construction de la nouvelle base d'interpolation d'une façon optimal qu'on va expliquer dans ce qui suit.

Dans la méthode POD le choix de fonctions de base $\phi^i(x)$ est restreint par les conditions suivantes, les fonctions doivent être continue sur le domaine de variable de conception et linéairement indépendante, une condition supplémentaire et l'orthogonalité de ces fonctions d'où vient le terme orthogonale dans POD :

$$\int_{\Omega} \phi_{k1}(x) \cdot \phi_{k2}(x) dx = \begin{cases} 1 & k1 = k2 \\ 0 & k1 \neq k2 \end{cases} \quad (3.4)$$

On passe par la suite à la détermination des coefficients d'amplitudes :

$$a_i = \int_{\Omega} f(x) \cdot \phi^i(x) d\Omega \quad (3.5)$$

La simplicité d'obtention de ces coefficient vient du fait de l'orthogonalité de fonctions $\phi^i(x)$ donc l'amplitude a_i dépend seulement de la fonction $\phi^i(x)$. Dans le cas où les fonctions de base manquent la condition d'orthogonalité, le calcul des amplitudes sera fait par la résolution d'une série d'équations linéaires.

La réduction de modèle se fait par la minimisation de nombre de termes d'approximation M , cela se fait par minimisation de l'erreur d'approximation dans le sens des moindres carrés (Eq. 3.2). On peut réexpliquer notre objectif dans le choix des fonctions de bases, par l'obtention d'une série de fonctions orthogonales de la façon que les deux premières fonctions résultent a la meilleure approximation possible à deux termes, les trois premières fonctions résultent a la

meilleure approximation possible à trois termes et ainsi de suite. Lorsque les fonctions sont obtenues, elles seront ordonnées et on les appelle « nœuds orthogonaux appropriés » de la fonction $f(x)$ et l'Eq. 3.1 est connue par la « décomposition orthogonale » de $f(x)$.

III.3 Théorie de décomposition orthogonale

Dans le contexte de notre travail d'optimisation, on va utiliser par la suite des données discrètes ou issues de modélisation numérique, ces données discrètes sont aussi naturel dans les travaux expérimentales c'est pourquoi on va seulement concentrer sur la théorie discrète de la méthode POD, cette dernière est connue dans la littérature sous le nom d'Analyse de Composantes Principales (PCA, Principal Component Analysis).

L'objectif principal de la méthode PCA est de réécrire l'ensemble des vecteurs de données dans une nouvelle base de taille minimum taille que possible par rapport à l'espace vectoriel initiale. Pour aboutir à cette diminution de dimensionnalité il faut trouver les composantes principales ou les directions de vecteurs de base qui représente le maximum taux de variation des données discrètes dispersées initialement dans le domaine de recherche.

Les vecteurs de PCA sont linéairement indépendants et ordonnés de façon que les premiers vecteurs retiennent le maximum de taux de variation et les derniers retiennent le minimum taux de variation ou bien représentent l'existence de relation linéaire entre les données du système initiale.

La seule différence entre POD et PCA, et que la première méthode nécessite la condition d'orthogonalité entre les vecteurs de nouvelle base destinés à réduire la taille du modèle numérique des données initiales.

Afin de visualiser graphiquement les relations existantes entre vecteurs données dans le contexte de la méthode POD, on utilise l'ensemble des vecteurs dans un système de coordonnées cartésiennes (Buljak 2011). Dans (Fig.3.1), un ensemble de vecteurs est en corrélation de dépendance linéaire si les vecteurs sont colinéaires.

Si les vecteurs sont linéairement indépendants comme dans le cas d'orthogonalité on dit que cet ensemble de vecteurs est non corrélés.

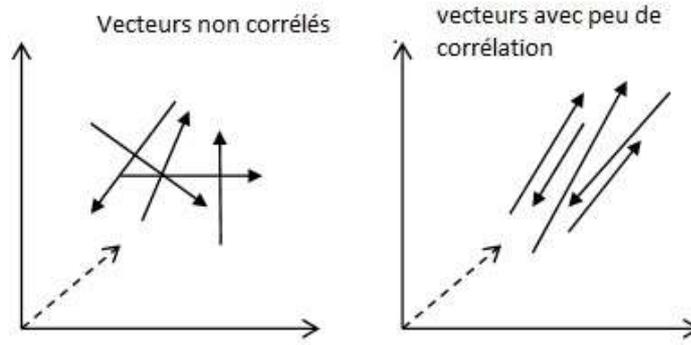


Fig.3.1 Illustration des vecteurs non corrélés et des vecteurs corrélés

En utilisant la méthode POD on peut établir une nouvelle base qui rend l'ensemble des vecteurs dispersés initialement à un état de coplanarité ou on peut par la suite réduire la dimensionnalité du système de 3 dimensions à 2 dimensions seulement. Dans le cas où nous avons un système a 2 dimensions, POD cherche la direction dominante est fait pivoter le système pour que l'axe principal soit cette direction dominante, et un autre axe perpendiculaire qui peut être enlevé, résultant a une nouvelle base unidimensionnelle.

Le principe de fonctionnement de la méthode POD est de trouver les directions de projections qui permettent à la possibilité d'établir un sous espace vectoriel sur leur base avec la minimum erreur d'approximation. Ces directions seront classées et ordonnées tel que le premier axe représente la meilleure approximation par projection sur un seul axe, nommée la première composante principale (Shlens 2014). Le nouveau système de coordonnées pivoté est décrit dans (Fig.3.2).

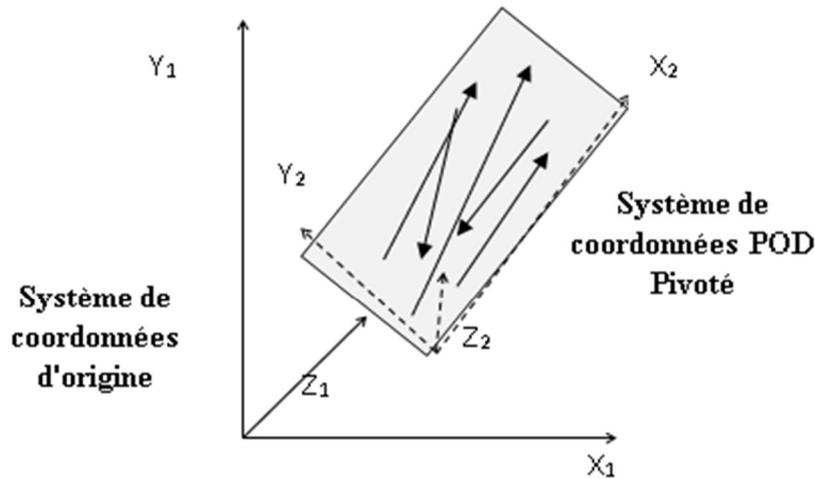


Fig. 3.2 Systèmes de coordonnées : original et pivoté

On note que les variations des projections diminuent considérablement dans ce nouveau système pivoté. Aussi la détermination d'un plan contenant le maximum des vecteurs cela va nous permettre de réduire la dimensionnalité des composantes de ces vecteurs en utilisant seulement deux direction principales construisant un nouveau espace vectoriel a deux dimensions. Rappelons que ces directions principales retenues sont classés de façon que les données contribuant au maximum dans la variation de comportement du phénomène étudié et les directions à faible contribution prennent les dernières positions dans le classement.

Dans (Fig.3.3), le vecteur \vec{u} peut avoir une approximation à une seule composante au lieu de deux composantes initiale et avec précision. La méthode POD fait pivotée le système de coordonnées par 45 degré dans le cas de figure, la composante suivant l'axe (X_2) résulte à une approximation excellente, par ce que le taux de variation suivant l'axe (Y_2) est de petite valeur. Si les donnes initiales sont de nature à haute corrélation, POD peut rassembler tous les vecteurs en utilisant un seul axe ce qui signifie une réduction de dimensionnalité a une seul dimension (Fig.3.4) à droite.

En utilisant la méthode POD on peut représenter les donnes initiales sur plusieurs axes de coordonnées, pour obtenir la représentation exacte comme dans (Fig.3.4), à gauche. Les figures 3.4 (à gauche) et 3.4 (à droite) décrivent des cas extrêmes de données (Shlens 2014). Les données généralement rencontrées ressemblent à ceux dans la figure 3.4 (au milieu).

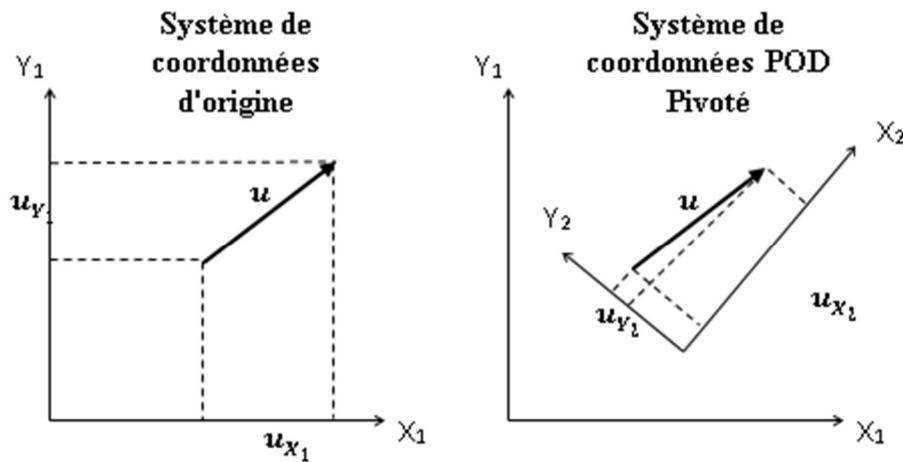


Fig.3.3 Approximation d'un vecteur dans un système de coordonnées d'origine (à gauche), relatif à la méthode POD (à droite)

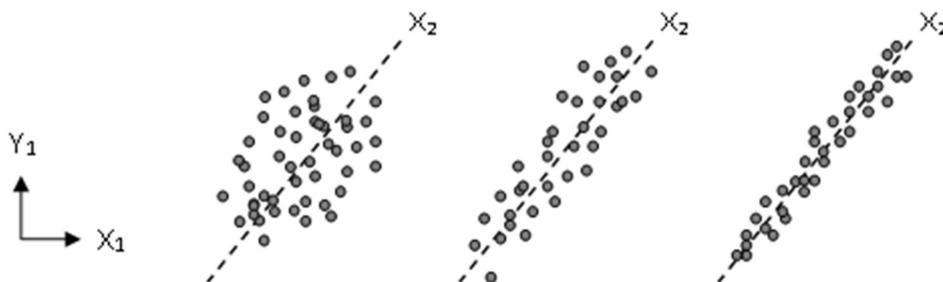


Fig.3.4.Représentations des différents types de données, faiblement corrélées (à gauche), corrélées (au milieu), fortement corrélées (à droite)

Afin d'illustrer la formulation de l'idée d'approximation basée sur POD, on commence par la sélection des fonctions de base ϕ , à condition que ces fonctions soient orthogonale ce qui s'exprime comme suit :

$$\phi^T \phi = I \quad (3.6)$$

Cela rend le calcul des amplitudes A plus simple est fait comme suit :

$$A = \phi^T f(x) \quad (3.7)$$

Dans le cas discret de la méthode, la matrice U est remplie par les données initiales ou les réponses d'analyse d'un problème (Bialecki, Kassab et al. 2005, Fic, Bialecki et al. 2005). Cette matrice est connu sous l'acronyme anglais « snapshots » synonyme aux vecteurs de données définie dans POD par :

$$U = \sum_{i=1}^N \phi^i A_i \quad (3.8)$$

On va réécrire l'équation (3.8) en écriture condensée comme :

$$U = \phi A \quad (3.9)$$

Dans le cas discret, U et ϕ sont des matrices de taille $(N \times M)$ et A est une matrice de taille $(M \times M)$, où M est le nombre de vecteur de données et N la taille de ces vecteurs égal aussi aux nombre d'échantillons de mesure.

La réduction de modèle se fait en considérant seulement K termes dans l'approximation de U , tel que $K \ll N$, la matrice des données est approchée par :

$$U = \sum_{i=1}^K \phi^i A_i \quad (3.10)$$

K Peut-être choisie aléatoirement pour une réduction de modèle rapide, cependant cela s'avère d'être un choix défavorable en matière de précision d'approximation. Dans la méthode POD, le choix de K est une information très importante qui doit être choisie rigoureusement (Liang, Lee et al. 2002, Liang, Lin et al. 2002).

Dans l'objectif de construction de vecteurs de bases de POD, on va illustrer une des méthodes d'obtention de directions principales nommée l'Analyse des Composantes Principales (PCA).

III.3.1 Analyse de composantes principales

PCA est la méthode de base dans le domaine de la décomposition, l'objectif de la PCA est l'identification de la structure interne dans un ensemble de données.

Dans ce cas de figure caractérisée par une collection de données en relation de dépendance entre eux. La méthode PCA fait le passage des variables originales en une nouvelle base, appelée composantes principales. Les composantes principales sont totalement indépendants et sont classées de façon que les premières composantes principales prennent le maximum taux de variation des variables originales.

La variation est estimée à partir de la variance σ^2 des données (Shlens 2014), la variance dans le contexte du POD représente les valeurs propres d'une matrice de covariance modifiée C de la matrice de données U :

$$C = U^T U \quad (3.11)$$

Les variations en termes de valeurs propres sont déterminées par la résolution d'un problème aux valeurs propres usuelle :

$$CV = V\Lambda \quad (3.12)$$

Les valeurs propres Λ et les vecteurs propres V peuvent être calculés par la méthode de décomposition en valeurs singulières(SVD). Les valeurs singulières répondent à l'écart-type σ de l'ensemble de données :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad (3.13)$$

Les λ_i sont les valeurs propres. Les bases optimales seront obtenues dans la méthode PCA comme suit :

$$\phi = UV\Sigma^{-1} \quad (3.14)$$

Σ : représente une matrice diagonale des valeurs singulières.

Après la détermination des fonctions de bases soit par la méthode POD ou PCA la prochaine étape et la troncation.

L'opération de troncation est le point essentiel dans la réduction de modèle, dont l'objectif principal et la diminution du nombre total de composantes à l'intérieur du système. Les composantes principales sont ordonnées par rapport à leur contribution dans la variation.

Les variations diminuent considérablement à partir de la direction à variation maximal et tend vers la stagnation dans une valeur faible de variance. La troncation se fait donc par élimination des composantes à faible contribution dans la variance illustrée dans (Fig.3.5).

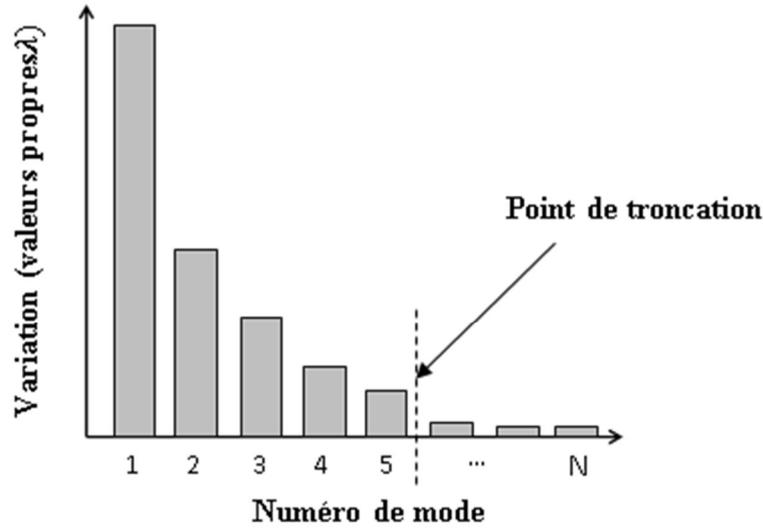


Fig.3. 5 Troncation des valeurs propres pour la réduction de modèle

La troncation résulte à un modèle de taille considérablement réduite tout en conservant un haut niveau de précision dans l'approximation des données. Afin de contrôler l'erreur d'estimation certaines études préconisent un point ou une équation définissant le seuil à partir duquel l'erreur d'estimation s'affecte de façon défavorable. Une autre méthode de choix basée sur le point où les valeurs propres commencent la stagnation, ce point constitue la valeur minimale de variation choisie tout autres direction sont à variation supérieur

III.4 Choix du point de Troncation

Le point de troncation garde les quantités qui représentent le mode de comportement du système et en économisant l'effort de calcul on élimine les quantités représentant très peu d'informations le système.

Dans POD les directions de fonctions de bases à retenues sont choisies généralement en utilisant un des deux critères suivants :

Critère1 :

$$E_1 = \frac{\sqrt{\sum_{i=k+1}^N \lambda_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \lambda_i}} < \varepsilon \quad (3.15)$$

E_1 Position du point de troncation estimée par le calcul du ratio de la racine carrée de la somme des modes $(N - K)$ a négligées comparée à l'estimation par N des modes, ce ratio doit être inférieur à une marge d'erreur fixée.

ε Représente la marge d'erreur tolérée.

Critère 2 :

$$E_2 = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i} > (1 - \varepsilon) \quad (3.16)$$

E_2 Position du point de troncation estimée par le calcul du ratio de la racine carrée de la somme des premiers K modes sur l'estimation par N modes totales. Si E_2 est proche de 1 nous avons une troncation idéale.

III.5 Réseau radial de fonctions de base

En générale les fonctions RBF sont utilisées quand on a besoin de construire une approximation d'une fonction multi variables par interpolation entre ses données existantes. Dans ce qui suit une introduction descriptive sur cette méthode, afin de s'habituer avec les concepts des fonctions RBF (Buhmann 2003) et prouver comment le couplage de RBF avec POD pourrait être efficace dans le contexte de l'analyse structurelle.

Supposons que nous avons une fonction $f(x)$, où x est un vecteur de taille M , et on veut donner une approximation a cette fonction, sachant que quelque valeurs de la fonction $f(x)$ sur un domaine de dimension N ces valeurs connues x_i du vecteur de conception sont nommées « les nœuds».

Dans les méthodes locales d'interpolation classiques, l'interpolation est faite en utilisant juste les points aux voisinages de la valeur x qu'on cherche à estimer approximativement. L'interpolation donc implique seulement les données des nœuds proches, dans ce cas le choix de fonctions d'interpolations est difficile car on peut utiliser plusieurs types de fonctions.

