

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA



جامعة محمد خيضر بسكرة

FACULTE DES SCIENCES ET DE LA THECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE
FILIERE ELECTROTECHNIQUE



جامعة محمد خيضر بسكرة

Thèse de DOCTORAT en Sciences
Spécialité : Electrotechnique

Présentée par
Habiba BECHA

**APPLICATION DE LA METHODE DES VOLUMES FINIS POUR
LA MODELISATION DE CONFIGURATIONS DE CONTROLE
NON DESTRUCTIF PAR COURANTS DE FOUCAULT**

Soutenue publiquement le 28/06/2018 devant le jury :

Président	Kamel SRAIRI	Professeur, Université de Biskra
Rapporteur	Lotfi ALLOUI	Professeur, Université de Biskra
Examineurs	Mohamed Rachid MIKIDECHE	Professeur, Université de Jijel
	Tarik HACIB	Professeur, Université de Jijel
	Nabil IKHLEF	Professeur, Université de Jijel
	Rabhi BOUALAGA	MCA, Université de Biskra

Année Universitaire : 2017/2018

Remerciements

Les travaux présentés dans cette thèse ont été effectués au sein des laboratoires de Modélisation des Systèmes Energétiques (LMSE) et de Génie Electrique (LGEB), de l'université de Biskra.



Tout d'abord je tiens à remercier Monsieur **Mebarek BAHRI**, directeur du laboratoire de modélisation des systèmes énergétiques (LMSE) de l'université de Biskra de m'avoir accueillie au sein du laboratoire et en me permettant en outre, de finalisé ce travail dans des bonnes conditions.

Je tiens aussi à remercier Monsieur **Salah Eddine ZOUZOU**, Professeur à l'université de Biskra, et directeur du laboratoire de Génie Electrique (LGEB), pour la confiance qu'il m'a accordée en m'intégrant au sein du laboratoire ainsi ses aides ci précieuses.

Je remercie chaleureusement Monsieur **Lotfi ALLOUI**, Professeur à l'université de Biskra d'avoir dirigé ma thèse de doctorat et de m'avoir guidée tout au long de mes recherches. À qui je dois témoigner ma reconnaissance pour leurs précieux conseils, leurs encouragements ainsi que son soutien moral tout au long de mes recherches dans ma thèse. Je le remercie plus particulièrement car il ma donné le goût de la recherche que dieu le protège.

Je tiens à remercier Monsieur **Kamel SRAIRI**, Professeur à l'université de Biskra, pour ses précieux conseils, ses encouragements, ses aides ci précieuses ainsi que son soutien moral. Aussi, je tiens à le remerciez pour m'a fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

J'exprime ma plus sincère reconnaissance, à Monsieur **Tarik HACIB**, Professeur à l'université de Jijel, à monsieur **Nabil IKHLEF** Professeur à l'université de Jijel, à Monsieur **Mohamed MIKIDECHE**, Professeur à l'université de Jijel et à Monsieur **Rabhi BOUALAGA**, Maître de conférences classe A à l'université de Biskra qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'examiner et d'évaluer mon travail.

Je remercie chaleureusement Monsieur **Souri Mohamed MIMOUNE**, Professeur à l'université de Biskra, pour ces discussions enrichissantes.

Mes remerciements vont aussi à tous les membres des laboratoires LGEB et LMSE. Egaleme nt à l'ensemble du personnel du département de génie électrique de l'université de Biskra. Enfin, je tiens également à remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

*A mes chers parents **Fouzia, Slimane**
A mon mari **Salim**, mes sœurs et mes frères
A mes petites belles filles **Soundous, Istabrak Fatima**
A mon fils **Mouhamed Hocine Abd Elaziz***

Table des matières

Listes des figures et tableaux	1
Introduction générale	5
Chapitre I. Le contrôle non destructif et les capteurs inductifs	
I.1. Introduction	8
I.2. Les techniques de contrôle non destructif	8
I.2.1. Examen visuel	8
I.2.2. Ressuage	9
I.2.3. Ultrasons	10
I.2.4. Magnétoscopie	11
I.2.5. Radiographie	14
I.2.6. Thermographie	15
I.3. CND par Courants de Foucault	15
I.3.1. Densité du courant	19
I.4. Les capteurs inductifs	20
I.4.1. Les formes d'enroulements des capteurs inductifs	21
I.4.2. Différents types des capteurs inductifs	21
I.4.2.1 Capteur absolu	21
I.4.2.2. Capteur double	22
I.4.2.3. Capteur différentiel	22
I.4.2.4. Capteur multiple	23
I.4.3. Différentes formes géométriques du circuit magnétique	24
I.4.4. Dispositions des capteurs	25
I.5. Paramètres influant le contrôle CND	26
I.6. Réponse de la sonde	27
I.6.1. Réponse de la sonde à double fonctions	27
I.6.2. Réponse de la sonde à fonctions séparées	28
I.7. Impédance du capteur	29
I.7.1. Impédance normalisée	29
I.7.2. Impédance généralisée	31
Chapitre II. Modélisation du problème électromagnétique	
II.1. Equations de maxwell et lois de comportement	32
II.2. Conditions de transmission et conditions aux limites	35

II.2.1. Conditions de transmission	35
II.2.2. Conditions aux limites	36
II.3. Formulations de la magnétodynamique	36
II.3.1. Formulation en potentiel A - V	38
II.4. Méthodes numériques de discrétisation	41
II.4.1. Principales méthodes existantes	41
II.4.2. La méthode des volumes finis	42
Chapitre III. Mise en œuvre de la méthode des volumes finis	
III.1. Introduction	45
III.2. Méthode des volumes finis tridimensionnels avec un maillage cartésien (MVFC)	46
III.2.1. Discrétisation des équations électromagnétiques par la MVFC	47
III.2.1.1. Intégration de $\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A})$	48
III.2.1.2. Intégration de $\nabla(\nu \nabla \cdot \mathbf{A})$	52
III.2.1.3. Intégration du terme source	53
III.2.1.4. Intégration du terme $\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right)$	53
III.2.1.5. Intégration de l'équation en divergence	54
III.3. Méthodes numériques de résolution	56
III.3.1. Méthodes directes	56
III.3.2. Méthodes itératives	57
III.4. Méthode des volumes finis tridimensionnelle avec un maillage non-structuré (MVFM)	58
III.4.1. Définition du maillage	61
III.4.2. Discrétisation des équations électromagnétiques par la MVFM	63
III.4.2.1. Intégration de $\nu \Delta \mathbf{A}$	65
III.4.2.2. Intégration de $\nabla(\nu) \times \nabla \times \mathbf{A}$	70
III.4.2.3. Intégration de $\left\langle \left[\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right]_x \right\rangle$	74
III.4.2.4. Intégration du terme source	75
III.4.2.5. Intégration de l'équation en divergence	77
III.5. Algorithmes de résolution des problèmes électromagnétiques	79

Chapitre IV. Applications et validations

IV.1. Validation de la MVFC par comparaison avec la MVFM	81
IV.1.1. Benchmark Team Workshop n°15-1	81
IV.1.1.1. introduction	81
IV.1.1.2. Etude de la réponse de la sonde à double fonctions	82
IV.1.1.3. Description du problème du Benchmark Team Workshop n°15-1 à modélisé	83
IV.1.1.4. Résultats du problème du Benchmark Team Workshop n°15-1 à modélisé	85
V.1.2. problème type proposé par IEEJ	87
IV.1.2.1. Description du problème type proposé par IEEJ à modélisé	87
IV.1.2.2. Le meilleur volume finis 3D développé	89
IV.1.2.3. Résultats du problème type proposé par IEEJ à modélisé	92
Conclusion Générale	107
Bibliographie	110

Listes des figures

Fig.I.1. Principe du ressuage.	10
Fig.I.2. Principe des ultrasons.	11
Fig.I.3. Principe de la magnétoscopie.	13
Fig.I.4. Principe de la radiographie.	14
Fig.I.5. Jean Bernard Léon Foucault.	16
Fig.I.6. Principe du CND par courants de Foucault.	18
Fig.1.7. Répartition des courants de Foucault pour une pièce.	20
Fig.I.8. Bobine cylindrique.	21
Fig.I.9. Bobine plate.	21
Fig.I.10. Le capteur absolu.	22
Fig.I.11. Le capteur double.	22
Fig.I.12. Le capteur différentiel.	23
Fig.I.13. Le capteur matriciel.	23
Fig.I.14. Les différentes structures du circuit magnétique.	24
Fig.I.15. Capteur encerclant.	25
Fig.I.16. Capteur interne.	25
Fig.I.17. Capteur ponctuel.	26
Fig .I.18. Sonde à double fonction.	27
Fig.I.19. Sonde à fonctions séparées.	28
Fig. I.20. Influence de la conductivité et du lift-off sur le diagramme d'impédances normalisée, (cas d'une pièce amagnétique).	30
Fig.II.1. Problème type a modélisé.	32
Fig.II.2. Interface entre deux milieux.	35
Fig.II.3. Schématisation d'un plan de symétrie.	40
Fig.II.4. Maillage du domaine d'étude.	43
Fig.II.5. Maillage structuré, vue 2D.	44
Fig.II.6. Maillage non structuré, vue 2D.	44
Fig.III.1. Volume fini élémentaire D_p .	47
Fig.III.2. Approximation linéaire du potentiel à travers la facette t .	49
Fig.III.3. Illustration des nœuds supplémentaires, en haut de la figure, la structure du volume élémentaire modifié en 3D, en bas de la figure, la projection d'un	51

volume élémentaire suivant le plan XY.	
Fig.III.4. Sous domaine d'intégration : méthodes 'nœuds centrés'.	59
Fig.III.5. Sous domaine d'intégration : méthodes 'éléments centrés'.	60
Fig.III.6. Schéma général du principe d'un code MVF pour un maillage non-structuré.	61
Fig.III.7. Exemple de construction d'un maillage dual de type barycentrique.	61
Fig.III.8. Exemple de construction d'un maillage dual de type Delauney-Voronoi.	62
Fig.III.9. maillage dual de type Delauney-Voronoi en 3D.	63
Fig.III.10. Volume fini élémentaire D_p .	66
Fig.III.11. Projection d'un volume élémentaire suivant le plan XY.	66
Fig.III.12. Calcul des surfaces ds_{laxi} et ds_{layi} .	69
Fig.III.13. Approximation linéaire du réductivité magnétique à travers les facettes e et w .	70
Fig.III.14. Organigramme de l'algorithme du code de calcul du problème électromagnétique.	80
Fig.IV.1. sonde à double fonctions.	82
Fig.IV.2. Configuration du problème TEAM Workshop n°15-1.	84
Fig.IV.3. (a) Variation de l'inductance due au défaut (mH), (b) Variation de résistance due au défaut (Ω).	86
Fig.IV.4. problème type proposé par IEEEJ à modélisé.	87
Fig.IV.5. Données géométriques du problème type proposé par IEEEJ à modélisé.	88
Fig.IV.6. Conditions aux limites adoptées à la résolution du problème proposé.	88
Fig.IV.7. Maillage 2D du problème à traiter.	89
Fig.IV.8. Centres de gravité du maillage primal.	90
Fig.IV.9. Maillage 2D en volumes finis.	90
Fig.IV.10. Maillage 2D en volumes finis.	91
Fig.IV.11. Maillage du dispositif en 2D combiné.	91
Fig.IV.12. Maillage 3D en volumes finis.	92
Fig.IV.13. Répartition spatiale de la densité du courant source \mathbf{J} .	93
Fig.IV.14. Répartition spatiale du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} .	94
Fig.IV.15.a. Potentiel vecteur magnétique A_x sur les surfaces latérales du noyau magnétiques.	95
Fig.IV.15.b. Potentiel vecteur magnétique A_y sur les surfaces latérales du noyau Magnétiques.	95
Fig.IV.16. Répartition spatiale du champ d'induction magnétique \mathbf{B} .	96

Fig.IV.17. Répartition spatiale du champ d'induction magnétique \mathbf{B} aux interfaces du noyau magnétique.	97
Fig.IV.18. Répartition de la densité du courant source \mathbf{J} en 3D. avec dégradés de B_z sur les trois faces magnétiques (deux latérales et un bas).	96
Fig.IV.19.a. Dégradés de B_z sur les trois faces magnétiques (deux latérales et une basse). (Maillage éléments finis).	99
Fig.IV.19.b. Dégradés de B_z sur les trois faces magnétiques (deux latérales et une basse). (Maillage volumes finis modifiés).	99
Fig.IV.20.a. Distribution du champ du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} en 2D dans le plan $x-z$ pour y : centre du noyau.	100
Fig.IV.20.b. Lignes équipotentiels de la composante A_x du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} au milieu du noyau.	101
Fig.IV.20.c. Lignes équipotentiels de la composante A_x du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} au milieu du noyau (avec représentation du maillage volumes finis modifiés).	101
Fig.IV.21.a. Lignes équipotentiels de la composante A_y du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} au milieu du noyau.	102
Fig.IV.21.b. Lignes équipotentiels de la composante A_y du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} au milieu du noyau (avec représentation du maillage volumes finis modifiés).	102
Fig.IV.22.a. Dégradés 2D de la composante A_x du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (au milieu du noyau).	103
Fig.IV.22.b. Dégradés 2D de la composante A_y du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (au milieu du noyau).	103
Fig.IV.22.c. Dégradés 3D de la composante A_x du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (au milieu du noyau).	104
Fig.IV.22.d. Dégradés 3D de la composante A_y du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (au milieu du noyau).	104
Fig.IV.23. Comparaison entre les résultats de la méthode des volumes finis modifiés MVFM 3D et expérimentaux.	105
Fig.IV.24. Comparaison entre les résultats améliorés de la méthode des volumes finis modifiés MVFM 3D et expérimentaux.	106

Liste des tableaux

Tableau IV.1. Paramètres du problème benchmark Team Workshop n°15-1.

85

INTRODUCTION GENERALE

Introduction générale

Le contrôle non destructif (CND) est un ensemble de méthodes qui permettent de caractériser l'état d'intégrité de structures ou de matériaux, sans les dégrader, soit au cours de la production, soit en cours d'utilisation, soit dans la phase de maintenance [Techno-Science]. Les méthodes de CND sont utilisées soit pour évaluer des grandeurs caractéristiques du produit (épaisseur, conductivité, ...etc.), soit pour déceler la présence de défauts et les caractériser [Techno-Science]. Parmi les méthodes les plus utilisées, on peut citer les ultrasons, les méthodes utilisant des rayonnements ionisants (radioscopie) et les méthodes électromagnétiques (magnétoscopie, courants de Foucault). Le choix d'une méthode dépend d'un grand nombre de facteurs tels que la nature des matériaux constituant les pièces à contrôler, la nature de l'information recherchée (défaut débouchant ou enfoui), les conditions de mise en œuvre,etc.

Les méthodes électromagnétiques sont fréquemment utilisées pour le contrôle des pièces électriquement conductrices et/ou magnétiques.

Le contrôle non destructif par courants de Foucault (CND-CF) est une méthode à la fois simple à mettre en œuvre, il est facile de créer des courants de Foucault dans un milieu conducteur à l'aide d'une sonde, et complexe. En effet, pour un contrôle donné, comment peut-on créer une bonne répartition des courants de Foucault permettant d'avoir un 'signal de défaut' aussi important que possible? Il est nécessaire avant toute chose d'avoir une connaissance suffisamment complète du phénomène physique. Les courants de Foucault n'étant pas directement accessibles par la mesure, ils ne peuvent être observés que par l'intermédiaire de mesures sur d'autres grandeurs sur lesquelles ils agissent [Choua 09]. La modélisation d'une configuration réelle de CND-CF ne peut généralement pas être obtenue analytiquement et elle fait appel à des méthodes numériques à savoir la méthode des volumes finis (MVF). Cette méthode s'est imposée ces dernières années, comme un outil numérique efficace pour le traitement des problèmes électrotechniques.

La simulation numérique par les volumes finis d'un problème de CND-CF nécessite souvent un maillage adéquat. Un tel maillage doit d'une part bien décrire la géométrie du domaine d'étude et d'autre part être bien adapté aux phénomènes physiques qu'il doit décrire (variation du champ au voisinage du défaut, épaisseur de peau, ...etc.). L'étude de ces différentes applications indique qu'il est important de déterminer avec une bonne précision les grandeurs électromagnétiques liées aux matériaux constituant les pièces à contrôler. Pour cela,

il est donc impératif de développer des outils de calcul numérique permettant un apport important dans la conception et l'optimisation des dispositifs à base de matériaux constituant les pièces à contrôler. Pour cela, on s'intéresse à développer des outils de calcul capables de modéliser des dispositifs électromagnétiques avec des géométries bidimensionnelles et dans le cas le plus général avec des géométries tridimensionnelles permettant d'accéder aux différentes grandeurs électromagnétiques. Pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles caractéristiques des phénomènes physiques à traiter, nous avons choisi une approche numérique, il s'agit d'appliquer la méthode des volumes finis (MVF).

Dans ce travail de thèse, nous proposons deux approches différentes de la MVF, la première basée sur un maillage structuré. Elle consiste à subdiviser le domaine de calcul en cellules élémentaires de forme quadrilatère pour les applications en deux dimensions et de forme hexaédrique pour les applications en trois dimensions. C'est une discrétisation de type Différences Finies ("marches d'escaliers") qui facilite la construction du maillage. On va appeler cette première méthode, la méthode des volumes finis classique est notée 'MVFC'. La deuxième approche, basée sur un maillage non-structuré qui requiert un mailleur indépendant, spécifique, parfaitement adapté à l'algorithme numérique. Son rôle est de partitionner l'application étudiée en cellules élémentaires de forme aussi variée que des triangles (deux dimensions), tétraèdres ou prismes (trois dimensions). Le choix entre ces deux méthodes est basé essentiellement sur la géométrie du dispositif à modéliser. Si la géométrie possède une structure hexaédrique, l'application de la première approche est avantageuse en termes de temps de calcul et de simplicité. Par contre, cette première approche présente l'inconvénient de ne pas pouvoir modéliser des dispositifs ayant des géométries complexe. C'est véritablement tout l'intérêt de la deuxième approche de la MVF, le maillage va suivre naturellement la forme de la structure, les géométries complexes seront modélisées de façon plus rigoureuse et plus conforme sans que cela ne génère un nombre de mailles trop important. On va appeler cette deuxième méthode, la méthode des volumes finis modifiée. Elle sera notée 'MVFM'.

Cette thèse est structurée en quatre chapitres :

Le premier chapitre présente la définition, le but du contrôle non destructif (CND). Egalement, sont exposées les différentes techniques de contrôle non destructif les plus en plus utilisées dans le secteur industriel. Nous présentons quelques notions sur les courants de Foucault et le

principe du capteur inductif. Ensuite on passera en revue les différents types de capteurs à courants de Foucault, différentes formes géométriques des circuits magnétiques.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation des phénomènes électromagnétiques des matériaux constituant les pièces à contrôler, afin de le retranscrire dans un langage mathématique point de départ de la modélisation. A la fin de ce chapitre, les diverses méthodes numériques utilisées pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles, caractéristiques des phénomènes physiques à traiter sont présentées. En particulier, la méthode des volumes finis adoptée comme méthode de résolution dans le cadre de travail de cette thèse.

Dans le troisième chapitre, nous passerons à la mise en œuvre de la MVF, les deux approches de cette méthode seront présentées. La première basée sur un maillage structuré, la deuxième basée sur un maillage non structuré. Les formes discrétisées correspondantes sont implémentées dans un algorithme selon les deux types de maillage. Nous présentons aussi les méthodes de résolutions des systèmes d'équations algébriques obtenus après avoir appliqué la MVF. Nous exposerons à la fin de ce chapitre, le code de calcul développé et implémenté sous l'environnement Matlab en décrivant ses fonctions pour des problèmes, électromagnétique.

Dans le but de tester et valider les codes de calcul développés sous Matlab, le quatrième et dernier chapitre est consacré à la modélisation d'un certain nombre de problèmes, dans ce chapitre, nous présentons les résultats de simulation obtenus à partir du code numérique développé. Dans un premier temps nous nous intéressons à modéliser un problème type proposé par benchmarks académiques, dans cette section, le benchmark utilisé est le TEAM Workshop n°15-1, où nous abordons de manière détaillée, la réponse et la détermination de l'impédance Z de la sonde à double fonctions. On s'intéresse dans cette première application à la prise en compte de défauts dont une des dimensions est très petite ce sont les défauts de type fissure. Dans un second temps nous nous sommes intéressés en particulier à modéliser un problème type proposé par IEEJ où la confrontation avec les résultats expérimentaux valide la justesse des modèles développés. Ensuite nous comparons les résultats obtenus avec les mesures expérimentales données. On terminera par donner des conclusions et des perspectives.

Chapitre I

Contrôle non destructif et les capteurs inductifs

I.1. Introduction

I.2. Les techniques de contrôle non destructif

I.2.1. Examen visuel

I.2.2. Ressuage

I.2.3. Ultrasons

I.2.4. Magnétoscopie

I.2.5. Radiographie

I.2.6. Thermographie

I.3. CND par Courants de Foucault

I.3.1. Densité du courant

I.4. Les capteurs inductifs

I.4.1. Les formes d'enroulements des capteurs inductifs

I.4.2. Différents types des capteurs inductifs

I.4.2.1 Capteur absolu

I.4.2.2. Capteur double

I.4.2.3. Capteur différentiel

I.4.2.4. Capteur multiple

I.4.3. Différentes formes géométriques du circuit magnétique

I.4.4. Dispositions des capteurs

I.5. Paramètres influant le contrôle CND

I.6. Réponse de la sonde

I.6.1. Réponse de la sonde à double fonctions

I.6.2. Réponse de la sonde à fonctions séparées

I.7. Impédance du capteur

I.7.1. Impédance normalisée

I.7.2. Impédance généralisée

I.1. Introduction

Le contrôle non destructif (CND) consiste en la mise en œuvre de techniques pour la caractérisation de paramètres physiques ou géométriques ou la détection des défauts apparaissant dans des structures industrielles diverses, ce qui est un enjeu dont dépend notamment la sécurité. Parmi les différentes méthodes de CND, celle des courants de Foucault est très employée pour le contrôle de milieux conducteurs. Ce premier chapitre est consacré à la présentation des principales méthodes de CND et plus particulièrement celle basée sur les courants de Foucault. Le contrôle non destructif par courants de Foucault (CND-CF) est une méthode à la fois simple à mettre en œuvre, il est facile de créer des courants de Foucault dans un milieu conducteur à l'aide d'une sonde.

Dans le domaine du CND-CF, la modélisation est ainsi devenue, grâce aux performances du matériel informatique, une actrice importante dans la conception de sondes. Cette modélisation ne peut généralement pas être obtenue analytiquement et elle fait appel à des méthodes numériques à savoir la méthode des volumes finis (MVF). Cette méthode s'est imposée ces dernières années, comme un outil numérique efficace pour le traitement des problèmes électrotechniques qui sera l'objet d'étude de ce manuscrit.

I.2. Les techniques de contrôle non destructif

Les techniques de contrôle non destructif CND exploitent des phénomènes différents et sont le plus souvent complémentaires. Le choix d'une méthode dépend de la pièce à contrôler (nature du matériau, forme,...), du type de contrôle à effectuer (détection de défauts, mesure d'épaisseur,...) et des conditions dans lesquelles le contrôle doit être effectué. Un certain nombre de techniques existe et chacune présente certains avantages et inconvénients. Il n'est pas question ici d'établir une liste exhaustive des techniques utilisées dans le domaine du CND, mais de donner un aperçu global des techniques les plus répandues industriellement.

I.2.1. Examen visuel

Le contrôle visuel est le plus ancien des contrôles non destructifs. C'est la méthode la plus utilisée, car la plus économique à mettre en œuvre. Elle nécessite les "bons yeux" d'un opérateur. Cette inspection visuelle est la plus ancienne procédure de contrôle, continu à développer dans une société américaine d'évaluation des méthodes de contrôle non destructif (ASNT). Cette procédure d'évaluation est la plus simple et générale. L'examen visuel nécessite un bon éclairage localisé sur les régions suspectes. Les résultats prospères ont dépendu de la compétence de l'opérateur, le bon nettoyage, illumination adéquate de la zone

inspecté et la qualité de l'instrument optique. Ces facteurs sont encore importants aujourd'hui, mais le matériel est devenu beaucoup plus sophistiqué. Habituellement, l'inspection visuelle ne peut pas être utilisée pour vérifier des résultats de test, ni ce peut être utilisé pour remplacer d'autres méthodes de CND. Cependant, quand l'examen visuel direct ne peut pas être fait, les instruments optiques sophistiqués peuvent être utilisés pour fournir une inspection éloignée de régions critiques [Fillon 96], [Mix 05], [Choua 09].

Avantages [Benramdan 09], [Choua 09], [Dumont-Fillon 96], [Mix 05].

- Examen simple, rapide et pas coûteux.
- Souplesse d'inspection.

Inconvénients [Benramdan 09], [Choua 09], [Dumont-Fillon 96], [Mix 05].

- Détection limitée aux défauts superficiels.
- La surface doit être propre.
- Pas d'interruption des parcours optiques entre l'œil et la pièce examinée.

I.2.2. Ressuage

Le ressuage est un moyen de recherche des défauts superficiels qui consiste l'amélioration de l'inspection visuelle de défauts en faisant apparaître des défauts de surface dans un contraste coloré ou fluorescent. Son principe est relativement simple, il consiste à appliquer sur la surface de la pièce à contrôler, préalablement nettoyée et séchée, un liquide d'imprégnation coloré ou fluorescent, dit "pénétrant" [Berg 06]. Ce liquide pénètre, par capillarité dans les ouvertures des défauts. Après un certain temps correspondant à la pénétration du liquide d'imprégnation dans les défauts, (fissures, porosités...), l'excès de liquide présent à la surface de la pièce est éliminé par lavage. La surface est ensuite recouverte d'un révélateur qui attire le liquide d'imprégnation retenu dans les défauts, ce que désigne le terme « ressuage ». Il donne ainsi une indication renforcée de ceux-ci, dont l'observation est alors généralement réalisée visuellement. Dans certaines industries, on utilise un pénétrant fluorescent qui est révélé par un éclairage sous UV. Le ressuage est une technique rapide et peu coûteuse, elle est appliquée sur les matériaux diélectriques et non ferromagnétiques, mais qui connaît les mêmes inconvénients que les procédés optiques, à cause de la nature visuelle de l'information utile. De plus, le liquide utilisé est souvent un liquide toxique ou polluant [Kringe 06], d'autant plus dangereux s'il s'agit du contrôle de pièces de l'industrie nucléaire. Les normes environnementales de plus en

plus contraignantes tendent à décourager l'emploi de cette technique, au profit des autres techniques existantes.

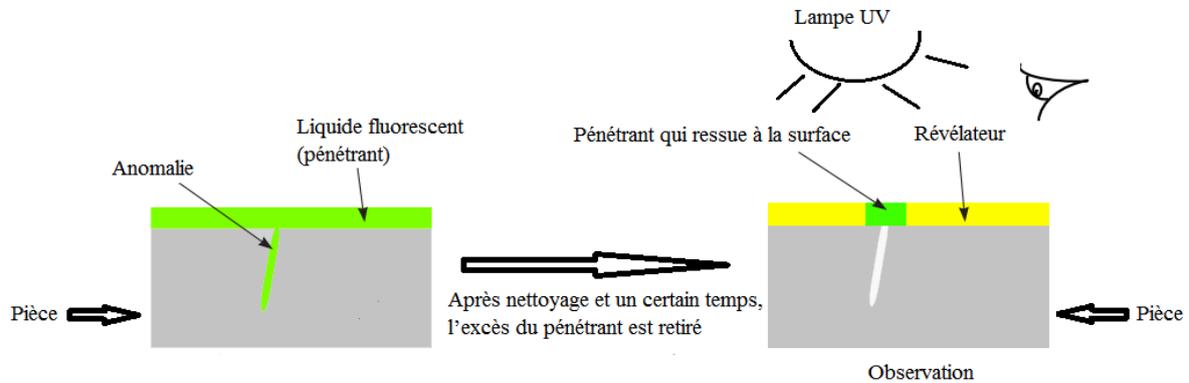


Fig.I.1. Principe du ressuage. [Choua 09]

I.2.3. Ultrasons

La technique des ultrasons repose sur la propagation dans la pièce d'une onde ultrasonore générée à l'aide d'un transducteur émetteur. Les ultrasons sont des vibrations mécaniques prenant naissance et se propageant dans tout support matériel présentant une certaine élasticité. Les ultrasons correspondent à des fréquences oscillatoires supérieures à la limite d'audibilité humaine et s'étendant dans une large gamme allant de 15kHz à plus de 100MHz. L'ultrason est basé sur la transmission, la réflexion, et l'absorption d'une onde ultrasonore, qui se propage dans la pièce à contrôler à la manière d'un écho (Fig.I.2). Le train d'onde émis se réfléchit dans le fond de la pièce et sur les défauts puis revient vers le transducteur qui joue souvent le rôle d'un émetteur/récepteur. L'interprétation des signaux permet de positionner le défaut [Fillon 96], [Attal 96], [Choua 09]. Le CND par ultrasons est une technique très utilisée, parce que relativement flexible et simple pour détecter des défauts enfouis.

Avantages [Benramdan 09], [Choua 09], [Dumont-Fillon 96], [Mix 05].

- Grand pouvoir de pénétration (plusieurs mètres dans l'acier forge).
- Haute sensibilité de détection de défauts, notamment pour la recherche de défauts plans (dépend de la fréquence de l'onde ultrasonore).
- Détection, localisation et dimensionnement des défauts.

- Inspection et détection en temps réel.

Inconvénients [Benramdan 09], [Choua 09], [Dumont-Fillon 96], [Mix 05].

- Sensible à la nature et à l'orientation des défauts.
- Technique souvent très coûteuse (investissement, temps de contrôle).
- Inspection limitée par la complexité de la forme de la pièce contrôlée.

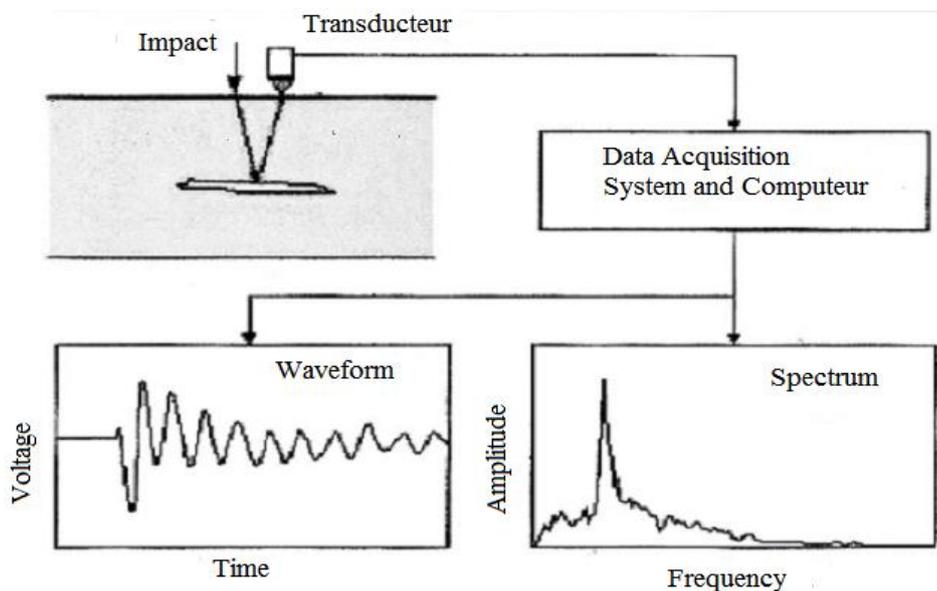


Fig.I.2. Principe des ultrasons. [Lakhdari11]

I.2.4. Magnétoscopie

Le contrôle par magnétoscopie fait appel aux propriétés magnétiques du matériau inspecté. Toutefois, il ne s'applique qu'aux matériaux et alliages ferromagnétiques (fer, acier fonte,...). C'est une technique qui révèle les défauts débouchant ou sous-cutanés. L'examen par magnétoscopie consiste à soumettre la pièce à un champ magnétique de valeur définie en fonction de la pièce. Une poudre magnétique (poudre de fer ou de magnétite colorée) est ensuite projetée à la surface et se répartit de façon homogène si la pièce est saine. Les discontinuités superficielles provoquent à leur endroit des fuites magnétiques. Lorsqu'un défaut est présent dans la pièce au voisinage de la surface, l'orientation du flux de l'induction

magnétique est modifiée localement et son intensité augmente en surface. Il apparaît alors une concentration de particules magnétiques qui révèle la présence du défaut [Choua09], comme l'illustre la figure I.3.