L'interpolation par les RBF cherche à inclure tous les points existants dans un échantillon de mesure par une fonction continue sur le domaine de recherche, représenté par N nœuds et leurs valeurs fonctions correspondantes. L'interpolation de $f(x)$ se fait à travers l'équation (3.17) en combinaison linéaire avec les fonctions g_i écrite comme suit :

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i(x) \quad (3.17)$$

α_i Les coefficients d'amplitude.

Pour construire ce type d'approximation, il faut choisir les fonctions d'interpolations est g_i et leur coefficients α_i correspondants. Par exemple la distance euclidienne peut être choisie comme fonction de base radiale :

$$g_i(x) = g_i(\|x - x_i\|), i = 1, 2, \dots, N \quad (3.18)$$

Dans la deuxième étape on passe à la détermination des coefficients d'interpolation α_i , cela sera fait en utilisant les données des nœuds x_i et leur N valeurs correspondantes de la fonction $f(x)$. Les coefficients inconnus sont déterminés en respectant la condition d'exactitude d'approximation sur l'ensemble des nœuds, donc l'équation (3.17) sera écrite pour la totalité des nœuds N , on obtiendra finalement le système de N équations linéaires :

$$f(x_j) = y_j = \sum_{i=1}^N \alpha_i g_i(x_j), \quad j = 1, \dots, N \quad (3.19)$$

y_j : Les valeurs connues de la fonction sur les nœuds.

La matrice des coefficients d'interpolations est écrite dans la forme suivante :

$$G = \begin{bmatrix} g_1(x_1) & \dots & g_N(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_N) & \dots & g_N(x_N) \end{bmatrix}; \quad \alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N]^T; \quad Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T \quad (3.20)$$

Le système (3.20) peut s'écrire dans la forme :

$$\alpha \cdot G = Y \quad (3.21)$$

Après la résolution de l'équation (3,19) et l'obtention des coefficients d'interpolation α_i . On utilise l'équation (3,17) pour faire l'approximation de la fonction pour toutes les données dispersées aléatoirement sur le domaine de recherche.

L'équation (3.17) donnera des valeurs exactes dans les nœuds, et une approximation par interpolation pour les autres points du domaine. Les coefficients d'interpolation couvrent tout le domaine calculés, un autre avantage de RBF c'est que la méthode ne nécessite pas certaine régularité dans la distribution des données comme pour la méthode de Lagrange. L'interpolation par les fonctions de bases radiales peut travailler même dans le cas des données dispersées.

III.6 Optimisation basée sur POD-RBF

L'optimisation structurelle est une opération qui inclut un grand nombre d'itération de calcul. Cela rend l'optimisation très coûteuse, la méthode POD à travers la réduction de dimensionnalité soulage un peu de cet effort et offre une approximation à haute précision.

Cependant cette approximation retourne seulement les valeurs des points discrètes calculées initialement par la MEF dans notre cas d'étude, de cette nécessité le couplage avec la méthode d'interpolation RBF semble être l'idée idéale pour obtenir une approximation continue sur le domaine des variables de conception.

Le couplage POD-RBF doit garantir le remplacement de la simulation par MEF.

En d'autres termes l'objectif est de trouver une fonction continue sur le domaine de conception permettant de calculer les réponses du système étudié par interpolation en utilisant juste quelques mesures sur des nœuds dans le système d'origine.

Donc le procédé est de construire cette fonction par la méthode POD--RBF pour estimer la réponse u du vecteur de conception p :

$$f(p) = u \quad (3.22)$$

La fonction dans l'équation (3.22) couvre la totalité du domaine de conception, par conséquent l'approximation par la fonction (3.22) peut remplacer le calcul itératif lent par MEF dans le contexte de l'optimisation structurelle.

Dans cette thèse Le vecteur u représente les valeurs des moments de flexion maximale et de l'énergie de déformation des structures en coques résultant de la simulation MEF. Dans la suite, ces données de variations des fonctions objectives sont rassemblées dans des vecteurs. Les vecteurs contenant les variations paramétriques de ces fonctions sont désignées par u^j (pour $j = 1, 2 \dots M$), M est le nombre de vecteurs correspondants aux nombres de paramètres dont on cherche la combinaison optimale entre eux.

Les paramètres modifiés dans notre problèmes sont celle de la forme de la coque dont on veut trouver la configuration géométriques optimale, comme la hauteur et l'ouverture dans le cas des dômes et les coordonnées de la surface dans les structures en voûtes.

Ces paramètres varient selon l'objectif voulu, ou on peut les propriétés des matériaux, dans le cas d'une optimisation matériels. Les vecteurs u^j sont ordonnés dans la matrice U de

dimensions $N \times M$ nommée par la matrice des données, N correspond au nombre d'itérations paramétriques sur lesquelles les fonctions objectives sont initialement évaluées.

L'objectif de la méthode POD est de construire un sous espace vectoriel à la base de vecteurs orthogonaux ϕ^j , avec la capacité de reconstruire la matrice U de façon que le nouvel ensemble de vecteurs, donne une décomposition optimale (Ostrowski, Bialecki et al. 2005). La matrice ϕ est la nouvelle base obtenue par POD, comme suit :

$$\phi = U \cdot V \quad (3.23)$$

La matrice V désigne les vecteurs propres de la matrice de covariance C obtenue par la résolution du système aux valeurs propres dans l'équation (3.12). Les valeurs propres λ sont des réelles positives, et sont ordonnées par ordre décroissant comme dans (Fig3.5).

Par classement des valeurs propres on peut distinguer les directions préservant le maximum de variation dans les fonctions objectives dont on peut négliger les directions contenant le minimum de variation ou a comportement constant.

L'opération de troncation nous permet d'obtenir une réduction dans les dimensions du nouveau sous espace vectoriel, en négligeant toutes les directions qui ne participent pas dans la variation du comportement de la structure en coque étudiée. Les directions conservées constituent la base tronquée $\hat{\phi}$ de la méthode POD avec une dimension K inférieure à M utilisée comme suit :

$$\hat{\phi} = U \cdot \hat{V} \quad (3.24)$$

Avec \hat{V} , la matrice des vecteurs propres correspondante préservant seulement le nombre K des premiers vecteurs propres de la matrice de covariance V . Après l'établissement de la base $\hat{\phi}$, la matrice des données contenant les informations des fonctions objectives U sera obtenue par l'équation suivante :

$$U \approx \hat{\phi} \cdot A \quad (3.25)$$

A Désigne la matrice des amplitudes correspondantes.

La condition d'orthogonalité des directions $\hat{\phi}$, nous permet de calculer la matrice des amplitudes comme suit :

$$A = \hat{\phi}^T \cdot U \quad (3.26)$$

A ce stade la méthode de décomposition orthogonale aux valeurs propres POD nous a permis d'établir un nouveau système condensé pour reconstruire la matrice des données initiales.

Cependant POD ne peut pas donner des interpolations dans tous les points du domaine de recherche dans le contexte d'optimisation structurelle.

Dans l'objectif de généraliser la matrice des amplitudes A sur le domaine complet, nous allons recalculer cette matrice par RBF afin d'avoir la capacité d'interpolation en incluant tous les points de données initiales et rendre le modèle réduit discret obtenu par POD continue par le couplage avec RBF.

Pour transformer la matrice des amplitudes A du caractère discret au caractère continue sur le domaine des paramètres p , on réécrit A par association de la matrice des fonctions de bases radiales RBF G défini sur le domaine de recherche complet. Cette association est faite à travers la matrice des coefficients d'interpolation B qui sera composée d'un ensemble d'éléments constant comme suit :

$$A = B \cdot G \quad (3.27)$$

La matrice des fonctions d'interpolations G est construite par les éléments $g_i(p)$ ou le choix de la fonction g se fait librement par l'utilisateur qui peut tester plusieurs fonctions afin de trouver les meilleures caractéristiques d'interpolation. Dans ce travail, la fonction RBF « Hardy inverse multi-quadratique » est choisie, (Hardy 1990) définie tel que :

$$g_i(p) = g_i(|p - p^i|) = \frac{1}{\sqrt{|p - p^i|^2 + c^2}} \quad (3.28)$$

c : Désigne le facteur de lissage, défini comme valeur entre 0 à 1, p^i désigne les nœuds initiales p est le variable dont on veut calculer la fonction objective correspondante.

Les éléments de la matrice des coefficients B sont obtenues par :

$$B = A \cdot G^{-1} \quad (3.29)$$

La matrice des fonctions d'interpolation G est schématisée ci-dessous :

$$G = \begin{bmatrix} g_1(|p^1 - p^1|) & \dots & g_1(|p^j - p^1|) & \dots & g_1(|p^M - p^1|) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_i(|p^1 - p^i|) & \dots & g_i(|p^j - p^i|) & \dots & g_i(|p^M - p^i|) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_M(|p^1 - p^M|) & \dots & g_M(|p^j - p^M|) & \dots & g_M(|p^M - p^M|) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

À ce niveau, nous avons déjà la matrice A et la matrice des coefficients B , et en utilisant les équations (3.26) et (3.27), on peut écrire la relation suivante :

$$\hat{\phi}^T \cdot U = B \cdot G \quad (3.31)$$

La condition d'orthogonalité de $\hat{\phi}$, nous permet d'évaluer U comme suit :

$$U \approx \hat{\phi} \cdot B \cdot G \quad (3.32)$$

Maintenant nous pouvons écrire la matrice des amplitudes couvrant le domaine entier par :

$$a(p) \approx B \cdot g(p) \quad (3.33)$$

$$u(p) \approx \hat{\phi} \cdot B \cdot g(p) \quad (3.34)$$

Finalement le modèle d'approximation basé sur le couplage POD-RBF est terminés, la fonction objective est calculée par :

$$u(p) \approx \hat{\phi} \cdot a(p) \quad (3.35)$$

Enfin l'équation (3.35), serai de grande utilité pour la prochaine étape d'optimisation. la fonction $u(p)$ construite par le couplage POD-RBF va nous permet d'évaluer la réponse des structures en coques étudiés par rapport à la variation de paramètre géométrique de forme sans recours à la MEF, cela va alléger certainement les problèmes rencontrés dans les méthodes d'optimisation de forme basée sur la MEF, spécifiquement la complexité du maillage durant le processus d'optimisation.

III.7 Synthèse de mise en œuvre de la méthode POD-RBF

1. Construire une matrice de donnée U à la base des vecteurs u^j contenant les valeurs de réponse structurelle des fonctions objectives par rapport aux changements dans les variables de conceptions stockés dans le vecteur P .
2. Résolution du problème aux valeurs propres de la matrice de covariance C , et l'estimation de ses valeurs propres Λ et les vecteurs propres V correspondants.
3. Détermination des directions de la nouvelle base ϕ de la méthode POD.
4. Réduction de dimensionnalité par troncature de ϕ puis la remplacer par $\hat{\phi}$, l'évaluation de la matrice d'amplitude correspondante à la base tronquée $\hat{A} = \hat{\phi}^T \cdot U$.
5. Choisir une fonction à base radiale (RBF) pour l'interpolation, et l'assemblage des fonctions d'interpolation correspondantes aux paramètres évalués dans de la matrice G .
6. Établir la liaison entre POD et RBF par le calcul de la matrice B , rassemblant les coefficients d'interpolation par : $B = A \cdot G^{-1}$.
7. Maintenant le modèle POD-RBF est complet et pour évaluer la fonction objective par rapport un vecteur de paramètres p . On commence par le calcul de $g(p)$ correspondant, et par la suite on calcule les amplitudes correspondantes par : $a(p) \approx B \cdot g(p)$.
8. Finalement l'interpolation dans le domaine de recherche se fait par : $u(p) \approx \hat{\phi} \cdot a(p)$.

III.8 Estimation de la réponse structurelle par POD-RBF

L'estimation de la réponse structurelle basée sur POD-RBF doit être validée en comparaison avec MEF, ce que nous avons fait dans cette section en prenant le premier exemple du dôme elliptique qui est examiné par un pas de 0.5m dans les paramètres géométriques de la hauteur et l'ouverture, l'estimation est faite sur un pas de 0.25m. Dans (Fig.3.6) un dôme peu profond qui est examiné par rapport à l'estimation du moment de flexion, et similairement étudié par rapport à la fonction objective de l'énergie de déformation. (Fig.3.7) Présente la comparaison des résultats obtenus par FEM et POD-RBF de l'énergie de déformation par rapport à la hauteur dans le même dôme.

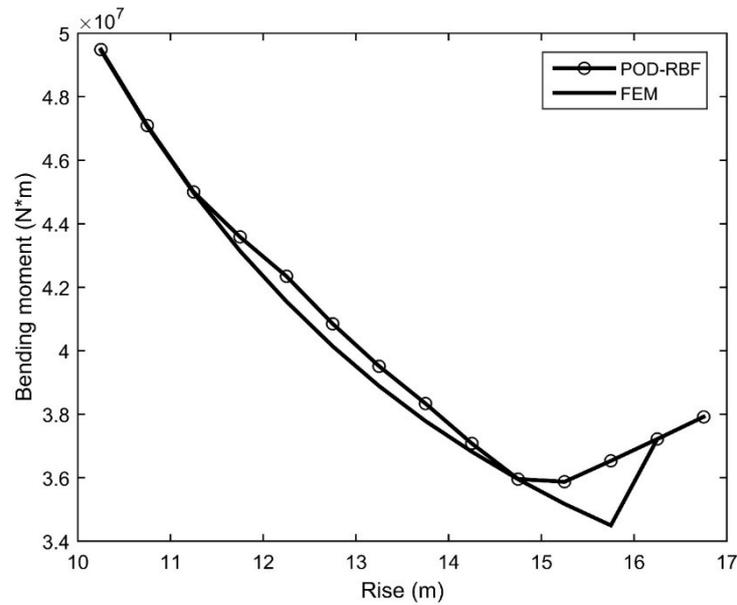


Fig.3.6 Variation du moment de flexion par rapport à la hauteur dans un cas d'un dôme profond POD-RBF vs FEM

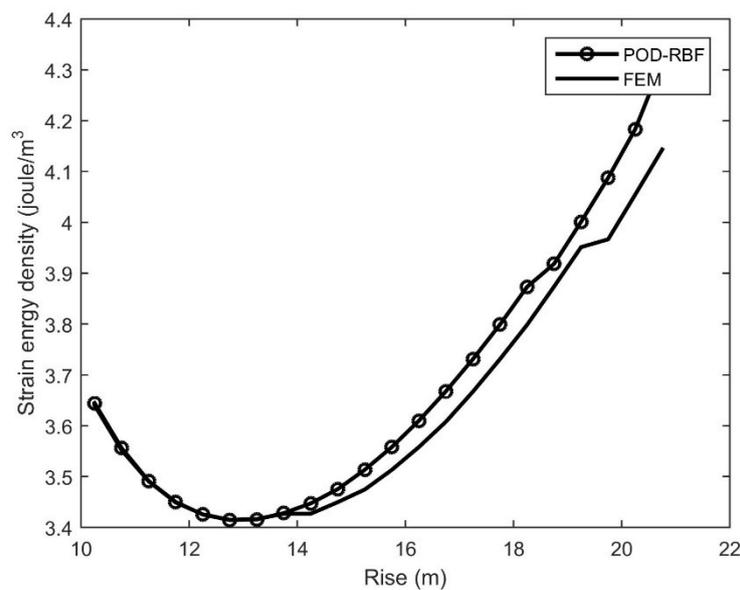


Fig.3.7 Variation de l'énergie de déformation par rapport à la hauteur dans le cas d'un dôme profond POD-RBF vs FEM

Dans les figures 1 et 2, on note que les graphes sont parfaitement superposés dans la partie qui limite le point optimal, ce qui est l'objectif de notre travail. Passant ce point, les graphes s'éloignent à partir de la hauteur de 11m par rapport au moment de flexion maximal et à partir de 14m par rapport à l'énergie de déformation.

Généralement ces résultats montrent que l'estimation par POD-RBF est dans une marge d'erreur acceptable garantissant une opération d'optimisation avec succès dans l'étape suivante grâce à la préservation du même mode de comportement dans la réponse de la structure estimée par MEF.

III.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons exposé la formulation mathématique et l'idée de la méthode de réduction de modèle par POD, en deuxième lieu la méthode d'interpolation RBF a été expliquée afin de préparer un modèle de calcul complet qui aide l'ingénieur à formuler les problèmes d'optimisation avec le moindre effort de calcul par simulation.

La liaison entre les deux méthodes donnera un outil très efficace qui sert à réaliser deux objectifs, premièrement le filtrage des directions de variations principales des données par POD et l'interpolation sur le domaine entier par RBF. Dans cette thèse POD-RBF remplacera la modélisation structurelle par MEF dans le contexte d'optimisation de forme des structures en coques, en générant les résultats nécessaires pour le calcul des fonctions objectives. Ce chapitre se termine avec une comparaison entre la simulation par MEF et l'approximation par POD-RBF, où les résultats étaient dans une marge d'erreur acceptable et préservaient le mode de comportement de la structure afin de passer par la suite à l'optimisation des paramètres géométriques des structures en coques dans le dernier chapitre.

**Chapitre IV : Apport de POD-RBF couplée avec l'algorithme
génétique dans l'optimisation des structures en coques**

IV.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, l'approche d'optimisation proposée est validée par des exemples de structures en coques largement utilisés dans les projets de construction de génie civil. L'optimisation de forme est faite en considérant les paramètres géométriques clefs dans les dômes elliptiques dans un premier exemple, et les voûtes elliptiques et hyperboliques dans le deuxième.

Le rapport optimal de la hauteur sur l'ouverture dans les dômes elliptiques est recherché dans le cas d'un dôme profond, peu profond et même dans la partie transitoire entre les deux formes. Dans le deuxième exemple la transition de la forme d'une voûte initialement parabolique à une forme finale hyperbolique, par l'utilisation d'un algorithme d'optimisation conçu en deux parties basées sur le POD-RBF et l'algorithme génétique démontré dans ce chapitre.

La procédure est en trois parties : Dans la première, une analyse paramétrique par éléments finis est faite avec un pas de variation assurant la construction d'un modèle réduit fiable avec un minimum d'erreur d'estimation dans le calcul. Dans la deuxième partie, finalement l'optimisation est faite par l'algorithme génétique où la forme finale est définie par les rapports optimaux obtenus.

A la fin, l'observation des résultats obtenus par l'approche proposée sera comparée en termes de précision par rapport aux approches classiques basées sur une analyse par éléments finis couteuse en matière de temps de calcul.

IV.2 Classification des méthodes d'optimisation

Les méthodes d'optimisation ont connu un grand développement en se basant sur le calcul itératif permis par l'outil numérique, le classement de ces méthodes est fait en deux grandes familles, la première est connue sous la nomination de méthodes déterministes, et la deuxième sous la nomination des méthodes stochastiques.

IV.2.1 Méthodes déterministes

Ces méthodes sont basées sur les principes d'analyse mathématique du calcul de variation, où l'utilisation des dérivés des fonctions connues sous le nom des gradients constitue le groupe d'informations essentielles afin de trouver les valeurs optimales en utilisant une technique similaire à une escalade ou descente d'une colline.

Ces méthodes travaillent bien dans le cas où la continuité des variables de conception est garantie, où ils nécessitent seulement quelques évaluations des fonctions, mais il se peut qu'ils ne trouvent pas un optimum global et restent coincées autour d'une valeur optimale locale.

Les méthodes déterministes pourraient aussi être classées selon le type d'informations nécessaires à leur mise en œuvre comme dans (Fig.4.1). Selon le degré de dérivabilité est le critère de classification en méthodes d'ordre zéro, méthodes de premier et second ordre.

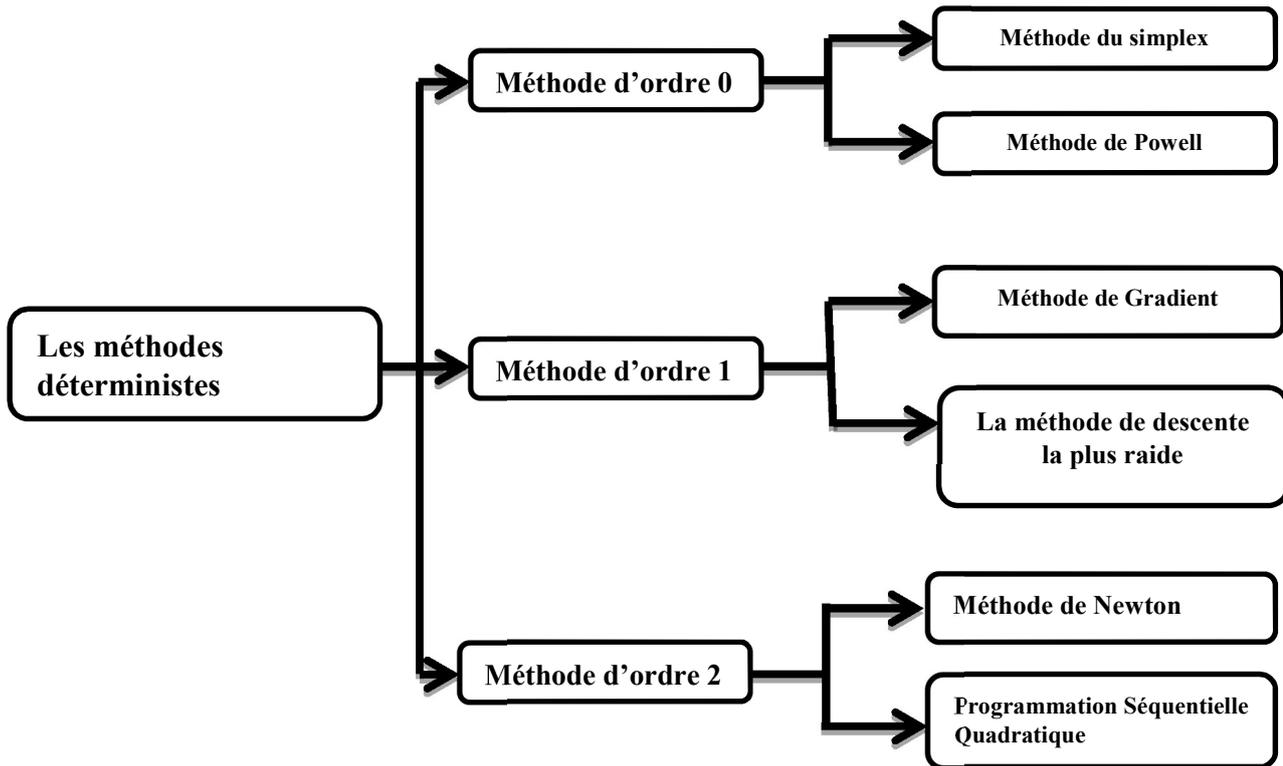


Fig.4.1 Méthodes déterministes d'optimisation

L'efficacité des méthodes déterministes est relative aux caractéristiques intrinsèques de la fonction objective, ce qui limite largement leur utilisation dans le cas où la fonction présente des discontinuités qui rendent la dérivabilité complexe ou impossible.

IV.2.2 Les algorithmes évolutionnaires (Méthodes stochastiques)

L'observation de la nature et des phénomènes de la biologie ont inspiré les mathématiciens dans leur développement des méthodes de conception optimale imitant le processus de la nature basée sur l'idée de l'adaptation des espèces dans l'environnement où elles existent d'une manière garantissant la survie des individus les mieux adaptés. Dans cette famille on trouve les algorithmes génétiques bios inspirés de l'évolution des populations biologiques.

Une autre catégorie d'algorithme inspiré du mode de fonctionnement du cerveau humain et leurs réseaux de neurones ont donné naissance aux réseaux de neurones artificiels. Ces algorithmes constituent une base directe à ce qui est connu sous le nom d'intelligences artificielles.

Ces algorithmes avant tout sont des méthodes stochastiques basées sur un mode de fonctionnement et balayage global dans l'espace de variables de conception qui diffèrent des méthodes déterministes basées sur les principes de dérivations à gradients.

Les algorithmes non déterministes travaillent globalement en utilisant les valeurs qui résultent de la fonction ou même d'un phénomène mesuré expérimentalement sans nécessairement connaître la nature mathématique de cette fonction. Dans ce processus imitant les phénomènes de la nature comme mentionné ci-dessus ou même les phénomènes de sociologies observés dans les populations de colonies de fourmis par exemple.

Les méthodes stochastiques peuvent bien être utilisées avec des variables discrets et de trouver l'optimum global avec efficacité dans le cas de l'existence de plusieurs valeurs optimales locales. Cependant un nombre d'évaluation élevé de la fonction objective peut être exigé afin de trouver la combinaison des paramètres optimaux.

Les techniques d'optimisation non déterministes peuvent être classées globalement en deux catégories :

- 1) Les méthodes stochastiques à population, le méta heuristique manipule à chaque itération un ensemble de solutions en parallèle. Comme exemple les algorithmes génétiques, et les algorithmes de colonies de fourmis.
- 2) Les méthodes stochastiques à parcours ou l'algorithme travaille avec une seule solution sur l'espace de recherche, les plus connues dans cette catégorie sont, la recherche avec tabous, la recherche au voisinage, la méthode GRASP ou encore les méthodes de bruitage (Fig.4.2).

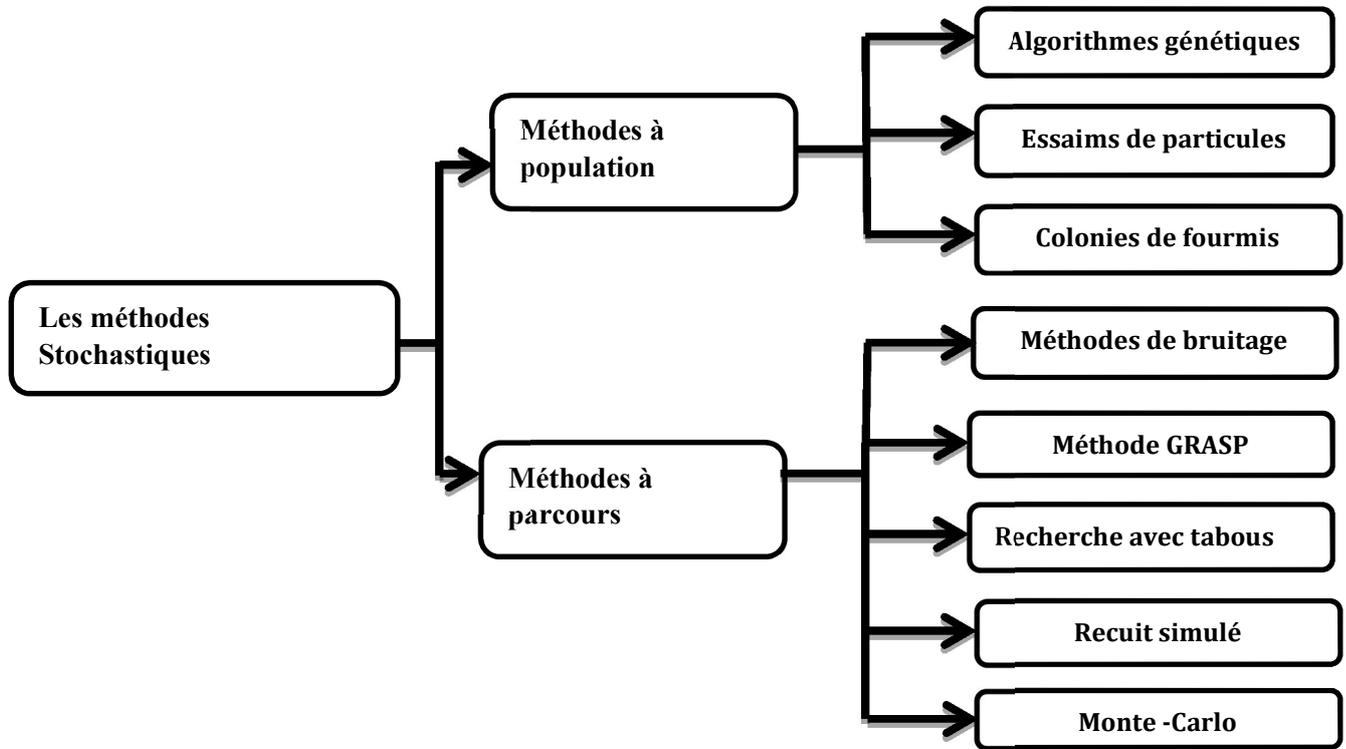


Fig.4.2 Méthodes stochastiques d’optimisations

IV.3 Problématique d’optimisation numérique des structures

Après la formulation mathématique du problème d’optimisation structurelle, le choix des algorithmes et la stratégie d’optimisation est d’une importance cruciale pour l’obtention des solutions du problème d’une manière réussie.

Les facteurs influençant le choix des algorithmes sont relatifs aux types de variables de conception, soient discrets comme les coordonnées géométriques de la surface de la coque et les dimensions des éléments structuraux, ou continue comme la définition de la surface par des fonctions d’interpolation. Le type de la fonction objective que ce soit régulière ou non régulière, les degrés de dérivabilités, la forme convexe ou concave. Aussi le type de problème sous contraintes ou non, les limitations et la forme de l’espace de variables de conception, le nombre des variables et fonctions, le coût de l’effort numérique de simulation qui parfois nous oblige à utiliser un couplage entre les méthodes d’optimisation et les méthodes de réduction de modèle.

IV.4 Choix d'algorithme d'optimisation

Il existe de nombreux algorithmes utilisés pour résoudre le problème de minimisation sous contraintes. Le choix de l'algorithme approprié pour un problème donné peut avoir un effet capital sur l'efficacité globale de l'ensemble de la procédure d'analyse.

Les algorithmes d'optimisation peuvent être classés en fonction de type de la fonction objective comme suit :

- **Algorithmes d'ordre zéro** : qui prennent en compte le résultat direct du calcul de la fonction objective.
- **Algorithmes de premier ordre** : qui nécessitent de calculer les premières dérivées de la fonction objective (gradient).
- **Algorithmes de second ordre** : qui nécessitent le calcul des éléments du Hessian à partir des secondes dérivées de la fonction objective.

Cette classification nécessite clairement des informations initiales sur la fonction objective, la topologie de la fonction est une caractéristique importante dans le choix de l'algorithme d'optimisation approprié.

IV.5 Convexité des fonctions et unicité de points optimaux

La convexité et l'unicité sont des terminologies mathématiques qui décrivent la courbure d'une fonction et le nombre de points extrêmes de cette fonction. Une fonction est dite convexe si toutes les lignes spécifiées entre deux points arbitraires de la fonction n'ont pas d'intersection avec la fonction.

Comme illustré dans (Fig.4.3) (à droite) la ligne a plusieurs points d'intersection ce qui illustre la non convexité de la fonction.

La topologie de la fonction représentant la réponse mécanique d'une structure dans l'optimisation structurelle, elle dépend du type de la fonction et le type des variables correspondants.

Les fonctions de réponses utilisées dans l'optimisation de forme basée sur les gradients dans les systèmes larges sont usuellement à degrés de non convexité très élevé, par conséquent ces fonctions ont plusieurs points de minimum, certains sont locaux comme (min1) et un seul minimum globale (ming) dans (Fig.4.3).

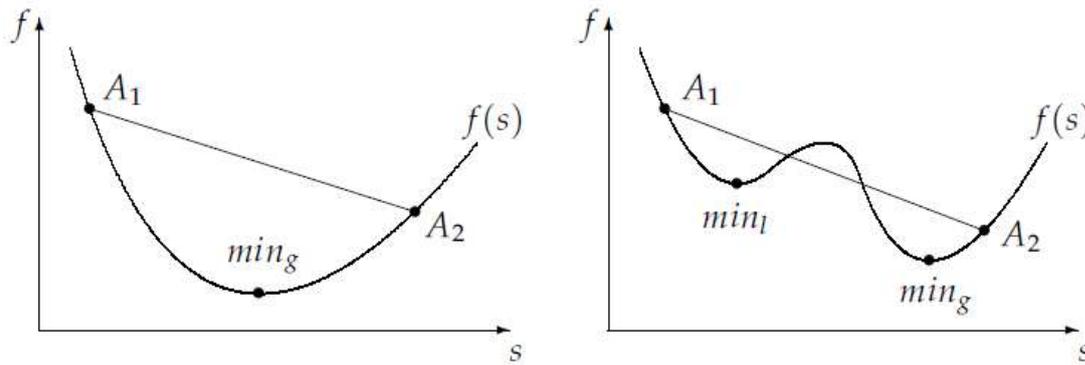


Fig.4.3 Fonction convexes et non convexes

La convexité des fonctions de réponse et l'unicité des résultats optimaux sont des sujets de discussions actifs dans la communauté d'optimisation. Strictement parlant, il n'y a aucune garantie que les algorithmes d'optimisation basés sur les méthodes de gradients trouvent la valeur optimale globale (min_g).

Cela motive les développeurs des méthodes d'ordre zéro de se concentrer sur un comportement de recherche assurant la convergence de leurs algorithmes vers un optimum global. Malheureusement les méthodes d'ordre zéro ne sont pas applicables aux grands problèmes d'optimisation.

Il existe plusieurs méthodes pour réduire la non-convexité d'une fonction de réponse. Tout d'abord la définition de la fonction elle-même, ou dans de nombreux cas, des formulations intégrales donnent plus de maniabilité dans le processus d'optimisation que dans les définitions basées sur des paramètres discrets locaux, cela favorise la quantification des propriétés structurelles dans une formulation intégrale si c'est possible.

En outre, le type des fonctions de formes définissant la géométrie dans l'approche paramétrique et le nombre de variables de conceptions ont une grande influence sur la convexité de la fonction de réponse.

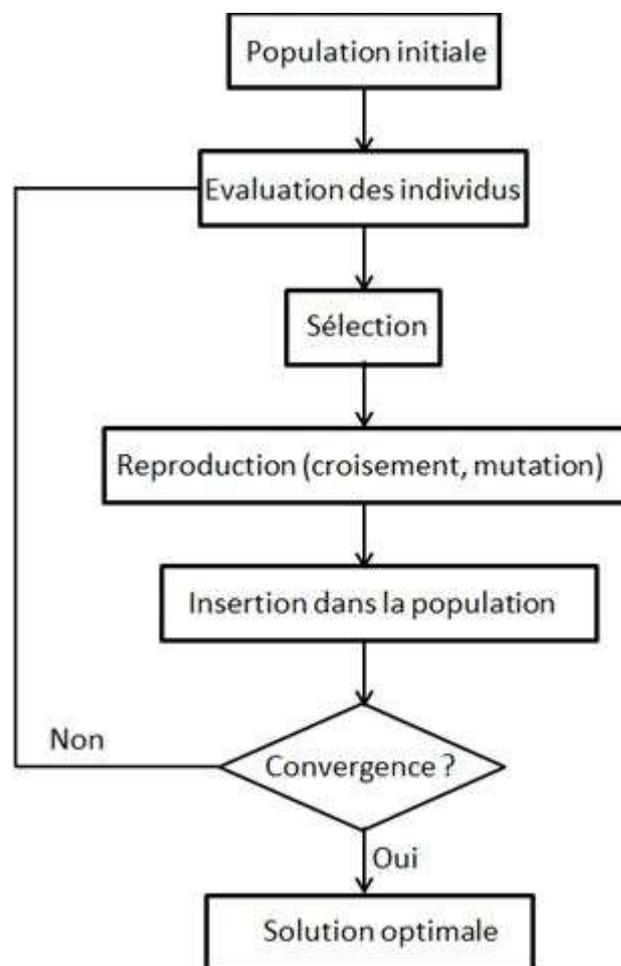
En général, le nombre de variables doit être raisonnable pour le problème réel, mais il ne doit pas être inutilement augmenté. L'approche plus connue pour influencer les méthodes d'optimisation basées sur les algorithmes à base de gradients et sans doute le choix de la conception initiale de façon intuitive résultant à une convergence très vite vers une conception optimale.

Surtout pour les problèmes d'optimisation de forme de petites modifications de la conception initiale provoque parfois des effets surprenants.

Il est bien connu que la spécification de la conception initiale est une étape qui consomme du temps dans la procédure de modélisation. Par conséquent, les variations de conceptions initiales ne sont pas toujours effectuées Firl (2010).