Avantages [Benramdan 09], [Choua 09], [Dumont-Fillon 96], [Mix 05].

- Simple, peu coûteuse et rapide ;
- Détection des défauts débouchant et sous-jacents.

Inconvénients [Benramdan 09], [Choua 09], [Dumont-Fillon 96], [Mix 05].

- Applicable seulement aux matériaux ferromagnétiques;
- Aimantation dépend de la perméabilité de la pièce examinée;
- La sensibilité de détection des défauts dépend en effet de la nature, de la direction et de la magnétisation de la pièce.

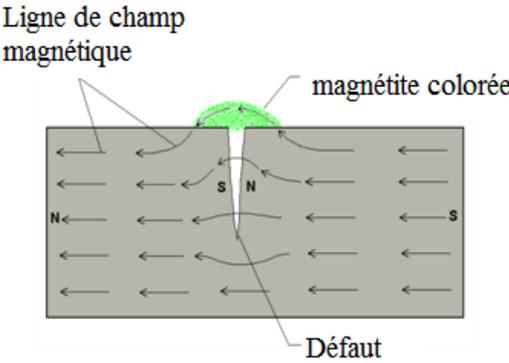
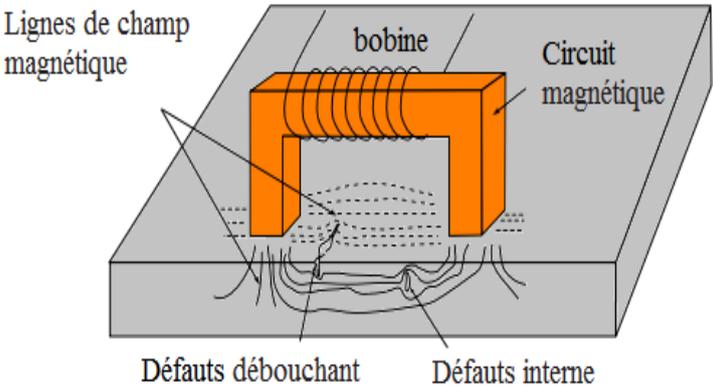
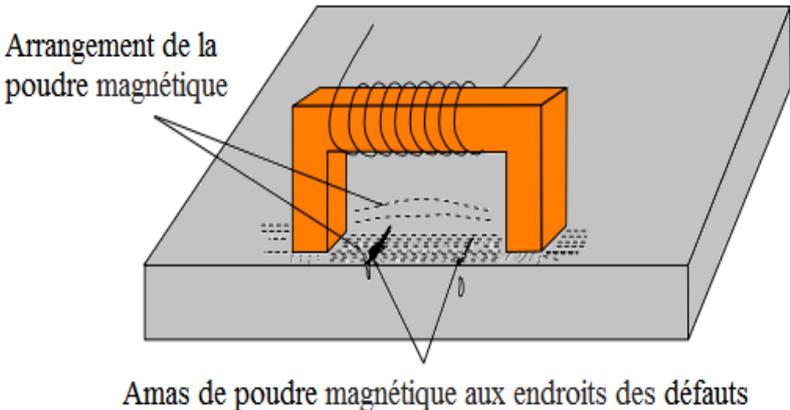


Fig.I.3. Principe de la magnétoscopie. [Lakhdari11], [Choua09]

I.2.5. Radiographie

Le principe de La radiographie industrielle est pareil à la radiographie médicale : elle consiste à faire traverser par un rayonnement électromagnétique de très courte longueur d'onde, comme les rayons X ou les rayons γ , la matière inspecter. Lors de leur passage à l'intérieur de la pièce, les photons voient leur énergie absorbée totalement ou partiellement par la matière, selon sa densité. Un film placé derrière la pièce est irradié par les photons qui ont encore suffisamment d'énergie. Il récupère ainsi le radiogramme, où les zones avec des défauts sont représentées par une variation de la densité optique, comme l'illustre la figure I.4. [Ravat 08].

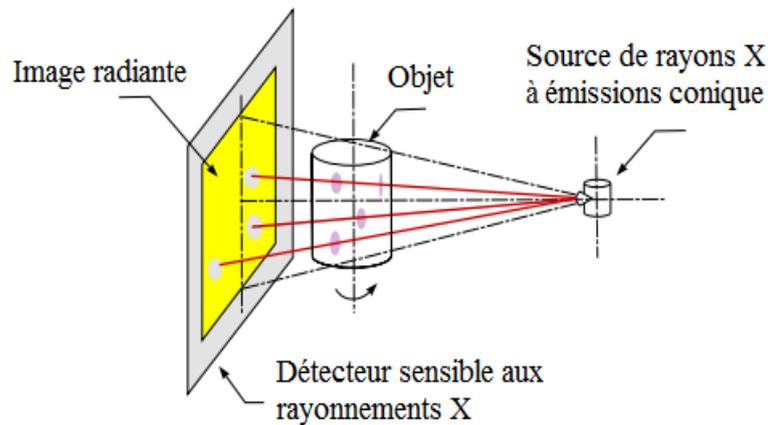


Fig.I.4. Principe de la radiographie.

Avantages [Benramdan 09], [Choua 09], [Dumont-Fillon 96], [Mix 05].

- Contrôle des objets de forme compliquée ;
- Facile à transporté (générateurs de rayons X de faibles énergies, appareils de radioactive portatifs) ;
- Apprécier la nature et la taille des défauts.

Inconvénients [Benramdan 09], [Choua 09], [Dumont-Fillon 96], [Mix 05].

- l'interprétation des images demande un niveau d'expertise de l'opérateur;
- Mise en œuvre des dispositifs et procédures de protection du personnel;
- Cette technique est extrêmement coûteuse et impose des conditions de sécurité;
- Le risque de ne pas détecter les fissures se présentant selon l'axe du faisceau.

I.2.6. Thermographie

La thermographie repose sur l'étude de la diffusion de la chaleur dans la cible à contrôler. Une quantité de chaleur est une quantité d'énergie stockée dans la matière et la température en est un indicateur mesurable. La thermographie consiste en l'interprétation des cartes thermiques (thermogrammes) des surfaces observées. Une distinction est faite entre la thermographie passive qui résulte de la simple observation des gradients thermiques sur une pièce, et la thermographie active lorsqu'une perturbation thermique a été volontairement générée pour le contrôle (par une source laser par exemple). Les discontinuités dans la pièce se traduisent par des différences de température sur l'image. L'acquisition des images thermiques s'obtient alors à l'aide d'une caméra thermographique [Choua 09].

Avantages [Benramdan 09], [Choua 09], [Dumont-Fillon 96], [Mix 05].

- Méthode relativement rapide et sans contact;
- Les cavités (champs de bulles d'air, fissures, délaminage,...) sont bien détectées;
- Toute l'épaisseur de la pièce est généralement contrôlée;
- La sensibilité à la détection des défauts de faibles dimensions;
- L'archivage des résultats est garanti à l'aide de la caméra infrarouge.

Inconvénients [Benramdan 09], [Choua 09], [Dumont-Fillon 96], [Mix 05].

- Des difficultés de mesure liées aux effets perturbateurs;
- Des difficultés de localisation de la profondeur des défauts, du fait que l'image obtenue donne une projection de ces derniers sur le plan de la pièce testée;
- L'interprétation des mesures pas toujours facile, surtout pour identifier la nature des défauts;
- La phase d'interprétation des résultats présente des restrictions pour une automatisation totale de la technique

I.3. CND par Courants de Foucault

On appelle courants de Foucault (CF) ou courants induits les courants électriques créés dans un objet conducteur, soit par la variation au cours du temps d'un champ magnétique dans lequel est plongé l'objet, soit par déplacement de cet objet dans un champ magnétique constant. Ce phénomène a été découvert par le physicien français Léon Foucault en 1851.



Fig. I.5. Jean Bernard Léon Foucault.

Le CND par courants de Foucault s'applique à tous les matériaux conducteurs de l'électricité. Les courants de Foucault ce sont des courants induits développés en circuit fermé à l'intérieur d'un objet conducteur placé dans un champ magnétique variable dans le temps.

L'examen par les courants de Foucault est basé sur le fait que si une bobine est placée à proximité d'une pièce conductrice et parcourue par un courant variable, alternatif par exemple, génère de tels courants induits dans la pièce. Ces courants créent eux-mêmes un flux magnétique induit qui s'oppose au flux d'excitation, modifiant par là-même la f.e.m ainsi l'impédance de cette bobine. C'est l'analyse de cette variation de f.e.m (variation d'impédance) qui fournira les informations exploitables pour un contrôle; en effet, le trajet, la répartition et l'intensité des courants de Foucault dépendent des caractéristiques physiques et géométriques du corps considéré, ainsi bien entendu que des conditions d'excitation (paramètres électriques et géométriques du bobinage).

On conçoit dès lors qu'un défaut, constituant une discontinuité électrique venant perturber la circulation des courants de Foucault, puisse engendrer une variation de la f.e.m induite dans la bobine ou de manière équivalente la variation d'impédance (cas harmonique) décelable au niveau de la bobine d'excitation. Ce principe simple est surtout utilisé pour détecter des défauts superficiels, dans la mesure où les courants de Foucault se développent principalement sur la surface des corps conducteurs (effet de peau) (voir figure I.6).

Avantages [Benramdan 09], [Choua 09], [Dumont-Fillon 96], [Mix 05].

- Simple, peu coûteux et rapide;
- Grande sensibilité de détection des défauts (dimensionnelles, structurales...);
- Evaluer le dimensionnement et la profondeur d'un défaut;
- Pas des conditions de sécurité ni pour l'opérateur ni pour l'environnement;
- Inspection sans contact;
- Efficacité de la technique malgré la complexité des phénomènes électromagnétiques mis en œuvre;
- Automatisation possible pour des pièces de géométrie constante (tubes, barres, rubans et câbles).

Inconvénients [Benramdan 09], [Choua 09], [Dumont-Fillon 96], [Mix 05].

- La profondeur d'inspection est dépend de la fréquence d'excitation;
- Inspection limitée aux matériaux électriquement conducteurs;
- La détection du défaut se fait d'une manière locale;
- La position du capteur par rapport au spécimen peut influencer l'efficacité de détection des défauts;
- La compétence et la formation sont exigées pour le personnel d'inspection.

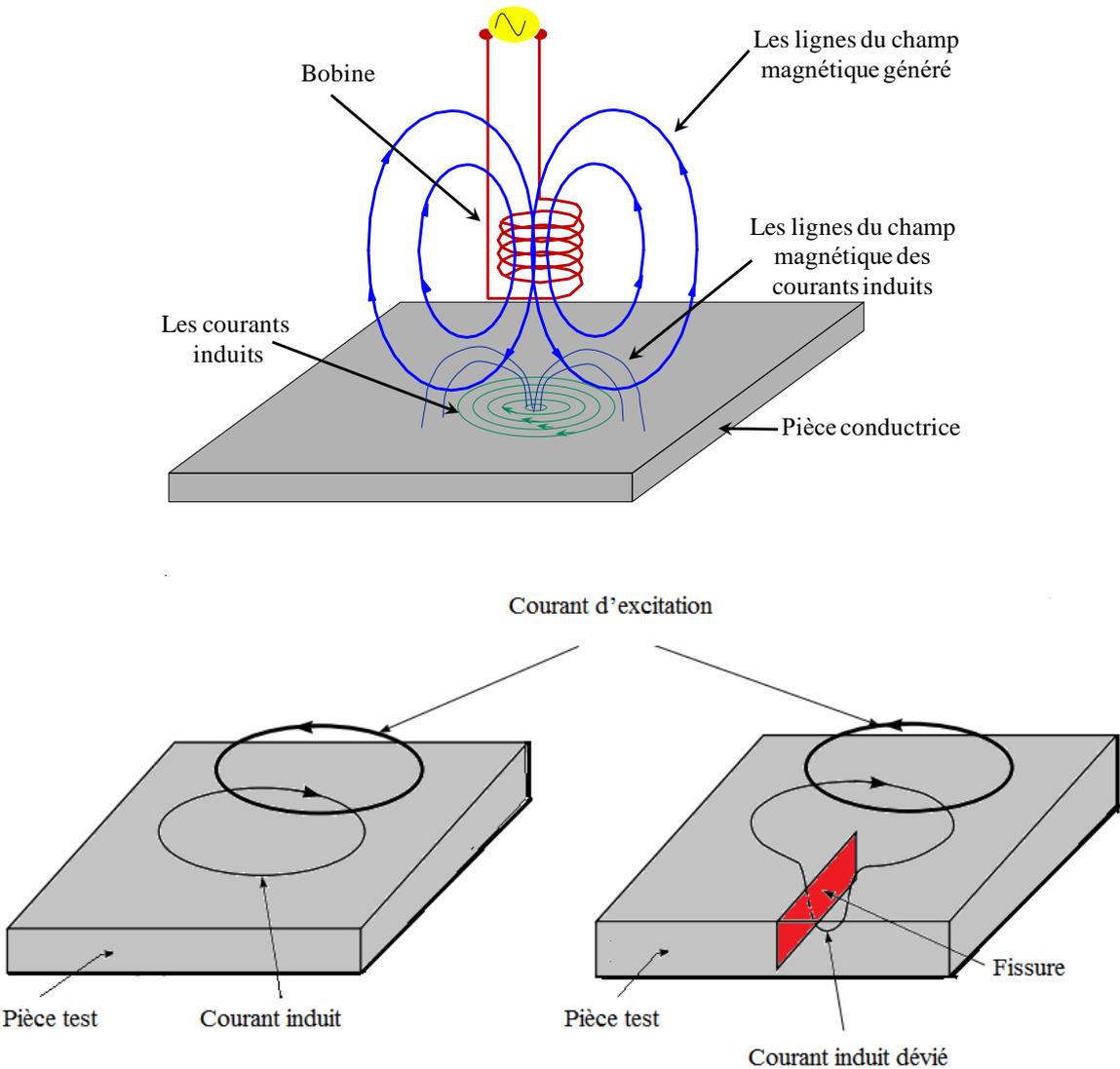


Fig.I.6. Principe du CND par courants de Foucault.

I.3.1. Densité du courant

Si on considère une pièce plane infinie excitée par une nappe de courants extérieure, de fréquence f , parallèle au plan, le module de la densité de courant dans la pièce est exprimé par la relation suivante :

$$J(z) = J_s \exp(-z\sqrt{\pi f \sigma \mu}) = J_s \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \quad (\text{I.1})$$

Avec :

z : la profondeur considérée à l'intérieur de la pièce.

$J(z)$: Le module de la densité de courant à la profondeur z .

J_s : Le module de la densité de courant à la surface de la pièce ($z = 0$).

δ : La profondeur de pénétration ou épaisseur de peau.

La profondeur de pénétration δ est donc donnée par la relation suivante :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}} \quad (\text{I.2})$$

Où μ , σ et f représentent respectivement la perméabilité magnétique (H. m^{-1}), la conductivité électrique (S. m^{-1}) et la fréquence d'excitation (Hz).

On peut constater que la densité du courant décroît de manière exponentielle dans la profondeur (figure I.7).

Il en résulte qu'environ 37 % des courants induits passent entre la surface et cette profondeur δ , créant une zone de forte sensibilité [Peix 88] et qui est très importante du point de vue de la sensibilité à la détection des défauts dans la technique de contrôle non destructif par courants de Foucault.

La réponse d'une cible à une excitation est recueillie par un élément sensible à une grandeur électromagnétique. Dans la majorité des cas il s'agit de mesurer une impédance ou une différence de potentiel (d.d.p) représentative de la variation d'un flux.

Cette mesure s'effectue souvent par l'intermédiaire d'une bobine.

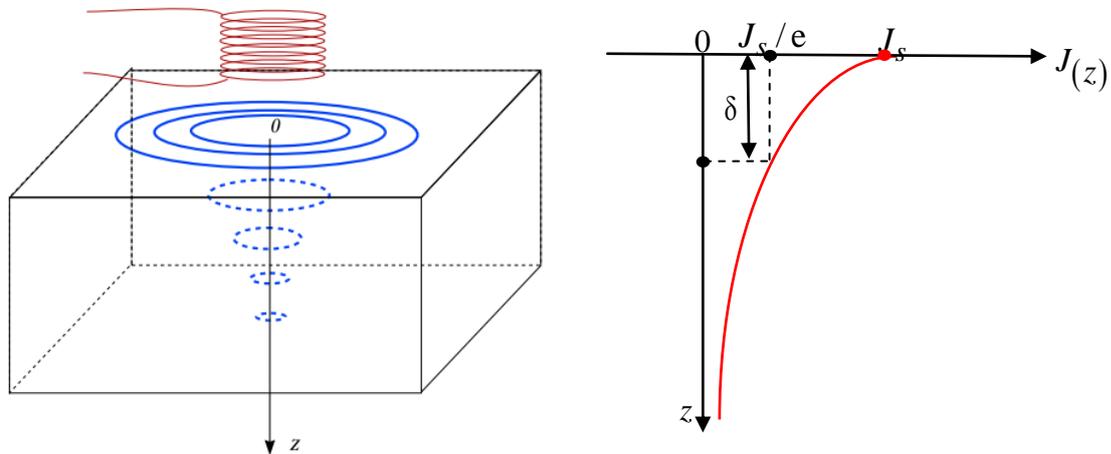


Fig.1.7. Répartition des courants de Foucault pour une pièce. [Zaidi12]

I.4. Les capteurs inductifs

Historiquement, les capteurs inductifs ont été les premiers éléments sensibles au champ magnétique connus. Les capteurs inductifs sont des bobines, qui peuvent être de différentes géométries, plates ou solénoïdes, et éventuellement contenir un noyau ferromagnétique afin de concentrer le champ magnétique et augmenter la sensibilité [Chady 99].

Les capteurs inductifs ont été les premiers utilisés pour des raisons historiques, mais restent encore intéressants grâce à leur précision et leur robustesse. De plus, les bobines sont bon marché et faciles à réaliser industriellement, du moins dans des dimensions raisonnables. L'inductance d'une bobine étant directement fonction de son nombre de spires [Bryan 55] [Terman 43] et donc de sa taille, les bobines de petites dimensions présentent en général une sensibilité moindre. Néanmoins, des techniques évoluées permettent aujourd'hui la réalisation de bobines de faibles dimensions avec une grande sensibilité, grâce à des formes complexes ou un grand nombre de spires [Woytasit 06]. Le domaine fréquentiel d'utilisation d'un capteur inductif dépend grandement de son impédance, mais la fréquence d'utilisation est rarement inférieure à la dizaine de kHz.

I.4.1. Les formes d'enroulements des capteurs inductifs

Selon la nature du produit à contrôler, il existe deux façons de mettre en œuvre le bobinage des capteurs inductifs [Zitouni 06], [Oukhellou 97].

- Bobine cylindrique (peut être utilisée, avec ou sans noyau)

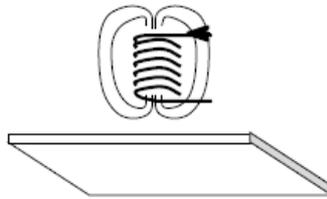


Fig.I.8. Bobine cylindrique.

- Bobine plate (spirale)

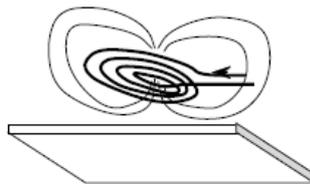


Fig.I.9. Bobine plate.

I.4.2. Différents types des capteurs inductifs

Il existe un grand nombre de façons pour mettre en œuvre le bobinage afin de réaliser un contrôle par courants de Foucault. Nous indiquons ici les configurations de base des capteurs.

I.4.2.1 Capteur absolu

C'est un capteur à double fonction, il est constitué d'une seule bobine émettrice-réceptrice qui crée le flux alternatif grâce au courant qui la parcourt et subit des variations d'impédance que l'on peut détecter en mesurant très finement sa signal de sortie (figure I.10) [Peix 88], l'exploitation se fait, en régime sinusoïdal, par la mesure de l'impédance équivalente de la bobine dans son environnement [Choua 09].

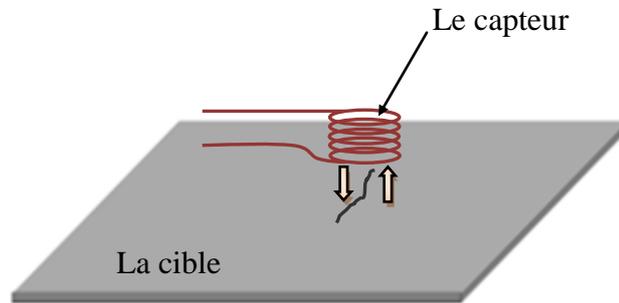


Fig.I.10. Capteur absolu.

I.4.2.2. Capteur double

C'est un capteur à fonctions séparées, il est constitué de deux bobines une excitatrice pour créer le flux et l'autre réceptrice pour le recueillir (figure I.11). Ces deux bobines sont moulées dans un même boîtier pour éviter toute modification fortuite de leur mutuelle. Ce type de capteur est très utilisé pour les contrôles à basses fréquences ($f < 1\text{kHz}$) [Ravat 09] [Peix 88] .

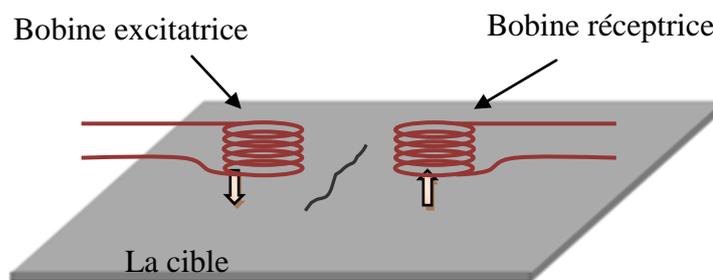


Fig.I.11. Capteur double.

I.4.2.3. Capteur différentiel

Un capteur en mode différentiel est une sonde destinée à accéder aux seules variations locales des caractéristiques du produit examiné, par différence permanente de deux mesures simultanées en deux zones voisines. Le capteur peut être constitué de deux enroulements identiques dont on mesure l'écart de l'impédance (figure I.12). Cette sonde est particulièrement utilisée pour détecter des discontinuités lors de son déplacement le long

d'une pièce en s'affranchissant des perturbations induites telle que les variations de la distance sonde-pièce (lift-off) [Buraïs 04], [Feliachi 10], [Choua 09].

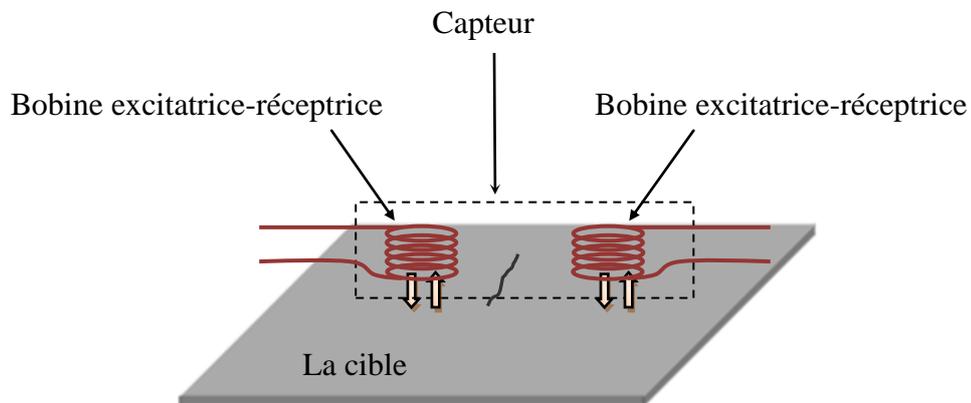


Fig.I.12. Capteur différentiel.

I.4.2.4. Capteur multiple

Le capteur multiple (capteur matriciel) peut être réalisé par assemblage d'un ensemble de bobines identiques qui fonctionnent d'une manière autonome (figure I.13). La constitution d'un capteur matriciel est nécessaire pour répondre à certains critères. Dans le cas d'un contrôle effectué selon deux axes, la procédure d'inspection avec un capteur unique peut s'avérer trop longue. Pour remédier ce problème, il est très intéressant d'associer en ligne plusieurs capteurs élémentaires fonctionnent en même temps. En multiplexant les informations issues de chacun d'eux, il est possible d'accéder plus rapidement aux propriétés de la cible. L'association en ligne de plusieurs capteurs judicieusement espacés en fonction de la taille des défauts à détecter permet de recueillir des signaux suffisamment riches en information [Gauthier02], [Oukhellou 97].

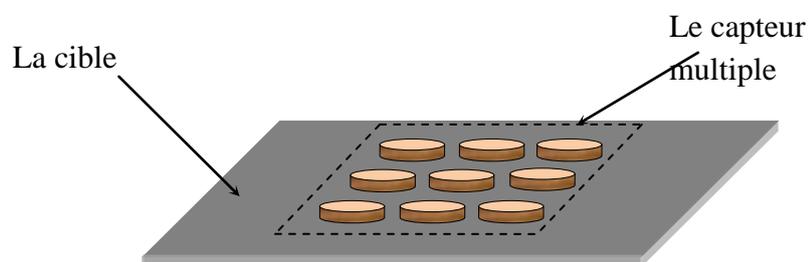


Fig.I.13. Capteur matriciel.

I.4.3. Différentes formes géométriques du circuit magnétique

Les lignes de champ qu'elles émettent les capteurs inductifs s'épanouissent largement. Afin de limiter les zones d'interaction de la sonde, on couple généralement celle-ci avec un circuit magnétique de grande perméabilité (figure I.14). Celui-ci peut être réalisé en tôle feuilletée à basse fréquence ou en ferrite pour les fréquences les plus élevées. Son rôle est de canaliser les lignes de champ magnétique vers la zone qu'on veut l'inspecter [Oukhellou 97]

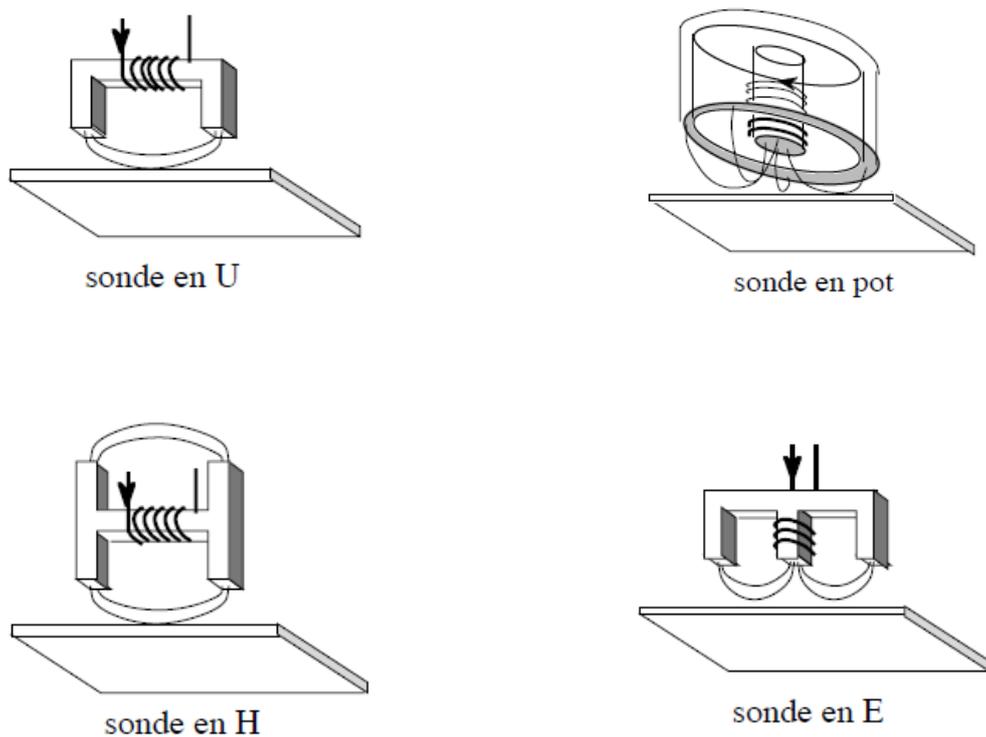


Fig.I.14. Différentes structures du circuit magnétique.

I.4.4. Dispositions des capteurs

On trouve essentiellement trois dispositions des capteurs en pratique.

1. Capteurs encerclant

Comme la montre la figure I.15, Cette disposition est destinée au contrôle au défilé des produits longs de forme simple et de diamètre modeste tels que les fils, barres et tubes.

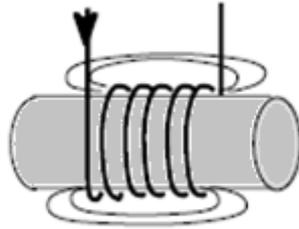


Fig.I.15. Capteur encerclant.

2. Capteurs internes

Ce type de capteur est principalement utilisé pour le contrôle des multiples tubes de petit diamètre qui constituent les échangeurs thermiques ou les générateurs de vapeur dans l'industrie nucléaire, il est consacré pour le contrôle des tubes par l'intérieur, pour lesquels les bobines sont aussi moulées de façon concentrique à l'axe du produit (figure I.16).

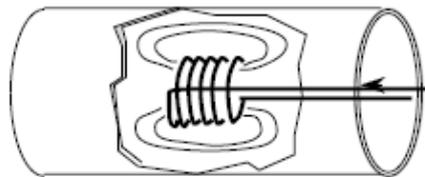


Fig.I.16. Capteur interne.

3. Capteurs ponctuels

Dans cette disposition les sondes comportent un ou plusieurs bobinages moulés sont dotées d'un noyau de ferrite très perméable aux faibles champs alternatifs dont son rôle consiste à permettre d'éloigner les enroulements de la surface à contrôler, tout en gardant une bonne sensibilité de détection [Oukhellou 97].

Cette disposition est adaptée aux explorations ponctuelles en contrôle manuel ou au balayage de grandes surfaces en contrôle automatique (figure I.17).

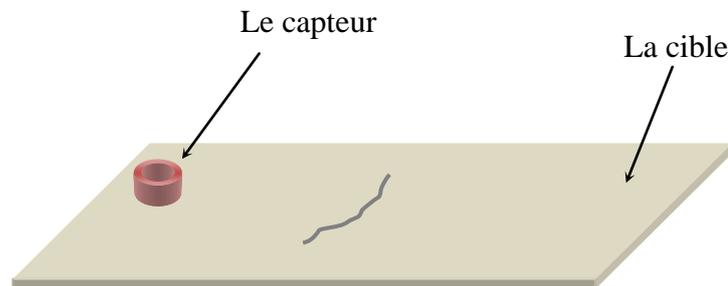


Fig.I.17. Capteur ponctuel.

I.5. Paramètres influant le contrôle CND

Les principaux paramètres influant le contrôle peuvent se répartir en pratique en trois catégories :

➤ **Paramètres liés au matériau**

Outre ceux liés à la forme géométrique de la cible, ce sont sa conductivité électrique σ et sa perméabilité magnétique μ . Toute variation locale de ces paramètres entraînant un déplacement du point de fonctionnement moyen de la sonde. Les variations de la conductivité électrique σ ou de la perméabilité magnétique μ ont des causes très diverses : présence de contraintes résiduelles importantes dues à la fabrication, des chocs ou martelages ultérieurs, zones décarburées,etc. [Lakhdari11]

➤ **Paramètres liés au montage**

Ils gouvernent le couplage entre le capteur et le matériau : il s'agit soit du coefficient de remplissage pour les bobines encerclant, soit de la position du capteur par rapport à la surface de la pièce (lift-off). Les variations du lift-off provoquent des fluctuations de l'impédance qui peuvent prendre une amplitude telle qu'elles masqueront les indications caractéristiques du défaut. [Lakhdari11]

➤ **Paramètres électriques**

C'est essentiellement la fréquence d'excitation du capteur qui sera choisi en fonction des considérations précédentes, à savoir l'obtention d'un effet de peau adéquat par rapport à la profondeur des défauts. L'intensité de magnétisation alternative, liée à l'intensité du courant d'excitation, n'est pas un facteur déterminant du contrôle, dans la mesure où elle est choisie

suffisamment faible pour éviter une saturation magnétique qui introduirait des non linéarités rendant l'exploitation des signaux très compliquée. Cette intensité doit être suffisamment forte pour que le rapport signal/bruit soit convenable au niveau des amplifications et autres traitements électroniques [Choua 09].

I.6. Réponse de la sonde

L'objectif ultime de la modélisation du CND par CF est de déterminer la réponse de la sonde.

I.6.1. Réponse de la sonde à double fonctions

Il faut noter que les matériaux étudiés sont supposés linéaires et isotropes.

En considérant une bobine parcourue par un courant I sinusoïdal, de pulsation ω , il est possible de déterminer l'impédance Z de cette sonde par calcul de l'énergie magnétique moyenne (W) emmagasinée dans tout l'espace et des pertes Joule P_j dans les milieux conducteurs définies par les relations suivantes :

$$P_j = I_{eff}^2 \operatorname{Re}(Z) = \int_{\Omega_c} \frac{1}{\sigma} |J|^2 d\Omega \quad (\text{I.3})$$

$$W = I_{eff}^2 \frac{\operatorname{Im}(Z)}{2\omega} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} |B|^2 d\Omega \quad (\text{I.4})$$

où B et J représentent respectivement l'induction magnétique et la densité de courant et I_{eff} la valeur efficace du courant. μ et σ sont respectivement la perméabilité magnétique et la conductivité électrique.

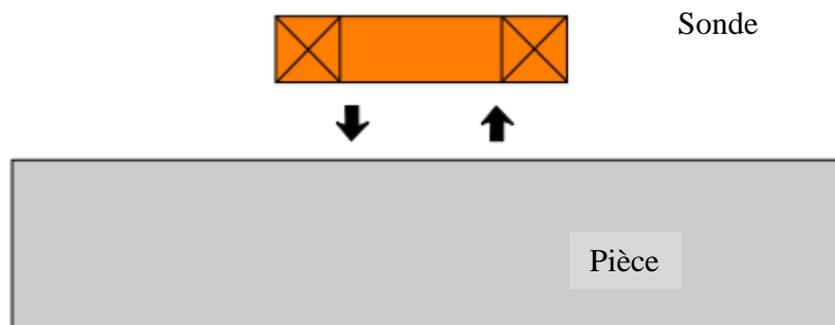


Fig. I.18. Sonde à double fonction.

I.6.2. Réponse de la sonde à fonctions séparées

Pour une sonde à fonctions séparées constituée d'une bobine émettrice et d'une autre réceptrice (figure I.19) le calcul de la réponse par la méthode précédemment décrite s'avère inutilisable. On est en effet typiquement amené à calculer une trans-impédance Z :

$$Z = \frac{V_2}{I_1} \quad (\text{I.5})$$

où V_2 est la tension aux bornes de la bobine de réception et I_1 est le courant d'alimentation de la bobine d'émission.

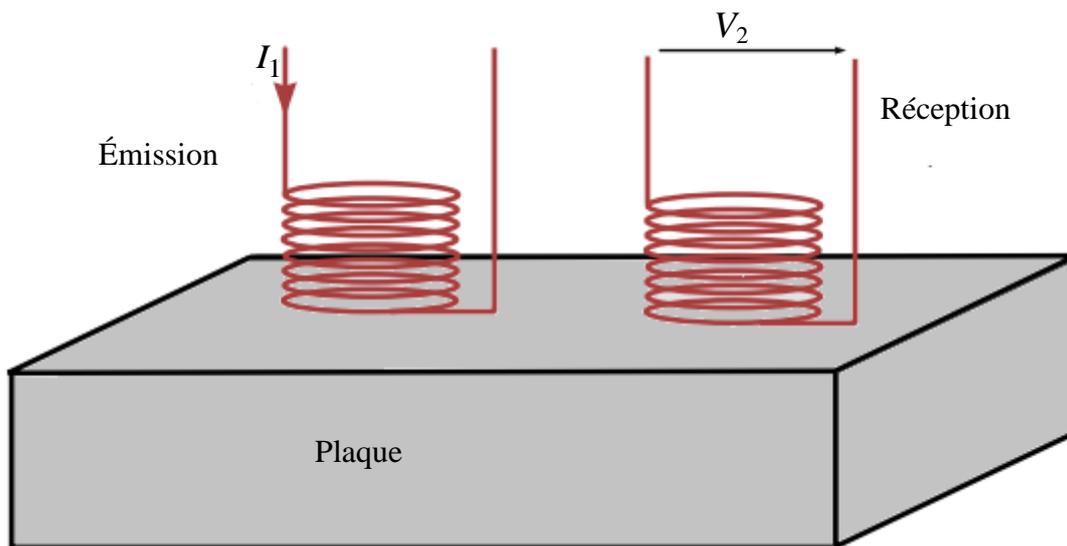


Fig.I.19. Sonde à fonctions séparées.

D'autre part, d'après la loi de Faraday (en régime sinusoïdal) on a :

$$V_2 = -j\omega\phi_2 \quad (\text{I.6})$$

avec ϕ_2 le flux de l'induction magnétique engendré dans la bobine de réception. En remplaçant l'expression de V_2 (relation (I.6)) dans l'équation (I.5) on trouve :

$$Z = -\frac{j\omega\phi_2}{I_1} \quad (\text{I.7})$$

I_1 étant connu, le calcul de la trans-impédance nécessite de déterminer le flux magnétique dans la bobine réceptrice.

Le flux de l'induction magnétique par la formulation A - V est donné par la relation suivante :

$$\phi_m = \int_{\Omega_b} A \cdot N d\Omega \quad (\text{I.8})$$

avec Ω_b le volume de la bobine, N nombres de spires, A du potentiel vecteur magnétique.

I.7. Impédance du capteur

On trouve essentiellement plusieurs formules pour le calcul de l'impédance d'un capteur [Choua 09].

I.7.1. Impédance normalisée

L'impédance normalisée du capteur inductif de bobinage de N spires, de formes variées est donnée par la formule suivante :

$$\bar{Z} = R + jX \quad (\text{I.9})$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{i}_{exc}} \quad (\text{I.10})$$

Tels que :

R : La composante résistive qui englobe les pertes par courants de Foucault dues à la pénétration du champ dans la cible et les pertes internes du bobinage d'excitation.

X : Le terme inductif qui représente la réactance du bobinage d'excitation, liée à la topologie des lignes du champ magnétique émises par le capteur.

\bar{V} : La grandeur complexe associée à la tension d'excitation.

\bar{i}_{exc} : La grandeur complexe associée au courant d'excitation.

Sachant que la tension \bar{V} et le courant \bar{i}_{exc} s'expriment en fonction de la réluctance complexe du circuit magnétique $\bar{\phi}$ à l'aide de relations suivantes :

$$N \cdot \bar{i}_{exc} = \bar{R} \cdot \bar{\phi} \quad (\text{I.11})$$

$$\bar{V} = jN\omega \bar{\phi} \quad (\text{I.12})$$

L'impédance s'écrit donc :

$$\bar{Z} = j \frac{\omega N^2}{R} = R + j X \quad (\text{I.13})$$

Dans l'expression de cette impédance, on ne conserve que les variations dues à la présence de la cible, d'où on introduit la notion d'impédance normalisée Z_n qui se déduit de Z à l'aide de l'expression :

$$\bar{Z}_n = R_n + j X_n = \frac{\bar{Z} - R_0}{X_0} \quad (\text{I.14})$$

$$R_n = \frac{R - R_0}{X_0} \quad \text{et} \quad X_n = \frac{X}{X_0} \quad (\text{I.15})$$

Avec $Z_0 = R_0 + jX_0$ est l'impédance du capteur à vide (sans cible).

L'étude des variations de Z_n s'effectue dans le plan d'impédances normalisées en traçant X_n en fonction de R_n . Pour un capteur donné, toute variation de l'un des paramètres de la pièce induit un déplacement du point représentatif de Z_n dans le plan d'impédances normalisées. La figure I.20 illustre l'allure des trajectoires que décrit le point de l'impédance de la sonde pour des variations de la conductivité électrique σ et de la distance capteur-cible [Choua 09], [Oukhellou 97].

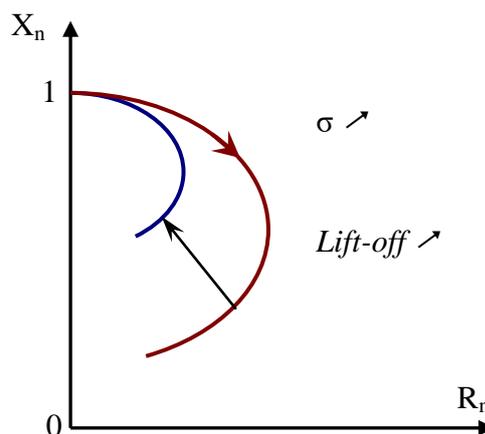


Fig. I.20. Influence de la conductivité et du lift-off sur le diagramme d'impédances normalisée, (cas d'une pièce amagnétique).

En procédant à cette normalisation, la mesure devient indépendante de certaines caractéristiques propres de la bobine excitatrice (nombre de spires, pertes à vide) et de la croissance de la réactance en fonction de la fréquence. Elle dépend uniquement des paramètres de structure qui sont la fréquence d'excitation et la géométrie de la sonde, et des paramètres de la cible à savoir sa géométrie, sa conductivité électrique σ , sa perméabilité μ et la distance capteur-cible (lift-off).

Pour une sonde donnée, toute variation de l'un des paramètres de la pièce induit un déplacement du point représentatif de Z_n dans le plan d'impédance normalisée.

I.7.2. Impédance généralisée

L'impédance généralisée du capteur est donnée par la formule suivante :

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{E_{fem}}{I} \quad (I.16)$$

Où E_{fem} est la force électromotrice.

La partie imaginaire (réactance X) de cette impédance est donnée par :

$$X = \frac{1}{I^2} \omega \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} (B)^2 d\Omega \quad (I.17)$$

Où ω , μ , B , I et Ω représentent respectivement la pulsation de l'induction magnétique, la perméabilité magnétique ($H. m^{-1}$), l'induction magnétique ($Wb. m^{-2}$ ou T), le courant d'alimentation et le domaine d'étude.

Ainsi que la partie réelle (résistance R) de cette impédance est donnée par :

$$R = \frac{1}{I^2} \int_{\Omega} \frac{1}{\sigma} J_{ind}^2 d\Omega \quad (I.18)$$

Où σ , J_{ind} sont respectivement la conductivité électrique ($S. m^{-1}$) et la densité des courants de Foucault ($A. m^{-2}$).

Chapitre II

Modélisation du problème électromagnétique

II.1. Equations de maxwell et lois de comportement

II.2. Conditions de transmission et conditions aux limites

II.2.1. Conditions de transmission

II.2.2. Conditions aux limites

II.3. Formulations de la magnétodynamique

II.3.1. Formulation en potentiel A - V

II.4. Méthodes numériques de discrétisation

II.4.1. Principales méthodes existantes

II.4.2. La méthode des volumes finis

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement et à la compréhension des techniques d'inspection par courants de Foucault qui nécessite un ensemble de connaissances sur les propriétés physiques des matériaux, sur les phénomènes électromagnétiques ainsi que sur les défauts et les pièces contrôlées afin d'optimiser et prévoir la détectabilité des défauts. Ce chapitre décrit aussi la loi de comportement choisie pour décrire le phénomène des systèmes magnétodynamiques à partir des équations de Maxwell dans le domaine simulé de configurations de contrôle non destructif par courant de Foucault. En particulier la méthode des volumes finis est utilisée pour la modélisation de configurations de contrôle non destructif par courant de Foucault. A la fin de ce chapitre, les diverses méthodes numériques utilisées pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles, caractéristiques des phénomènes physiques à traiter sont présentées. En particulier, la méthode des volumes finis adoptée comme méthode de discrétisation des équations aux dérivées partielles.

II.1. Equations de maxwell et lois de comportement

Les problèmes de modélisations des systèmes magnétodynamiques liés au calcul des courants de Foucault qui sont l'objet de notre travail peuvent être schématisés par un modèle type composé de l'air, du matériau conducteur et d'une source de courant électrique (Fig.II.1). Ces trois objets forment le domaine de calcul Ω de frontière Γ .

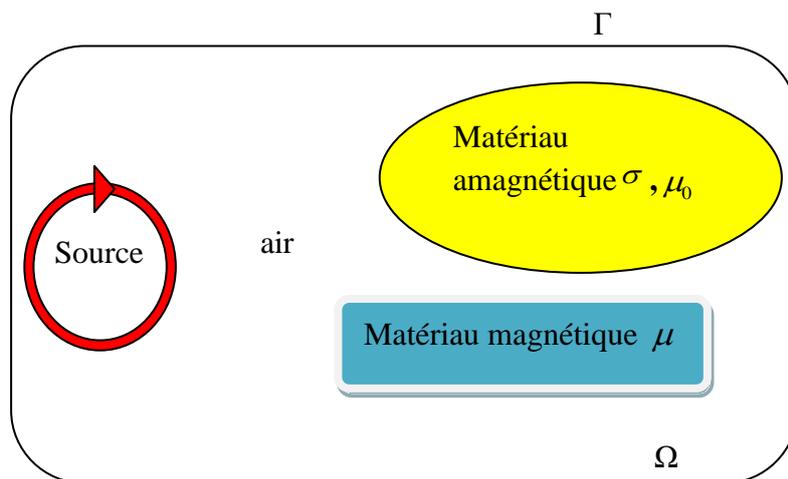


Fig.II.1. Problème type a modélisé.

On rappelle brièvement les lois fondamentales de l'électromagnétisme qui sont les fameux quatre équations de Maxwell et les relations complémentaires qui décrivent le comportement des milieux considérés.

Ces phénomènes électromagnétiques sont régis par les quatre équations de Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} & \text{(théorème d'Ampère-Maxwell)} \quad \text{(II.1)} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \text{(loi de Faraday)} \quad \text{(II.2)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 & \text{(loi de conservation)} \quad \text{(II.3)} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho & \text{(théorème de Gauss)} \quad \text{(II.4)} \end{array} \right.$$

Dans ces équations, ρ représente la densité volumique de charges électriques ($C. m^{-3}$). \mathbf{E} est le champ électrique ($V. m^{-1}$), \mathbf{H} est le champ magnétique ($A. m^{-1}$). \mathbf{D} est l'induction électrique ($C. m^{-2}$), \mathbf{B} est l'induction magnétique ($Wb. m^{-2}$ ou T) et \mathbf{J}_c représente la densité du courant de conduction ($A. m^{-2}$).

Afin de calculer l'évolution des champs électriques et magnétiques, les lois constitutives et qui sont caractéristiques des milieux considérés doivent être ajoutées, ces relations sont données par :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{(II.5)}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{(II.6)}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \text{(II.7)}$$

Où \mathbf{J} représente le courant de conduction résultant du champ électrique \mathbf{E} , μ , ε et σ représentent respectivement la perméabilité magnétique ($H. m^{-1}$), la permittivité électrique ($F. m^{-1}$) et la conductivité électrique ($S. m^{-1}$).

Tels que :

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (\text{II.8})$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (\text{II.9})$$

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ est la perméabilité magnétique du vide, μ_r est la perméabilité relative du milieu considéré. $\varepsilon_0 = 8.85 10^{-12}$ est la permittivité de l'air, ε_r est la permittivité relative du milieu considéré.

Dans un problème de modélisation, Les coefficients μ et σ doivent être définis dans les différentes zones du domaine considéré (Fig.II.1), [Alloui 07]. Dans l'air, par exemple, ces coefficients valent respectivement $(\mu_0, 0)$. Souvent, dans les matériaux linéaires, ces coefficients sont des scalaires constants. Ils dépendent dans des cas particuliers de l'intensité des champs appliqués.

Le terme $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ dans l'équation (II.1) exprime la densité des courants de déplacement. On se placera dans l'hypothèse de l'électrotechnique et on considère pour le cas des basses fréquences, ce terme peut être négligé, [Alloui 07], [Louai 95] et [Emmanuel 99]. Avec cette hypothèse et nous combinons (II.1) et (II.4), nous obtenons l'équation de conservation de charges électriques :

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c = 0 \quad (\text{II.10})$$

Dans notre travail, nous nous intéressons à cette loi (II.10), puisque, les valeurs numériques dans chaque volume fini ou cellule du domaine de discrétisation du modèle a étudié (Fig.II.1), par la méthode des volumes finis MVF peuvent être vues comme des approximations de valeurs moyennes sur la cellule. Ainsi, il suffit de construire des fonctions donnant des approximations de ce qui passe d'une cellule à ses voisins. Automatiquement, la méthode est conservative, ce qui sort d'une cellule rentre exactement dans sa voisine.

Pour un milieu conducteur la densité du courant est donnée par la loi d'Ohm généralisée :

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{ind} \quad (\text{II.11})$$

$$\mathbf{J}_{ind} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (\text{II.12})$$

\mathbf{v} est le vecteur de la vitesse, \mathbf{J}_s est la densité du courant imposé dans l'inducteur et \mathbf{J}_{ind} est la densité des courants induits. Le terme $\sigma\mathbf{E}$ représente le courant de conduction résultant du champ électrique \mathbf{E} , et $\sigma(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ exprime le courant résultant du mouvement. Dans notre travail la vitesse mécanique de déplacement (\mathbf{v}) est absente d'où on peut décomposer le courant total d'équation par :

$$\mathbf{J}_c = \mathbf{J}_s + \sigma\mathbf{E} \quad (\text{II.13})$$

II.2. Conditions de transmission et conditions aux limites

II.2.1. Conditions de transmission

Les champs électromagnétiques admettent des discontinuités lors du passage entre deux milieux de propriétés différentes. Les conditions de transmission ou de passage s'écrivent alors à l'interface entre deux milieux (Fig.II.2) :

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \rho_s \quad (\text{II.14})$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{II.15})$$

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \wedge \mathbf{n} = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{K}_s \quad (\text{II.17})$$

ρ_s, \mathbf{K}_s représentent respectivement la densité surfacique des charges et du courant. \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

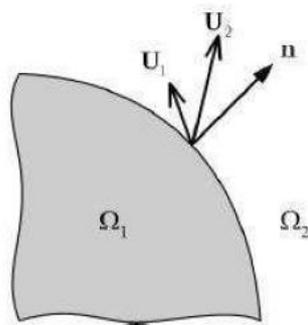


Fig.II.2 Interface entre deux milieux.

II.2.2. Conditions aux limites

Pour assurer l'unicité de la solution de La résolution du système composé par les équations de Maxwell et les lois de comportement, des conditions aux limites sont imposées.

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (\text{II.18})$$

D'après l'équation (II.1) et on néglige le terme des courants de déplacement, on en déduit que :

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (\text{II.19})$$

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (\text{II.21})$$

II.3. Formulations de la magnétodynamique

Pour représenter le modèle de la magnétodynamique a partir des équations de Maxwell dans le domaine simulé, présenté dans la figure (II.1), en vue de calculer les variables électromagnétiques souhaités, plusieurs formulations ont été développées. Les principales formulations rencontrées sont [Abakar 01] :

- Formulations de type électrique : \mathbf{E} , \mathbf{A} et $\mathbf{A}-\mathbf{V}$.
- Formulations de type magnétique : \mathbf{H} et $\mathbf{T}-\Phi$.

Pour la modélisation tridimensionnelle dans le domaine simulé, présenté dans la figure (II.1), les principales formulations rencontrées sont $\mathbf{T}-\Phi$ et $\mathbf{A}-\mathbf{V}$ [Hashizume 96], [Meunier 02], [Joo 07]. Dans ce travail de thèse, nous avons fait appel à la formulation la plus générale, c'est-à-dire à la formulation $\mathbf{A}-\mathbf{V}$, (\mathbf{V} : potentiel scalaire électrique) qui reste attractive surtout quand il s'agit des problèmes de calcul des courants induits en dimension 3 [Pascal 03] et [Kanayama 06]. Egalement cette formulation a été utilisée aussi par plusieurs auteurs, comme par exemple, [Fujioka 96], [Alonso 04], [Alloui 07] et plus récemment par Bird [Bird 08]. Certains reportent l'inconvénient de cette formulation dans le cas 3D, par le nombre élevé des inconnues (quatre variables d'état dans $\mathbf{A}-\mathbf{V}$ au lieu de trois variables dans $\mathbf{T}-\Phi$), ce problème n'est plus posé avec les progrès des calculateurs (vitesse, mémoires ...) et aussi l'apparition des nouvelles méthodes comme la parallélisation des codes de calcul, la résolution algébrique multiniveaux ou bien la méthode de décomposition des domaines.

La formulation en \mathbf{A} est la formulation la plus classique et la plus utilisée en électromagnétisme en présence des supraconducteurs. Cette formulation a le pouvoir d'être

couplé facilement avec les équations de circuit dans le calcul des pertes des conducteurs supraconducteurs massifs [Vinot 02], les deux formulations A et E présentent, l'avantage d'avoir en 2D une seule composante dans chaque nœud du maillage ce qui amène à réduire considérablement le temps de calcul et les tailles des matrices à résoudre.

Egalement, la formulation en A a été introduite par plusieurs auteurs tel que par exemple dans [Kanayama 03]. Dans ces travaux, Kanayama a montré que la convergence des solveurs itératifs, est plus rapide avec le potentiel scalaire V que sans lui.

La formulation en $T-\Phi$, (T : potentiel vecteur électrique, Φ : potentiel scalaire magnétique) , présente l'avantages en 2D et 3D [Klutsch 03], d'assurer la convergence du processus itératif y compris pour des grandes valeurs de n qui est le terme en puissance de la loi $E-J$. Elle conduit à un nombre d'itérations plus faible par rapport à la formulation en A ou en E , cela a été justifié par le fait que cette formulation utilise la loi $J(E)$ au lieu de la loi $E(J)$.

Cette formulation n'est pas très utilisée dans la modélisation en 2D, elle occupe une grande place de mémoire vu les tailles des matrices à résoudre et par conséquent un temps de calcul plus important (trois variables à déterminer dans chaque nœud du maillage).

Pour le calcul de la distribution des courants induits dans une plaque conductrice, Yaoqin a utilisé la formulation $T-\Phi$, [Yaoqin 01] et [Yaoqin 02]. Dans ces deux articles, l'auteur a montré l'efficacité de la MVF dans le domaine de calcul des courants induits.

Il faut noter aussi que dans l'ensemble des travaux cités ci-dessus, c'est la méthode des éléments finis MEF qui a été employée comme méthode de discrétisation des équations aux dérivées partielles.

Dans le travail de cette thèse la méthode des volumes finis est utilisée pour la modélisation de configurations de contrôle non destructif par courant de Foucault. Nous tenons à signaler que nous n'avons pas rencontré de problème de convergence, même pour des valeurs importantes de n , nous pensons alors, que la méthode des éléments finis est à l'origine des problèmes de convergence dans le cas où le terme en puissance n prend des valeurs grandes [Kameni 09].

II.3.1. Formulation en potentiel $A-V$

En régime dynamique, Le modèle de la magnétodynamique consiste a l'étude des phénomènes magnétiques et électriques, dont Les champs électromagnétiques sont variables, soit par variation dans le temps des courants d'excitation, soit par mouvement d'aimants permanents.

Tenant compte des hypothèses simplificatrices et en considérant la loi de conservation (II.10), Le modèle de la magnétodynamique issu des équations de Maxwell s'écrit :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{II.22})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c \quad (\text{II.23})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.24})$$

Il est nécessaire de considérer les relations constitutives des milieux pour définir complètement le problème magnétodynamique.

La formulation \mathbf{A} - V est obtenue par la combinaison du système d'équation de Maxwell. Comme l'induction magnétique est à divergence nulle(II.24), la variable d'état \mathbf{A} est exprimée en fonction de l'induction magnétique \mathbf{B} par la relation suivante :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{II.25})$$

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{n}|_r = 0 \quad (\text{II.26})$$

A partir de cette relation (II.25), le terme \mathbf{B} dans (II.22) sera remplacé par \mathbf{A} et nous obtenons :

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{II.27})$$

Cette relation nous permet de définir un potentiel scalaire électrique V , tel que :

$$\mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \quad (\text{II.28})$$

Combinons les équations (II.6), (II.11), (II.23), (II.25) et (II.28) nous obtenons :

$$\nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = \mathbf{J}_s \quad (\text{II.29})$$

En considérant la loi de conservation (II.10), on trouve comme deuxième équation :

$$\nabla \cdot \left[-\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right] = 0 \quad (\text{II.30})$$

Le système d'équations (II.29) et (II.30) constitue la formulation en potentiels \mathbf{A} - V :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) &= \mathbf{J}_s \\ \nabla \cdot \left[-\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

Si on considère le cas où les sources des courants sont parfaitement de forme sinusoïdale, alors on peut employer la représentation en régime harmonique de pulsation ω . En adoptant le changement de variable suivant :

$$\mathbf{v} = \frac{1}{j\omega} \mathbf{V} \quad (\text{II.32})$$

Le système s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A}) + j\omega\sigma (\mathbf{A} + \nabla V) &= \mathbf{J}_s \\ \nabla \cdot [-j\omega\sigma (\mathbf{A} + \nabla V)] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

Avec $j^2 = -1$

La résolution du système (II.31) nécessite la connaissance des conditions aux limites relatives au domaine d'étude car elle admet une infinité de solutions. Pour assurer l'unicité de la solution, des conditions aux limites sont imposées. Une condition aux limites employée est d'imposer un champ magnétique normal nul à la surface extérieure Γ , dans le calcul, on impose alors :

$$\mathbf{n} \times \mathbf{A} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (\text{II.34})$$

Cette condition est dite condition de type Dirichlet. Une autre condition dite de Newman peut être utilisée en présence d'un plan de symétrie:

$$\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_s \quad (\text{II.35})$$

Où Γ_s est le plan de symétrie de vecteur unitaire normal \mathbf{n} comme le montre la figure II.3.

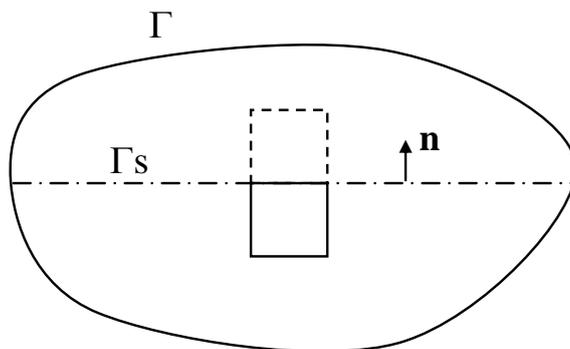


Fig.II.3. Schématisation d'un plan de symétrie.

En effet la connaissance des conditions aux limites n'est pas toujours suffisante pour avoir la solution du problème. Une jauge doit être introduite, en effet, le problème d'unicité de la solution se pose ; on remarque que si le couple (\mathbf{A}, V) est une solution de (II.31), il existe alors une infinité de solutions donnée par $(\mathbf{A} + \nabla\phi)$. En remplaçant ce dernier dans (II.31), le système reste inchangé. Afin de rendre la solution unique et d'améliorer le processus de convergence, nous avons fait appel à la jauge de Coulomb, cette jauge est la plus couramment utilisée [Nath 93], [Tsuchimoto 94], [Alonso 04] et [Bird 08]. Egaleme nt Cette jauge est introduite dans la formulation \mathbf{A} - V à travers un terme dit de pénalité donné par :

$$\nabla(v_p \nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{II.36})$$

Cela est démontré aussi par Biro dans [Biro 89]. Afin d'avoir une meilleure approximation du potentiel, le paramètre ajouté v_p est remplacé par la reluctivité v du domaine [Fetzer 96] [Biro 89]. Mettant le terme (II.36) dans la première équation du système (II.30), nous obtenons la formulation \mathbf{A} - V jaugée qui peut être appliquée à divers problèmes d'électrotechnique :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla (\nu \nabla \cdot \mathbf{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) &= \mathbf{J}_s \\ \nabla \cdot \left[-\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right] &= 0 \end{aligned} \tag{II.37}$$

II.4. Méthodes numériques de discrétisation

II.4.1. Principales méthodes existantes

Il existe deux grandes catégories de méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles mathématiques représentant les phénomènes qui décrivent le comportement des dispositifs électromagnétiques. Ces méthodes sont : Les méthodes analytiques, Les méthodes numériques.

Les méthodes analytiques, s'avèrent d'applications très difficiles dès que la complexité de la géométrie s'accroît et que certains matériaux, dans des conditions de fonctionnement optimales, présentent des non-linéarités physiques, donc mathématiques.

L'application des ordinateurs, de grandes puissances, a mis en valeur l'intérêt des méthodes dites numériques, celles-ci font appel à des techniques de discrétisation. En effet, elles transforment les équations aux dérivées partielles du champ en un système d'équations algébriques compte tenu des conditions aux limites. Dans les formulations issues de la physique de l'électrotechnique, on peut citer Les principales méthodes numériques : La méthode des différences finies (MDF), la méthode des éléments finis (MEF), la méthode des intégrales de frontières (MIF) et la méthode des volumes finis (MVF).

La méthode des différences finies (MDF) consiste à transformer par un développement en série de TAYLOR l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences [Chentouf 94], [Piskounov 80], elle exige un schéma de maillage très fin, qui peut ainsi se traduire par un coût de calcul exagéré. Elle est simple à formuler et peut aisément être étendue à des problèmes à deux ou trois dimensions. Cette méthode permet d'obtenir des résultats satisfaisants dans de nombreux problèmes comme elle possède la simplicité de la formulation numérique, mais elle reste limitée aux configurations à géométrie régulière, donc, relativement trop simple.

La méthode des éléments finis (MEF) est très puissante pour la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) surtout dans les géométries complexes et quelques soient les conditions physiques de fonctionnements [Mekideche 93]. Cette méthode est considérée comme la méthode la plus performante et la plus puissante, très utilisée dans la modélisation,

bidimensionnelle et tridimensionnelle, elle consiste à mailler l'espace en régions élémentaires dans lesquelles on représente la grandeur recherchée par une approximation polynomiale. La (MEF) nécessite une mémoire importante des calculateurs, car elle conduit à des systèmes algébriques de grande taille. La mise en œuvre des équations aux dérivées partielles en électromagnétisme par cette méthode est très utilisée, mais elle requiert une grande capacité de mémoire et un temps de calcul important. C'est pourquoi nous sommes lancés dans le développement d'une autre méthode numérique, plus simple à concevoir que la MEF et qui offre les avantages de cette méthode, surtout sa capacité à modéliser les géométries complexes. Il s'agit de la méthode des volumes finis MVF qui fait l'objet de ce travail de thèse.

II.4.2. La méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis (MVF), appliquée dans divers problèmes de la physique, commence à prendre place ces dernières années pour la résolution des problèmes d'électrotechnique [Patankar 80]. Cette méthode est utilisée pour la modélisation en mécanique des fluides, transfert thermique, électromagnétisme ...etc. L'analyse mathématique de la MVF a permis de développer les principes fondamentaux qui font d'elle une méthode de discrétisation performante. Dans [Depeyre 97], la méthode (MVF) est introduite dans le traitement de problèmes 2D de la mécanique de fluide, aussi on la retrouve dans les problèmes d'écoulement [Vohralik 04]. Egalement Cette méthode commence à prendre une place significative dans la simulation numérique des problèmes de l'électromagnétisme. Elle a largement été étudiée par l'équipe de l'institut INRIA dans la résolution des problèmes de propagation d'ondes [Cioni 97]. On trouve aussi les applications de la MVF dans les problèmes d'électrostatique [Davies 96]. La méthode des volumes finis a été présentée dans [Yaoqin 01] comme méthode pour le calcul des courants induits. Elle a également été traitée par [Zou 04] pour le calcul des courants induits avec la formulation $T-\Phi$ où le maillage en éléments hexaédriques est considéré.

Enfin le remplacement de la MEF par la MVF dans le développement des codes de calculs à L'ONERA « Office national d'études et de recherches aérospatiales » par exemple, ils ont développé le code (EMicroM), dédiés à l'étude des minimiser l'énergie micro magnétiques [Labbé 98].

La méthode des volumes finis (MVF), consiste à subdiviser le domaine d'étude Ω en volumes élémentaires (tétraèdres, hexaèdres, prismes...etc.) de telle manière que chaque

volume entoure un nœud (Fig. II.4). L'équation EDP du problème est intégrée sur un volume élémentaire. Afin de calculer l'intégrale sur ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, exponentielle, ...etc.) entre deux nœuds consécutifs. Ensuite, la forme intégrale est discrétisée dans le domaine d'étude. Par rapport aux éléments finis, la discrétisation par la méthode des volumes finis conduit à un système linéaire avec une matrice plus creuse. Cet avantage permet une convergence plus rapide des solveurs itératifs.

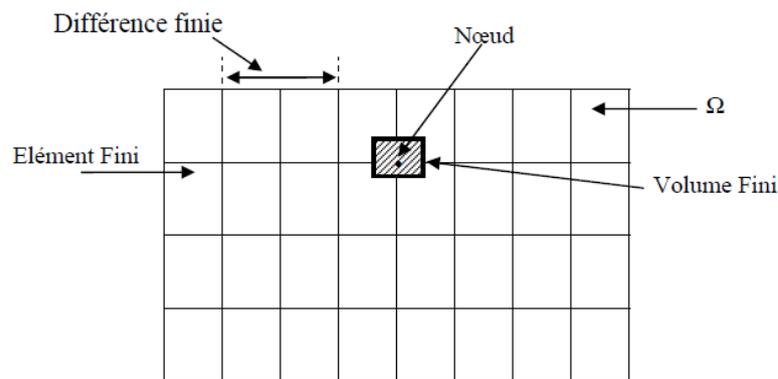


Fig.II.4. Maillage du domaine d'étude.

Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons à donner une extension de l'utilisation de la MVF notamment dans la modélisation tridimensionnelle des problèmes électromagnétique, la première méthode basée sur le maillage cartésien méthode des volumes finis classiques est notée 'MVFC', et la deuxième méthode basée sur le maillage non-structuré méthode des volumes finis modifiée est notée 'MVFM'. Nous avons aussi développés et implémentés sous l'environnement Matlab, deux codes de calculs, chacun utilise une approche différente de la MVF, (MVFC, MVFM).

La MVFC est basée sur un maillage structuré, appelé aussi cartésien où les volumes élémentaires prennent une forme hexaédrique régulière ou cubique (voire figure II.5). La mise en œuvre du code numérique utilisant cette méthode demande une capacité de stockage d'informations raisonnable et reste relativement accessible. La MVFC utilise un type de discrétisation insuffisant pour l'étude d'objets complexes de forme courbe et Certaines informations sur le maillage, telles que le barycentre, la normale des faces ou encore le volume des mailles sont connues par l'utilisateur, cela ne demande donc pas de pré-traitements particuliers (voire chapitre suivant). Donc nous restons relativement limités pour modéliser des objets de type sphère avec des hexaèdres réguliers, seule une discrétisation très

fine permet de suivre la géométrie entraînant automatiquement un nombre de mailles élevé et défavorisant ainsi le temps de calcul.

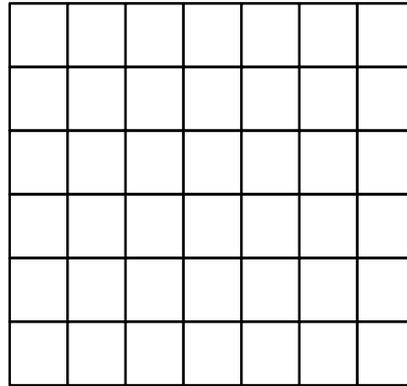


Fig.II.5. Maillage structuré, vue 2D.

La MVFM est basée sur un maillage non-structuré où les volumes élémentaires prennent une forme tétraédrique (voire prismatique, (voire figure II.6). Le schéma Volumes Finis dans ce type de code assure une description conforme de la géométrie de l'objet. La prise en compte des zones de géométries très complexes se fera de façon plus naturelle et surtout plus précise sans que le maillage ne soit trop lourd en nombre de volumes. Il a été montré [Bonnet 97] que le temps de calcul d'une application était moins important en maillage "non-structuré" qu'en maillage "cartésien" grâce essentiellement à un nombre de mailles moins important. Par conséquent, la modélisation électromagnétique se fait sans restriction géométrique grâce à l'apport d'un mailleur fournissant au code numérique les données nécessaires. La mise en ouvre des deux méthodes sera présentée dans le chapitre suivant.

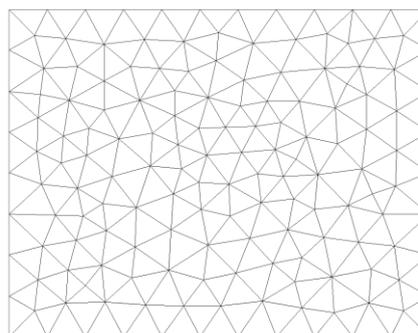


Fig.II.6. Maillage non structuré, vue 2D.

Chapitre III

Mise en œuvre de la méthode des volumes finis

III.1. Introduction

III.2. Méthode des volumes finis tridimensionnels avec un maillage cartésien (MVFC)

III.2.1. Discrétisation des équations électromagnétiques par la MVFC

III.2.1.1. Intégration de $\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A})$

III.2.1.2. Intégration de $\nabla (\nu \nabla \cdot \mathbf{A})$

III.2.1.3. Intégration du terme source

III.2.1.4. Intégration du terme $\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right)$

III.2.1.5. Intégration de l'équation en divergence

III.3. Méthodes numériques de résolution

III.3.1. Méthodes directes

III.3.2. Méthodes itératives

III.4. Méthode des volumes finis tridimensionnelle avec un maillage non-structuré (MVFM)

III.4.1. Définition du maillage

III.4.2. Discrétisation des équations électromagnétiques par la MVFM

III.4.2.1. Intégration de $\nu \Delta \mathbf{A}$

III.4.2.2. Intégration de $\nabla (\nu) \times \nabla \times \mathbf{A}$

III.4.2.3. Intégration de $\left\langle \left[\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right] \right\rangle_x$

III.4.2.4. Intégration du terme source

III.4.2.5. Intégration de l'équation en divergence

III.5. Algorithmes de résolution des problèmes électromagnétiques

Nous présentons dans ce chapitre un aperçu sur la méthode des volumes finis (MVF), utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles, caractéristiques des phénomènes physiques traités dans les systèmes électromagnétiques. Deux approches de la MVF seront présentées, la première basée sur un maillage structuré et la deuxième basée sur un maillage non structuré. Nous présentons aussi les méthodes de résolutions des systèmes d'équations algébriques obtenus après avoir appliqué la MVF. Nous exposerons à la fin de ce chapitre, les différents modes, utilisés pour la résolution des problèmes électromagnétique 3D, ainsi, que le code de calcul développé et implémenté sous l'environnement MATLAB en décrivant ses fonctions.

III.1. Introduction

La MVF a connu un essor considérable non seulement pour la modélisation en mécanique des fluides, mais aussi pour la modélisation d'autres branches de l'ingénierie scientifique : transfert thermique, électromagnétisme...etc. L'analyse mathématique de la MVF a récemment permis de développer les principes fondamentaux qui font d'elle une méthode de discrétisation performante. Cette méthode commence à prendre une place significative dans la simulation numérique des problèmes de l'électromagnétisme. Très utilisée par l'équipe de l'institut INRIA dans la simulation des phénomènes de propagation d'ondes (électromagnétisme, acoustique) par exemple [Remaki 98], et dans d'autres applications telles que : les problèmes d'électrostatique [Davies 96], la magnéto-statique [Zou 04], l'électrothermique [Ioan 06] où la MVF a été utilisée pour l'optimisation des contacts démontables de forts courants et enfin le remplacement de la MEF par la MVF dans le développement des codes de calculs à L'ONERA « Office national d'études et de recherches aérospatiales » par exemple, ils ont développé le code, "EMicroM", dédiés à l'étude des minimiser l'énergies micro magnétiques [Labbé 98].

L'idée de base de la méthode volumes finis est de partitionner le domaine de calcul en sous domaines (ou en volumes élémentaires) grâce à un maillage initial de type éléments finis. L'ensemble de ces volumes élémentaires constitue donc le domaine de calcul complet. Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent, l'utilisateur a le libre choix pour partitionner son domaine de calcul. Le maillage n'est pas unique, on distingue deux types de maillage : un noté "structuré" ou "cartésien" et un autre noté "non-structuré".

Le principe de la méthode des volumes finis (MVF) est basé sur le calcul de la forme intégrale de l'équation EDP, comme dans le cas de la loi de Gauss pour le champ électrostatique et la loi d'Ampère pour la magnétostatique. Donc on note une signification physique de la méthode plus explicite que dans le cas des autres méthodes numériques. La grande simplicité de sa mise en œuvre a fait que la MVF a connu un essor fulgurant depuis les années quatre vingt.

Dans ce travail de thèse, nous proposons deux approches différentes de la méthode des volumes finis MVF, la première basée sur un maillage structuré (Fig.II.1), méthode des volumes finis classiques est notée 'MVFC', La deuxième approche, basée sur un maillage non-structuré (Fig.II.2), méthode des volumes finis modifiée est notée 'MVFM'.

III.2. Méthode des volumes finis tridimensionnels avec un maillage cartésien (MVFC)

La méthode des volumes finis classiques notée 'MVFC' est basée sur un maillage structuré (Fig.II.1), elle consiste à subdiviser le domaine de calcul en volumes élémentaires de forme quadrilatère pour les applications en deux dimensions et de forme hexaédrique pour les applications en trois dimensions. C'est une discrétisation de type Différences Finies ("marches d'escaliers") qui facilite la construction du maillage.

Nous présentons dans cette partie la mise en œuvre de la méthode des volumes finis classiques (MVFC), utilisée pour la discrétisation des équations aux dérivées partielles des phénomènes électromagnétiques. Le maillage cartésien ou structuré, est constitué de volumes élémentaires de forme hexaédrique ou cubique. A chaque volume D_p de forme hexaédrique, on associe un nœud dit principal P et six facettes : e et w selon la direction x , n et s selon la direction y , t et b selon la direction z (Fig.III.1). Les volumes voisins de D_p , sont représentés par leurs nœuds voisins proches : E et W suivant l'axe x , N et S suivant l'axe y , T et B suivant l'axe z .

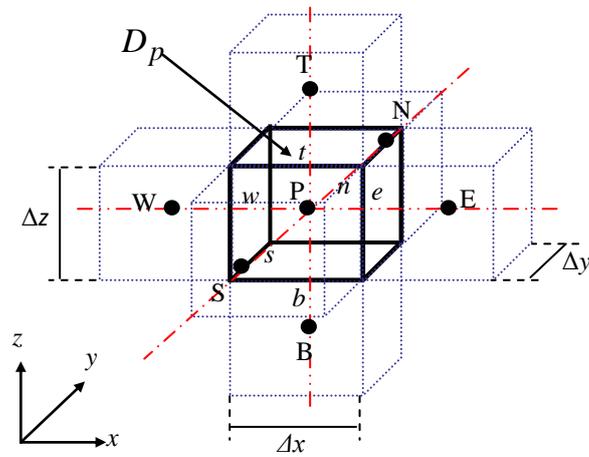


Fig.III.1. Volume fini élémentaire D_p .

III.2.1. Discrétisation des équations électromagnétiques par la MVFC

La MVFC intègre sur chaque volume élémentaire D_p , de volume $d\tau = dx dy dz$, les équations des problèmes à résoudre. Elle fournit ainsi d'une manière naturelle des formulations discrètes.

Rappelons la formulation tridimensionnelle des équations électromagnétiques en potentiels \mathbf{A} - V donnée précédemment par (II.26) :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) - \nabla (\nu \nabla \cdot \mathbf{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) &= \mathbf{J}_s \\ \nabla \cdot \left(-\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

L'application de la MVFC consiste à intégrer les équations différentielles du système (III.1) dans chaque volume élémentaire D_p correspondant au nœud principal P :

$$\begin{aligned} \iiint_{D_p} \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) d\tau - \iiint_{D_p} \nabla (\nu \nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau + \iiint_{D_p} \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) d\tau &= \iiint_{D_p} \mathbf{J}_s d\tau \\ \iiint_{D_p} \nabla \cdot \left(-\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right) d\tau &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Pour calculer les intégrales du système d'équations (III.2), chaque opérateur différentiel doit être développé puis projeté sur les trois axes x , y et z du référentiel. Dans le but d'alléger les

développements, par la suite, on va seulement présenter la méthode pour une seule composante.

III.2.1.1. Intégration de $\nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A})$

$$\begin{aligned} & \iiint_{d\tau} \langle \nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A}) \rangle_y d\tau \\ &= \iiint_{wsb}^{ent} \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (III.3)$$

Les quatre termes différentiels dans (III.3), peuvent être représentés par une forme générale donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial i} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_j}{\partial k} \right) \text{ avec } i, j, k = x, y, z \quad (III.4)$$

Tenant compte de cette écriture, on distingue deux cas ; $i = k$ et $i \neq k$. Soit par exemple le calcul du quatrième terme dans (III.4) et qui correspond à $i = k = z$ et $j = y$:

$$\begin{aligned} & \iiint_{wsb}^{ent} \left[\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\ &= \iint_{ws}^{en} \left[\left\{ \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right\} \right]_b^t dx dy \\ &= \left[\left\{ \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right\} \right]_t - \left[\left\{ \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right\} \right]_b \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (III.5)$$

Considérons une variation linéaire du potentiel magnétique à travers les facettes t et b (Fig.III.2).

Pour calculer les termes $\left(\left[\left\{ \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right\} \right]_t \right), \left(\left[\left\{ \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right\} \right]_b \right)$ dans (III.5), on considère une

variation linéaire du potentiel magnétique à travers les facettes t et b (Fig.III.2), on peut écrire :

$$\left\{ \mathbf{v} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right\} \Big|_t = v_t \frac{A_y^T - A_y^P}{\Delta z_t} \quad (\text{III.6})$$

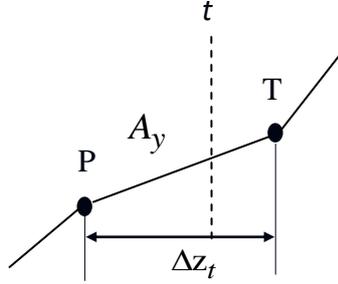


Fig.III.2. Approximation linéaire du potentiel à travers la facette t .

De même, on exprime la dérivée sur la facette b . Remplaçant ces dérivées dans (III.5), on aura la combinaison linéaire suivante :

$$c_t A_y^T + c_b A_y^B - (c_t + c_b) A_y^P \quad (\text{III.7})$$

tel que :

$$c_m = v_m \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z_m} \text{ pour } m = t, b \quad (\text{III.8})$$

Où : v_t : réductivités magnétiques du facette t .

v_b : réductivités magnétiques du facette b .

où v_t et v_b sont respectivement, les réductivités magnétiques des facettes t et b .

de la même manière présentée précédemment, on développe le deuxième terme dans (III.3) qui correspond à $i = k = x$. Pour le développement du premier et du troisième terme dans (III.3), c'est à dire les termes qui correspondent à $i = x, k = y$ et à $i = z, k = y$ respectivement, le problème de la MVFC se pose.

Dans le cas de la formulation (III.2), le terme en rotationnel $\nabla \times (\mathbf{v} \nabla \times \mathbf{A})$ et le terme en gradient $\nabla (\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{A})$ ne présentent pas une forme en divergence exigée par la formulation classique de la MVF, en effet, la méthode des volumes finis dans son origine, été dédiée à la

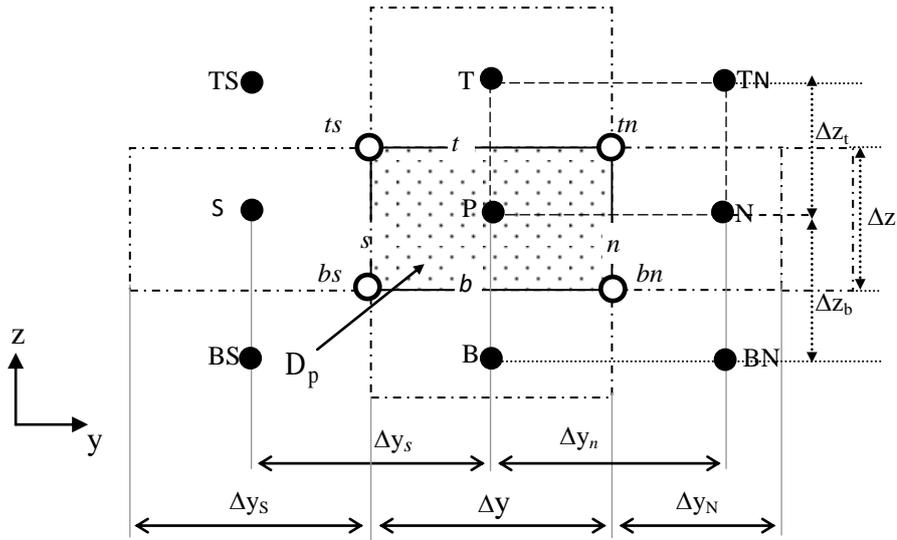
résolution des problèmes thermiques définis essentiellement par des équations aux dérivées partielles où les opérateurs prennent essentiellement une forme en divergence [Patankar 82].

Pour prendre en compte de l'effet des opérateurs rotationnel et gradient qui apparaissent dans la formulation électromagnétique, il est nécessaire d'implémenter huit nœuds supplémentaires en plus de ceux de base [Alloui 09^b] dans le volume élémentaire D_P représentée dans la figure III.1. Dans ce cas, le nœud principal P de chaque volume élémentaire est entouré par quatorze nœuds voisins (les nœuds de base : W, E, N, S, T, B et les nœuds supplémentaires : $TW, TE, TS, TN, BW, BE, BS, BN, NE, NW, SE$ et SW) au lieu de six nœuds voisins comme il est indiqué dans la figure III.3. Cette modification permet alors de discrétiser les deux termes de la formulation électromagnétique (III.2) dans le cas tridimensionnel.

Si on considère maintenant le premier terme dans (III.3) soit pour $i = j = x$ et $k = y$:

$$\int \int \int_{w s b}^{e n t} \left[\frac{\partial}{\partial x} v \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] dx dy dz$$

$$= \left\{ v \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right\}_w^e \Delta y \Delta z \quad (\text{III.9})$$



- Nœuds supplémentaires
- Nœuds de base

Fig.III.3. Illustration des nœuds supplémentaires, en haut de la figure, la structure du volume élémentaire modifié en 3D, en bas de la figure, la projection d'un volume élémentaire suivant le plan XY.

A partir de cette modification proposée, la dérivée du potentiel A_x dans les facettes e et w peut être exprimée par :

$$\left\{ v \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right\}_e = v_e \frac{A_x^{ne} - A_x^{se}}{\Delta y} \quad (\text{III.10})$$

Les potentiels A_x^{ne} et A_x^{se} dans les nœuds supplémentaires ne et se sont exprimés en fonction des potentiels des nœuds de base voisins :

$$A_x^{ne} = \frac{1}{4} \left(A_x^P + A_x^E + A_x^N + A_x^{NE} \right) \quad (\text{III.11})$$

De même :

$$A_x^{se} = \frac{1}{4} \left(A_x^P + A_x^E + A_x^S + A_x^{SE} \right) \quad (\text{III.12})$$

D'où :

$$\left\{ v \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right\}_e = \frac{1}{4\Delta y} v_e \left(A_x^N + A_x^{NE} - A_x^S - A_x^{SE} \right) \quad (\text{III.13})$$

De la même manière, on peut calculer la dérivée du potentiel dans la facette w . Après arrangement, le terme (III.9) aboutit à une combinaison linéaire donnée par la forme suivante :

$$q_e \left(A_x^N + A_x^{NE} - A_x^S - A_x^{SE} \right) - q_w \left(A_x^N + A_x^{NW} - A_x^{SW} - A_x^S \right) \quad (\text{III.14})$$

$$q_m = \frac{1}{4} v_m \Delta z \quad \text{pour } m = e, w$$

De la même manière, on intègre les autres termes dans l'équation (III.3).

III.2.1.2. Intégration de $\nabla(v\nabla \cdot \mathbf{A})$

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} \langle \nabla(v\nabla \cdot \mathbf{A}) \rangle_y d\tau \\ &= \iiint_{w s b}^e n t \left[\frac{\partial}{\partial y} v \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} v \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} v \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Les trois termes de l'équation différentielle (III.15) peuvent être écrits sous la forme générale (III.4). on peut intégrer cette équation différentielle (III.15) par la MVFC comme décrit précédemment. Le résultat de cette intégrale mène à une combinaison linéaire, qu'on peut les mettre sous la forme :

$$(c_n + c_s) A_y^P + \sum_{\substack{i=x, y, z \\ m=e, w... \\ M=E, W...}} q_m A_i^M \quad (\text{III.16})$$

Où

$$c_m = v_m \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y_m} \quad \text{pour } m = n, s \quad (\text{III.17})$$

$$q_m = \frac{1}{4} v_m \Delta z \quad \text{pour } m = e, w$$

III.2.1.3. Intégration du terme source

Supposant que la distribution du courant source est uniforme et constante dans le volume élémentaire D_P , on peut alors écrire :

$$\iiint_{D_P} \langle \mathbf{J}_s \rangle_y dx dy dz = J_{sy} \Delta x \Delta y \Delta z \quad (\text{III.18})$$

III.2.1.4. Intégration du terme $\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right)$

$$\begin{aligned} & \iiint_{w s b}^{e n t} \left\langle \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right\rangle_y dx dy dz \\ &= \sigma_p \left(\frac{\partial A_y^P}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_P \right) \Delta x \Delta y \Delta z \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Dans notre travail ce terme exprime les courants induits dans les matériaux conducteurs où σ_p représente alors la valeur de la conductivité électrique apparente dans chaque nœud principal P. Dans (III.19) la dérivée du potentiel V au nœud P doit être exprimée par une différence de potentiels aux facettes, n et s . Et comme les facettes, n et s , sont situées sur les médianes des segments P-N et P-S, respectivement, cette dérivée devient :

$$\frac{\partial V}{\partial y} \Big|_P = \frac{V^N - V^S}{\Delta y_n + \Delta y_s} \quad (\text{III.20})$$

En regroupant tout les termes développés précédemment, on aboutit à l'équation algébrique (III.21). Cette équation exprime la composante suivant y du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} dans chaque nœud principal P (A_y^P) du maillage en fonction des potentiels A_x , A_y , A_z et V des nœuds voisins :

$$c_p A_y^P + \sigma_p D_p A_y^{\bullet P} = \left[\sum_{m=e, w, \dots} c_m A_y^M + \sum_{\substack{i=x, z \\ m=e, w, \dots}} q_m A_i^M + \frac{\sigma_p D_p}{\Delta y_n + \Delta y_s} (V^N - V^S) + J_{sy} D_p \right] \quad (\text{III.21})$$

avec

$$A_{i(i=x, y, z)}^{\bullet P} = \frac{\partial A_i^P}{\partial t} \quad (i = x, y, z), \quad c_p = \sum_{m=e, w, \dots} c_m \quad (\text{III.22})$$

De la même manière les deux composantes x et z du potentiel vecteur magnétique A seront calculées :

$$c_p A_x^P + \sigma_p D_p A_x^{\bullet P} = \left[\sum_{m=e, w, \dots} c_m A_x^M + \sum_{\substack{i=y, z \\ m=e, w, \dots}} q_m A_i^M + \frac{\sigma_p D_p}{\Delta x_e + \Delta x_w} (V^E - V^W) + J_{sx} D_p \right] \quad (\text{III.23})$$

$$c_p A_z^P + \sigma_p D_p A_z^{\bullet P} = \left[\sum_{m=e, w, \dots} c_m A_z^M + \sum_{\substack{i=x, y \\ m=e, w, \dots}} q_m A_i^M + \frac{\sigma_p D_p}{\Delta z_t + \Delta z_b} (V^T - V^B) + J_{sz} D_p \right] \quad (\text{III.24})$$

III.2.1.5. Intégration de l'équation en divergence

Pour la discrétisation de la deuxième équation aux dérivées partielles du système (III.2), la MVFC est utilisée aussi. L'intégration de cette équation dans chaque volume élémentaire D_P qui correspond au nœud principal P donne :

$$\begin{aligned} & \iiint_{wsb}^{ent} \nabla \cdot \left[\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right] dx dy dz \\ &= \iiint_{wsb}^{ent} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma \left(A_x^{\bullet} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma \left(A_y^{\bullet} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma \left(A_z^{\bullet} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \right\} dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

L'intégration, du premier terme de (III.25) donne :

$$\left[\sigma_e \left(A_x^{\bullet e} + \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_e \right) + \sigma_w \left(A_x^{\bullet w} + \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_w \right) \right] \Delta y \Delta z \quad (\text{III.26})$$

En approximant le potentiel vecteur magnétique A_x aux facettes e et w par des combinaisons linéaires des potentiels aux nœuds voisins (par exemple A_x^e par la moyenne des potentiels aux nœuds E et W), et en considérant une variation linéaire du potentiel V entre les facettes e et w , l'expression(III.26) conduit à :

$$\left[\sigma_e \left(\frac{1}{2} (A_x^{\bullet E} + A_x^{\bullet P}) + \frac{V^E - V^P}{\Delta x_e} \right) + \sigma_w \left(\frac{1}{2} (A_x^{\bullet P} + A_x^{\bullet W}) + \frac{V^P - V^W}{\Delta x_w} \right) \right] \Delta y \Delta z \quad (\text{III.27})$$

De la même manière, on peut calculer les autres termes dans l'équation(III.25).

Finalement en regroupant tout ces termes développés précédemment, nous obtenons l'équation algébrique (III.28) qui exprime le potentiel scalaire électrique V au nœud P :

$$V^P = \frac{1}{u_p} \left[\sum_{m=e, w, \dots} u_m V^M + \sum_{\substack{i=x, y, z \\ m=e, n, \dots}} c_{v_m} A_i^{\bullet M} \right] \quad (\text{III.28})$$

Avec (par exemple pour $m = e$) :

$$c_{v_e} = \frac{1}{2} \sigma_e \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x_e}, \quad u_e = \sigma_e \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x_e} \quad (\text{III.29})$$

et

$$u_p = \sum_{m=e, w, \dots} u_m \quad (\text{III.30})$$

Finalement les équations (III.21), (III.23), (III.24) et (III.28) sont réécrites pour l'ensemble des éléments de maillage, ensuite elles sont assemblées et nous obtenons un système d'équations qu'on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [M_1] & [0] \\ [M_2] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}} \\ \dot{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [N_{11}] & [N_{12}] \\ 0 & [N_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.31})$$

Ou sous une forme condensée :

$$[M] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}} \\ \dot{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + [N] \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.32})$$

Avec

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ V \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [J_s] = \begin{bmatrix} J_{sx} \\ J_{sy} \\ J_{sz} \end{bmatrix}$$

III.3. Méthodes numériques de résolution

Pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires, il existe deux familles de méthodes : les méthodes directes et les méthodes itératives.

III.3.1. Méthodes directes

Ces méthodes sont applicables pour les systèmes linéaires de petite taille. Elles sont précises et exactes mais demandent beaucoup d'espace mémoire et temps de calcul. Parmi les méthodes directes nous citons : Méthode d'Euler, Cramer, Gauss, Jordon, Crout, ...etc.

Pour la résolution du système algébrique non-linéaire(III.32) à chaque pas de temps la méthode d'Euler est utilisée. On introduit pour cela une suite de vecteurs \mathbf{A}^m , \mathbf{V}^m et T^m . Ces vecteurs sont une approximation de $\mathbf{A}(m\Delta t)$, $\mathbf{V}(m\Delta t)$ et $T(m\Delta t)$. La méthode d'Euler est la méthode la plus simple qui fait intervenir un paramètre θ compris entre 0 et 1 [Nougier].

Elle consiste à remplacer l'équations (III.32) par le schéma suivant :

$$[M] \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{A}^{m+1} - \mathbf{A}^m}{\Delta t} \\ \frac{\mathbf{V}^{m+1} - \mathbf{V}^m}{\Delta t} \end{bmatrix} + [N] \begin{bmatrix} \theta \mathbf{A}^{m+1} + (1-\theta) \mathbf{A}^m \\ \theta \mathbf{V}^{m+1} + (1-\theta) \mathbf{V}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \mathbf{J}_s((m+1)\Delta t) + (1-\theta) \mathbf{J}_s(m\Delta t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.33})$$

$$[C] \left[\frac{T^{m+1} - T^m}{\Delta t} \right] + [K] [\theta T^{m+1} + (1 - \theta) T^m] = [\theta Q((m+1)\Delta t) + (1 - \theta) Q(m\Delta t)] \quad (\text{III.34})$$

Pour $\theta = 0$, la méthode est explicite. Elle nécessite de choisir un pas de temps Δt suffisamment petit sinon la solution devient instable. Pour $\theta = 1$, la méthode est implicite, elle est inconditionnellement stable [Pelletier] Pour cette raison et après plusieurs tests numériques, elle semble être un bon compromis entre rapidité de convergence du processus itératif et stabilité numérique. Avec cette méthode ($\theta = 1$), la solution est obtenue implicitement comme solution d'un système non linéaire que l'on va résoudre par la méthode de Gauss-Seidel non linéaire.

Ce système est tel que :

$$[M] \left[\frac{A^{m+1} - A^m}{\Delta t} \right] + [N] \left[\begin{matrix} A^{m+1} \\ V^{m+1} \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} J_s((m+1)\Delta t) \\ 0 \end{matrix} \right] \quad (\text{III.35})$$

$$[C] \left[\frac{T^{m+1} - T^m}{\Delta t} \right] + [K] [T^{m+1}] = [Q((m+1)\Delta t)] \quad (\text{III.36})$$

III.3.2. Méthodes itératives

Ces méthodes sont mieux adaptées aux matrices creuses de grande taille. Parmi ces méthodes, nous citons : Méthode de Jacobi, Gauss Seidel, relaxation.

Après discrétisation des équations aux dérivées partielles des phénomènes électromagnétiques et thermiques par la méthode des volumes finis, le problème se ramène à l'inversion de systèmes d'équations matricielles (III.35) et (III.36). Du fait que ces systèmes sont souvent de grandes tailles, il devient alors impossible de les inverser par une méthode directe. D'où la nécessité d'utiliser des méthodes de résolution itératives. Ces méthodes sont particulièrement utilisées pour la résolution des systèmes ayant des matrices de rang élevé, comportant de nombreux éléments nuls (matrice creuses), ils font passer d'un estimé $X^{(k)}$ de la solution à un autre estimé $X^{(k+1)}$ de cette solution.

Parmi ces méthodes nous avons utilisée la méthode de Gauss-Seidel. Cette méthode consiste à transformer le système algébrique, comme par exemple, $[B] [X] = [D]$ en :

$$X_i^{(k+1)} = \left[d_i - \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=(i+1)}^n b_{ij} X_j^k \right] / b_{ij} \quad (III.37)$$

$i = 1, \dots, n$

En donnant aux inconnues X_i^k des valeurs arbitraires initiales X_i^0

Le processus sera arrêté si,

$$\left| X_i^{k+1} - X_i^k \right| < \varepsilon \quad (III.38.a)$$

dans le cas d'une précision absolue et

$$\frac{\left| X_i^{k+1} - X_i^k \right|}{\left| X_i^k \right|} < \varepsilon \quad (III.38.b)$$

et dans le cas d'une précision relative. (ε est la précision imposée par l'utilisateur).

Dans le but d'accélérer le processus itératif, on a utilisé la méthode de sous relaxation telle que :

$$X_i^{(k+1)} = X_i^{(k)} + \alpha \left(X_i^{(k+1)} - X_i^{(k)} \right) \quad (III.39)$$

Ou α : le facteur de sous relaxation.

III.4. Méthode des volumes finis tridimensionnelle avec un maillage non-structuré (MVFM)

La méthode des volumes finis modifiée 'MVFM', c'est la deuxième approche utilisée dans ce travail de thèse, basée sur un maillage non-structuré (Fig.II.2.b) qui requiert un mailleur indépendant, spécifique, parfaitement adapté à l'algorithme numérique. Son rôle est de partitionner l'application étudiée en volumes élémentaires de forme aussi variée que des triangles (deux dimensions), tétraèdres ou prismes (trois dimensions). Le choix entre les deux méthodes (MVFC, MVFM) est basé essentiellement sur la géométrie du dispositif à modéliser. Si la géométrie possède une structure hexaédrique, l'application de la première approche (MVFC) est avantageuse en termes de temps de calcul et de simplicité. Par contre, cette première approche présente l'inconvénient de ne pas pouvoir modéliser des dispositifs ayant des géométries complexes. C'est véritablement tout l'intérêt de la deuxième approche

(MVFM) de la MVF, le maillage va suivre naturellement la forme de la structure, les géométries complexes seront modélisées de façon plus rigoureuse et plus conforme sans que cela ne génère un nombre de mailles trop important.

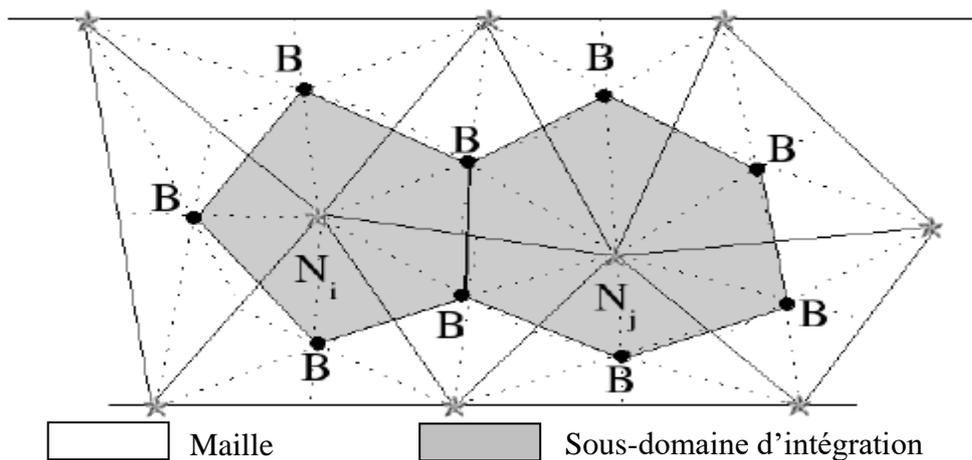
-Définition du sous domaine d'intégration

Les équations de Maxwell doivent être résolues et intégrées sous forme volumique à l'intérieur de chaque volume après réalisation du maillage bidimensionnel ou tridimensionnel.