IV.6 Algorithme génétique classique

L'algorithme génétique est l'une des méthodes d'optimisation stochastique fondée sur les mécanismes de la sélection naturelle et de la génétique par Holland, J. H. (1975), il est applicable à tout type de problème d'optimisation en raison de son caractère général, les étapes de cet algorithme sont illustrées dans l'organigramme ci-dessous :



Ces opérations seront répétées à chaque itération selon l'ordre du cycle sélection, croisement et la mutation. Jusqu'à ce qu'elles soient arrêtées par l'une des contraintes, soit en atteignant le nombre maximal de générations, soit les critères de convergence donnant la solution satisfaisante recherchée D.A. Coley (1999).

IV.6.1 Avantages d'utilisation de l'algorithme génétique AG

L'avantage principal de l'algorithme génétique est son caractère non exigeant qui peut être exprimé dans les points suivants :

1. L'AG n'exige pas la continuité et la différentiabilité de la fonction objective.
2. L'AG n'exige pas la formulation extensive du problème d'optimisation.
3. L'AG n'est pas sensible au choix du point de départ.
4. L'AG est moins susceptible d'être coincé dans un minimum local.

Dans notre cas, le choix du AG est argumenté par l'absence d'une fonction objective directe, mais remplacé par un modèle réduit basé sur la méthode POD-RBF. L'AG nécessite moins d'information sur la fonction objective et peut travailler par les données discrètes générées par la méthode POD-RBF.

IV.6.2 Etapes de la procédure d'optimisation de l'algorithme génétique classique

IV.6.2.1 Le codage :

La première étape est de transformer tous les variables géométriques de la structure, candidats d'être une solution possible à une combinaison de codes, où la plus utilisée est sous la forme binaires. Dans une chaîne connue dans le langage de programmation sous l'acronyme anglais string ou chromosome dans le langage de la biologie. Ces chromosomes seront couplés afin de reproduire une nouvelle génération de solution possible.

IV.6.2.2 La sélection :

La génération de nouveaux variables de conception géométrique de la structure nécessite le choix des parents les plus adaptés. Cette adaptation est mesurée par rapport à l'objectif soit de minimisation ou de maximisation où les éléments de moindre adaptation seront rejetés et les éléments les plus adaptés seront sélectionnés comme parents. Tandis que les éléments à niveau d'adaptation intermédiaire seront utilisés par l'opérateur de recombinaison et de mutation afin de garder une qualité de diversité au sein de nouvelles générations.

Le principe de la sélection est basé sur un concept probabiliste ou dans chaque groupe d'éléments, la distribution probabiliste de sélection sera d'une façon où les éléments à meilleur aptitude mesure par la fonction objective prennent la probabilité maximale d'être sélectionnés. Il existe plusieurs méthodes de sélection, la plus utilisée est la roue de fortune.

Le principe de cette méthode consiste à donner le meilleur emplacement d’un individu dans la roue de fortune selon sa valeur de fitness dans une population de taille maximale J_{max} , un individu de valeur de fitness égale à $F(j)$, la probabilité de sélection de cet individu (j) est calculée par la formule :

$$Prob(j) = \frac{F(j)}{\sum_{j=1}^{J_{max}} F(j)} \quad (4.1)$$

IV.6.2.3 Croisement

Après la sélection des chaînes de chromosomes parents, le croisement signifie la recombinaison de ces éléments sélectionnés afin de donner de nouvelles générations de variable à meilleure valeur de fitness, la nomination génétique vient effectivement de cette opération en imitant la nature où les meilleures caractéristiques génétiques doivent nécessairement produire des individus plus adaptés à leur environnement.

Le croisement fonctionne par une logique simple d’échange de chromosomes entre parents et peut être illustré comme suit :

Un nombre entier k , représentant une position sur la chaîne binaire de chromosomes, sera choisi de manière aléatoire entre 1 et la taille du chromosome l . Deux nouvelles chaînes génétiques sont créées par l’échange de tous les chiffres entre les positions (k) et l’exemple représenté sur (Fig.4.4) qui montre deux chaînes (A_1 et A_2) de longueur $l = 6$ appartenant à la population initiale. Les deux nouvelles chaînes (A_3 et A_4) appartenant à la nouvelle population sont obtenues par croisement à la position $k = 6$.

Appartenant à la population initiale. Les deux nouvelles chaînes (A_3 et A_4) appartenant à la nouvelle population sont obtenues par croisement à la position $k = 6$.

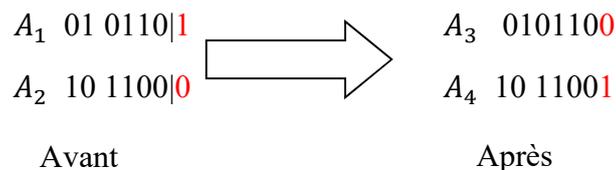


Fig.4.4 Chromosomes avant et après croisement

L’exemple dans la figure montre un croisement dans un seul point, l’utilisateur a le choix de définir les paramètres de croisement soit par deux points ou même plus, ou deux points sont tirés aléatoirement des chromosomes, et puis les parties des chromosomes situées entre ces deux points sont remplacées par l’autre.

IV.6.2.4 Operateur de mutation :

Après la recombinaison des chromosomes parents, vient l’operateur de la mutation dans une deuxième imitation de processus naturelle où certaines erreurs de l’opération de mariage de chromosomes peuvent avoir lieu résultant des individus à caractéristiques de fitness probable d’être meilleur. Ce phénomène est le caractère principal de l’évolution par adaptation qui reste mystérieux.

La mutation de point de vue numérique assure une diversité dans la population qui pousse l’algorithme génétique à faire plus de recherche pour un optimum global au lieu de stagner dans une valeur locale.

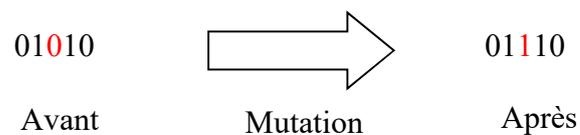


Fig.4.5 Exemple d’une mutation

L’operateur de mutation va affecter seulement une fraction de la population et leur paramètre d’affectation sera défini par l’utilisateur.

IV.6.2.5 L’évaluation de la fitness des nouvelles générations

Chaque groupe de nouveaux éléments va être évalué et son optimalité ou fitness doit être évaluée par rapport à la fonction objective choisie, si le critère d’arrêt est atteint, l’algorithme va s’arrêter en donnant les valeurs optimales trouvées, sinon une autre itération va être exécutée.

Le nombre maximal d’itération, est souvent le critère d’arrêt choisi dans notre étude.

IV.7 Le générique de l’algorithme génétique peut être déclaré comme :

Début
Initialisation de la population P
Evaluation de chaque chaîne de bits dans la population
Répète

Chapitre IV : Apport de POD-RBF couplée avec l'algorithme génétique dans l'optimisation des structures en coques

```
Répète
    Sélection de 2 individus ou plus dans P
    Application de l'opérateur de croisement avec une
        probabilité
    Application de l'opérateur de mutation avec un ratio
        correspondant.
    Insertion des nouveaux individus P'
    Jusqu' à ce que la population P' est complète.
    Evaluation de la fitness des individus de la nouvelle population
        P'
P reçoit P'
Critère d'arrêt (nombre maximal d'itération)
Stop
End
```

Pour exécuter l'algorithme génétique nous devons définir quelques valeurs avant de passer à l'application dans le problème traité.

Une récapitulation des paramètres relatifs à l'algorithme génétique est présentée ci-dessous :

1) Longueur des chromosomes : les chaînes de bits de codage binaire de chaque individu dans la population initiale nécessitent une longueur de bits adéquate, le nombre d'éléments de codage est relatif au caractère intrinsèque des variables, solution du problème d'optimisation et la précision voulu. Après l'algorithme génétique calcule le nombre de bits idéals. Comme par exemple si on prend 10 comme valeur pour un variable, il nécessite au moins 4 bits de codage binaire ce qui donne 16 combinaisons probables d'être adoptées où chaque valeur a une probabilité de $10/16=0.625$ d'être sélectionnée. Le problème qui naît de cette opération est d'avoir une longueur de la chaîne des chromosomes plus que nécessaire, ce qui affecte le temps de calcul qui restreint la rapidité de convergence. Pour régler ce problème l'algorithme génétique inclut un paramètre de control automatique de mise à l'échelle de la précision prédéfinie par l'utilisateur afin de trouver une longueur de bits idéale en augmentant ou en diminuant le nombre de bits.

2) Limites du domaine de recherche : le domaine de recherche doit être borné par des limites supérieures et inférieures pour chaque variable de conception dans cette espace où les individus sont générés. Le domaine est dépendant des caractéristiques du problème d'optimisation.

3) Taille de la population : Indique combien de chromosomes sont présents dans la population en une génération aléatoire. Dans le cas où il y a trop peu de chromosomes, le GA a très peu de possibilités pour effectuer le croisement et seulement une petite partie de l'espace de recherche est explorée. D'autre part, s'il y a trop de chromosomes, l'AG va

consommer plus de temps de calcul. La recherche montre qu'après une certaine limite dans la taille de population et qui dépend aussi principalement du codage et des caractéristiques du problème, il n'est pas utile d'augmenter la taille de la population, car elle ne résout pas le problème plus rapidement.

4) Probabilité de croisement : Indique à quelle fréquence l'échange des gènes (bits) sera effectué. S'il n'y a pas de croisement, la descendance est la copie exacte des parents. S'il y a un croisement, la progéniture est faite à partir de parties du chromosome des parents. Si la probabilité est de 100%, alors tous les descendants sont faits par croisement. Si elle est de 0%, toute nouvelle génération est faite à partir de copies exactes des chromosomes de la population précédente, mais cela ne signifie pas que la nouvelle génération est la même parce qu'elle est affecté par la procédure de sélection. La probabilité de croisement dans l'algorithme génétique classique est inversement proportionnelle à la taille de la population ce qui veut dire moins sont les individus la sélection est très dure donc on est plus incliné à faire un croisement total d'autre part dans les populations à grande taille, il suffit de sélectionner un nombre maximum d'éléments à grandes aptitudes au lieu de faire un croisement.

Le croisement est fait dans l'espoir que les nouveaux chromosomes auront de bonnes parties de génotypes de vieux chromosomes et peut-être que les nouveaux chromosomes seront mieux adaptés. Cependant, il est bon de laisser une partie de la population survivre à la prochaine génération pour ne pas perdre toutes les qualités de diversités dans la population initiale.

5) Probabilité de mutation : La probabilité de mutation indique à quelle fréquence des parties du chromosome seront mutées. S'il n'y a pas de mutation, la progéniture est prise après le croisement sans aucun changement. Si une mutation est effectuée, une partie du chromosome est modifiée. Si la probabilité de mutation est de 100%, le chromosome entier est modifié, s'il est à 0%, rien n'est changé.

La mutation est faite pour empêcher la chute de GA dans l'extrême local, mais elle ne devrait pas se produire très souvent, parce que GA changera totalement à une procédure de recherche aléatoire. De même manière que le croisement, la probabilité de mutation est aussi inversement proportionnelle à la taille de la population.

IV.8 Résolution de problème d'optimisation des coques par algorithme génétique :

1. Choisissez N individus de façon aléatoire pour la création de la population initiale. Chaque

Chapitre IV : Apport de POD-RBF couplée avec l'algorithme génétique dans l'optimisation des structures en coques

individu dispose d'un chromosome codé en chaînes de bits binaire, correspondant aux paramètres géométriques de la structure.

2. Evaluation de chaque individu, qui correspond à travers le modèle réduit, à un vecteur contenant les bornes du paramètre géométrique suivi (P), puis calcul de la valeur de la fonction d'aptitude (fitness) soit le moment de flexion maximale ou l'énergie de déformation relative selon le cas d'étude.
3. Arrêt de l'algorithme si le nombre de générations maximales est atteint. Sinon continue.
4. Classer les éléments de la nouvelle génération selon leur valeur d'aptitude. Sélectionner par la suite les éléments à procréer une nouvelle génération.
5. Exécuter l'opérateur de croisement.
6. Mutation d'une partie de la population résultante selon une fréquence prédéfinie.
7. Remplacer l'ancienne population par une nouvelle, et passer à l'étape 2.

Pseudo code : Algorithme Génétique appliqué dans l'optimisation des structures en coques en couplage avec POD-RBF

Input : ER//Espace de recherche

TP// Taille de population

PM// Probabilité de mutation

PC// Probabilité de croisement

CA// Critère d'arrêt (nombre maximal d'itération)

pop ← **Généré aléatoirement une population initiale de paramètres géométriques de taille (TP)**

Obj ← RBF (pop) ; **Vecteur contenant les valeurs de la fonction objective correspondante Obj**

évaluer (pop) ; **classer les éléments de la population par rapport à leur aptitude (fitness)**

while iteration < CA do

 parents ← SelectionFrom(pop) ;

```
enfant ← Recombine (parents, PC) ;  
enfant ← Mutate (enfant, PM) ;  
evaluate (enfant) ;  
pop ← Insertion Into (pop, enfant) ;  
Obj ← RBF (pop) ;  
evaluer (pop) ;  
  
end while  
  
return meilleur individus dans (pop) ;
```

IV.9 Formulation de la méthode d’optimisation des structures :

Ils existent plusieurs méthodes d’optimisation des structures en coque comme cité dans le chapitre 1, la complexité de formulation des méthodes classiques rend leur utilisation destinée seulement aux domaines de recherche de forme particulière, ce qui est très loin de l’approche d’ingénierie limité par des conceptions initiales qui ne permettent pas le changement radical de la forme proposée. Dans notre thèse, la forme de coque en dôme doit être respectée dans le résultat final, ce qui limite la variation de paramètres géométriques, sachant que le béton travaille bien dans l’état de compression, la minimisation des moments fléchissant qui donne nécessairement la naissance des efforts de traction nocive à la structure devient une priorité.

Dans notre premier exemple la minimisation du moment de flexion maximum considérant les paramètres géométriques Hauteur et Ouverture du dôme afin de trouver la combinaison optimale entre eux définie comme le rapport (H/Ou) dans la fonction objective M_{max} est fait comme suit :

$$\begin{cases} f(H, Ou) = M_{max}(H, Ou) \\ f(H, Ou_{optimal}) = \min[f(H, Ou)] \end{cases} \quad (4.2)$$

Tout système de structures dans le domaine élastique est entre deux états par rapport à leur capacité de déformation soit flexible ou rigide. Cette classification est mesurée par l’énergie de déformation. Dans notre thèse, le deuxième exemple étudié révèle la transition entre flexibilité et rigidité par rapport aux changements géométriques résultant d’une structure avec rigidité maximale prenant l’énergie de déformation maximale S_{Emax} de la forme initiale comme

fonction objective à minimiser par rapport aux variables de conception géométrique en trois points définissant la forme S_1, S_2 et S_3 .

$$\begin{cases} f(s_i) = S_{Emax}(s_i) \\ f(s_{i\ optimal}) = \min[f(s_i)] \end{cases} \quad (4.3)$$

IV.10 Optimisation dans les dômes

Dans le cadre de l'optimisation géométrique des dômes, le vecteur des variables de conceptions optimaux, définissent les solutions recherchées soit par maximisation ou minimisation de la fonction objective.

Les mesures de moment de flexions maximal ou l'énergie de déformation $f(H, Ou)$ et $f(s_i)$ peuvent être remplacées en utilisant d'autres grandeurs mesurées comme les déplacements. Il faut mentionner ici les difficultés supplémentaires qui rendent la solution des problèmes compliqués. En effet, les mesures initiales en (4.2) et (4.3) peuvent être insensibles à certaines valeurs des paramètres, et influencées largement par d'autres. Cela conduit à une approximation qui tient en compte seulement les variations initialement données et ne reflète pas le mode de comportement global de la structure. Cela restreint l'efficacité d'approximation par POD-RBF dans le domaine linéaire seulement, et nécessite plusieurs simulations afin de pouvoir construire un modèle réduit qui reflète les sensibilités de variations paramétriques non linéaires.

Une autre difficulté est liée à la non-convexité du problème. Il est bien connu que, dans la majorité des problèmes d'optimisation non convexes, il existe des minimums locaux, que beaucoup d'algorithmes d'optimisation ne peuvent pas toujours détecter, avant qu'ils ne convergent vers le minimum global.

Pour ces raisons, les algorithmes d'optimisation globale, comme l'algorithme GA est nécessaire.

IV.10.1 Avantages de la réduction de modèle dans les problèmes d'optimisation des coques

Dans les méthodes d'optimisation des coques, le calcul de la fonction objective est l'étape la plus coûteuse du processus, car une simulation du problème peut prendre un temps de calcul considérable, en raison du caractère itératif du processus. Ce qui est le cas dans ce problème, qui est basé sur les algorithmes d'optimisation stochastique, où la fonction fitness représente en

fait une simulation du problème, mesurée pour chaque individu de la population, et répétée autant de fois que nécessaire.

Au lieu d'utiliser une méthode de simulation coûteuse pour évaluer la fonction fitness, la réduction de modèles vise donc à réduire substantiellement le coût de calcul. La réduction de modèle POD-RBF proposée permettra en effet de réduire considérablement ce coût par le calcul des moments de flexions et énergie de déformation, correspondants aux éventuels paramètres géométriques, qui nécessitent le calcul d'un seul produit matriciel.

Un autre avantage de l'utilisation de la réduction de modèle dans l'optimisation de la géométrie et les formes des structures en coques, est la possibilité qu'elle permette à la mise en œuvre dans les bureaux d'études et de conception par des ingénieurs et concepteurs de structures, basée sur l'intuition de ces derniers. Afin de définir le problème d'optimisation paramétrique à l'aide d'une méthodologie du modèle réduit numérique qualifié à interpoler les résultats de simulation dans un pas égale à la moitié du pas initial, ce qui réduit le temps de calcul à la moitié.

Certains problèmes d'optimisation de forme de coque sont étudiés expérimentalement en construisant un modèle réduit sur la base des résultats expérimentaux, on évite ainsi les erreurs importantes induites par les méthodes de simulation classique.

Si la réduction de modèle est envisagée dans des cas expérimentaux réels, on imagine le grand intérêt qu'il apporterait, car seules quelques expériences seraient nécessaires pour construire le modèle réduit, et que ce serait suffisant pour surveiller le cas étudié dans l'ensemble de sa durée de vie. Cette solution est très économique par rapport aux méthodes existantes dans le cadre d'optimisation structurelles.

IV.10.2 Approche proposée pour l'optimisation de forme de coque

Dans cette thèse, l'approche d'optimisation de forme est basée sur la réduction du modèle pour évaluer les paramètres géométriques.

Par opposition aux méthodes classiques, qui sont implémentées directement dans le code de simulation, l'approche proposée nécessitera la construction du modèle réduit. Après avoir vérifié la sensibilité des réponses du comportement de la structure envers les paramètres de la géométrie, le modèle réduit correspondant est valable juste pour la structure étudiée, les conditions aux limites et l'espace de variable de conception est imposé.

L'approche pour l'optimisation de forme de coque se compose de deux grandes étapes, la réduction du modèle, puis l'optimisation.

IV.10.3 Etapes de construction du modèle réduit

Dans cette première phase, nous devons décrire le problème d'optimisation, à travers le choix dimensionnel de variable de la géométrie et la fixation des conditions aux limites.

Cette étape constitue la base de la procédure de simulation. Ces conditions aux limites ne doivent plus être changées.

La réduction du modèle se fait par la méthode POD, en se basant sur le principe de la matrice des données. Cette matrice réunit les données utilisées pour l'optimisation de forme.

La construction de la matrice se fait par une simulation itérative dans le domaine de variable de conception relatif.

Dans notre travail nous avons utilisé la méthode des éléments finis MEF dans la simulation des structures en coques soumises à des chargements uniformes.

Les méthodes d'optimisation structurelles classiques utilisent aussi la méthode MEF pour le calcul, bien que cette méthode nécessite le remaillage de la structure lorsque les paramètres géométriques de forme changent, la méthode des éléments finis fournit de la capacité de simulation de problème complexe avec une précision bien reconnue. Dans notre travail la méthode MEF est utilisée afin de procéder à l'optimisation de forme des dômes elliptiques et voûtes paraboliques.

Les valeurs de la simulation paramétrique initiale seront réunies dans une matrice des données, dans l'étape suivante la méthode POD-RBF est utilisée dans la construction d'un modèle d'approximation numérique réduit.

L'algorithme POD permet une réduction considérable dans les dimensions de la matrice des données initiales. En conservant seulement les premiers modes qui représentent la matrice d'origine, ensuite la méthode d'interpolation RBF est utilisée dans le calcul du vecteur contenant les valeurs des fonctions objectives, moment de flexion maximale et énergie de déformation correspondants aux paramètres géométriques définissant la forme optimisée avec un pas de variation égale à la moitié du pas utilisé initialement dans la construction de la matrice des données.

IV.11 Etape d'optimisation de forme

Après la construction du modèle numérique réduit, les évaluations nécessaires pour l'opération d'optimisation seront appelées à partir de ce modèle basé sur la méthode POD-RBF et passe à l'algorithme d'optimisation afin de trouver le vecteur des paramètres géométriques optimaux recherchés correspondant à la minimisation des fonctions objectives définies.

A travers le processus d'optimisation, l'évaluation des fonctions objectives appelées en langage d'optimisation aussi les fonctions d'aptitudes (fitness functions) est faite pour chaque itération, aussi calculée pour toutes les solutions possibles de la population.

Les valeurs de la fonction objective sont obtenues à partir des modèles réduits construits dans l'étape précédente, ce qui soulage le cout du temps de calcul par rapport aux méthodes d'optimisation de forme classiques, où cette opération est faite par modélisation numérique de la nouvelle forme par MEF à chaque itération dans la procédure d'optimisation.

Commençant par l'introduction de l'espace de variable de conception définissant les intervalles de recherche de chaque paramètre géométrique recherché dans l'algorithme POD-RBF, les vecteurs contenant la réponse structurelle des fonctions objectives moment de flexion maximale et énergie de déformation $f(H, Ou)$, $f(s_i)$, correspondant aux paramètres géométriques de forme seront calculés.

(Fig.4.6) représente l'organigramme de l'algorithme d'optimisation de forme des structures en coques proposé. Commençant par l'introduction d'une forme géométrique initiale, une étude paramétrique par la méthode MEF par la suite va être utilisée dans la construction d'un modèle numérique réduit qui va remplacer le calcul par la méthode MEF.

L'algorithme génétique GA va conduire le processus d'optimisation en faisant appel à l'algorithme POD-RBF pour l'évaluation des fonctions objectives à chaque échantillon de population généré par le GA définissant une nouvelle forme qui correspond aux nouveaux paramètres géométriques identifiés.

Le critère d'arrêt de l'opération peut prendre plusieurs formes, l'une d'entre eux est la limitation du nombre d'itérations.

L'algorithme GA va mener la recherche dans l'espace de variables de conception comme dans les méthodes stochastiques classiques basées sur l'évaluation d'un nombre de combinaisons paramétriques existantes suivant la méthodologie bio inspirée (GA) va permettre à une convergence automatique à une valeur optimale globale.

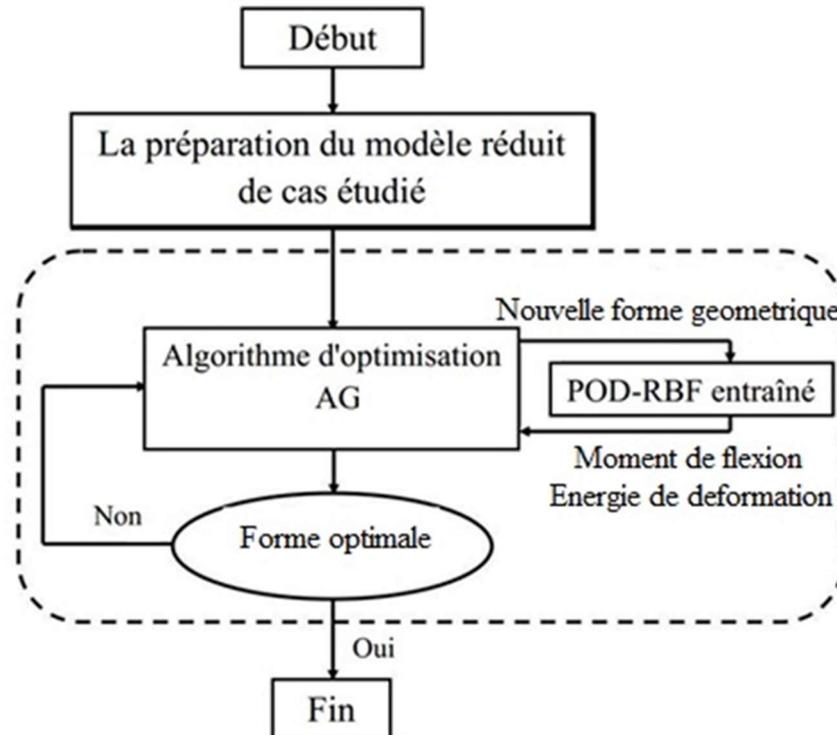


Fig. 4.5 Approche algorithmique pour l'optimisation de forme dans les structures en coques

IV.12 Application de l'algorithme proposé dans les structures en dômes

Dans le premier exemple, nous avons étudié la conception géométrique optimale d'une structure en dôme elliptique renforcée en béton armé avec un system d'appui en encastrement autour de la base, la structure est soumise à sa propre charge du poids et a une charge uniformément répartie.

Tab. 4.1 Les paramètres adoptés pour l’analyse du dôme sous chargement statique.

<i>La densité du poids</i>	2400 Kg/m ³
<i>Module de Young</i>	21 Gpa
<i>Coefficient de poisson</i>	0.17
<i>Charge répartie</i>	1500 N/m ²
<i>Epaisseur du dôme</i>	0.1 m

Les caractéristiques du modèle sont présentées dans (Tab4.1), l'épaisseur de la coque est constante dans la structure en toute direction. Ces paramètres ne changeront pas au cours du processus d'optimisation prenant les valeurs fixes ci-dessus.

Comme dans tous problèmes d’optimisation, nous avons un vecteur de paramètres de conception, qui sont dans notre cas la hauteur (H) et l’ouverture (OU) de la coupole étudiée et une fonction objective à minimiser qui est la valeur maximale du moment de flexion dans la structure.

En raison de la complexité du mode de comportement des structures en coque en général et l’inexistence d'une fonction directe reliant les paramètres de la géométrie à leurs fonctions objectives mentionnées précédemment.

Notre travail est concentré dans une première étape sur l’établissement d’un modèle numérique réduit, qui peut nous rapporter la valeur de la fonction objective par rapport aux changements paramétriques de la géométrie Touzout and Chebili (2016). Un pas égale à 0.25m est utilisé, ce qui est la moitié de la valeur de base, utilisée initialement afin de construire le modèle réduit d’interpolation en utilisant des changements successifs dans la hauteur (H) et l’ouverture (OU) par un incrément de 0,5 m. (Fig.4.6) représente la hauteur (H) et l’ouverture du dôme (OU).

Afin de trouver le rapport optimal entre la hauteur et l’ouverture de la structure, deux modèles ont été construits par POD-RBF basé sur 22 itérations de mesures instantanées (snapshots), reliant les variables de conception à leur fonction objective du moment de flexion maximal.

La hauteur H (m) du dôme varie avec le pas de 0,25 m dans le domaine [10 21], afin d’évaluer l’erreur d’approximation par POD-RBF, l’ouverture OU (m) a été de 20 m dans le cas d’un dôme profond et égal à 38 m dans le cas d’un dôme peu profond.

(Fig.4.7), représente la répartition du moment de flexion sur la surface du dôme après une simulation par le code commercial COMSOL Multiphysics (2012), un logiciel de modélisation basé sur la méthode des éléments finis.

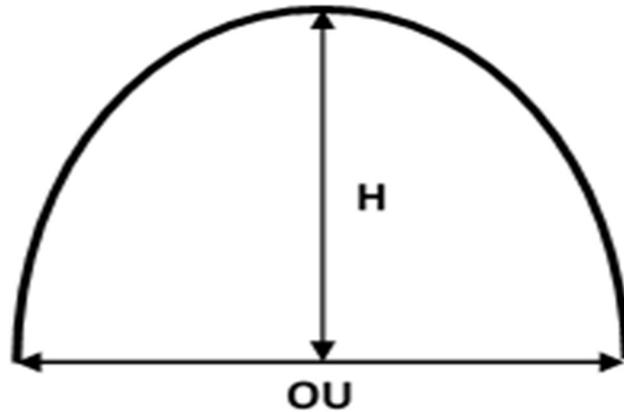


Fig.4.6 Paramètres hauteur(H) et ouverture (OU)

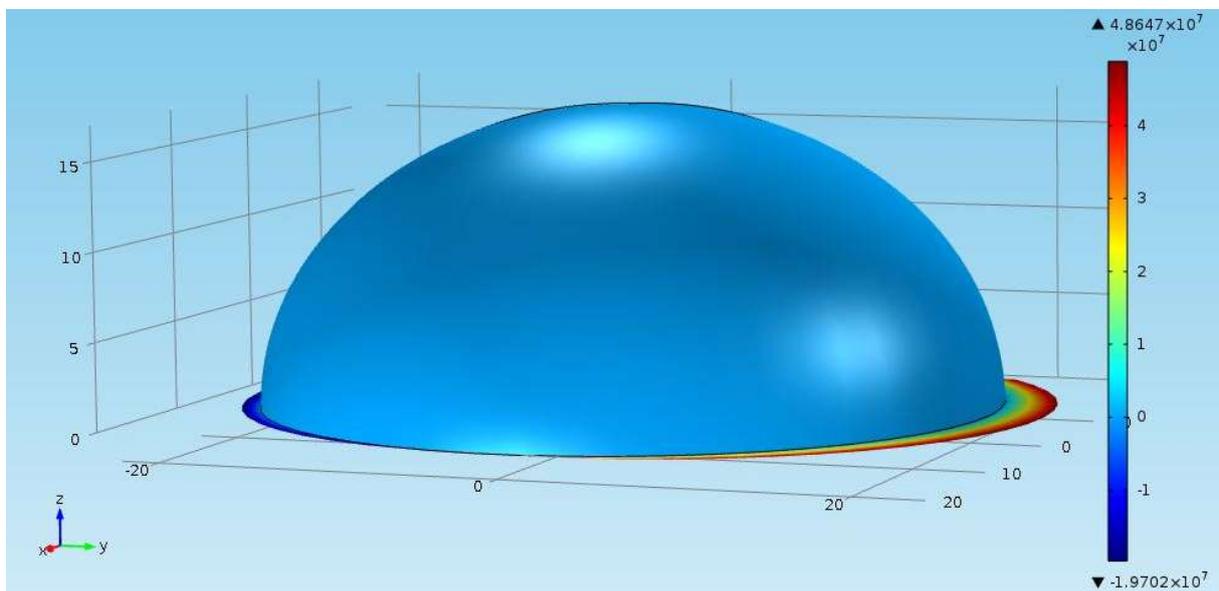


Fig.4.7 Répartition de moment de flexion sur la surface du dôme

En comparant les résultats obtenus par MEF aux résultats basés sur POD-RBF, dans (Fig.4.8) on remarque une très faible marge d'erreur de 0 .02% au premier cas d'une coque profonde où

le rapport hauteur sur ouverture était égal à 0,7. Cette erreur augmente considérablement pour le rapport égal à 0,4, correspondant à un dôme peu profond à une valeur d'environ 2%.

Cette augmentation significative est conforme au taux de variation de la valeur maximale du moment de flexion, qui est plus sensible à la variation du rapport de la hauteur sur l’ouverture dans le cas des coques peu profondes avec une plus grande valeur que dans les coques profondes, ce modèle de réponse structurale explique la différence d'erreur POD-RBF / FEM considéré comme un test de sensibilité.

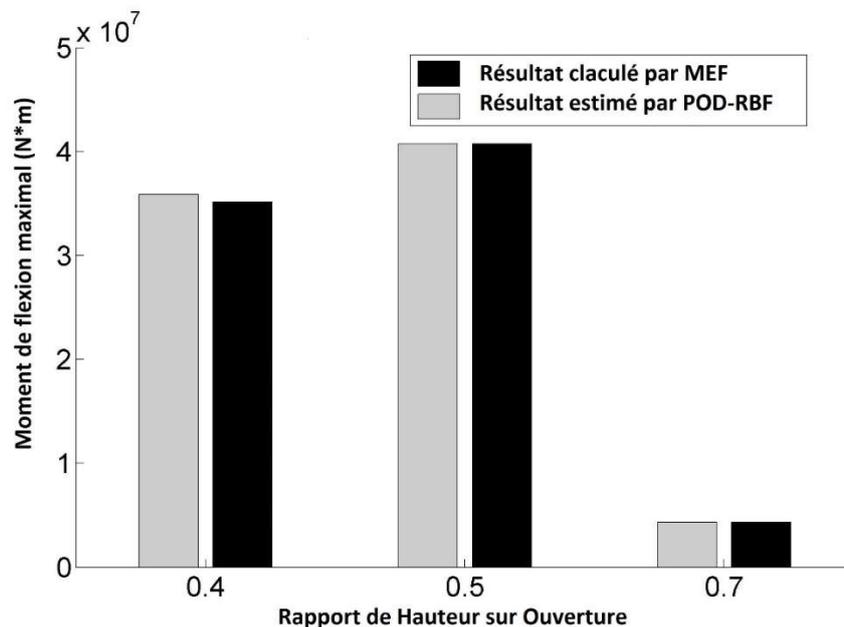


Fig.4.8 Moment de flexion Calculé par MEF en comparaison avec les valeurs estimées par POD-RBF

Après la construction de notre modèle réduit sur la base POD-RBF, notre prochaine tâche sera la recherche d'une forme optimale pour la structure étudiée par minimisation du moment de flexion maximal, en utilisant un algorithme génétique GA sur la base des résultats estimés par POD-RBF.

Ce processus d'optimisation basé sur la minimisation de la valeur maximale de la fonction objective, est aussi efficace que la recherche d'un état minimum d'effet de flexion dans l'ensemble de la structure et avec moins d'effort de calcul.

Les paramètres de l'algorithme génétique sont définis comme suit, les limites de l'espace de paramètres de conception Hauteur (H) et L'ouverture (OU) sont dans l'intervalle [10,21] (m),

la taille de de la population égale à 15, nombre d’itérations maximales générées est de 500, le taux de croisement est de 80%, le taux de mutation est de 1%.

La minimisation du moment de flexion a été considérée en faisant varier L’ouverture du dôme (OU) dans le domaine représentant un dôme profond de [10 30] (m) et dans le domaine du dôme peu profond [30 42] (m). (Fig.4.9) et (Fig.4.10), montre la convergence de moment de flexion maximale dans le dôme profond et dôme peu profond, respectivement. Sur (Fig.4.9), trois essais ont été effectués pour confirmer la convergence vers un minimum global.