On distingue au moins deux choix d'intégrations :

- Sous domaine d'intégration : méthodes 'nœuds centrés' figure III.4.

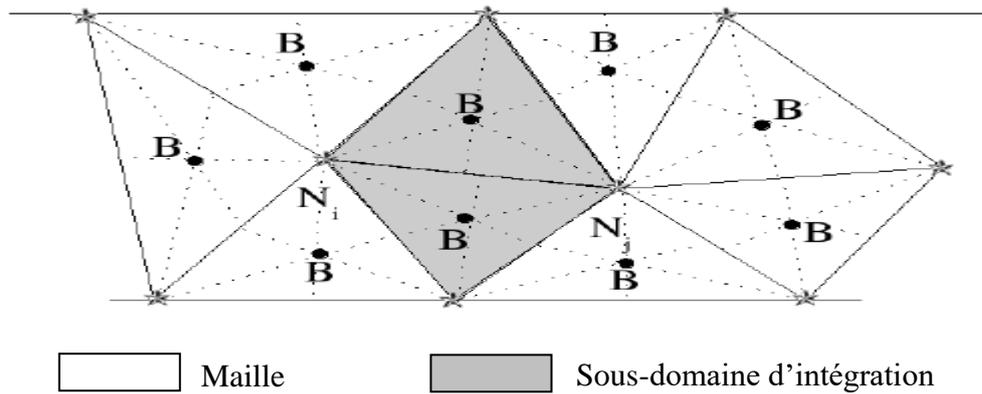
-Sous domaine d'intégration : méthodes 'éléments centrés' figure III.5.



B : Barycentres

N : Nœuds

Fig.III.4. Sous domaine d'intégration : méthodes 'nœuds centrés'.



B : Barycentres **N** : Nœuds

Fig.III.5. Sous domaine d'intégration : méthodes 'éléments centrés'.

La différence entre ces deux domaines d'intégration se situe en fait sur la localisation des inconnues dont on a deux formulations : la formulation dite "nœuds-centrés" ou "cell-vertex" et la formulation dite "éléments-centrés" ou "cell-centered".

-Formulation dite "nœuds-centrés" : cette formulation associe les composantes des champs électromagnétiques sur les nœuds de chaque volume, ainsi comme le montre la figure III.4, les sous-domaines d'intégration ne correspondent pas aux mailles constituant le volume de calcul mais définissent une figure reliant les barycentres de chaque volume adjacent aux nœuds. Les volumes d'intégrations ainsi obtenues ont souvent des géométries hexagonales. La validité, la précision ainsi que la stabilité ont été prouvées à travers divers codes utilisant cette approche [Bonnet 97] et [Cioni 95].

-Formulation dite "éléments-centrés" : comme le montre la figure III.5, dans cette formulation les champs électromagnétiques seront calculés au barycentre de chaque volume élémentaire, dont les sous-domaines d'intégration correspondent aux mailles initiales.

La prise en compte de la discontinuité entre deux milieux ou le traitement proche des conditions frontières se font de façon plus naturelle dans le cas des deux formulations (formulation dite "nœuds-centrés", formulation dite "éléments-centrés").

Dans le cadre de cette thèse, le choix s'est porté sur l'approche des "nœuds centrés".

III.4.1. Définition du maillage

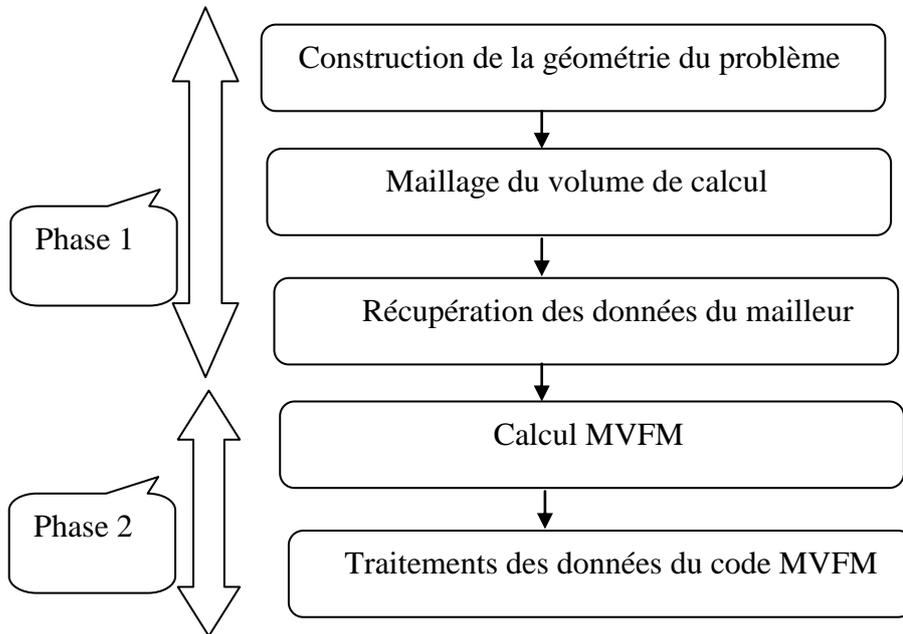


Fig.III.6. Schéma général du principe d'un code MVF.

Nous pouvons distinguer deux façons pour construire le maillage dual : la première formulation dite “ Méthode barycentrique ” comme le montre la figure III.7 et la deuxième formulation dite “ Méthode de Delauney – Voronoi ” figure III.8.

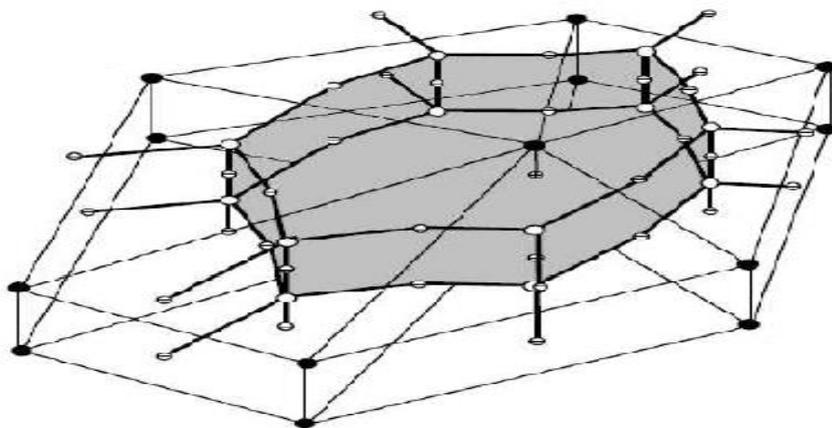


Fig.III.7. Exemple de construction d'un maillage dual de type barycentrique.

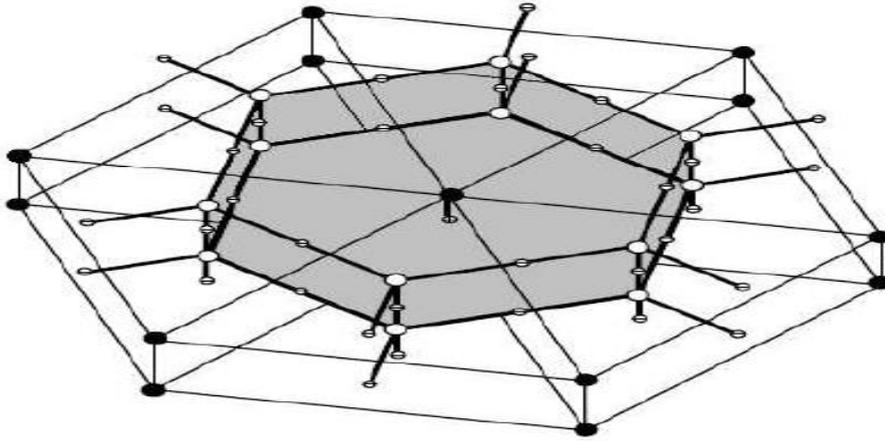


Fig.III.8. Exemple de construction d'un maillage dual de type Delauney-Voronoi.

Comme le montre la figure III.7 qui représente un exemple de maillage dual de type barycentrique dans le cas d'un maillage primal prismatique, pour la construction du maillage dual de ce type, Les nœuds duaux sont les centres de gravité des volumes primaux, ainsi que Les arêtes duales se décomposent en deux parties : on considère deux volumes primaux ayant une facette commune. On relie le nœud dual contenu dans le premier volume primal au centre de cette facette. On relie alors celui-ci au nœud dual contenu dans le deuxième volume primal. L'arête ainsi obtenue ne sera plus droite, mais aura une allure 'brisée'.

Ce type de maillage dual présente l'inconvénient d'avoir une discrétisation relativement complexe. Pour cette raison, nous avons opté pour l'utilisation du maillage dual de type Delauney Voronoi, comme le montre la figure III.8 qui représente un exemple du maillage dual de ce type dans le cas d'un maillage primal prismatique.

Pour construire le maillage de type Delauney Voronoi, il faut suivre les règles suivantes :

- Les nœuds duaux sont les centres des sphères circonscrites aux volumes primaux
- Les arêtes duales traversent les facettes primales orthogonalement et en leur milieu.

A titre d'exemple, la figure III.9 montre un maillage dual de type Delauney-Voronoi construit à partir du maillage développé sous l'environnement Matlab. Ce maillage est construit par élévation en tranches suivant l'axe Z. Le nombre d'élévation est égal à 25 avec un nombre total de nœuds, égal à 10800 nœuds [Alloui 07].

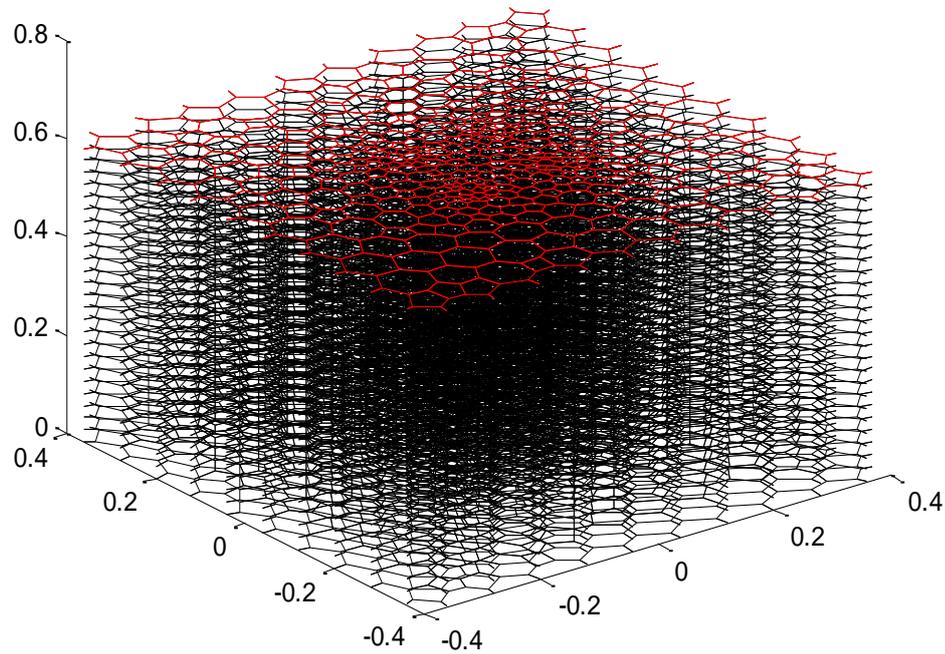


Fig.III.9. Maillage dual de type Delaunay-Voronoi en 3D.

III.4.2. Discrétisation des équations électromagnétiques par la MVFM

Rappelons d'abord la formulation tridimensionnelle des équations électromagnétiques en potentiels A-V données précédemment (chapitre II. §.II.3.1) par (II.31) :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) &= \mathbf{J}_s \\ \nabla \cdot \left[-\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.40})$$

En tenant compte des relations de l'analyse vectorielle, le premier terme à gauche de la première équation du système d'équations (III.40) s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nu) \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nu (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \nabla(\nu) \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nu (-\Delta \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})) \end{aligned} \quad (\text{III.41})$$

En introduisant la jauge de coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) dans (III.41), on obtient :

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nu) \times \nabla \times \mathbf{A} - \nu \Delta \mathbf{A}$$

(III.42)

Dans certains travaux [Alloui 07], pour la modélisation des problèmes ayant que des matériaux amagnétique, généralement, La perméabilité magnétique a une valeur constante dans tout le domaine à modéliser, sa valeur est prise égale à celle de l'air. Cela veut dire que $\nabla(\nu) \times (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, en remplaçant ce terme dans (III.42) on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla(\nu) \times \nabla \times \mathbf{A} - \nu \Delta \mathbf{A} \\ &= -\nu \Delta \mathbf{A} \end{aligned}$$

(III.43)

Il faut mentionner que cette simplification reste valable même dans le cas de la modélisation d'un problème ayant des matériaux magnétique linéaire. En effet, dans chaque région du dispositif étudié, la valeur de la perméabilité magnétique peut être considérée comme constante, donc $\nabla(\nu) \times \nabla \times \mathbf{A} = 0$, sauf aux interfaces, séparant deux régions de perméabilité magnétique différente. Dans ce cas, la valeur de la perméabilité magnétique dans l'interface peut prendre une valeur équivalente choisie d'une manière adéquate.

En introduisant l'expression de l'équation (III.42) dans le système d'équations (III.40), nous aboutissons à la formulation A-V décrite par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \nabla(\nu) \times \nabla \times \mathbf{A} - \nu \Delta \mathbf{A} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) &= \mathbf{J}_s \\ \nabla \cdot \left[-\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right] &= 0 \end{aligned}$$

(III.44)

Pour transformer le système d'équations aux dérivées partielles (III.44) en un système d'équations algébriques, la MVFM est utilisée. Ayant le même principe que la MVFC, la MVFM intègre sur chaque volume élémentaire D_P (Fig.III.10), de volume $d\tau = ds.dz$, les équations des problèmes à résoudre. L'intégration du système (III.44) dans chaque volume élémentaire D_P correspondant au nœud principal P mène à :

$$\begin{aligned} \iiint_{D_P} (\nabla(\nu) \times \nabla \times \mathbf{A}) d\tau - \iiint_{D_P} \nu \Delta \mathbf{A} d\tau + \iiint_{D_P} \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) d\tau &= \iiint_{D_P} \mathbf{J}_s d\tau \\ \iiint_{D_P} \nabla \cdot \left[-\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right] d\tau &= 0 \end{aligned}$$

(III.45)

Dans un souci d'alléger le développement, on ne considère par la suite que la composante x de la première équation vectorielle du système (III.45).

III.4.2.1. Intégration de $v\Delta A$

$$\iiint_{D_P} \langle v\Delta A \rangle_x d\tau = \iiint_{D_P} \nabla \cdot (v\nabla A_x) d\tau \quad (\text{III.46})$$

L'application du théorème d'Ostrogradsky nous permet de transformer l'intégrale volumique (III.46) à une intégrale surfacique :

$$\iiint_{D_P} \nabla \cdot (v\nabla A_x) d\tau = \oiint v\nabla A_x ds_t \quad (\text{III.47})$$

ds_t représente la surface fermée qui limite le volume fini D_P . Comme le montre la figure III.10, cette surface est constituée de plusieurs surfaces latérales (ds_{lai}), et de deux surfaces égales (ds), une située dans le niveau supérieur et l'autre située dans le niveau inférieur du volume D_P . De cela, l'équation (III.47) devient :

$$\iiint_{D_P} \nabla \cdot (v\nabla A_x) d\tau = \iint_{\sum ds_{lai}} v\nabla A_x ds_{lai} + \iint_{surfT} v\nabla A_x ds + \iint_{surfB} v\nabla A_x ds \quad (\text{III.48})$$

En considérons une variation linéaire du potentiel entre les facettes t et b (Fig.III.10), on peut calculer les flux à travers les surfaces, inférieure (S_B) et supérieure (S_T), dans l'équation (III.48) le flux dans chacune des surfaces S_B et S_T est donné par :

$$\iint v\nabla A_x ds \Big|_T = v_t \frac{A_x^T - A_x^P}{\Delta z_t} \Delta s \quad (\text{III.49})$$

$$\iint v\nabla A_x ds \Big|_B = -v_b \frac{A_x^P - A_x^B}{\Delta z_b} \Delta s \quad (\text{III.50})$$

Pour le calcul des flux à travers les surfaces latérales ($\sum ds_{lai}$), dans (III.48), vu la complexité du calcul des dérivées des potentiels suivant le référentiel (R) définis par les coordonnées (x, y) , il fallait ramener le calcul dans le référentiel (R'), ayant comme coordonnées ξ et η , rapporté aux éléments primaux comme il est montré sur la figure III.11.

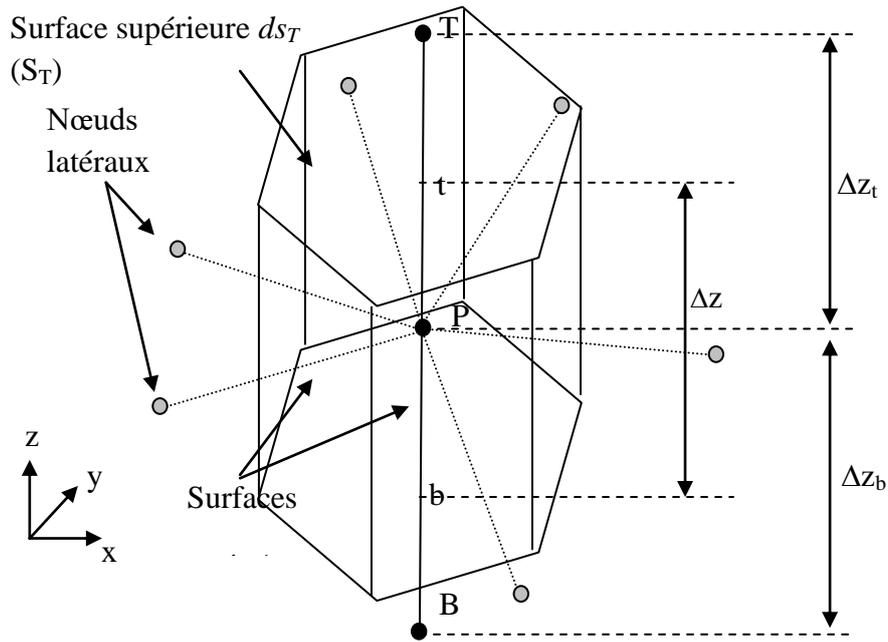


Fig.III.10. Volume fini élémentaire D_p .

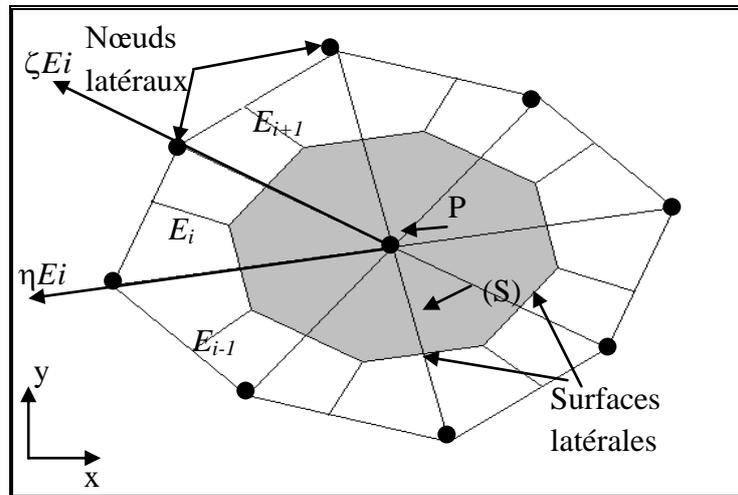


Fig.III.11. Projection d'un volume élémentaire suivant le plan XY.

Le potentiel magnétique A_x au nœud principal P dans chaque élément primal E_i peut être exprimé en fonction des potentiels magnétiques des nœuds latéraux voisins et en coordonnées locales (ξ, η) par la relation suivante :

$$A_{x_{PE_i}} = \eta A_{x_{\eta E_i}} + \zeta A_{x_{\zeta E_i}} + (1 - \eta - \zeta) A_{x_P} \quad (\text{III.51})$$

$Ax_{\eta Ei}$ et $Ax_{\zeta Ei}$ sont les potentiels magnétiques aux nœuds latéraux voisins du nœud principal P portés respectivement sur les deux axes ηEi et ζEi .

A partir de cette formulation, les dérivées du potentiel magnétique Ax dans chaque élément primal Ei peuvent être déduites par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Ax_{PEi}}{\partial \eta} &= Ax_{\eta Ei} - Ax_P \\ \frac{\partial Ax_{PEi}}{\partial \zeta} &= Ax_{\zeta Ei} - Ax_P \end{aligned} \quad (III.52)$$

La relation qui lie les dérivées d'une fonction φ dans le référentiel (R') en fonction de ces dérivées dans le référentiel (R) est donnée par [Dhatt 84] :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta, \eta} \right\} (\varphi) = [J] \left\{ \frac{\partial}{\partial x, y} \right\} (\varphi) \quad (III.53)$$

où $[J]$ est la matrice Jacobienne de la transformation géométrique. Les termes de $[J]$ sont définis par [Dhatt 84]:

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{\eta Ei} - x_P & y_{\eta Ei} - y_P \\ x_{\zeta Ei} - x_P & y_{\zeta Ei} - y_P \end{bmatrix} \quad (III.54)$$

Les couples $(x_{\eta Ei}, y_{\eta Ei})$ et $(x_{\zeta Ei}, y_{\zeta Ei})$ représentent les coordonnées des nœuds latéraux de chaque élément primal Ei entourant le nœud principal P, ayant les coordonnées (x_P, y_P) , suivant les deux axes ηEi et ζEi du référentiel (R') porté par chaque élément primal Ei .

Ayant déterminé les dérivées du potentiel magnétique Ax dans le référentiel (R') en ξ et η dans (III.52), le calcul des dérivées de Ax peut être ramené dans le référentiel (R) en fonction des coordonnées x et y en utilisant les relations (III.53) et (III.54) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial Ax_{PEi}}{\partial x} \\ \frac{\partial Ax_{PEi}}{\partial y} \end{bmatrix} &= [J]_{Ei}^{-1} \begin{bmatrix} Ax_{\eta Ei} - Ax_P \\ Ax_{\zeta Ei} - Ax_P \end{bmatrix} = [j]_{Ei} \begin{bmatrix} Ax_{\eta Ei} - Ax_P \\ Ax_{\zeta Ei} - Ax_P \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} j_{11Ei} & j_{12Ei} \\ j_{21Ei} & j_{22Ei} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ax_{\eta Ei} - Ax_P \\ Ax_{\zeta Ei} - Ax_P \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (III.55)$$

avec $[j]_{Ei} = [J]_{Ei}^{-1}$

Le développement de (III.55) mène aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Ax_{Ei}}{\partial x} &= ax_{\eta Ei} Ax_{\eta Ei} + ax_{\zeta Ei} Ax_{\zeta Ei} - (ax_{\eta Ei} + ax_{\zeta Ei}) Ax_P \\ \frac{\partial Ax_{Ei}}{\partial y} &= ay_{\eta Ei} Ax_{\eta Ei} + ay_{\zeta Ei} Ax_{\zeta Ei} - (ay_{\eta Ei} + ay_{\zeta Ei}) Ax_P \end{aligned} \quad (III.56)$$

Le flux à travers les surfaces latérales peut être réécrit de la façon suivante :

$$\iint_{\sum ds_{lai}} v \nabla A_x ds_{lai} = \iint_{\sum_{i=1 \dots n_{Ei}} ds_{laxi}} v \frac{\partial Ax_{Ei}}{\partial x} ds_{laxi} + \iint_{\sum_{i=1 \dots n_{Ei}} ds_{layi}} v \frac{\partial Ax_{Ei}}{\partial y} ds_{layi} \quad (III.57)$$

Les surfaces ds_{laxi} et ds_{layi} sont calculées comme montré dans la Fig.III.12.

n_{Ei} représente le nombre d'éléments primaux Ei entourant chaque nœud principal P (généralement $n_{Ei} = 8$). En remplaçant les dérivées du potentiel magnétique Ax données par (III.56) dans (III.57), on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{\sum ds_{lai}} v \nabla A_x ds_{lai} &= \iint_{\sum_{i=1 \dots n_{Ei}} ds_{laxi}} v (ax_{\eta Ei} Ax_{\eta Ei} + ax_{\zeta Ei} Ax_{\zeta Ei} - (ax_{\eta Ei} + ax_{\zeta Ei}) Ax_P) ds_{laxi} \\ &+ \iint_{\sum_{i=1 \dots n_{Ei}} ds_{layi}} v (ay_{\eta Ei} Ax_{\eta Ei} + ay_{\zeta Ei} Ax_{\zeta Ei} - (ay_{\eta Ei} + ay_{\zeta Ei}) Ax_P) ds_{layi} \end{aligned} \quad (III.58)$$

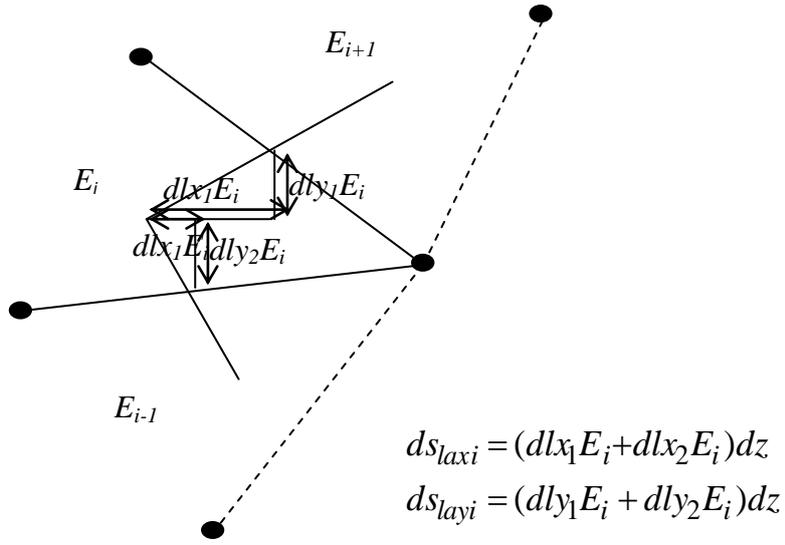


Fig.III.12. Calcul des surfaces ds_{laxi} et ds_{layi} .

Après intégration et arrangement de tous les termes dans (III.58), nous aboutissons à l'expression (III.59) qui exprime le flux à travers les surfaces latérales :

$$\iint_{\Sigma ds_{lai}} v \nabla A_x ds_{lai} = \sum_{i=1 \dots n_{Ei}} a_{\eta Ei} A_{x_{\eta Ei}} + \sum_{i=1 \dots n_{Ei}} a_{\zeta Ei} A_{x_{\zeta Ei}} - a_p A_{x_p} \quad (\text{III.59})$$

avec

$$a_{kEi} = v(ax_{kEi} + ay_{kEi}) \text{ pour } k = \eta, \zeta \text{ et } a_p = \sum_{k=\eta, \zeta} a_{kEi}$$

En remplaçant les termes des flux (III.49), (III.50) et (III.59), dans (III.48), on trouve :

$$\begin{aligned} \iiint_{D_p} \nabla \cdot (v \nabla A_x) d\tau &= \sum_{i=1 \dots n_{Ei}} a_{\eta Ei} A_{x_{\eta Ei}} + \sum_{i=1 \dots n_{Ei}} a_{\zeta Ei} A_{x_{\zeta Ei}} - a_p A_{x_p} + \\ &v_t \frac{A_x^T - A_x^P}{\Delta z t} \Delta s + v_b \frac{A_x^B - A_x^P}{\Delta z b} \Delta s \\ &= \left[\sum_{\substack{i=1 \dots n \\ m=\zeta, \eta}} a_{mEi} A_{x_{mEi}} + \sum_{\substack{J=T, B \\ j=t, b}} a_j A_x^J - \sum_{j=t, b} a_j A_x^P - a_p A_x^P \right] \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

avec

$$a_j = v_j \frac{\Delta s}{\Delta z_j} \text{ pour } j = t, b$$

III.4.2.2. Intégration de $\nabla(v) \times \nabla \times A$

On doit être développé chaque opérateur différentiel du terme $\nabla(v) \times \nabla \times A$, puis le projeté sur les trois axes x , y et z du référentiel.

$$\begin{aligned} \nabla(v) \times \nabla \times A &= \\ &= \left[\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] i + \left[\frac{\partial v}{\partial y} \left(-\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \right] j + \left[\frac{\partial v}{\partial z} \left(-\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] k \end{aligned} \quad (\text{III.61})$$

Dans chaque nœud principal P Dans (III.61) la dérivée du réluctivité magnétique $\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_p$ au

nœud P doit être exprimée par une différence de réluctivité magnétique aux facettes, e et w . Et comme les facettes, e et w , sont situées sur les médianes des segments P-E et P-W, respectivement comme montrées dans la Fig.III.13, cette dérivée devient :

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_p = \frac{v^E - v^W}{\Delta x_e + \Delta x_w} \quad (\text{III.62})$$

Où v^E et v^W sont respectivement, les réluctivités magnétiques aux nœuds E et W .

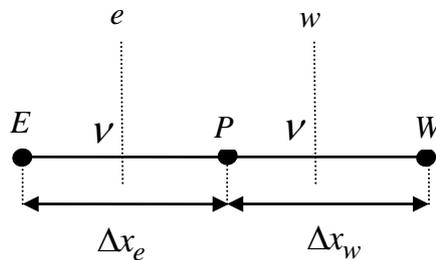


Fig.III.13. Approximation linéaire du réluctivité magnétique à travers les facettes e et w .

De la même façon, les dérivées du réluctivité magnétique $\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_p$ et $\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_p$ au nœud P pour les facettes, n et s , b et t sont données respectivement par :

$$\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_p = \frac{v^N - v^S}{\Delta y_n + \Delta y_s} \quad (\text{III.63})$$

Où v^N et v^S sont respectivement, les réluctivités magnétiques aux nœuds N et S .

$$\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_p = \frac{v^T - v^B}{\Delta z_t + \Delta z_b} \quad (\text{III.64})$$

Où v^T et v^B sont respectivement, les réluctivités magnétiques aux nœuds T et B .

L'intégration du terme $\nabla(v) \times \nabla \times \mathbf{A}$ dans chaque volume élémentaire D_P de volume $d\tau = ds \cdot dz$, correspondant au nœud principal P et dans le but d'alléger les développements, par la suite, on va seulement présenter la méthode pour la composante x , mène à :

$$\begin{aligned} \iiint_{D_P} (\nabla(v) \times \nabla \times \mathbf{A}) d\tau &= \iiint_{D_P} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] d\tau \\ &= \iiint_{D_P} \left[\left(\frac{v^E - v^W}{\Delta x_e + \Delta x_w} \right) \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \right] d\tau - \iiint_{D_P} \left[\left(\frac{v^E - v^W}{\Delta x_e + \Delta x_w} \right) \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right] d\tau \end{aligned} \quad (\text{III.65})$$

Cette forme nous permet de transformer l'intégrale volumique (III.65) à une intégrale surfacique :

Comme le montre la figure (III.10), le volume fini élémentaire D_P est formés par plusieurs surfaces latérales (ds_{la}) et de deux surfaces égales (ds), une située dans le niveau supérieur et l'autre située dans le niveau inférieur du volume D_P . De cela, et en posant

$$\frac{v^E - v^W}{\Delta x_e + \Delta x_w} = v_{EW} \quad \text{l'équation (III.65) devient :}$$

$$\begin{aligned}
 & \iiint_{D_P} (\nabla(v) \times \nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \\
 & = \iint_{\sum ds_{layi}} v_{EW} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) ds_{layi} - \iint_{surf_T} v_{EW} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) ds - \iint_{surf_B} v_{EW} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) ds
 \end{aligned} \tag{III.66}$$

n_{Ei} représente le nombre d'éléments primaux Ei entourant chaque nœud principal P (généralement $n_{Ei} = 8$).

La surface ds_{layi} est calculée comme montré dans le Fig.III.12.