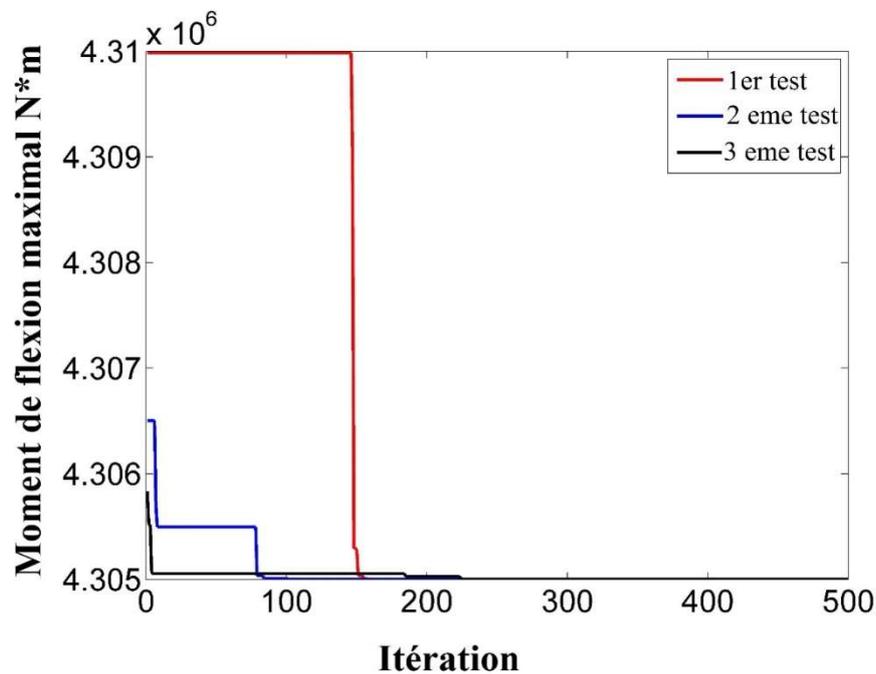


Fig.4.9 Minimisation de moment de flexion maximale dans un dôme profond

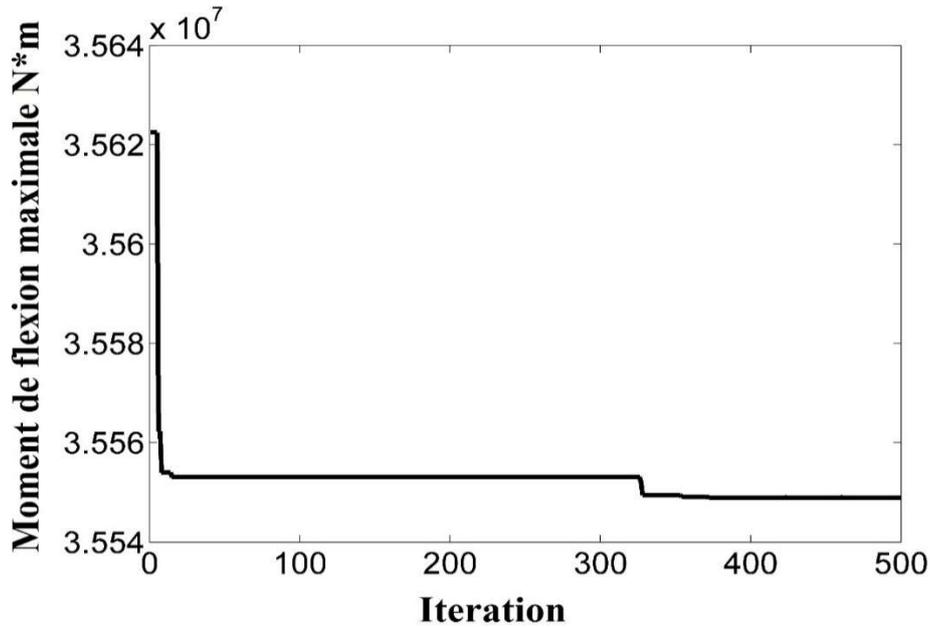


Fig.4.10 Moment de flexion maximale dans un dôme peu profond

D'après (Fig.4.9) et (Fig.4.10) les valeurs optimales du moment de flexion sont : $4.305 \text{ E}06 \text{ Nm}$ pour un dôme profond et $3.555 \text{ E}07 \text{ Nm}$ pour un dôme peu profond, correspondant à deux rapports optimaux : 0,65 et 0,39, le cas du dôme peu profond est confirmé par l'étude basée sur la minimisation de volume de matériau présenté par (Riemens, 2011) où l'étude a présenté comme résultat la valeur du rapport Hauteur sur ouverture égale à 0,38.

Ce qui indique que l'optimum basé sur la minimisation du volume est le même que la minimisation du moment fléchissant dans le cas du dôme peu profond, une autre note de cours par le professeur Hoogenboom (2011) a mentionné une étude concluant que le volume minimal d'une capsule sphérique correspond à un rapport hauteur sur ouverture égal à 0,8 ou 0,3. Tant que deux solutions où la première solution est proche de la nôtre obtenue dans le cas d'un dôme elliptique profond avec le rapport 0,65.

IV.13 Optimisation de forme dans la marge transitoire peu profonde, profonde

Les résultats d'optimisation obtenus dans la section précédente nous ont poussés à examiner de plus l'état d'optimalité de la structure vis-à-vis du ratio géométrique de forme H/Ou dans la marge de transition de la coupole de l'état profond à l'état peu profond par rapport à la fonction objective minimisant le moment de flexion maximale dont la structure peut produire. En réexaminant la structure pour le premier cas de géométrie profonde, où le diamètre de la coupole

était fixé à 20 m, et soumise aux mêmes conditions de limites utilisées précédemment dans une étude paramétrique en utilisant la méthode POD-RBF en changeant graduellement la hauteur du dôme H avec un pas de 0.25 m débutant par 10 m comme valeur initiale, afin d'évaluer et tracer le mode de comportement de la coupole (Fig.4.11).

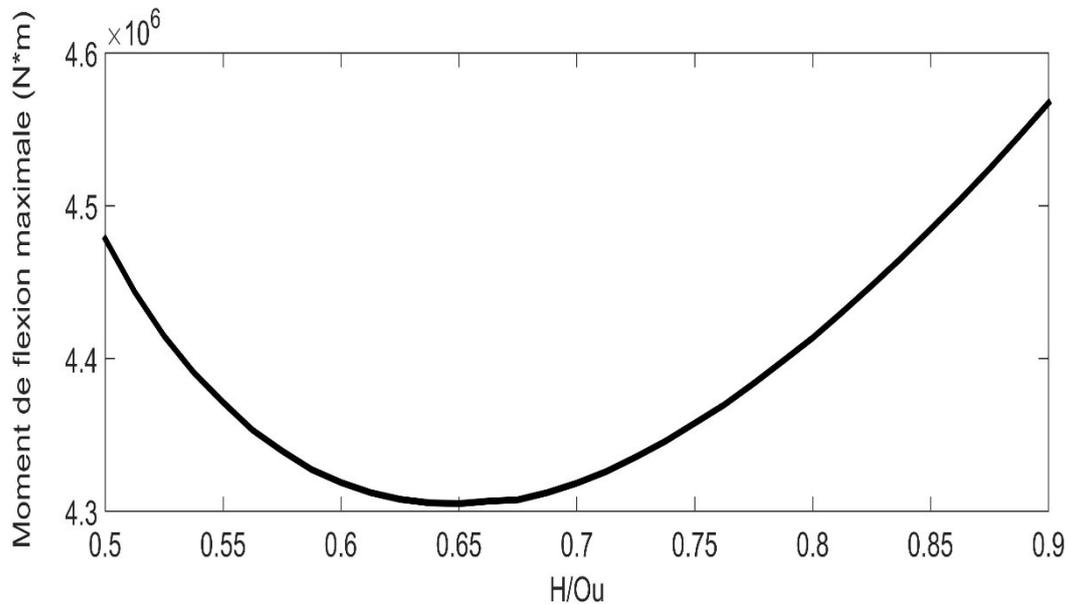


Fig.4.11 Variation du moment de flexion maximale par rapport au ratio Hauteur sur Ouverture H/Ou

Le diagramme de la Figure4.13 est de nature concave dans la marge où le ratio H/Ou appartenait à l'intervalle [0.5, 0.9] et on peut distinguer clairement la forme géométrique optimal autour du ratio H/Ou égale à 0.65.

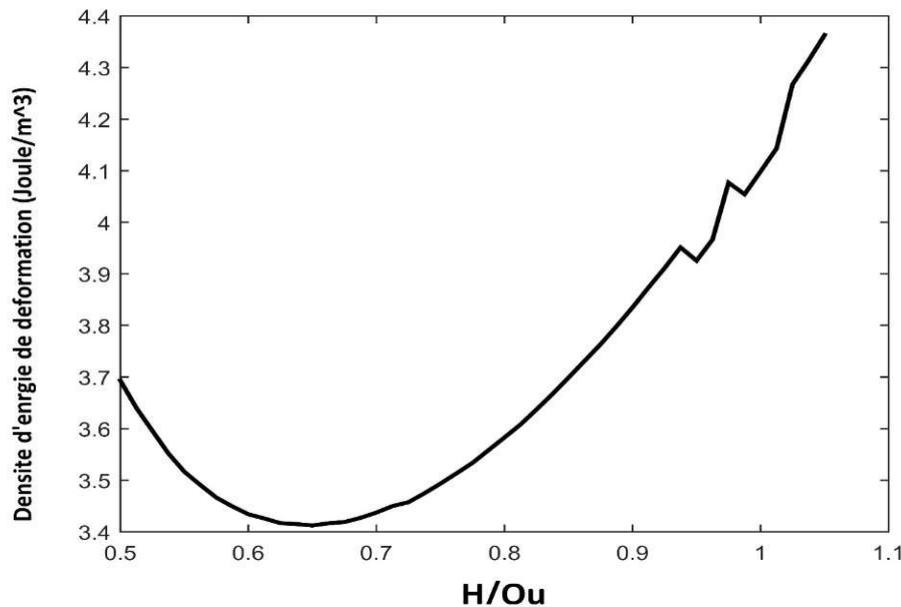


Fig.4.12 Variation de la densité de l’énergie de déformation totale par rapport au ratio Hauteur sur Ouverture H/Ou

Dans la courbe dans (Fig.4.12) la densité de l’énergie de déformation est aussi de nature convexe où le ratio optimal de H/Ou égale à 0.65 peut être facilement observé et avec de petite perturbation autour de la valeur égale à 1 causée par un changement brusque des contraintes de flexion autour de cette valeur.

De cette étude un résultat principale peut être obtenue est que le rapport optimal est constant dépendant de la profondeur de la coque (Fig.4.13) récapitule l’optimalité de la forme dans les dômes elliptiques de nature profonde.

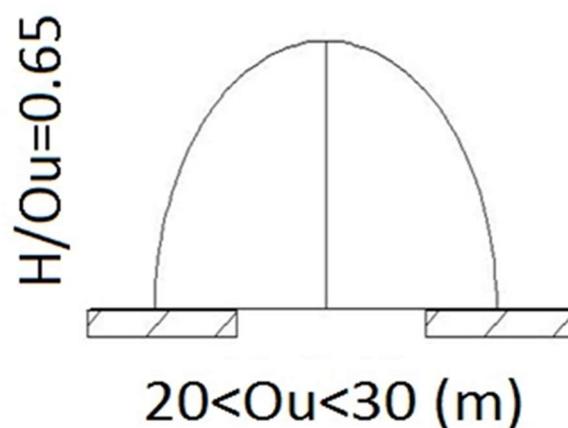


Fig.4.13 Ratio optimal dans les dômes elliptiques profonds

Pour étudier le cas d'une coupole peu profonde, le diamètre de l'ouverture de la coque en plan est choisi d'un diamètre de 38m, similairement au cas précédent un changement graduel de la hauteur est imposé afin de suivre le mode de comportement de la structure dans la marge d'un ratio de Hauteur sur Ouverture inclus dans l'intervalle [0.25,0.6] définissant une géométrie peu profonde de la coque.

La courbe de variation du moment maximal par rapport au ratio H/Ou (Fig.4.14) où l'existence d'une valeur optimale est observée autour de la valeur 0.42, une perturbation non linéaire de la fonction objective autour du point optimal est observée, ce qui rend notre choix d'un algorithme d'optimisation stochastique efficace à ne pas se coincé dans une valeur optimale locale.

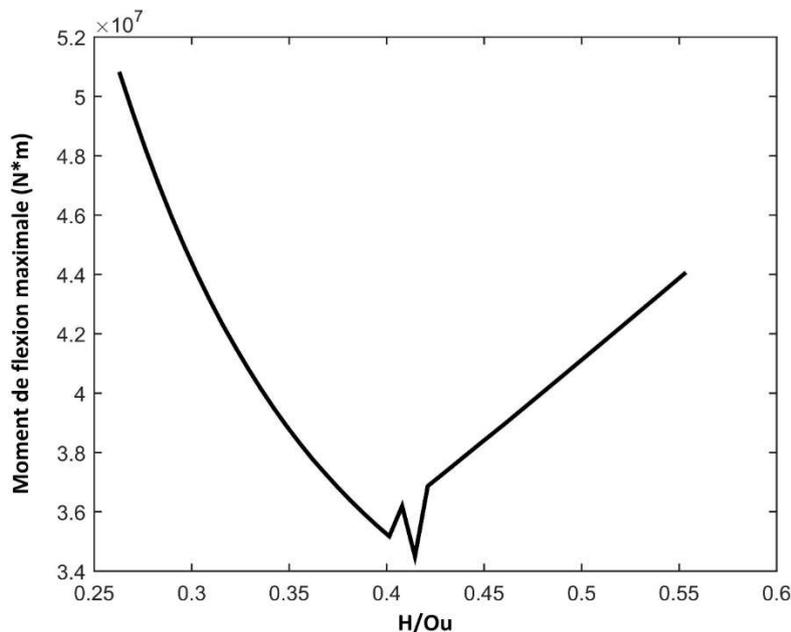


Fig 4.14 Variation du moment de flexion maximale par rapport au ratio de la Hauteur sur Ouverture dans le cas d'un dôme peu profond

L'énergie totale de la déformation dans le cas d'un dôme peu profond présentée dans la (Fig.4.15) montre que l'énergie de déformation est inversement proportionnelle au ratio H/Ou et un ratio optimal tend vers une structure plus profonde en augmentant la courbure de la structure.

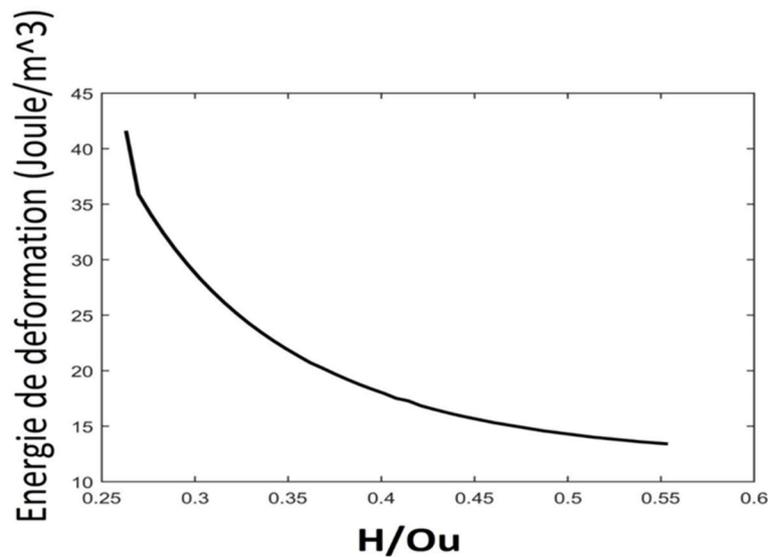


Fig.4.15 Variation de l'énergie de déformation totale dans un dôme peu profond par rapport au ratio Hauteur sur Ouverture

(Fig.4.16) récapitule les résultats relatifs à l'optimalité de la forme des dômes elliptiques dans le cas des géométries peu profondes.

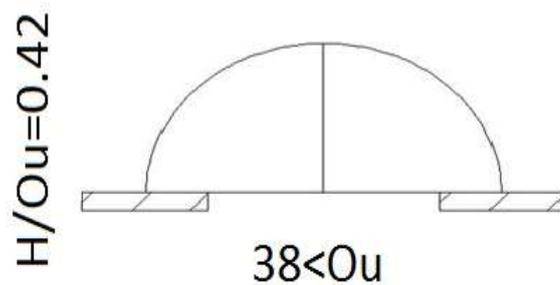


Fig.4.16 Rapport hauteur sur Ouverture optimal dans le cas des géométries peu profondes

Après l'évaluation des ratios optimaux dans les deux cas de dômes profonds et peu profonds, la phase de transition de la forme entre ces deux états était aussi l'objet de notre recherche par la même méthode afin de trouver la relation qui décrit cette transition dans la fonction objective du moment de flexion maximale à minimiser. Le diagramme (Fig.4.17) présente les résultats obtenus. On remarque une transition linéaire dans le rapport optimal de la hauteur sur ouverture entre les dômes elliptiques profonds et peu profonds où une formule linéaire peut être extraite

pour relier le rapport optimum au diamètre de la coque qui est comprise entre [30, 38] mètres pour cette marge dite de transition.

L’équation de droite (4.4) représente cette liaison entre un rapport H/Ou optimal en fonction de l’ouverture en plan où le diamètre de la coque dans la marge précédemment décrite.

$$H = 0.03125 * (\text{Ouverture})^2 \quad (4.4)$$

$$(H/ \text{Ou}) = \alpha * (\text{OU}-30) + 0.65 \quad (4.5)$$

Le coefficient α est la valeur de la pente dans la ligne de transition entre les dômes peu profonds et profonds, il a la valeur de 0,03125 où le rapport optimal tombe de 0,65 à 0,4, ce qui décrit la distinction de la réponse structurelle de la coque dans cette plage de transition de forme géométrique.

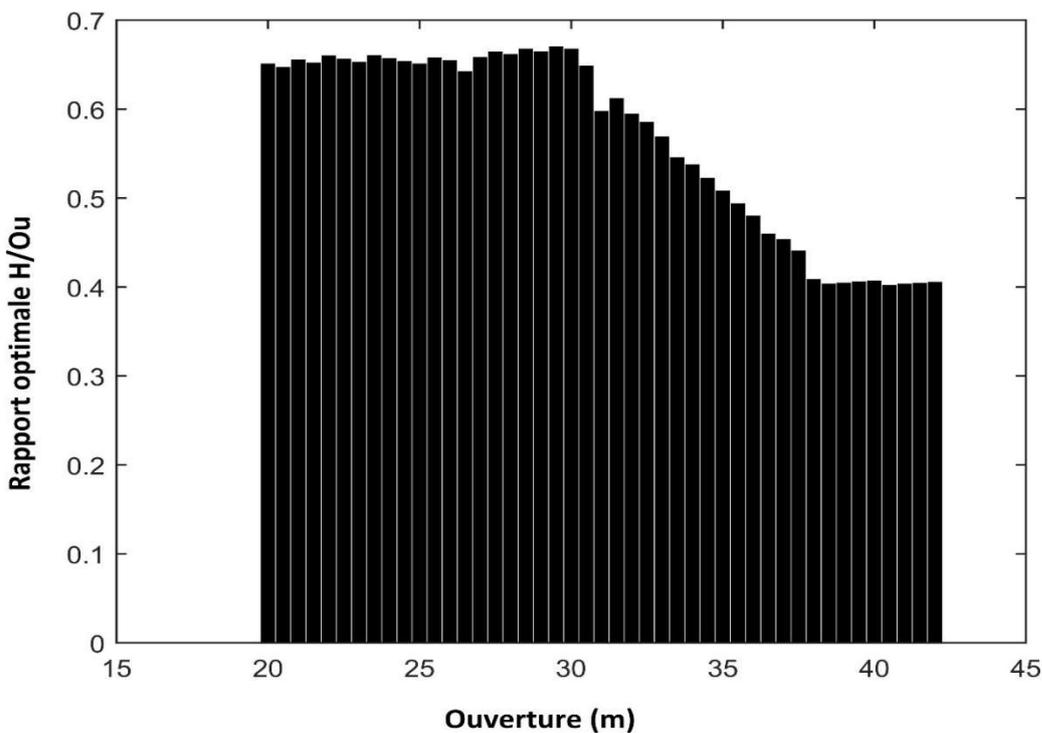


Fig.4.17 Transition du rapport optimal d’une géométrie profonde à une géométrie peu profonde.