Les flux à travers les surfaces, inférieure (S_B) et supérieure (S_T), dans l'équation (III.66), avec une variation linéaire du potentiel entre les facettes t et b (Fig.III.11) sont donnés par :

$$\iint v_{EW} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) ds \Big|_T = v_{EW} \frac{A_y^T - A_y^P}{\Delta z_t} \Delta s \tag{III.67}$$

$$\iint v_{EW} \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} \right) ds \Big|_B = -v_{EW} \frac{A_y^P - A_y^B}{\Delta z_b} \Delta s \tag{III.68}$$

Calculons les flux à travers les surfaces latérales ($\sum ds_{layi}$), dans (III.66), dans le référentiel (R'), ayant comme coordonnées ξ et η , rapporté aux éléments primaux comme il est montré sur la figure III.12, comme cité précédemment, on ramène le calcul dans le référentiel (R'), ayant comme coordonnées ξ et η , rapporté aux éléments primaux, vu la complexité du calcul des dérivées des potentiels suivant le référentiel (R) définis par les coordonnées (x, y).

En tenant compte de la relation (III.51), les dérivées du potentiel magnétique A_z dans chaque élément primal Ei dans le référentiel (R') en ξ et η dans (III.66) peuvent être déduites par :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_{zPEi}}{\partial \eta} &= A_{z\eta Ei} - A_{zP} \\
 \frac{\partial A_{zPEi}}{\partial \xi} &= A_{z\xi Ei} - A_{zP}
 \end{aligned} \tag{III.69}$$

Ayant déterminé les dérivées du potentiel magnétique A_z dans le référentiel (R') en ξ et η dans (III.69), le calcul des dérivées de A_z peut être ramené dans le référentiel (R) en fonction des coordonnées x et y en utilisant les relations (III.53) et (III.54) :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{zPEi}}{\partial x} \\ \frac{\partial A_{zPEi}}{\partial y} \end{bmatrix} &= [J]_{Ei}^{-1} \begin{bmatrix} A_{z\eta Ei} - A_{zP} \\ A_{z\zeta Ei} - A_{zP} \end{bmatrix} = [j]_{Ei} \begin{bmatrix} A_{z\eta Ei} - A_{zP} \\ A_{z\zeta Ei} - A_{zP} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} j_{11Ei} & j_{12Ei} \\ j_{21Ei} & j_{22Ei} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{z\eta Ei} - A_{zP} \\ A_{z\zeta Ei} - A_{zP} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (III.70)$$

avec $[j]_{Ei} = [J]_{Ei}^{-1}$

Le développement de (III.70) mène aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{zEi}}{\partial x} &= axz_{\eta Ei} A_{z\eta Ei} + axz_{\zeta Ei} A_{z\zeta Ei} - (axz_{\eta Ei} + axz_{\zeta Ei}) A_{zP} \\ \frac{\partial A_{zEi}}{\partial y} &= ayz_{\eta Ei} A_{z\eta Ei} + ayz_{\zeta Ei} A_{z\zeta Ei} - (ayz_{\eta Ei} + ayz_{\zeta Ei}) A_{zP} \end{aligned} \quad (III.71)$$

En remplaçant la dérivée du potentiel magnétique A_z de la deuxième équation donnée par (III.71) dans le premier terme à gauche du (III.66), on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{\sum_{i=1 \dots nEi} ds_{layi}} v_{EW} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) ds_{layi} &= \\ = \iint_{\sum_{i=1 \dots nEi} ds_{layi}} v_{EW} \left(ayz_{\eta Ei} A_{z\eta Ei} + ayz_{\zeta Ei} A_{z\zeta Ei} - (ayz_{\eta Ei} + ayz_{\zeta Ei}) A_{zP} \right) ds_{layi} \end{aligned} \quad (III.72)$$

n_{Ei} représente le nombre d'éléments primaux Ei entourant chaque nœud principal P (généralement $n_{Ei} = 8$).

La surface ds_{layi} est calculée comme montré dans le Fig.III.12.

Après intégration et arrangement de tous les termes dans (III.72), nous aboutissons à l'expression (III.73) qui exprime le flux à travers les surfaces latérales :

$$\iint_{\sum_{i=1 \dots n_{Ei}} ds_{layi}} v_{EW} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right) ds_{layi} = \sum_{i=1 \dots n_{Ei}} b_{\eta Ei} A_{z_{\eta Ei}} + \sum_{i=1 \dots n_{Ei}} b_{\zeta Ei} A_{z_{\zeta Ei}} - b_p A_{z_P} \quad (\text{III.73})$$

avec

$$b_{kEi} = v_{EW} (ay_{z_{kEi}}) \text{ pour } k = \eta, \zeta \text{ et } b_p = \sum_{k=\eta, \zeta} b_{kEi}$$

En remplaçant les termes des flux (III.73), (III.67) et (III.68), dans (III.66), on trouve :

$$\begin{aligned} \iiint_{D_P} (\nabla(v) \times \nabla \times \mathbf{A}) d\tau &= \sum_{i=1 \dots n_{Ei}} b_{\eta Ei} A_{z_{\eta Ei}} + \sum_{i=1 \dots n_{Ei}} b_{\zeta Ei} A_{z_{\zeta Ei}} - b_p A_{z_P} - \\ &v_{EW} \frac{A_y^T - A_y^P}{\Delta z_t} \Delta s - v_{EW} \frac{A_y^B - A_y^P}{\Delta z_b} \Delta s \end{aligned} \quad (\text{III.74})$$

$$= \left[\begin{array}{l} \sum_{\substack{i=1 \dots n \\ m=\zeta, \eta}} b_{mEi} A_{z_{mEi}} - \sum_{\substack{J=T, B \\ j=t, b}} b_j A_y^J + \sum_{j=t, b} b_j A_y^P - b_p A_z^P \end{array} \right]$$

avec

$$b_j = v_{EW} \frac{\Delta s}{\Delta z_j} \text{ pour } j = t, b$$

III.4.2.3. Intégration de $\left\langle \left[\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right]_x \right\rangle$

$$\iiint_{D_P} \left\langle \left[\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right]_x \right\rangle d\tau = \iiint_{D_P} \left[\sigma (A_x^\bullet + \frac{\partial V_{Ei}}{\partial x}) \right] ds dz \quad (\text{III.75})$$

De même que la transformation développée précédemment par (III.55), la dérivée du potentiel V est obtenue par :

$$\frac{\partial V_{Ei}}{\partial x} = ax_{\eta Ei}V_{\eta Ei} + ax_{\zeta Ei}V_{\zeta Ei} - (ax_{\eta Ei} + ax_{\zeta Ei})V_P \quad (\text{III.76})$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned} \iiint_{D_P} \langle [\sigma \nabla V] \rangle_x d\tau &= \iiint_{D_P} \sigma [ax_{\eta Ei}V_{\eta Ei} + ax_{\zeta Ei}V_{\zeta Ei} - (ax_{\eta Ei} + ax_{\zeta Ei})V_P] dsdz \\ &= \sum_{i=1, \dots, n_{Ei}} \sigma av_{\eta Ei}V_{\eta Ei} + \sum_{i=1, \dots, n_{Ei}} \sigma av_{\zeta Ei}V_{\zeta Ei} - \sigma av V_P \end{aligned} \quad (\text{III.77})$$

avec

$$av_{kEi} = ax_{kEi} \text{ pour } k = \eta, \zeta \text{ et } av = \sum_{k=\eta, \zeta} ax_{kEi}$$

En remplaçant l'expression (III.77) dans (III.75), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \iiint_{D_P} \left\langle \left[\sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla V \right) \right] \right\rangle_x d\tau &= \\ \sigma A_x \Delta s \Delta z + \sum_{i=1, \dots, n_{Ei}} \sigma av_{\eta Ei}V_{\eta Ei} + \sum_{i=1, \dots, n_{Ei}} \sigma av_{\zeta Ei}V_{\zeta Ei} - \sigma av V_P \end{aligned} \quad (\text{III.78})$$

III.4.2.4. Intégration du terme source

On suppose une distribution uniforme et constante du courant source dans le volume élémentaire D_P , on peut alors écrire :

$$\iiint_{D_P} \langle \mathbf{J}_s \rangle_x d\tau = J_{sx} \Delta s \Delta z \quad (\text{III.79})$$

En regroupant tout les termes développés précédemment. On aboutit à l'équation algébrique (III.80). Cette équation exprime la composante x du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} dans chaque nœud principal P (A_x^P) du maillage en fonction des potentiels A et V dans les nœuds voisins (les nœuds, supérieur et inférieur et les nœuds latéraux qui entourent le nœud principal P) :

$$\begin{aligned}
 cpA_x^P + \sigma_p D_p A_x^{\bullet P} = & \sum_{\substack{i=1\dots n \\ m=\zeta,\eta}} a_{mEi} A_{xmEi} + \sum_{j=T,B} ajA_x^j - \sum_{\substack{i=1\dots n \\ m=\zeta,\eta}} b_{mEi} A_{zmEi} + \sum_{\substack{J=T,B \\ j=t,b}} bjA_y^J - \sum_{j=t,b} bjA_y^P + b_p A_z^P \\
 & - \sum_{\substack{i=1\dots n \\ m=\zeta,\eta}} \sigma_p av_{mEi} V_{mEi} + \sigma_p av V_P + J_{sx} D_p
 \end{aligned} \tag{III.80}$$

avec

$$aj = v_j \frac{\Delta s}{\Delta z_j} \text{ pour } j = t, b \quad \text{et} \quad cp = ap + \sum_{j=t,b} aj$$

$$bj = v_{EW} \frac{\Delta s}{\Delta z_j} \text{ pour } j = t, b$$

De même, les composantes y et z du potentiel sont :

$$\begin{aligned}
 cpA_y^P + \sigma_p D_p A_y^{\bullet P} = & \sum_{\substack{i=1\dots n \\ m=\zeta,\eta}} b_{1mEi} A_{zmEi} - \sum_{\substack{J=T,B \\ j=t,b}} b_{1j} A_x^J + \sum_{j=t,b} b_{1j} A_x^P - b_{1P} A_z^P \\
 & + \sum_{\substack{i=1\dots n \\ m=\zeta,\eta}} a_{mEi} A_{ymEi} + \sum_{\substack{J=T,B \\ j=t,b}} ajA_y^J - \sum_{\substack{i=1\dots n \\ m=\zeta,\eta}} \sigma av_{1mEi} V_{mEi} + \sigma av_1 V_P + J_{sy} \Delta s \Delta z
 \end{aligned} \tag{III.81}$$

avec

$$cp = ap + \sum_{j=t,b} aj$$

$$aj = v_j \frac{\Delta s}{\Delta z_j} \text{ pour } j = t, b$$

$$av_{1kEi} = ay_{kEi} \text{ pour } k = \eta, \zeta \text{ et } av_1 = \sum_{k=\eta,\zeta} ay_{kEi}$$

$$b_{1j} = v_{NS} \frac{\Delta s}{\Delta z_j} \text{ pour } j = t, b$$

$$b_{1kEi} = v_{NS} (axz_{kEi}) \text{ pour } k = \eta, \zeta \text{ et } b_{1P} = \sum_{k=\eta,\zeta} b_{1kEi}$$

$$\begin{aligned}
 cp_z A_z^P + \sigma_p D_p A_z^{\bullet P} &= \sum_{\substack{i=1\dots n \\ m=\zeta,\eta}} a_{zmEi} A_{zmEi} + \sum_{j=T,B} aj A_z^j - \sum_{\substack{i=1\dots n \\ m=\zeta,\eta}} c_{mEi} A_{ymEi} + cp_y A_y^P \\
 + \sum_{\substack{i=1\dots n \\ m=\zeta,\eta}} d_{zmEi} A_{xmEi} - d_p A_x^P - \sum_{\substack{i=1\dots n \\ m=\zeta,\eta}} \sigma_p bv_{mEi} V_{mEi} + \sigma_p bv V_P + J_{sz} D_p
 \end{aligned} \tag{III.82}$$

avec

$$cp_z = ap_z + \sum_{j=t,b} aj$$

$$aj = v_j \frac{\Delta s}{\Delta z_j} \text{ pour } j = t, b$$

$$cp_y = \sum_{\substack{k=\zeta,\eta \\ i=1\dots n}} c_{kEi} \quad c_{kEi} = v_{TB}(cx_{kEi}) \text{ pour } k = \eta, \zeta$$

$$dp = \sum_{k=\zeta,\eta} d_{kEi} \quad d_{kEi} = v_{TB}(ay_{kEi}) \text{ pour } k = \eta, \zeta$$

$$bv = \sum_{\substack{k=\zeta,\eta \\ i=1\dots n}} b_{zkEi} \quad b_{vkEi} = (bz_{kEi}) \text{ pour } k = \eta, \zeta$$

III.4.2.5. Intégration de l'équation en divergence

$$\iiint_{D_p} \nabla \cdot \left[-\sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla V \right) \right] d\tau \tag{III.83}$$

Par application du théorème d'Ostrogradsky, l'intégrale volumique (III.83) peut être transformée en intégrale surfacique suivant :

$$\iiint_{D_p} \nabla \cdot \left[-\sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla V \right) \right] d\tau = \oiint \left[-\sigma \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla V \right) \right] ds \tag{III.84}$$

ds représente la surface fermée qui limite le volume fini D_p . L'intégrale (III.84) mène à l'équation :

$$\iiint_{D_P} \nabla \cdot \left[\sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \right] d\tau = \sum_{k=x,y,z} \sigma A_k^{\bullet P} \Delta s_k + \oiint [\sigma(\nabla V)] ds \quad (\text{III.85})$$

Comme présenté précédemment, l'intégrale du dernier terme dans (III.85) fait appel à la transformation présentée par (III.55), en effectuant la transformation des dérivées du potentiel V , ce terme s'écrit :

$$\begin{aligned} \oiint [\sigma(\nabla V)] ds = & \iint_{\sum_{i=1,\dots,n} ds_{laxi}} \sigma \frac{\partial V}{\partial x} ds_{laxi} + \iint_{\sum_{i=1,\dots,n} ds_{layi}} \sigma \frac{\partial V}{\partial y} ds_{layi} + \\ & \sigma \frac{V_T - V_P}{\Delta z_t} \Delta s + \sigma \frac{V_B - V_P}{\Delta z_b} \Delta s \end{aligned} \quad (\text{III.86})$$

A partir de la transformation donnée par (III.76), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= ax_{\eta Ei} V_{\eta Ei} + ax_{\zeta Ei} V_{\zeta Ei} - (ax_{\eta Ei} + ax_{\zeta Ei}) V_P \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= ay_{\eta Ei} V_{\eta Ei} + ay_{\zeta Ei} V_{\zeta Ei} - (ay_{\eta Ei} + ay_{\zeta Ei}) V_P \end{aligned} \quad (\text{III.87})$$

par remplacement de (III.87) dans (III.86), on trouve :

$$\begin{aligned} \oiint [\sigma(\nabla V)] ds = & \sum_{\substack{i=1,\dots,n \\ m=\zeta,\eta}} \sigma av_{mEi} V_{mEi} - \sigma av_{\eta\zeta} V_P + \\ & \sigma \frac{V_T - V_P}{\Delta z_t} \Delta s + \sigma \frac{V_B - V_P}{\Delta z_b} \Delta s \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

avec

$$av_{mEi} = ax_{mEi} + ay_{mEi} \text{ pour } m = \zeta, \eta \text{ et } av_{\eta\zeta} = \sum_{m=\eta,\zeta} av_{mEi}$$

En remplaçant (III.88) dans (III.85) et après arrangement de tous les termes, nous aboutissons à la formulation finale suivante qui exprime le potentiel magnétique scalaire V :

$$avV^P = \left[\sum_{m=e, w\dots} av_{mEi} V_{mEi} + \sigma \sum_{j=T,B} \frac{\Delta s}{\Delta z_j} V_j + \sum_{k=x,y,z} \sigma A_k^{\bullet P} \Delta s_k \right] \quad (\text{III.89})$$

Les équations (III.80), (III.81), (III.82) et (III.89) sont réécrites dans l'ensemble des éléments de maillage, ensuite nous les assemblons et nous obtenons un système d'équations que l'on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} [C_1] & [0] \\ [C_2] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}} \\ \dot{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [D_{11}] & [D_{12}] \\ 0 & [D_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.90})$$

sous une forme condensée, on écrit :

$$[C] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{A}} \\ \dot{\mathbf{V}} \end{bmatrix} + [D] \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.91})$$

avec

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \\ V \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\mathbf{J}_s] = \begin{bmatrix} J_{sx} \\ J_{sy} \\ J_{sz} \\ 0 \end{bmatrix}$$

III.5. Algorithmes de résolution des problèmes électromagnétiques

L'organigramme de la Fig.III.14 résume les principales étapes du code de calcul que nous avons développé et implémenté sous l'environnement Matlab pour la résolution du problème électromagnétique. La fonction de chaque bloc peut être résumée comme suit :

- Le premier bloc représente la phase de prétraitement du code de calcul. L'affectation des données géométriques et physiques des régions constituant le domaine d'étude, telles que les dimensions des objets, propriétés magnétiques et électriques...etc. Egalement, les conditions aux limites sont introduites dans cette phase.
- Dans le deuxième bloc, le système matriciel, correspondant au problème électromagnétique obtenu après avoir appliqué la méthode des volumes finis, est résolu pour chaque maille et à chaque instant par le solveur GS (Gauss Seidel).
- Le dernier bloc représente le bloc d'exploitations des résultats. La distribution tridimensionnelle des variables calculées sont récupérées. Les résultats obtenus,

permettent aisément ainsi de déterminer la distribution des différentes grandeurs électromagnétiques.

Il faut noter que l'organigramme présenté dans la figure III.10 est applicable pour les approches de la méthode des volumes finis, MVFC et MVFM. La différence réside dans le premier bloc (phase de prétraitement). Dans le cas de la MVFM, le volume de calcul tridimensionnel n'est pas nécessairement parallélépipédique, par conséquent la construction du maillage de l'ensemble du problème ne se fait pas automatiquement mais par le biais d'un maillage indépendant. Contrairement à un maillage uniforme où nous avons pu créer notre propre maillage (en définissant les pas spatiaux), c'est le maillage qui discrétise l'ensemble du problème. Il a fallu alors, récupérer les informations fournies, les traiter pour faire le lien avec le code numérique.

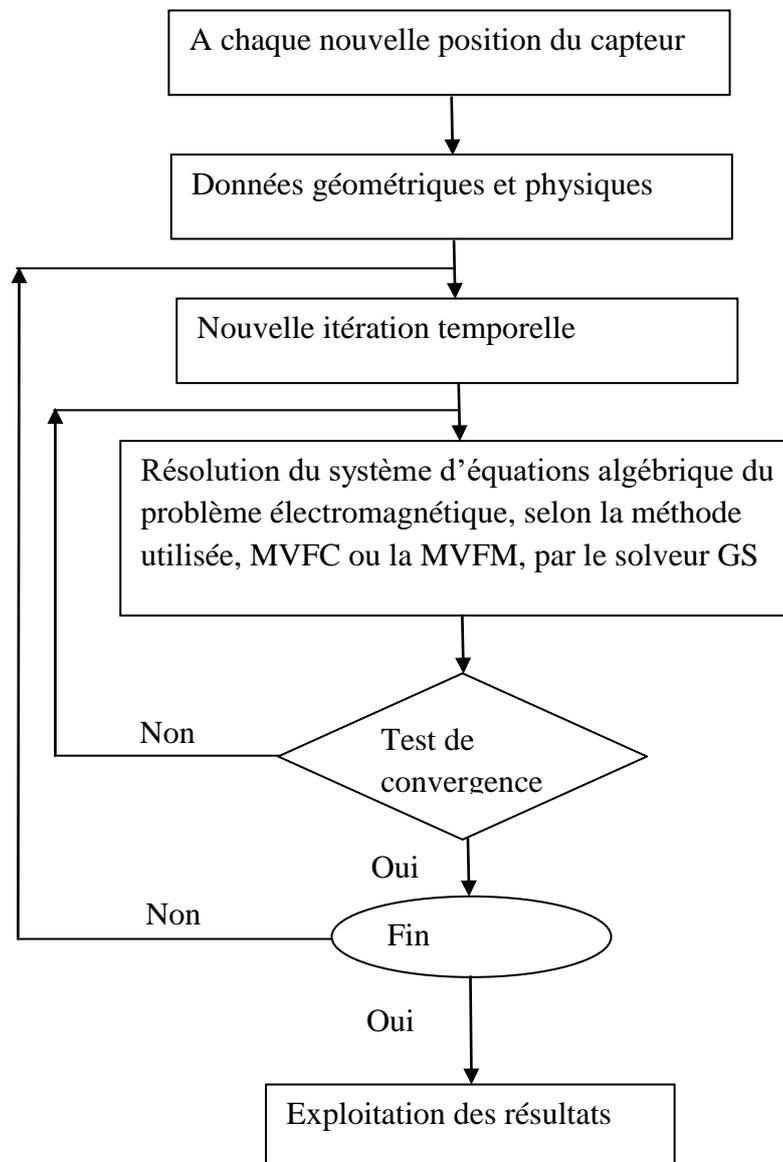


Fig.III.14. Organigramme de l'algorithme du code de calcul du problème électromagnétique

Chapitre IV :

Applications et validations

IV.1. Validation de la MVFC par comparaison avec la MVFM

IV.1.1. Benchmark Team Workshop n° 15-1

IV.1.1.1. introduction

IV.1.1.2. Etude de la réponse de la sonde à double fonctions

IV.1.1.3. Description du problème du Benchmark Team Workshop n° 15-1 à modélisé

V.1.1.4. Résultats du problème du Benchmark Team Workshop n° 15-1 à modélisé

IV.1.2. problème type proposé par IEEJ

IV.1.2.1. Description du problème type proposé par IEEJ à modélisé

IV.1.2.2. Le meilleur volume finis 3D développé

IV.1.2.3. Résultats du problème type proposé par IEEJ à modélisé

Dans les chapitres II et III, nous avons présenté les formulations mathématiques et numériques qui décrivent les phénomènes physiques traités dans les systèmes électromagnétiques ainsi que les méthodes numériques de discrétisation et de résolution. Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des simulations obtenus à partir des codes numériques développés et implémentés sous environnement MATLAB, où la méthode des volumes finis a été adoptée comme méthode de résolution des équations aux dérivées partielles. Nous proposons dans le présent chapitre des applications en vue de la validation du modèle mathématico-numérique développé. Dans un premier temps, nous nous intéressons à modéliser un problème type proposé par benchmarks académiques, dans cette section, le benchmark utilisé est le TEAM Workshop n° 15-1 [Burke 88], où nous abordons de manière détaillée, la réponse et la détermination de l'impédance Z de la sonde à double fonctions. On s'intéresse dans cette première application à la prise en compte de défauts dont une des dimensions est très petite ce sont les défauts de type fissure. Dans un second temps nous nous sommes intéressés en particulier à modéliser un problème type proposé par IEEEJ [sawa 90] et [kanayama90] où la confrontation avec les résultats expérimentaux [sawa 90] et [kanayama90] valide la justesse des modèles développés.

IV.1. Validation de la MVFC par comparaison avec la MVFM

IV.1.1. Benchmark Team Workshop n°15-1

IV.1.1.1. introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à la prise en compte de défauts dont une des dimensions est très petite ce sont les défauts de type fissure. Les défauts présentant ce type de géométrie sont fréquemment rencontrés en CND. Pour ce type de défauts, les champs en présence évoluent rapidement.

Dans la littérature, parmi les différentes méthodes qui permettent de modéliser ce type de défaut, on peut citer la méthode des intégrales de frontière (MIF) [Bowl 94], [Choua 09]. Elle est basée sur la discontinuité du champ électromagnétique à travers la surface du défaut. Cette méthode a des problèmes à géométrie canonique [Zaidi12], [Choua 09], pour ce la, dans ce travail une nouvelle approche de la méthode des volumes finis qui est la MVFM proposée dédiés principalement à la modélisation tridimensionnelle des problèmes électromagnétiques aux seins des dispositifs ayant des géométries complexes. Cette approche basée sur un maillage non-structuré à permet de résoudre un problème type ayant une géométrie complexe.

IV.1.1.2. Etude de la réponse de la sonde à double fonctions

L'objectif ultime de la modélisation du CND par CF est de déterminer la réponse de la sonde. Il faut noter que les matériaux étudiés sont supposés linéaires et isotropes. Nous rappelons que l'impédance Z de bobine parcourue par un courant I sinusoïdal, de pulsation ω est déterminée par le calcul de l'énergie magnétique moyenne (W) emmagasinée dans tout l'espace et des pertes Joule P_j dans les milieux conducteurs définies par les relations suivantes :

$$P_j = I_{eff}^2 \operatorname{Re}(Z) = \int_{\Omega_c} \frac{1}{\sigma} |J|^2 d\Omega \quad (IV.1)$$

$$W = I_{eff}^2 \frac{\operatorname{Im}(Z)}{2\omega} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} |B|^2 d\Omega \quad (IV.2)$$

où B et J représentent respectivement l'induction magnétique et la densité de courant et I_{eff} la valeur efficace du courant. μ et σ sont respectivement la perméabilité magnétique et la conductivité électrique.

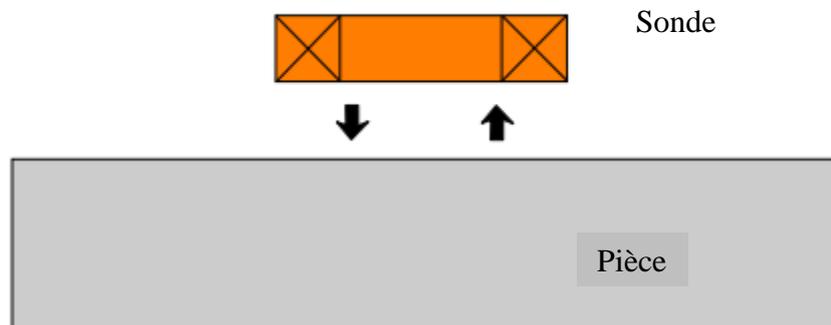


Fig.IV.1. Sonde à double fonctions.

IV.1.1.3. Description du problème du Benchmark Team Workshop n°15-1 à modélisé

L'objectif de cette section est d'évaluer le modèle développé précédemment en comparant les résultats obtenus par celui-ci avec des données expérimentales sur des configurations de Benchmarks Team Workshop n° 15-1 [Burke 88]. L'avantage de ce benchmark est qu'il fournit des signaux d'amplitudes importantes, du fait des grandes dimensions du défaut et de la bobine [Choua 09]. L'épaisseur de la plaque est très grande par rapport à la profondeur du défaut. Ce dernier est une entaille longue par rapport aux défauts rencontrés dans la plupart des applications industrielles. Son ouverture est de 0.28 mm, le rapport ouverture sur longueur est de 2%, alors que le rapport profondeur sur la longueur est

de 40%. L'ouverture est donc très petite par rapport aux autres dimensions, ce qui est une configuration favorable pour la validation du modèle des défauts fins.

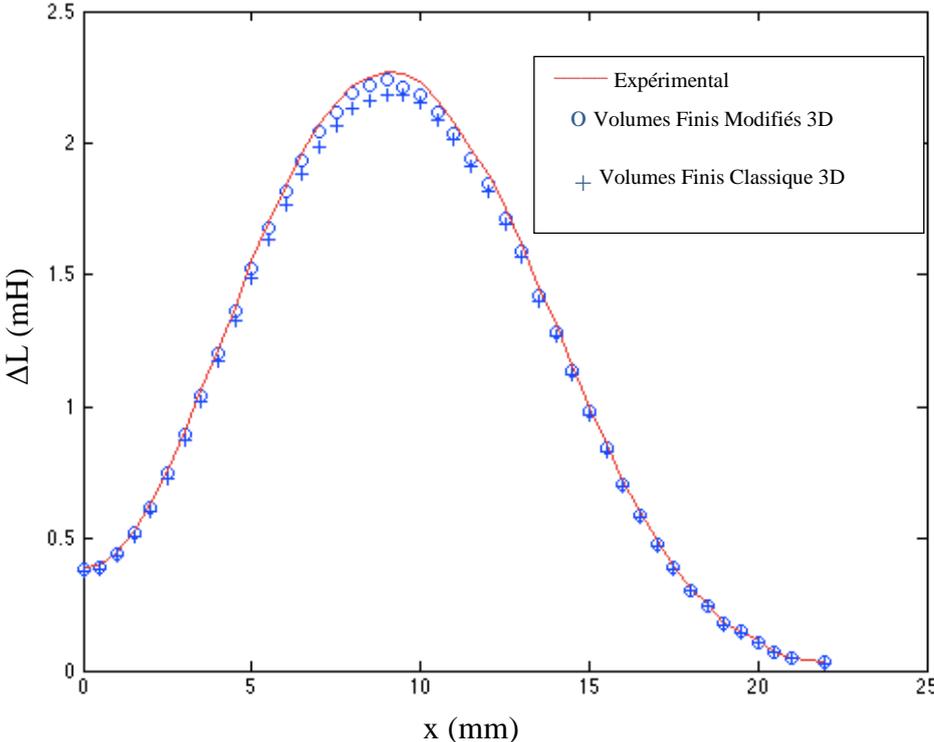
Dans cette configuration du Team Workshop n° 15-1 une bobine enfermée dans une boîte d'air qui est assez grande pour imposer les potentiels A et v nuls aux frontières, cette bobine se déplace le long d'une plaque métallique comportant une fissure de forme rectangulaire (voir la figure IV.2).

Sonde	Rayon externe (mm)	12.4
	Rayon interne (mm)	6.15
	Hauteur (mm)	6.15
	Nombre de spires	3790
	Lift-off (mm)	0.88
	Fréquence (Hz)	900
Spécimen (plaque)	Conductivité (S/m)	$30.6 \cdot 10^6$
	Épaisseur (mm)	12.22
Défaut	Longueur (mm)	12.6
	Profondeur (mm)	5
	Largeur (mm)	0.28
Autres	Épaisseur de peau δ (mm)	3

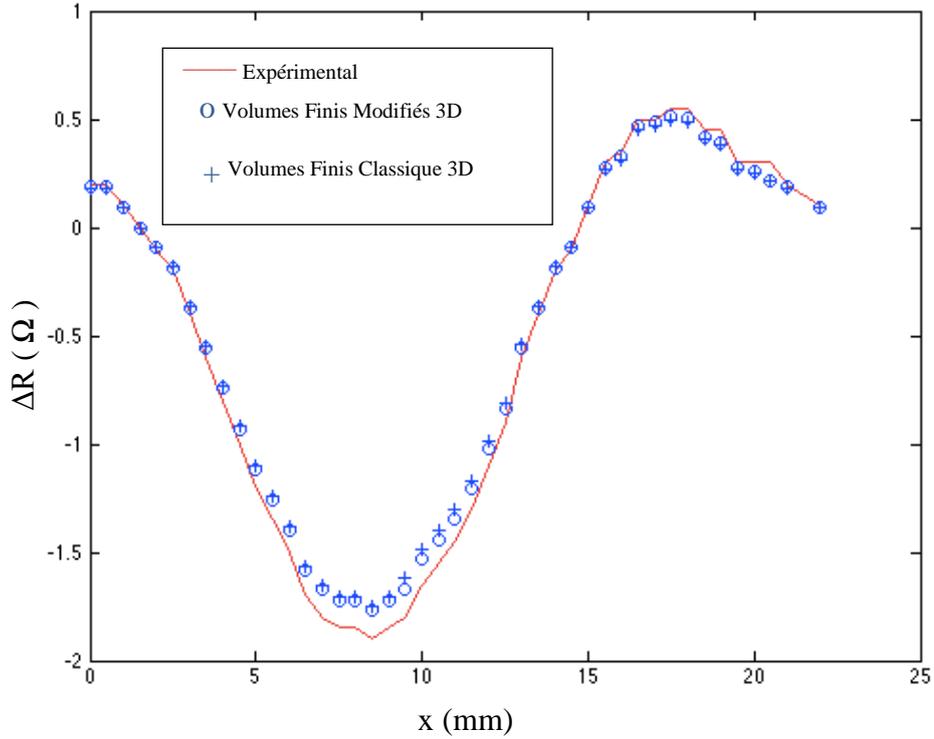
Tableau IV.1. Paramètres du problème benchmark Team Workshop n°15-1.

IV.1.1.4. Résultats du problème du Benchmark Team Workshop n°15-1 à modélisé

La bobine est déplacée suivant l'axe (Ox) au-dessus du défaut. Ce dernier est centré au centre du repère (voir la figure IV.2 (a)). Les variations de la résistance ΔR et de l'inductance ΔL dues au défaut sont déterminées pour différentes positions de la bobine. Ces résultats sont comparés avec des données expérimentales. Les deux figures suivantes représentent la variation de la résistance et la variation de l'inductance de la bobine. Ces résultats sont comparés aux données expérimentales.



(a)



(b)

Fig IV.3. (a) Variation de l'inductance due au défaut (mH), (b) Variation de résistance due au défaut (Ω).

Nous observons, à partir des deux figures précédentes, une bonne approximation des courbes expérimentales par les deux méthodes utilisées la MVFC et la MVFM.

Les résultats obtenus par le modèle des défauts fins sont satisfaisants aussi bien pour le benchmark Team Workshop où la profondeur de la pièce est semi-infinie en regard de l'épaisseur de peau.

Pour ce type de défauts, les champs en présence évoluent rapidement dans l'espace. La modélisation des fissures par la MVFM nécessite ainsi une densité de maillage local très important (30x30 x30 volumes) qui d'une part, peut augmenter considérablement le temps de calcul qui est supérieures à ceux lorsqu'on utilise la MVFC.

IV.1.2. problème type proposé par IEEJ

IV.1.2.1. Description du problème type proposé par IEEJ à modélisé

Afin de valider les modèles proposés, nous avons adopté une deuxième application trouvée dans la littérature [sawa 90] et [kanayama 90]. Dans cette application, le système proposé est un système électromagnétique entouré par un inducteur dont le rôle est de créer un champ magnétique alternatif. Les propriétés géométriques et physique du problème à modélisé sont résumés dans la Fig.IV.5.

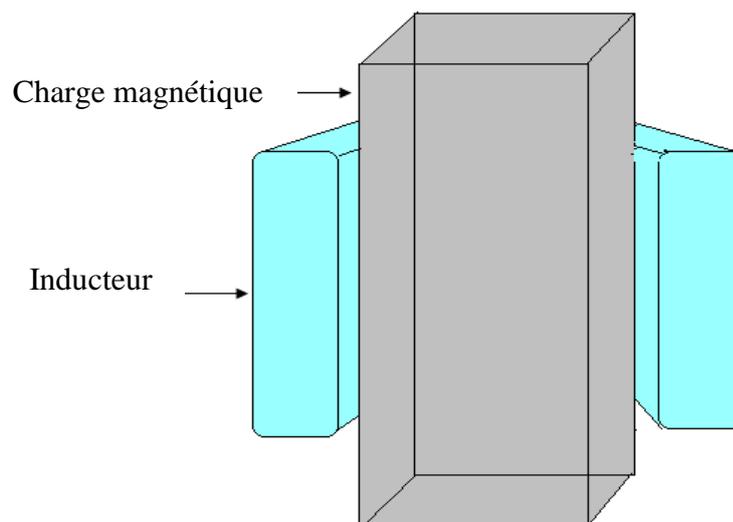


Fig.IV.4. Problème type proposé par IEEJ à modélisé.

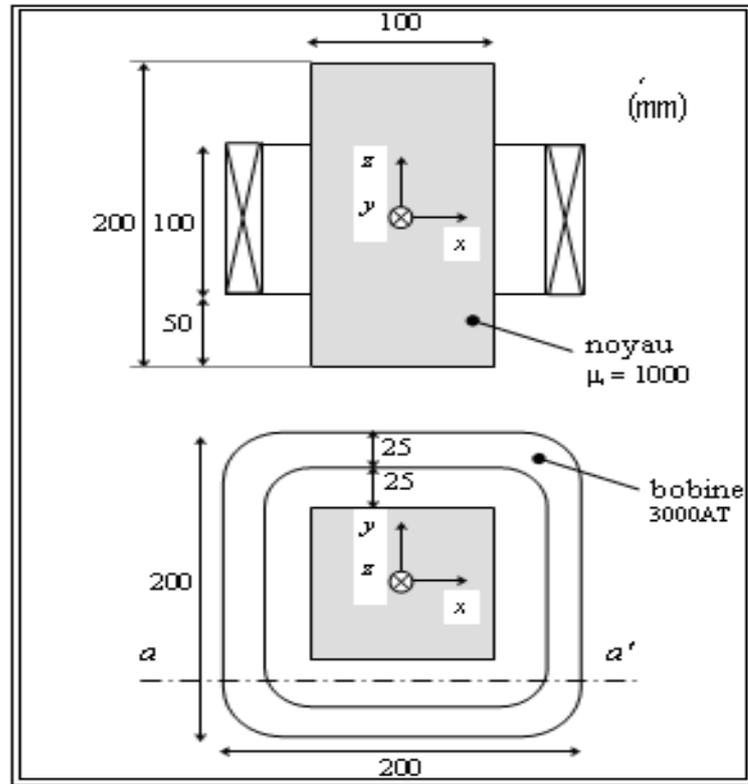


Fig.IV.5. Données géométriques du problème type proposé par IEEJ à modélisé.

Dans l'application adoptée, le dispositif est constitué d'un noyau magnétique de perméabilité magnétique relative égale à 1000, entouré par un inducteur formé par une bobine d'excitation alimentée par un courant total de 3000 AT. Pour modéliser ce problème, les conditions aux limites adoptées sont de types Dirichlet où on a supposé que le champ magnétique est quasiment nulle en dehors du noyau magnétique. Les conditions aux limites adoptées sont présentées dans la Fig.IV.6.

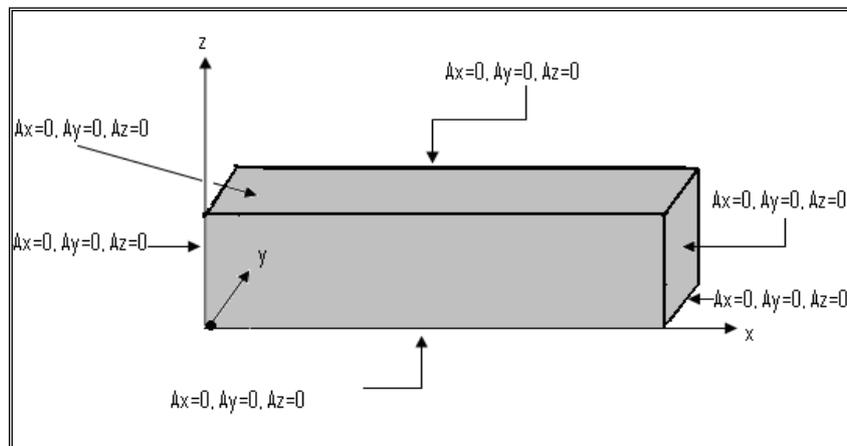


Fig.IV.6. Conditions aux limites adoptées à la résolution du problème proposé.

IV.1.2.2. Le mailler volume finis 3D développé

N'ayant pas un mailler volume finis 3D, nous avons nous même développé un mailler 3D sous environnement Matlab dédié spécifiquement à la méthode des volumes finis dans sa version tridimensionnelle. Ce mailler est conçu dans un premier temps par un mailler 2D de type Delaunay donné par l'outil Matlab dans son environnement 'PDE TOOL' comme présenté dans la Fig.IV.7. Ce maillage primal est composé par des éléments triangulaires 2D. A partir d'un sous programme, les centres de gravités de chaque élément seront identifié (Fig.IV.8.). A partir de là, un second maillage est construit par la connexion de tout les centre des gravités des éléments adjacents où on obtient un mailler en volume finis 2D, (Fig.IV.9, Fig.IV.10, Fig.IV.11). L'élévation par tranche du maillage obtenu permet de construire un mailler 3D sous environnement Matlab conçu principalement pour adopter la méthode des volumes fins proposé dans le cadre de notre travail. 25 élévation été effectuée pour traiter le problème à modélisé, où un total de nœuds de 10800 nœuds est utilisés pour discrétiser le problème en volumes finis. Le mailler obtenu est présenté dans la Fig.IV.12.

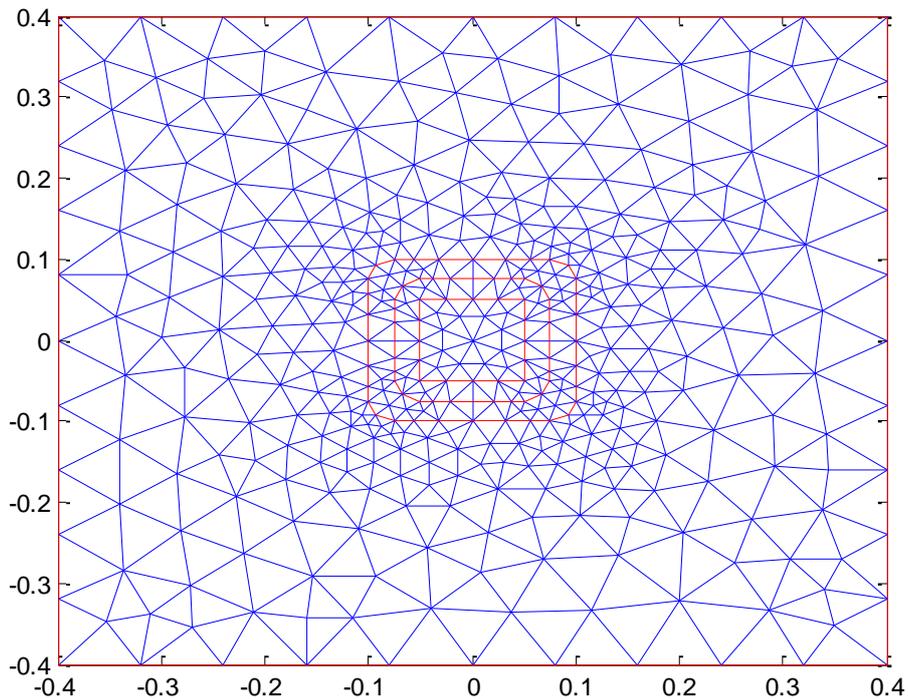


Fig.IV.7. Maillage 2D du problème à traiter.

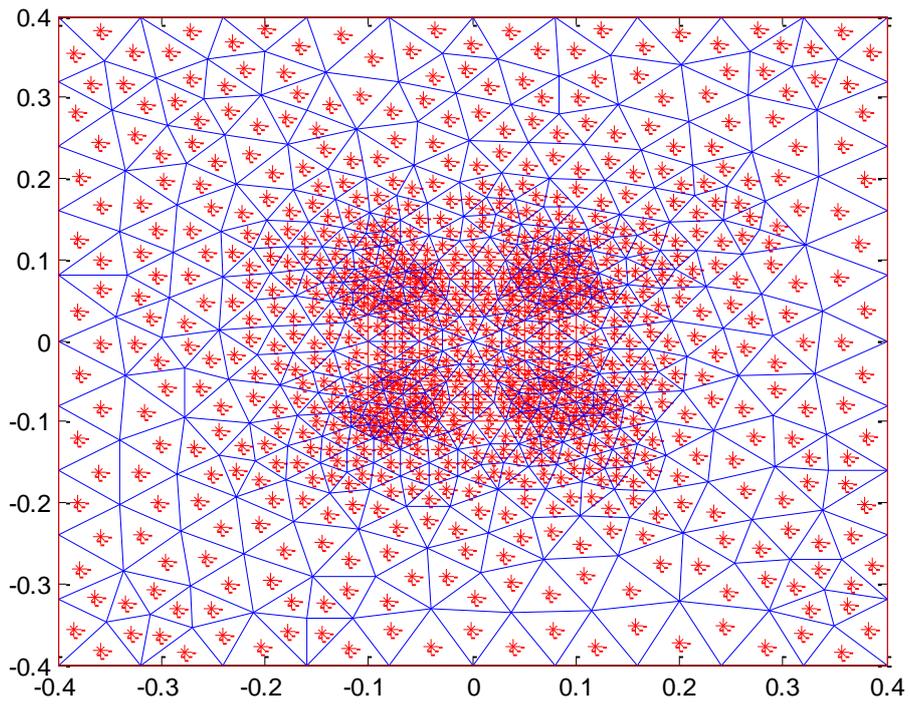


Fig.IV.8. Centres de gravité du maillage primal.

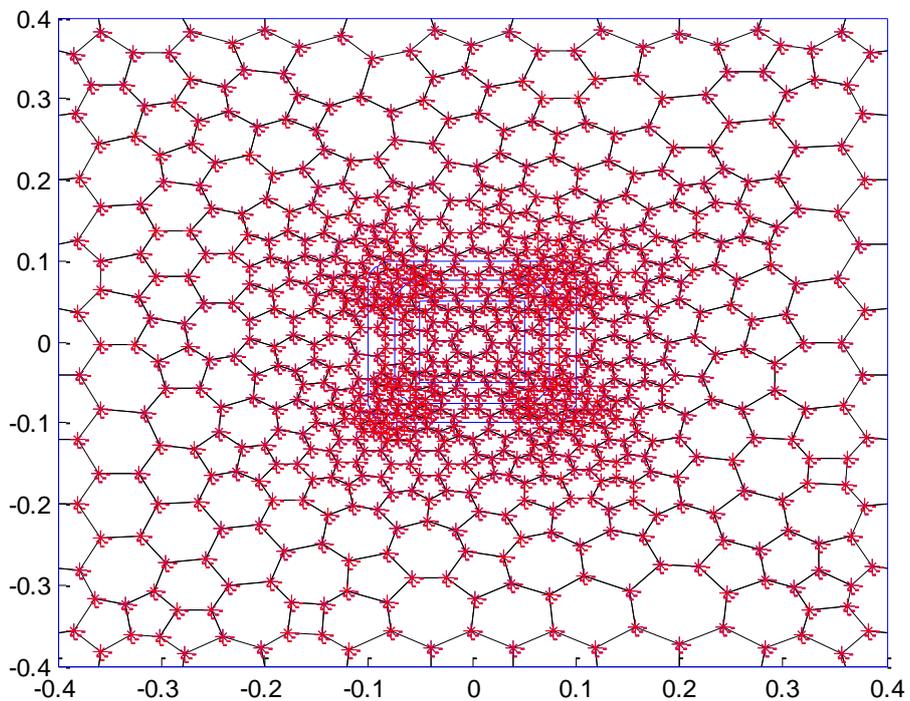


Fig.IV.9. Maillage 2D en volumes finis.

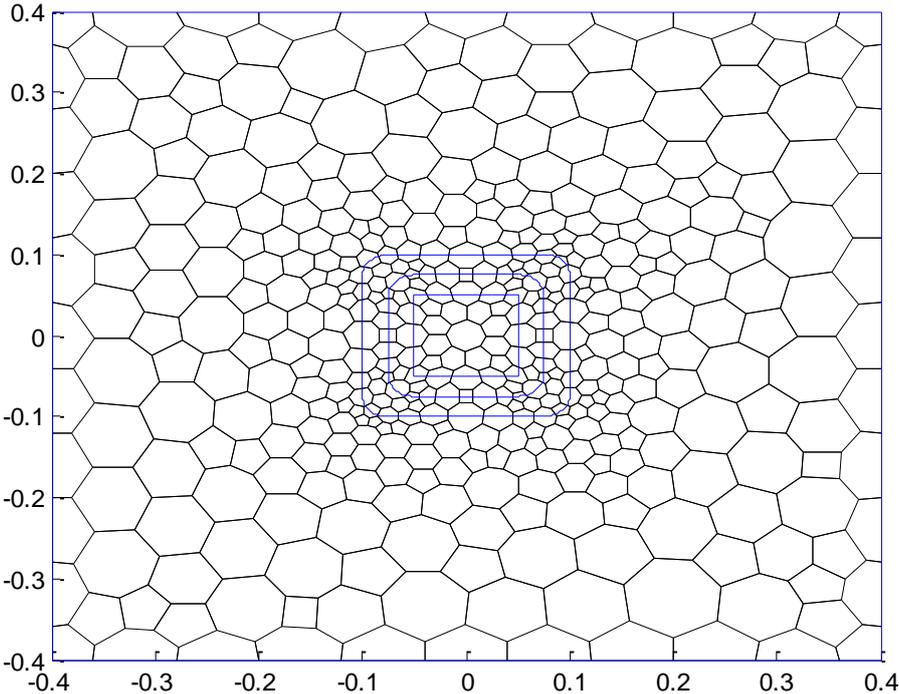


Fig.IV.10. Maillage 2D en volumes finis.

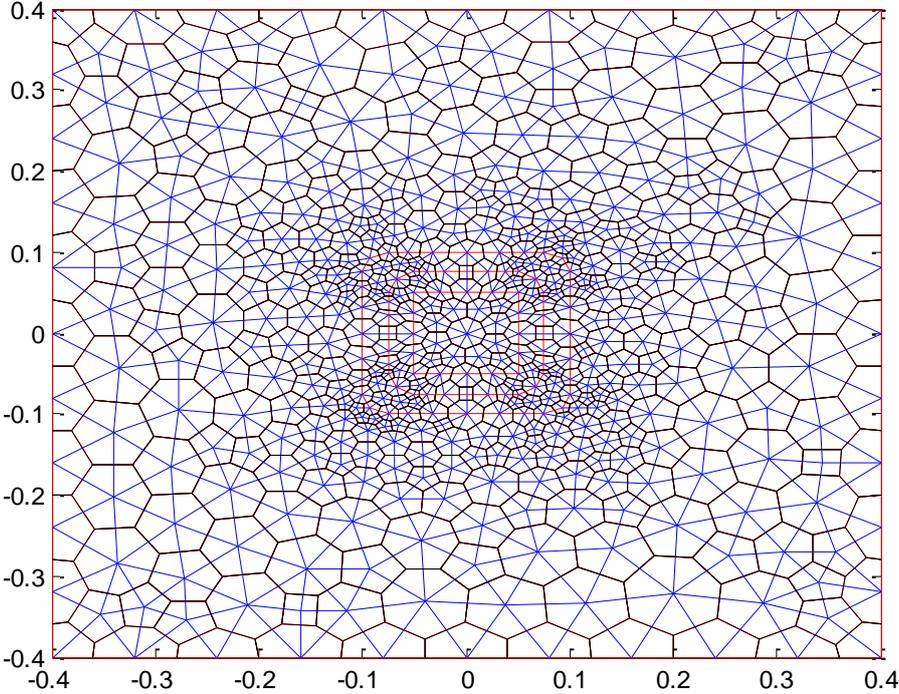


Fig.IV.11. Maillage du dispositif en 2D combiné.

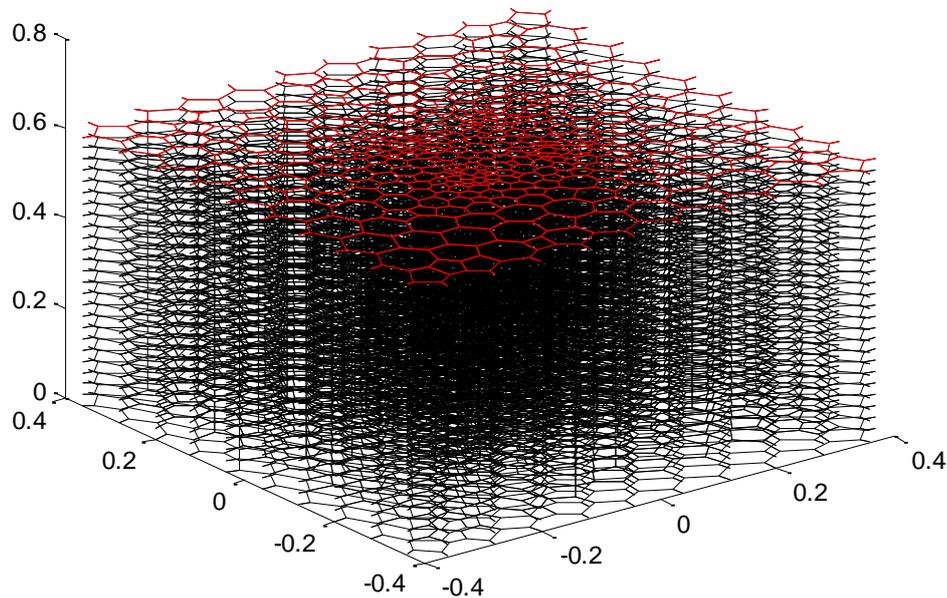


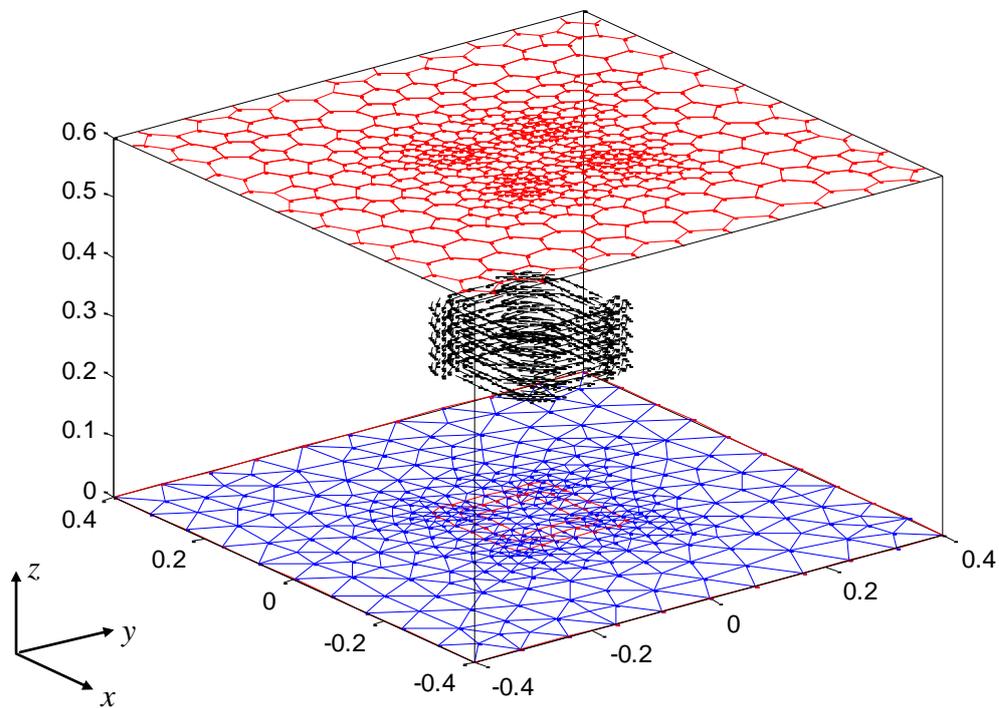
Fig.IV.12. Maillage 3D en volumes finis.

IV.1.2.3. Résultats du problème type proposé par IEEJ à modélisé

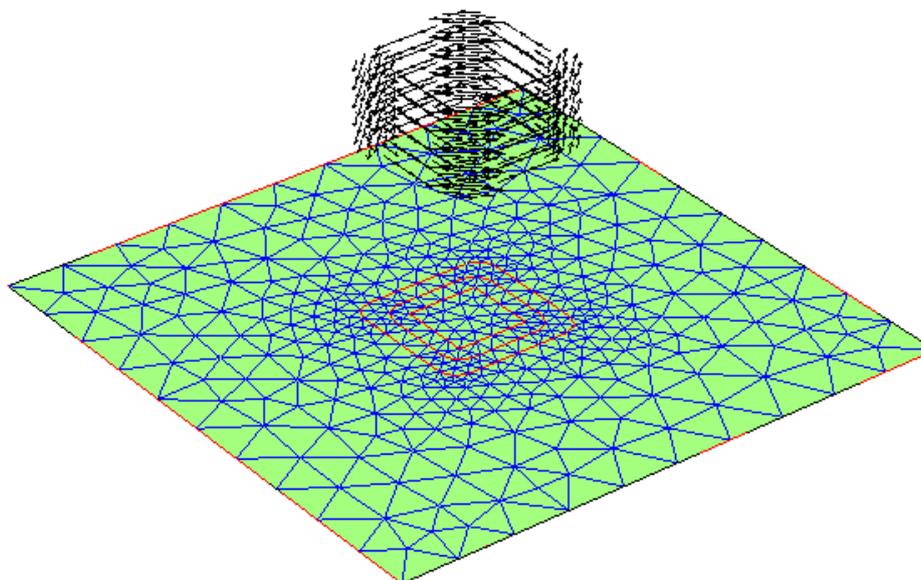
Dans la partie ci-dessous, nous présentons les résultats des simulations obtenus à partir du code numérique développé sous environnement Matlab. Les résultats à caractère électromagnétiques seront largement présentés. Afin de valider le code numérique développé, nous avons dans un premier temps vérifié la répartition spatiale du potentiel vecteur magnétique A présenté dans la Fig.IV.14. Pour cela, nous avons présenté dans un premier temps la répartition de la densité du courant source dans la Fig.IV.13. Selon les équations de Maxwell, le potentiel vecteur magnétique A , suit une trajectoire imposée par la densité du courant source. Ceci est confirmé par les résultats des simulations présentés dans la Fig.IV.14 et dans la Fig.IV.15 où on peut dire que les lignes du champ de vecteur A suivent la trajectoire des courants source.

Dans un second temps, nous avons calculé l'induction magnétique B aux voisinages de l'interface air/fer, celle-ci est présentée dans les figures, Fig.IV.16 et Fig.IV.17. Dans le cadre de notre travail, la formulation en potentiel vecteur magnétique A est adoptée, le champ d'induction magnétique B est déduit par le rotationnel du potentiel vecteur magnétique. Selon les résultats présentés, on peut dire que la répartition du champ d'induction magnétique B est portée sur le plan perpendiculaire au plan portant le potentiel vecteur magnétique A . aussi on

peux dire que le champ d'induction magnétique \mathbf{B} est parfaitement canalisé dans le noyau magnétique du dispositif. Tout ces résultats, valide la justesse des résultats obtenus.

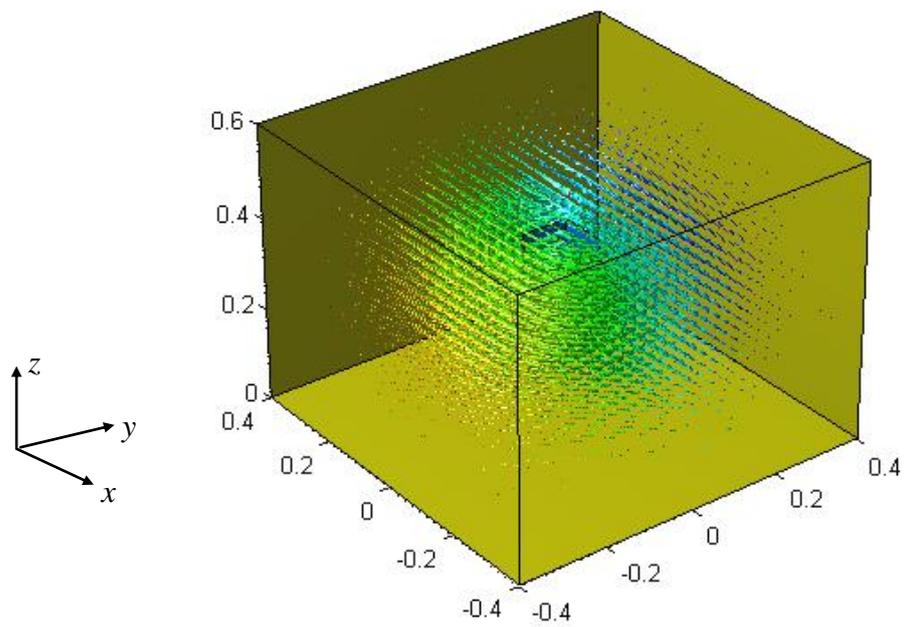


a)

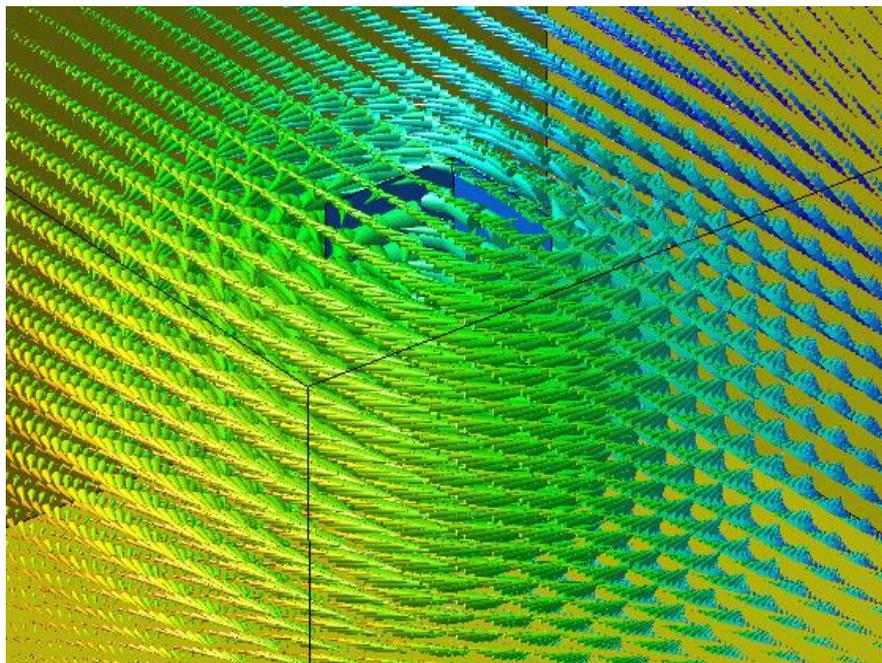


b)

Fig.IV.13. Répartitions spatiale de la densité du courant source J .



a)



b)

Fig.IV.14. Répartition spatiale du potentiel vecteur magnétique A . Cette répartition est imposée par la densité du courant source.

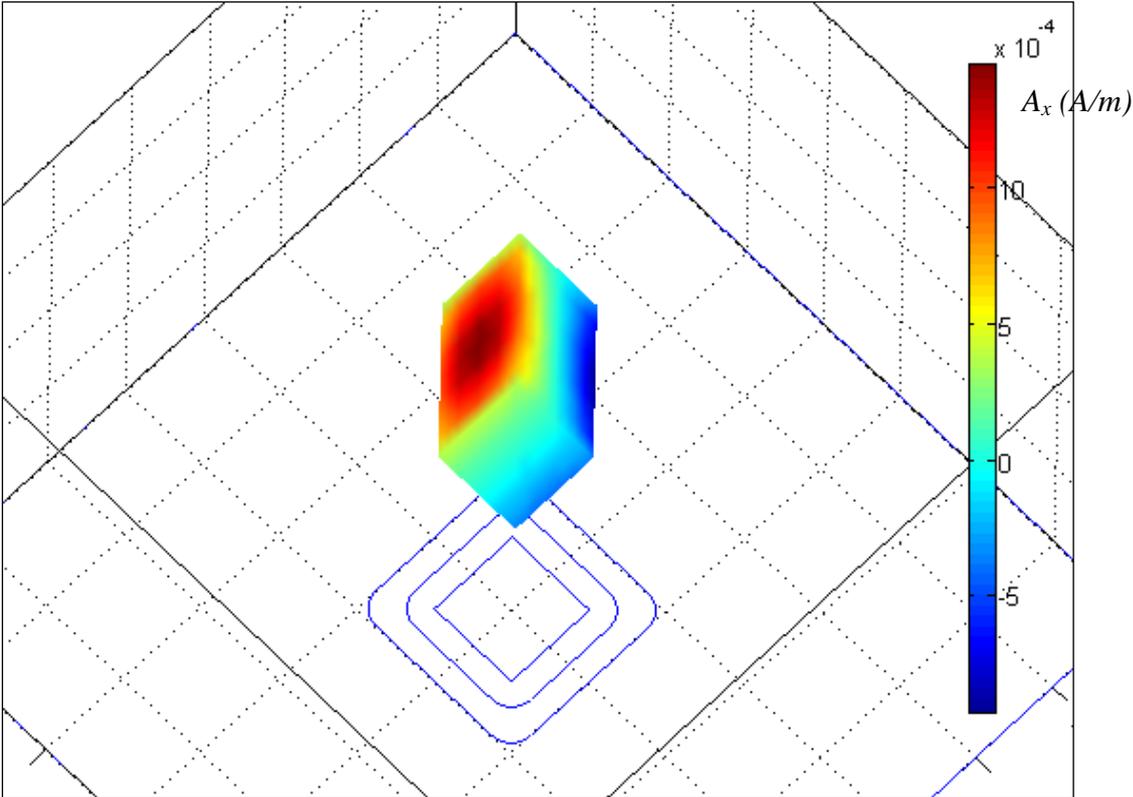


Fig.IV.15.a. Potentiel vecteur magnétique A_x sur les surfaces latérales du noyau magnétiques.