Les coques avec un rapport H/Ou plus grand, produit une distribution de flexion moins que les coques dont le ratio est inférieure, la majorité de cette état de flexion prends place près des frontières de la coque, l’effet de moment de flexion peut bien être maitriser en adoptant une géométrie de forme optimale.

IV.14 Conception de forme optimale dans les structures en voûtes

Dans cette deuxième partie, nous avons étudié par la même méthodologie proposée un autre type de structure en coque qui est le toit en voûte.

Commençant à partir d'une forme parabolique et par la modification d'un ensemble de paramètres géométriques, comme simplifiée (Fig.4.18).Trois paramètres ont été utilisés S1, S2 et S3, où S1 et S3 sont la hauteur du toit au niveau des extrémités de la structure S2, est l'élévation au milieu. La géométrie initiale est la même que dans le cas de la coque en béton adoptée en premier lieu par (Bletzinger & Ramm, 1993) puis (Tomás & Martí, 2010), en utilisant également la même forme initiale, une voûte couvrant une surface rectangulaire de largeur 6m et 12m longueur.

Tab. 4.2 Les paramètres adoptés pour l’analyse du cylindre sous chargement statique.

<i>La densité du poids</i>	2400 Kg/m ³
<i>Module de Young</i>	50 Gpa
<i>Coefficient de poisson</i>	0.2
<i>Charge répartie</i>	5000 N/m ²
<i>Épaisseur du dôme</i>	0.05 m

Les paramètres relatifs aux modèles sont présentés dans (Tab. 4.2). La coque est appuyée doublement et symétriquement le long de la direction longue, seul ce type de conditions aux limites est étudié.

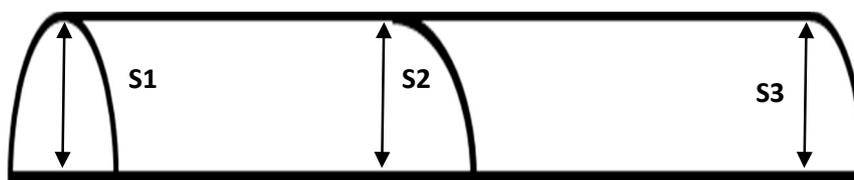


Fig.4.18 Forme cylindrique initial de la structure à optimiser.

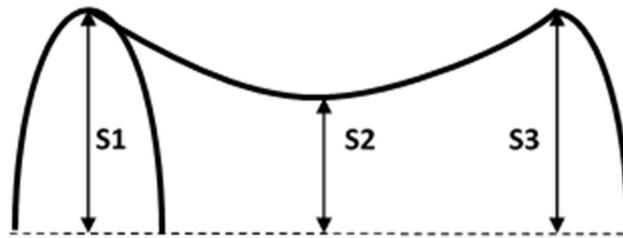


Fig.4.19 Paramètres géométriques optimisés dans la structure en voûtes.

Notre structure en voûte (Fig.4.20) est modélisée par les éléments S4R et maillée par 42480 éléments.



Fig.4.20 Maillage par éléments S4R

IV.14.1 Premier cas d'étude avec S2 seulement comme variable

Dans ce premier exemple d'étude S1 et S3 ont été fixés et seulement S2 a été autorisé à se modifier en valeurs dans le processus d'optimisation, la fonction objective est de minimiser la quantité maximale d'énergie élastique de déformation de la structure qui peut être expliquée aussi comme la maximisation de la rigidité.

Afin de trouver la valeur optimale de S2, un modèle réduit a été créé par POD-RBF comme dans le premier exemple de l'étude sur la base de 15 évaluations initiales par MEF où S2 varie progressivement avec un incrément de 100mm à partir de la forme initiale dans le domaine [300 1600] (mm).

Les paramètres de l'algorithme génétique GA pour cet exemple sont les mêmes que dans le premier exemple étudié. La minimisation de l'énergie de déformation a été examinée par S2 comme variable.

(Fig.4.20) montrent l'histoire de la convergence de cette fonction objective.

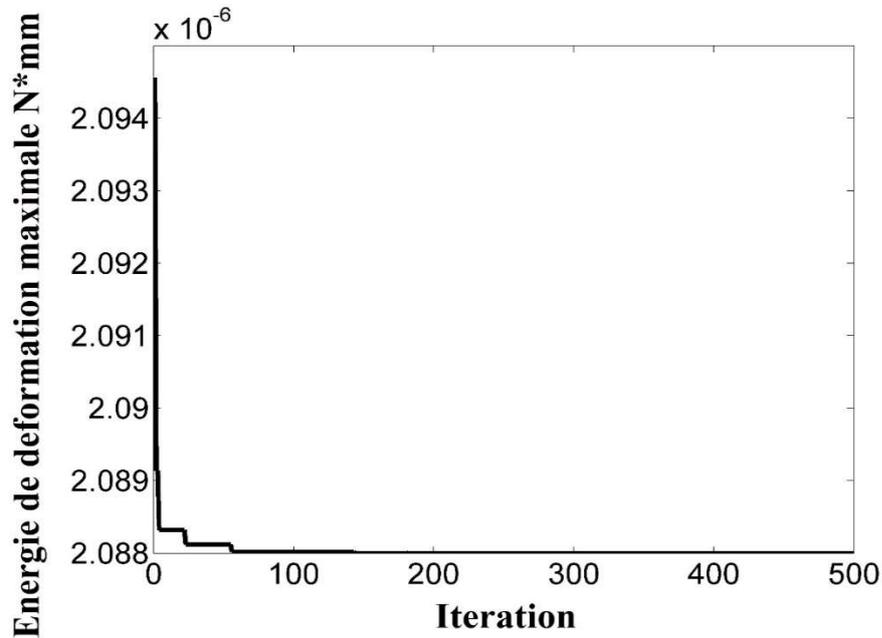


Fig.4.21 Minimisation de l'énergie de déformation dans le cas de variation de S2

La forme finale optimale de la coque était hyperbolique d'une valeur de S2 égale à 1900mm avec une quantité de diminution de l'énergie de déformation maximale égale à 62,85% prouvant encore une fois l'efficacité de la géométrie avec une négative double courbure par rapport à la forme initiale de courbure de gauss égale à zéro.

Dans l'objectif de trouver une forme plus rigide de la structure. La forme optimale est présentée dans (Fig.4.22).

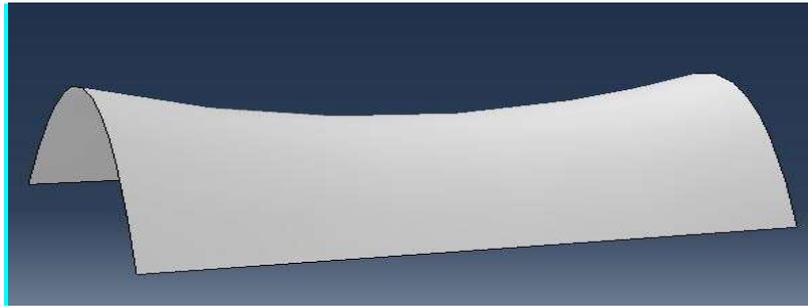


Fig.4.22 Forme optimale de la voûte dans l’optimisation avec le variable S2.

IV.14.2 Deuxième cas S1 fixe, S2 et S3 variables

Dans le deuxième exemple de ce cas d’étude, nous avons ajouté un autre variable de conception S3 qui est l’élévation de la coque à l’une des extrémités visant pour la même fonction objective. Après une enquête paramétrique préliminaire, ces données initiales provenant de l’analyse par MEF seront utilisées pour construire le modèle réduit POD-RBF, puis combinées avec un algorithme génétique, nous aurons notre processus d’optimisation en cours d’exécution avec des limites sur les paramètres qui sont de [1200,2000] (mm) pour S2 et [2000 2800] (mm) pour S3.

La taille de la population 30, nombre d’itérations maximales générées est de 500, traverse le taux de 80%, le taux de mutation de 1%. (Fig.4.22) montre l’histoire de la convergence de cette fonction objective.

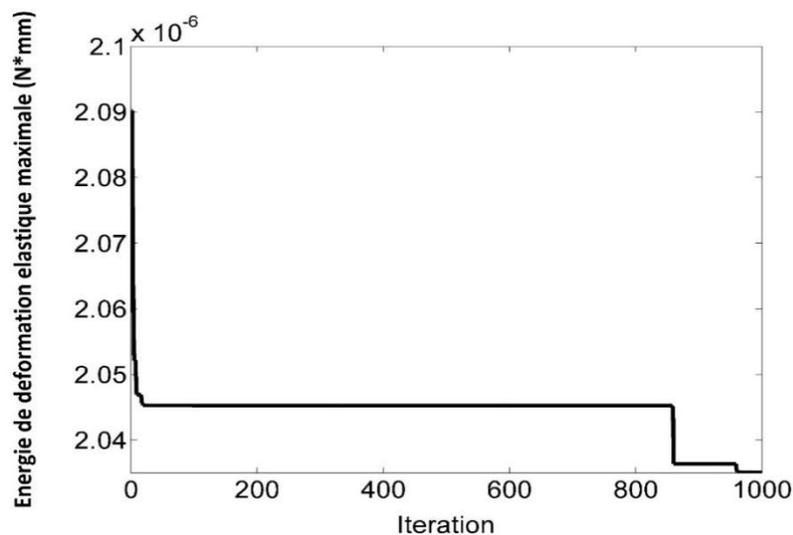


Fig.4.23 Minimisation de l’énergie de déformation dans le cas de variation de S2 et S3

La forme optimale pour résultat est également d'une double courbure gaussienne négative comme dans le premier exemple. Avec une baisse d'énergie de déformation supérieure où elle a diminué dans la forme finale obtenue par 63,73% avec $S3 = 2600\text{mm}$ et étonnamment $S2 = 1900\text{mm}$, où nous pouvons observer l'égalité des valeurs obtenues dans $S2$ pour les deux exemples, ce qui nous a amené à conclure que l'approche étape par étape dans la méthode de résolution est préférable que de prendre la combinaison ($S1, S2$) en même temps. La forme finale est présentée dans (Fig.4.24).



Fig.4.24 Optimal vault shape in case of $S2$ and $S3$ variables

IV.15 Conclusion

L'efficacité de la méthode proposée a été étudiée dans le processus d'optimisation pour les structures en forme de dôme et voûtes. Basée uniquement sur quelques estimations initiales par MEF, le POD-RBF pourrait produire des résultats aussi précis que la réponse structurelle originale, qui constituent une approche efficace d'optimisation structurelle lorsqu'elle est combinée avec un algorithme génétique GA.

La précision de la méthode POD-RBF a été prouvée par la comparaison des résultats estimés à celles issues du modèle MEF d'origine. Il a été constaté que la structure en dôme comporte deux états optimums, particulièrement dans le cas peu profond et profond des dômes, les résultats obtenus sont comparés avec d'autres résultats de recherche précédant le nôtre.

Dans le second cas, la conception optimale d'une structure en forme de voûte a été étudiée, l'approche proposée a estimé que la meilleure configuration géométrique est lorsque la forme est de double courbure Gaussienne négative donnant la forme de parabolöide hyperbolique.

Chapitre IV : Apport de POD-RBF couplée avec l'algorithme génétique dans l'optimisation des structures en coques

L'approche peut être intéressante pour des problèmes industriels, car il fournit de bonnes performances et de simplicité qui permettent aux ingénieurs de résoudre le problème structurel de l'optimisation par la conception basée sur les réponses structurelles, contrairement à la méthodologie d'optimisation structurelle classique, qui sont largement compliqués en termes de modélisation de la structure et de la formulation du problème d'optimisation.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Après une revue sur les méthodes d'optimisation dans les structures en coques, nous avons pris comme objectif de cette thèse de trouver une méthodologie convenable par rapport à la problématique de grands nombres de paramètres géométriques, qui est connue sous le nom de la méthode de paramétrisation de la surface de la coque. Notre but est la réduction de nombre de paramètres géométriques afin de donner des méthodes moins coûteuses pour l'application dans l'ingénierie de conception optimale des structures en coques travaillant avec rigidité membranaire en minimisant les effets de flexion.

Nous avons proposé une approche basée sur la réduction de modèle par POD-RBF, couplée avec l'algorithme génétique AG dans l'optimisation de forme des dômes et des voûtes. Nous avons choisi d'utiliser les dimensions de la coque comme variables. Pour formuler le problème d'optimisation, et valider la simplicité de la procédure proposée par rapport à d'autres méthodes classiques, nous avons suivi ces étapes :

- Construire un modèle d'interpolation basé sur POD-RBF, pour estimer les fonctions objectives en fonction de leurs paramètres géométriques correspondants, sur la base d'une analyse paramétrique initiale par MEF.
- Valider la précision de l'estimation par POD-RBF par une comparaison avec le calcul par MEF. L'erreur était de valeur acceptable où la différence dans l'estimation ne peut pas affecter l'opération d'optimisation par la suite, parce que l'interpolation a sauvegardé le même mode de comportement des fonctions objectives.
- Couplage entre POD-RBF et l'algorithme génétique AG pour minimiser les fonctions objectives, énergie de déformation et moment de flexion maximal. Les formes finales des dômes et voûtes sont le résultat de recherche des paramètres géométriques optimaux par l'algorithme génétique AG sur la base d'estimation par POD-RBF.
- Validation de notre approche POD-RBF-GA à travers des applications sur des structures en dômes et voûtes.

L'exécution commence par plusieurs simulations par MEF de la structure étudiée selon les conditions aux limites envisagées, dans notre cas un dôme ellipsoïdale et une voûte de forme

initiale cylindrique. Ensuite les résultats de ces fonctions objectives nommés points d'échantillonnage (snapshots) relatives aux changements de paramètres géométriques, sont collectés pour construire un modèle d'interpolation réduit basé sur la méthode POD-RBF.

Après comparaison avec les valeurs des fonctions objectives calculées par la méthode des éléments finis MEF, le modèle construit produit une approximation optimale avec l'avantage de rapidité de calcul. Par conséquent, cette procédure a été utilisée pour l'optimisation de forme des structures en coques, en utilisant un modèle paramétrique, l'estimation des fonctions objectives relatives aux paramètres géométriques générés par l'algorithme génétique a été calculée par POD-RBF en économisant l'effort et le temps de calcul par MEF.

Les principaux résultats obtenus en utilisant cette approche sont résumés dans ce qui suit :

- L'erreur entre calcul par MEF et approximation par POD-RBF est de valeur égale à **0.02%** dans le dôme ellipsoïdal optimal profond, l'erreur prend un saut considérable jusqu'à **2%** dans le cas du dôme ellipsoïdal peu profond. Cette augmentation significative est en fonction du taux de variation de la fonction objective moment de flexion maximale relatif au mode de comportement qui diffère entre les deux types de formes, cependant cette marge d'erreur n'a pas d'influence majeure dans l'opération d'optimisation.
- Dans les dômes ellipsoïdaux profonds un rapport optimal de **H/Ou** (hauteur sur ouverture) égale à **0.65** pour une conception vers l'objectif d'un moment de flexion minimale, cette valeur est proche de ce que D.I.P.C.J. Hoogenboom (2011) a trouvé deux solutions possibles comme rapport optimal égale à 0.8 et a 0.3 pour un dôme sphérique dans l'objectif d'un volume de matériau minimal.
- Pour les dômes ellipsoïdaux peu profonds, le rapport optimal de **H/Ou** a diminué pour une valeur qui est égale à **0.42** pour l'objectif d'un moment de flexion minimal, cette valeur est en concordance avec K. Riemens (2011) qu'a trouvé un rapport égale à 0.38 pour l'objectif d'un volume minimal de matériaux.

- Pour les formes situées dans la marge de transition entre forme profonde et peu profonde, une relation simple est extraite reliant les deux paramètres géométriques de la hauteur et d'ouverture de façon optimale $H = 0.03125 * (\text{Ouverture})^2$.
- Dans l'optimisation de forme des voûtes cylindriques, la forme hyperbolique à double courbure est la plus rigide, par rapport à la forme initiale de courbure de Gauss nulle. Ce résultat est en accord avec les travaux antérieurs de Ramm, E. et al. (1993), A. Tomás, P. Martí, (2010) et Liu, M. et al (2012) où la forme à courbure de Gauss négative était le résultat d'une optimisation de forme à énergie de déformation minimale.
- La décomposition orthogonale des valeurs propres POD est capable de réduire les dimensions des vecteurs de données et permet l'opération d'optimisation d'entreprendre un grand nombre de paramètres géométriques par la suite sans recours à la modélisation par MEF.
- L'approche proposée POD-RBF couplée avec le AG a une tendance d'attirer une plus large communauté d'ingénieurs car elle offre plus de liberté dans le choix de variables de conception, mais aussi pour sa simplicité d'implémentation et rapidité de calcul. Cela facilitera l'amélioration des conceptions des coques avec un meilleur choix de formes et des niveaux accrus d'économie et de performance.
- L'intégration d'un algorithme d'optimisation global d'ordre zéro comme le AG s'avère un choix idéal dans l'optimisation des coques basée sur des données de simulation discrètes à partir d'un modèle réduit construit par POD-RBF.
- Les résultats obtenus ne peuvent prétendre être définitifs que pour les conditions aux limites et l'espace de variables de conception des structures étudiées. D'autres investigations intensives seront nécessaires pour une meilleure compréhension du comportement des fonctions objectives par rapports aux paramètres de la géométrie.

Perspectives

Le mot optimale est synonyme à la perfection, de ce fait la discipline de conception optimale des structures en coque est un domaine qui reste toujours en évolution. En perspectives à notre travail nous préconisons des travaux ultérieurs intéressants pour consolider notre approche.

- Utiliser des fonctions objectives relatives au comportement dynamique comme la minimisation des fréquences naturelles des structures en coque par optimisation de forme.
- Optimisation de forme de coque dans l'objectif de maximisation de la charge critique de flambement pour assurer plus de stabilité dans la structure.
- Appliquer la méthode POD-RBF-GA dans l'optimisation des structures en coque à la base des mesures expérimentales des fonctions objectives.

Référence bibliographique

Adriaenssens, S., et al. (2014). Shell structures for architecture: form finding and optimization, Routledge.

Akl, W., et al. (2002). Optimal design of underwater stiffened shells." Structural and Multidisciplinary Optimization",**23**(4): 297-310.

Al-Dmour, A. and K. Mohammad (2002). "Active control of flexible structures using principal component analysis in the time domain." Journal of Sound and vibration. ", **253**(3): 545-569.

Allaire, G. (2012). Shape optimization by the homogenization method, Springer Science & Business Media.

Allery, C., et al. (2011). "A priori reduction method for solving the two-dimensional burgers' equations." Applied Mathematics and Computation ", **217**(15): 6671-6679.

Antoulas, A. C. (2005). Approximation of large-scale dynamical systems. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Aoki, S., et al. (1997). "Identification of Gurson's material constants by using Kalman filter." Computational Mechanics, **19**(6): 501-506.

Barnes, M. (1994). "Form and stress engineering of tension structures. Structural engineering review,**6**(3).

Beckers, M. (1999). "Topology optimization using a dual method with discrete variables." Structural optimization,**17**(1): 14-24.

Bendsoe, M. P. (1995). Optimization of structural topology, shape, and material, Springer.

Bendsøe, M. P., et al. (1993). Topology and generalized layout optimization of elastic structures. Topology design of structures, Springer: 159-205.

Bendsøe, M. P. and N. Kikuchi (1988). "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method." Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,**71**(2): 197-224.

Bennett, J. and M. Botkin (1985). "Structural shape optimization with geometric description and adaptive mesh refinement." AIAA journal ,**23**(3): 458-464.

Berke, L. and V. Venkayya (1974). Review of optimality criteria approaches to structural optimization. Structural Optimization Symposium, New York, N. Y.

Bhaviktti, S. and C. Ramakrishnan (1980). "Computational efficiency of improved move limit method of sequential linear programming for structural optimization." Computers & Structures, **11**(3): 191-196.

Billington, D. P. (1982). Thin shell concrete structures, McGraw-Hill College.

Bletzinger, K.-U. and E. Ramm (1993). "Form finding of shells by structural optimization." Engineering with computers, **9**(1): 27-35.

Bletzinger, K.-U., et al. (2005). "Computational methods for form finding and optimization of shells and membranes." Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **194**(30): 3438-3452.

Braibant, V., et al. (1985). Shape optimal design-An approach matching CAD and optimization concepts. Optimization in Computer Aided Design: proceedings of the IFIP WG 5.2 Working Conference on Optimization in Computer-Aided Design, Lyon, France, 24-26 October, 1983, Elsevier North Holland.

Bratus, A. (1983). "Design of circular cylindrical shells of minimum weight with fixed natural oscillation frequencies." Journal of Applied Mathematics and Mechanics, **47**: 650-657.

Budiansky, B. and J. Sanders (1963). "Progress in applied mechanics (W. Prager Anniv. Vol.)." NY: Macmillan Comp: 129-140.

Buhl, T. (2002). "Simultaneous topology optimization of structure and supports." Structural and Multidisciplinary Optimization, **23**(5): 336-346.

Buljak, V. (2011). Inverse analyses with model reduction: proper orthogonal decomposition in structural mechanics, Springer Science & Business Media.

Calladine, C. Theory of Shell Structures (1983), Cambridge University Press.

Chang, G. H. and F. Yong (1997). "Optimal 3D stiffener design with frequency considerations." Advances in Engineering Software, **28**(8): 525-531.

Chapelle, D. and K.-J. Bathe (1998). "Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures." Computers & Structures, **66**(1): 19-36.

Chapelle, D. and K.-J. Bathe (2010). The finite element analysis of shells-Fundamentals, Springer Science & Business Media.

Chatterjee, A. (2000). "An introduction to the proper orthogonal decomposition." *Current science*, **78**(7): 808-817.

Chebili, R. (1991). *The boundary support of shells* (Doctoral dissertation, University of Bath).

Christensen, P. W. and A. Klarbring (2008). *An introduction to structural optimization*, Springer Science & Business Media.

CLIII, B., et al. (1988). "Proteins: a theoretical perspective of dynamics, structure, and thermodynamics." *Advance in Chemical Physics LXXI* (Wiley, New York, 1988).

D.A. Coley, *An introduction to genetic algorithms for scientists and engineers*, World scientific, Place Published, 1999.

Dorff, M. and J. S. Rolf (2012). "Soap films, differential geometry, and minimal surfaces." *Explorations in Complex Analysis*: 85-159.

Farshad, M. (2013). *Design and analysis of shell structures*, Springer Science & Business Media.

Fic, A., et al. (2005). "Solving transient nonlinear heat conduction problems by proper orthogonal decomposition and the finite-element method." *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, **48**(2): 103-124.

Firl, M. (2010). *Optimal shape design of shell structures*, Universität München.

Green, A. and W. Zerna (1968). *Theoretical Elasticity*, At the Clarendon Press, Oxford.

Gutkowski, W. and J. Bauer (1997). *Discrete structural optimization*, Springer.

Haftka, R. T. and R. V. Grandhi (1986). "Structural shape optimization—a survey." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **57**(1): 91-106.

Han, S. and B. Feeny (2003). "Application of proper orthogonal decomposition to structural vibration analysis." *Mechanical systems and signal processing*, **17**(5): 989-1001.

Hamadi, D., Temami, O., Zatar, A., & Abderrahmani, S. *A Comparative Study between Displacement and Strain Based Formulated Finite Elements Applied to the Analysis of Thin Shell Structures*.

Hardy, R. L. (1990). "Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968–1988." *Computers & Mathematics with Applications*, **19**(8): 163-208.

Hartmann, D. and M. Neumann (1989). "Structural optimization of a box girder bridge by means of finite strip method." *Computer Aided Optimum Design*, CA Brebbia, ed1: 337-346.

Hernández, S. and A. Fontán (1999). "Shape and size optimization of three dimensional shells." *Shells and spatial structures: From recent past to the next millennium. Proc 40th cong IASS1*: A41-57.

Hinton, E., et al. (2012). *Analysis and Optimization of Prismatic and Axisymmetric Shell Structures: Theory, Practice and Software*, Springer Science & Business Media.

Hibbitt, Karlsson, and Sorensen, *ABAQUS/Standard user's manual*. Vol. 1. 2001: Hibbitt, Karlsson & Sorensen.

Hotelling, H. (1933). "Analysis of a complex of statistical variables into principal components." *Journal of educational psychology*, **24**(6): 417.

Holland, J. H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*. U Michigan Press.

Hughes, T. J., et al. (2005). "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**(39): 4135-4195.

HUTTON, David. *Fundamentals of finite element analysis*. McGraw-Hill, 2004.

Hyman, B. and J. LUCAS, AW (1971). "An optimum design for the instability of cylindrical shells under lateral pressure." *AIAA journal*, **9**(4): 738-740.

Isler, H. (1967). *Aplicaciones recientes de cascarones representativos*. Congreso Internacional sobre la Aplicación de Estructuras Laminares en Arquitectura, México.

Jolliffe, I. (2002). *Principal component analysis*, Wiley Online Library.

J.S. Arora, *Optimization of structural and mechanical systems*, World Scientific Publishing Company Incorporated, Place Published, 2007.

Kang, P. and S.-K. Youn (2015). "Isogeometric analysis of topologically complex shell structures." *Finite Elements in Analysis and Design*, **99**: 68-81.

Kansa, E. J. (1999). "Motivation for using radial basis functions to solve PDEs." *RN* **64**(1): 1.

Kappagantu, R. and B. Feeny (1999). "An" optimal" modal reduction of a system with frictional excitation." *Journal of Sound and vibration*, **224**(5): 863-877.

Karhunen, K. (1946). *Zur spektraltheorie stochastischer prozesse*, Suomalainen tiedeakatemia.

Kerschen, G., et al. (2005). "The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems: an overview." *Nonlinear dynamics*, **41**(1-3): 147-169.

Kimmich, S. and E. Ramm (1989). *Structural optimization and analysis with program system CARAT. Discretization Methods and Structural Optimization—Procedures and Applications*, Springer: 186-193.

Kirby, M. and L. Sirovich (1990). "Application of the Karhunen-Loeve procedure for the characterization of human faces." *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, **12**(1): 103-108.

Koiter, W. T. (1959). *A Consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells: Foundations and Linear Theory*, Laboratorium voor Toegepaste Mechanica der Technische Hogeschool.

Khakina, P. N., Ali, M. I., Zhu, E. N., Zhou, H. Z., & Moula, B. H. (2011). Effect of the rise/span ratio of a spherical cap shell on the buckling load. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, **80**, 446-452

[K. Riemens, *De Optimale Koepel*, Delft University of Technology, 2011, pp. 20] D.I.P.C.J. Hoogenboom, *Notes on Shell Structures*, in: D.U.o. Technology (Ed.), 2011, pp. 30-32.

Leissa, A. W. (1993). *Vibration of shells*, Acoustical Society of America New York.

Liang, Q. Q. (2007). "Performance-based optimization: a review." *Advances in Structural Engineering*, **10**(6): 739-753.

Lindby, T. and J. Santos (1999). "Shape optimization of three-dimensional shell structures with the shape parametrization of a CAD system." *Structural optimization*, **18**(2-3): 126-133.

Loève, M. (2012). *Probability theory I*, Springer Science & Business Media.

Lorenz, E. N. (1956). "Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction."

Love, A. (1944). "A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover Publications." New York1.

Luo, J. and H. Gea (1998). "A systematic topology optimization approach for optimal stiffener design." *Structural optimization*, **16**(4): 280-288.

L.J. Li, Z.H. Xie, Y.C. Guo, F. Liu, Structural optimization and dynamic analysis for double layer spherical reticulated shell structures, *Journal of Constructional Steel Research*, 62 (2006) 943- 949.

Ma, X., et al. (2001). "Karhunen-Loeve modes of a truss: transient response reconstruction and experimental verification." *AIAA Journal*, **39**(4): 687-696.

Mallika, A. and R. N. Rao (2010). "Thickness optimization of vibrating shells for minimum volume." *International Journal of Civil and Structural Engineering*, **1**(2): 211.

Multiphysics, C. (2012). "Comsol multiphysics user guide (version 4.3 a)." COMSOL, AB: 39-40.

Naghdi, P. M. (1973). *The theory of shells and plates. Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity*, Springer: 425-640.

Narayan, K. B., et al. (2012). "Shape optimization and assessment of wind induced stresses in domes." *Journal of Civil Engineering and Architecture*, **6**(7): 925.

Nouy, A. (2008). "Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations: invariant subspace problem and dedicated algorithms." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **197**(51): 4718-4736.

Ohmori, H., & Yamamoto, K. (1998). Shape optimization of shell and spatial structure for specified stress distribution. *MEMOIRS-SCHOOL OF ENGINEERING NAGOYA UNIVERSITY*, 50, 1-32.

Oja, E. and J. Karhunen (1985). "On stochastic approximation of the eigenvectors and eigenvalues of the expectation of a random matrix." *Journal of mathematical analysis and applications*, **106**(1): 69-84.

Olhoff, N. (1980). "Optimal design with respect to structural eigenvalues." *Theoretical and applied mechanics*: 133-149.

Ostrowski, Z., et al. (2005). *Advances in application of proper orthogonal decomposition in inverse problems. Proceedings of the 5th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice*, Cambridge, UK.

Ostrowski, Z., et al. (2008). "Solving inverse heat conduction problems using trained POD-RBF network inverse method." *Inverse Problems in Science and Engineering*, **16**(1): 39-54.

Otto, F., et al. (1973). *Tensile structures; design, structure, and calculation of buildings of cables, nets, and membranes*, The MIT Press.

Pearson, K. (1901). "LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space." *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **2**(11): 559-572.

Pedersen, N. L. (2000). "Maximization of eigenvalues using topology optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **20**(1): 2-11.

Peerdeman, B., et al. (2008). "Analysis of thin concrete shells revisited: Opportunities due to innovations in materials and analysis methods." *Master's thesis, Delf University of Technology, the Netherlands*: 30-50.

Pugnale, A. and M. Sassone (2007). "Morphogenesis and structural optimization of shell structures with the aid of a genetic algorithm." *JOURNAL-INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR SHELL AND SPATIAL STRUCTURES*, **155**: 161.

P.-S. Lee, K.-J. Bathe, Development of MITC isotropic triangular shell finite elements, *Computers & Structures*, 82 (2004) 945-962

Qatu, M. S. (2002). "Recent research advances in the dynamic behavior of shells: 1989-2000, Part 1: Laminated composite shells." *Applied Mechanics Reviews*, **55**(4): 325-350.

Qatu, M. S. (2002). "Recent research advances in the dynamic behavior of shells: 1989-2000, Part 2: Homogeneous shells." *Applied Mechanics Reviews*, **55**(5): 415-434.

Ramm, E., et al. (1991). "Strategies in shape optimization of free form shells." *Festschrift Erwin Stein: nonlinear computational mechanics—a state of the art*. Springer, Berlin Heidelberg New York.

Rao, S. S. and S. Rao (2009). Engineering optimization: theory and practice, John Wiley & Sons.

Rogers, C. A., et al. (2012). "An inverse POD-RBF network approach to parameter estimation in mechanics." *Inverse Problems in Science and Engineering*, **20**(5): 749-767.

Rotter, J. M. (1998). "Shell structures: the new European standard and current research needs." *Thin-walled structures*, **31**(1): 3-23.

Rozvany, G. (2001). "Stress ratio and compliance based methods in topology optimization—a critical review." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **21**(2): 109-119.

Rozvany, G. I. (2009). "A critical review of established methods of structural topology optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **37**(3): 217-237.

Rozvany, G. I. (2014). *Topology optimization in structural mechanics*, Springer.

Ryckelynck, D. (2002). "Réduction a priori de modèles thermomécaniques." *Comptes Rendus Mécanique*, **330**(7): 499-505.

Ryckelynck, D. (2005). "A priori hyperreduction method: an adaptive approach." *Journal of computational physics*, **202**(1): 346-366.

Sakamoto, H., et al. (2001). "Investigation of a practical method of structural optimization by genetic algorithms." *JSME International Journal Series A*, **44**(3): 330-337.

Sanders Jr, J. L. (1959). An improved first-approximation theory for thin shells.

Schmit, L. A. (1960). *Structural design by systematic synthesis*. Proceedings of the 2nd conference on electronic computation, ASCE, New York.

Shlens, J. (2014). "A tutorial on principal component analysis." arXiv preprint arXiv:1404.1100.

Sigmund, O. and J. Petersson (1998). "Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima." *Structural optimization*, **16**(1): 68-75.

Sirovich, L. (1987). "Turbulence and the dynamics of coherent structures. Part I: Coherent structures." *Quarterly of applied mathematics*, **45**(3): 561-571.

Soares, C. M., et al. (1989). Optimal design of axisymmetric shell structures with static and dynamic constraints. *Discretization Methods and Structural Optimization—Procedures and Applications*, Springer: 239-246.

Sornborger, A., et al. (2003). "Spatiotemporal analysis of optical imaging data." *Neuroimage*, **18**(3): 610-621.

Steindl, A. and H. Troger (2001). "Methods for dimension reduction and their application in nonlinear dynamics." *International Journal of Solids and Structures*, **38**(10): 2131-2147.

S.H.a.M.H. M. Hosseini, A Comparative Study on the Seismic Behavior of Ribbed, Schwedler, and Diamatic Space Domes by Using Dynamic Analyses, 15th World Conference on Earthquake Engineering Lisbon Portugal, 2012

Scordelis, A. (1981). Stability of Reinforced Concrete Domes and Hyperbolic Paraboloid Shells. In: Popov, E.P. and Medwadowski, S.J. (Eds). *Concrete Shell Buckling* (pp. 63-110). Detroit: Publication American Concrete Institute.

Tai, K. and S. Akhtar (2005). "Structural topology optimization using a genetic algorithm with a morphological geometric representation scheme." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **30**(2): 113-127.

Temami, O., Hamadi, D., Zatar, A., & Ayoub, A. (2016). Experimental and numerical analyses of a thin cylindrical shell model. *Journal of Applied Engineering Science & Technology*, **2**(2), 99-103.

THAMBIRATNAM, D. P., et al. (1988). "Maximization of natural frequencies of cylindrical shells." *Engineering optimization*, **13**(2): 85-97.

Tomás, A. and P. Martí (2010). "Shape and size optimisation of concrete shells." *Engineering Structures*, **32**(6): 1650-1658.

Touzout, M. A., & Chebili, R. (2016). Shape optimization of elliptical and vaulted reinforced concrete domes. In *International Journal of Engineering Research in Africa* (Vol. 24, pp. 35-43). Trans Tech Publications.

VERSION, Altair OptiStruct. 10.0, Users manual. Altair Engineering. Inc., Troy, MI, 2009.

Vizotto, I. (2010). "Computational generation of free-form shells in architectural design and civil engineering." *Automation in Construction*, **19**(8): 1087-1105.

Wendland, D. (2000). "Model-based formfinding processes: free forms in structural and architectural design."

Williams, K. and M. J. Ostwald (2015). Architecture and Mathematics from Antiquity to the Future: Volume II: The 1500s to the Future, Birkhäuser.

Xie, Y. M. and G. P. Steven (1993). "A simple evolutionary procedure for structural optimization." Computers & Structures, **49**(5): 885-896.

Zerna, W. (1962). Exact Theory of Elastic Shells. Proceedings of the World Conference on Shell Structures, San Francisco, USA.

Zienkiewicz, O. and J. Campbell (1973). "Shape optimization and sequential linear programming." Optimum structural design: 109-126.