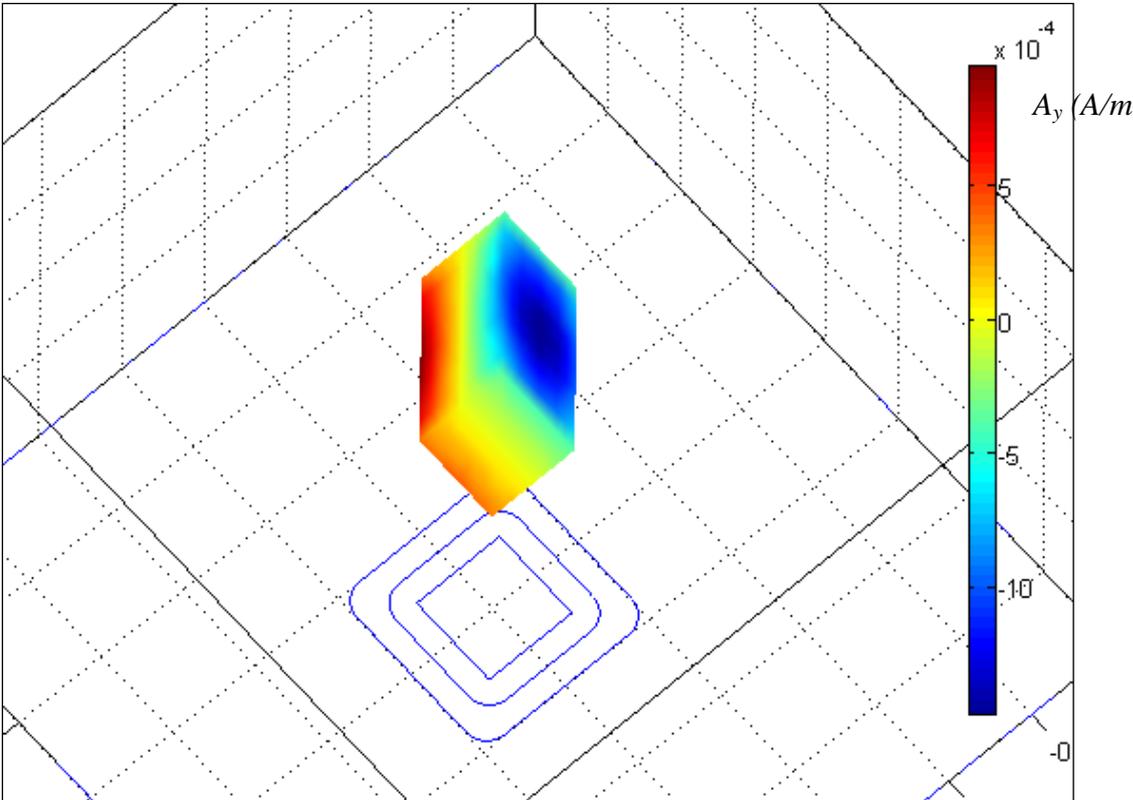
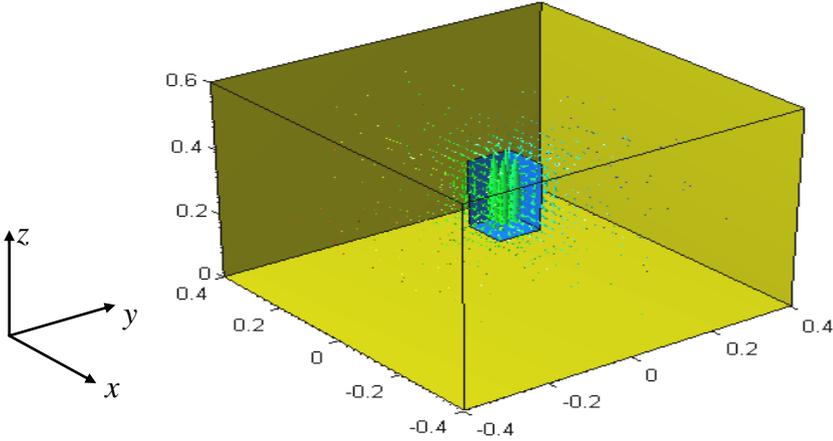
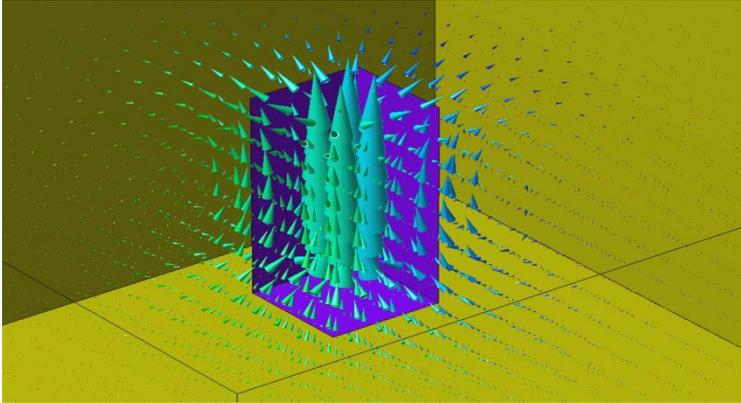


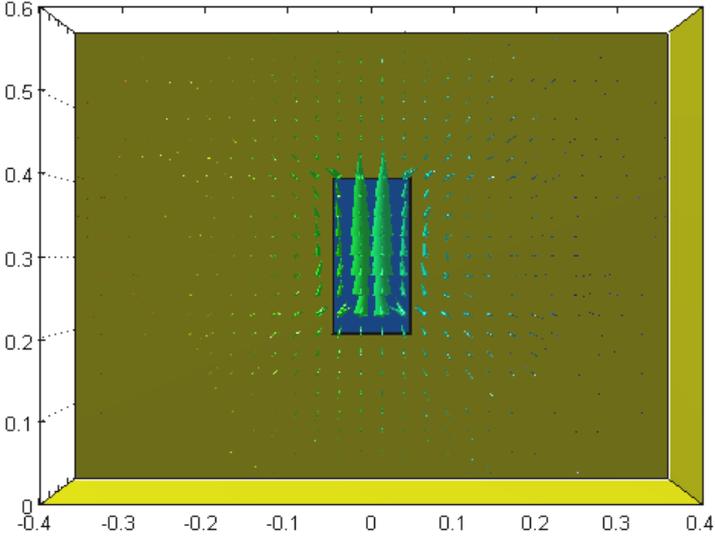
Fig.IV.15.b. Potentiel vecteur magnétique A_y sur les surfaces latérales du noyau magnétiques.



a)

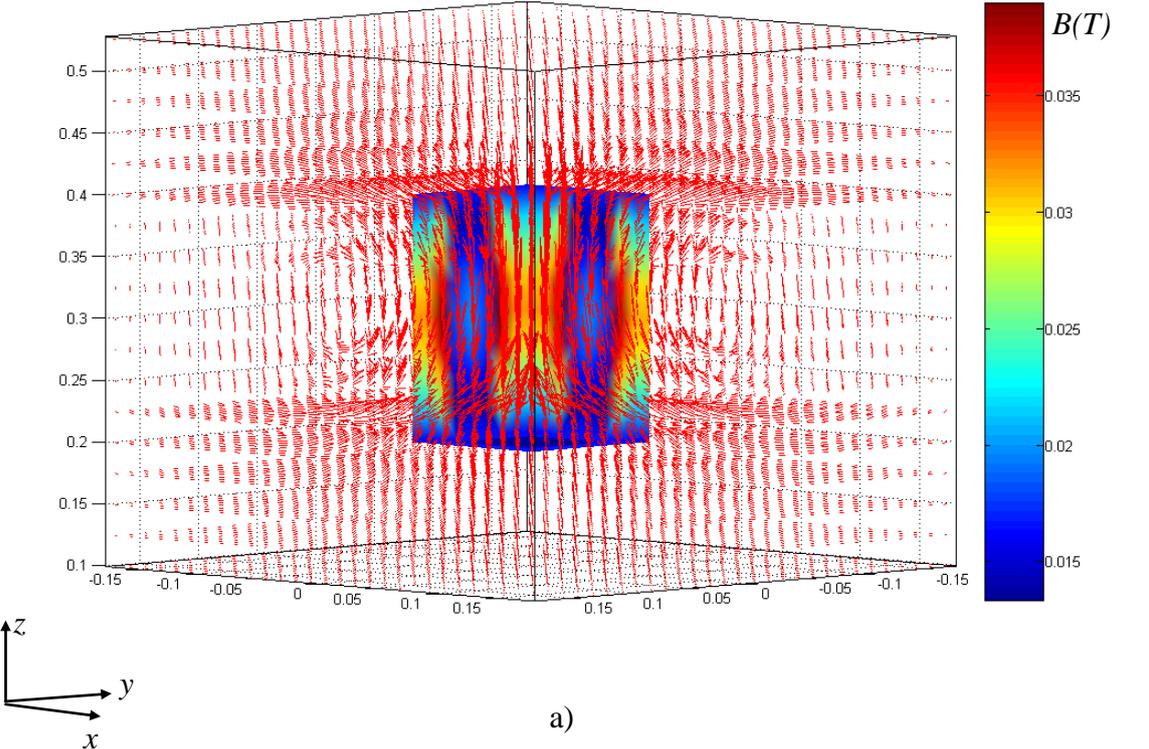


b)

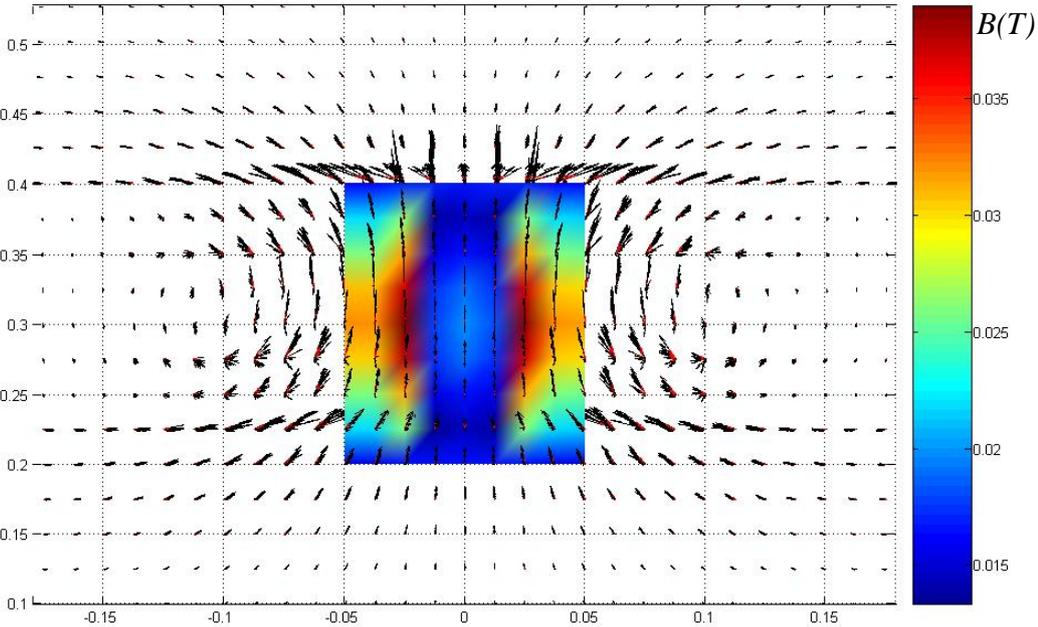


c)

Fig.IV.16. Répartition spatiale du champ d'induction magnétique B .



a)



b)

Fig.IV.17. Répartition spatiale du champ d'induction magnétique B aux interfaces du noyau magnétique.

La figure IV.18. montre la répartition de la densité du courant source \mathbf{J} en 3D, avec dégradés de l'induction B_z sur les trois faces magnétiques (deux latérales et un bas).

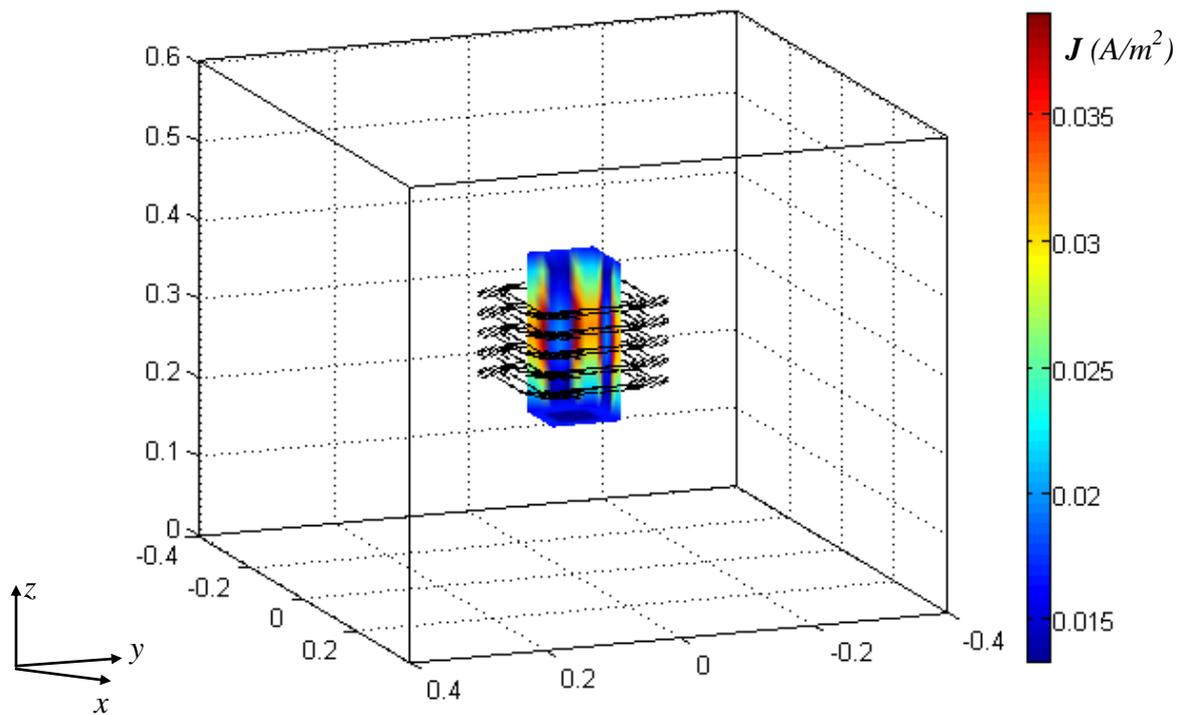


Fig.IV.18.Répartition de la densité du courant source \mathbf{J} en 3D.

avec dégradés de B_z sur les trois faces magnétiques (deux latérales et un bas).

Les figures IV.19.(a, b) montrent respectivement les dégradés de B_z sur les trois faces magnétiques (deux latérales et une basse) avec maillage éléments finis et avec maillage volumes finis modifiés.

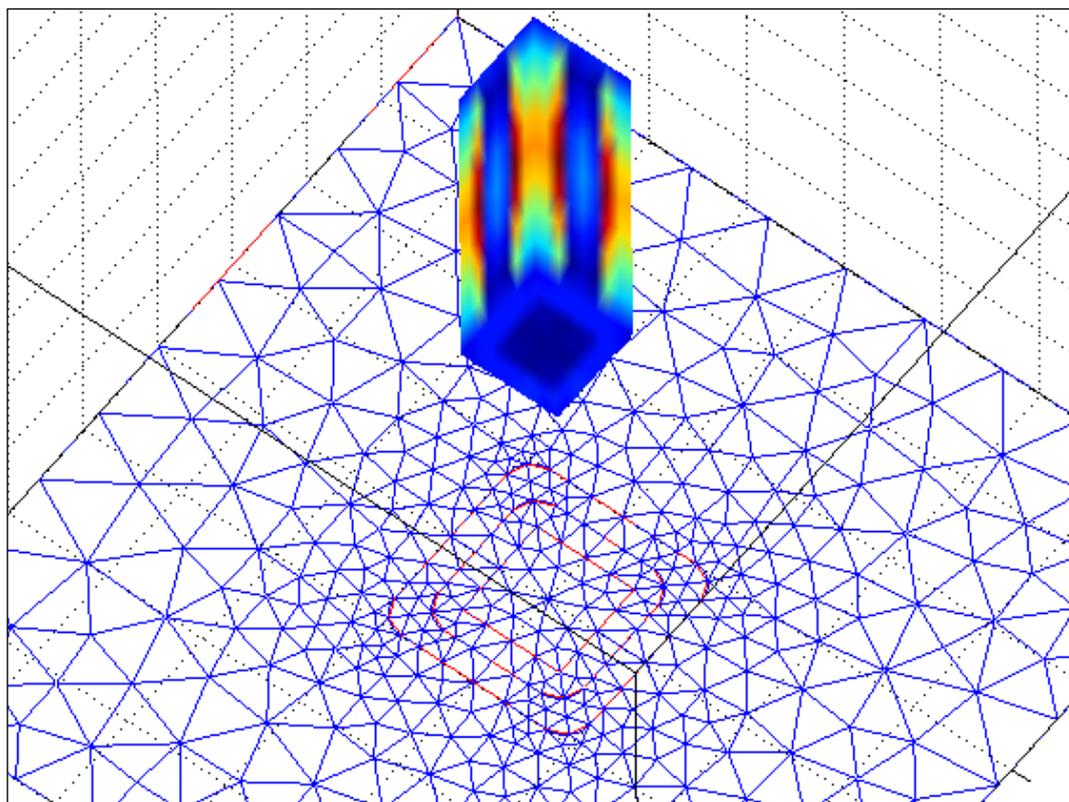


Fig.IV.19.a. Dégradés de B_z sur les trois faces magnétiques (deux latérales et une basse).
(Maillage éléments finis).

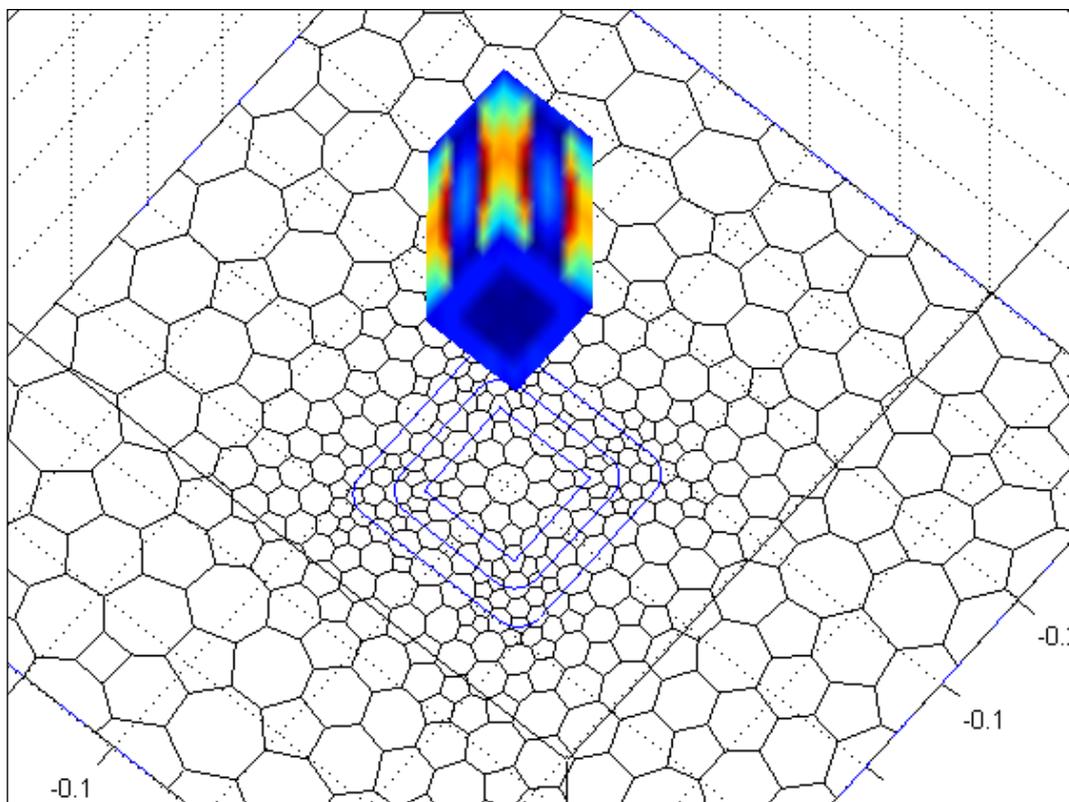


Fig.IV.19.b. Dégradés de B_z sur les trois faces magnétiques (deux latérales et une basse).
(Maillage volumes finis modifiés).

La figure IV.20.a. montre la distribution du champ du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} en 2D dans le plan x - z pour y : centre du noyau

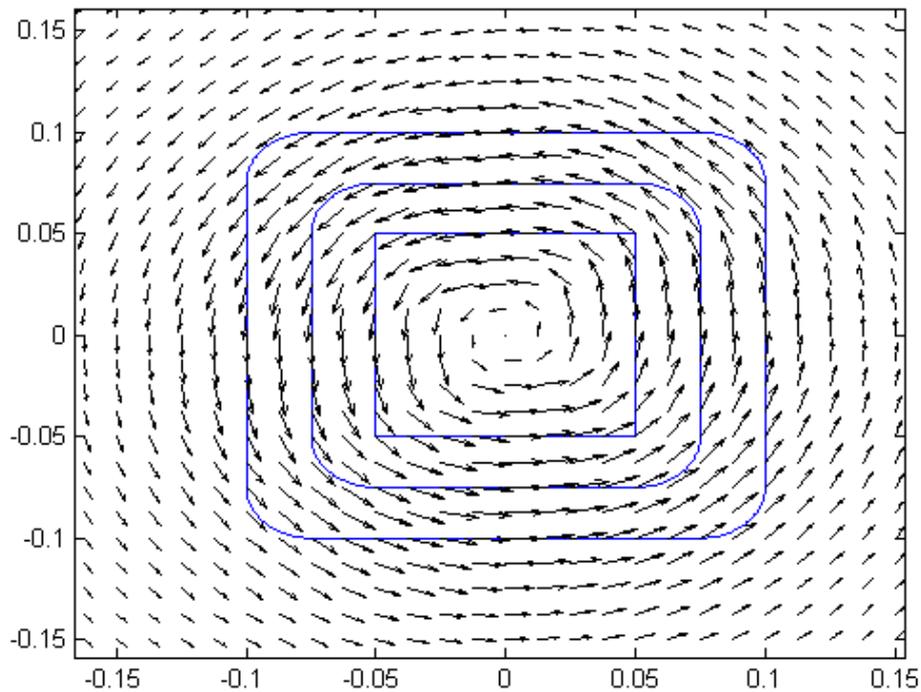


Fig.IV.20.a. Distribution du champ du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} en 2D dans le plan x - z pour y : centre du noyau.

Les figures IV.20.(b, c) montrent respectivement les lignes équipotentiels de la composante A_x du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} au milieu du noyau et avec représentation du maillage volumes finis modifiés .

Les figures IV.21.(a, b) montrent respectivement les lignes équipotentiels de la composante A_y du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} au milieu du noyau et avec représentation du maillage volumes finis modifiés.

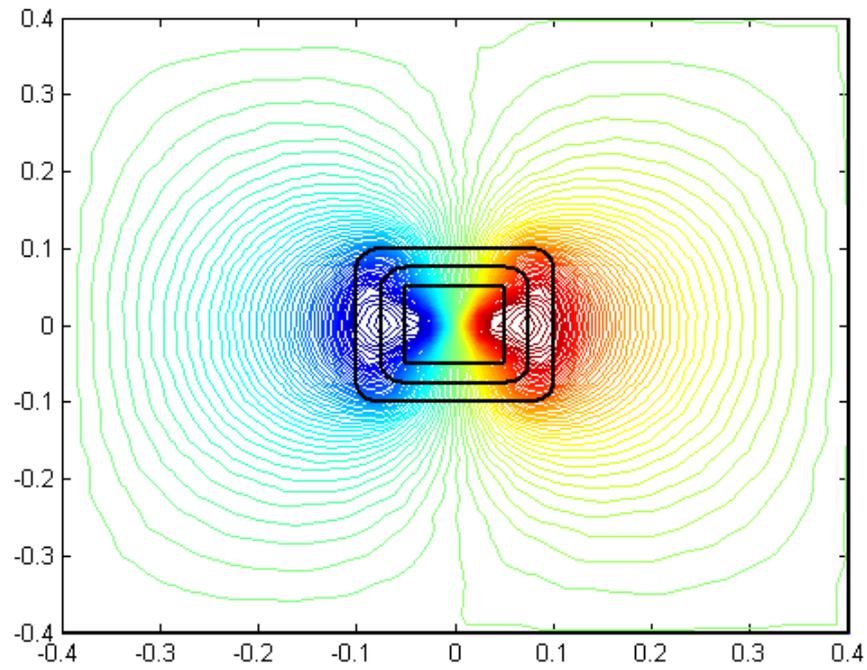


Fig.IV.20.b. Lignes équipotentiels de la composante A_x du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} au milieu du noyau.

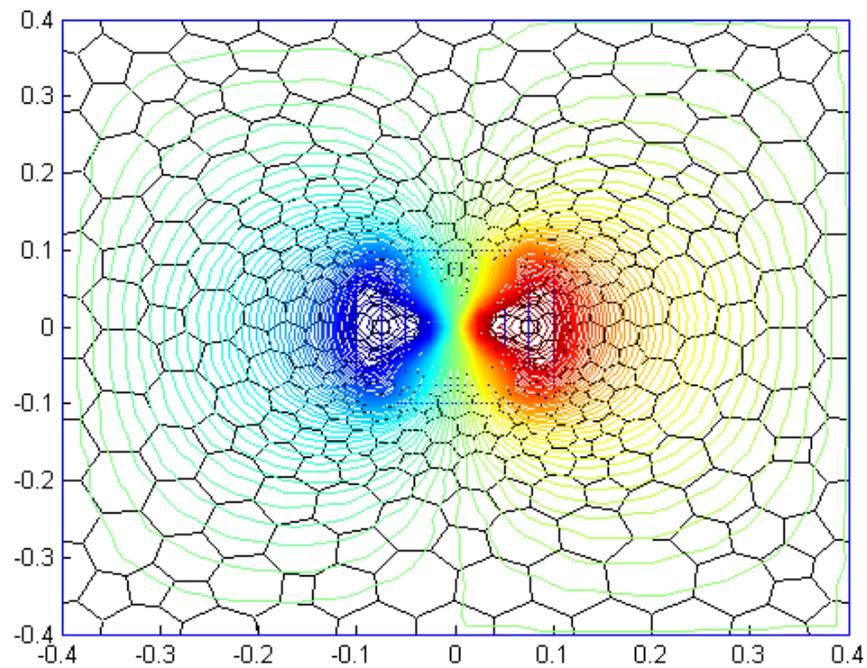


Fig.IV.20.c. Lignes équipotentiels de la composante A_x du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} au milieu du noyau (avec représentation du maillage volumes finis modifiés).

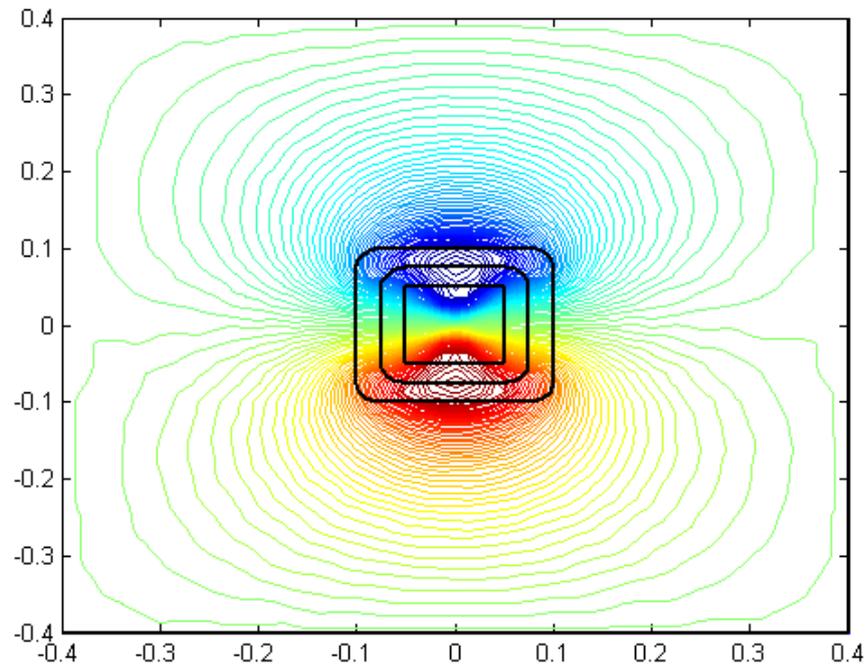


Fig.IV.21.a. Lignes équipotentiels de la composante A_y du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} au milieu du noyau.

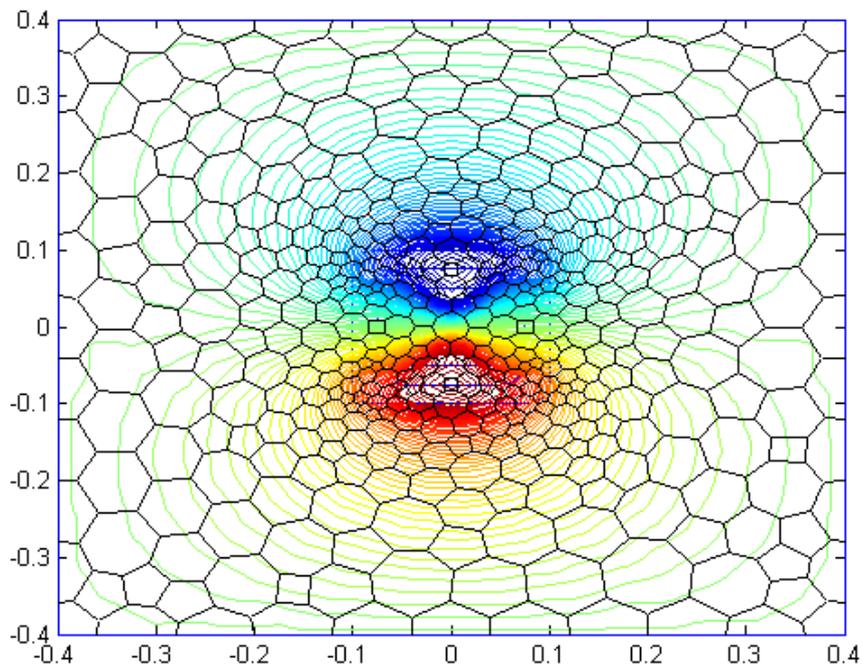


Fig.IV.21.b. Lignes équipotentiels de la composante A_y du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} au milieu du noyau (avec représentation du maillage volumes finis modifiés).

Les figures IV.22. (a, b) montrent respectivement les dégradés 2D des composantes A_x et A_y du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (au milieu du noyau).

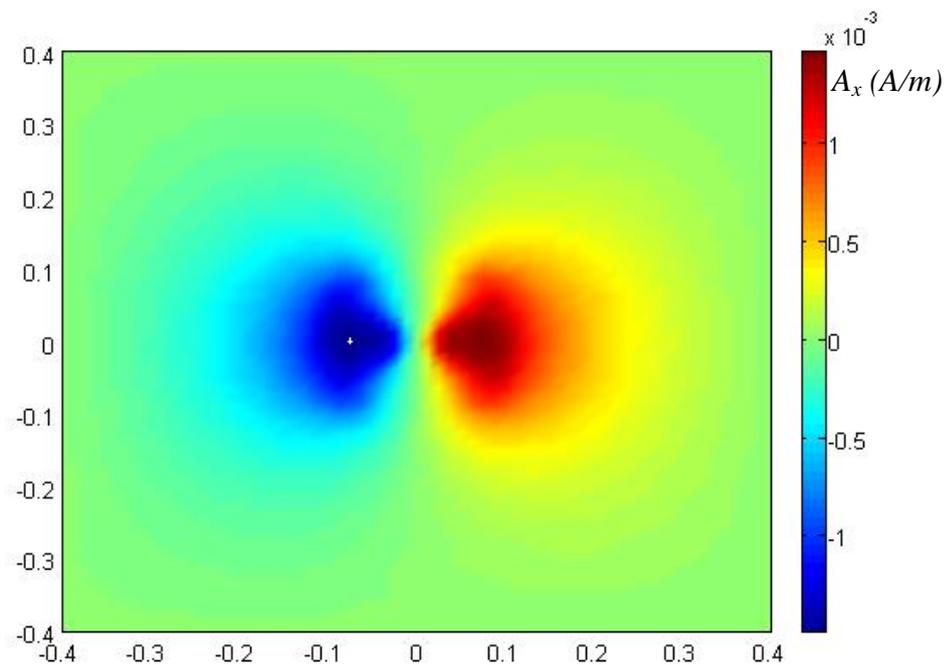


Fig.IV.22.a. Dégradés 2D de la composante A_x du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (au milieu du noyau).

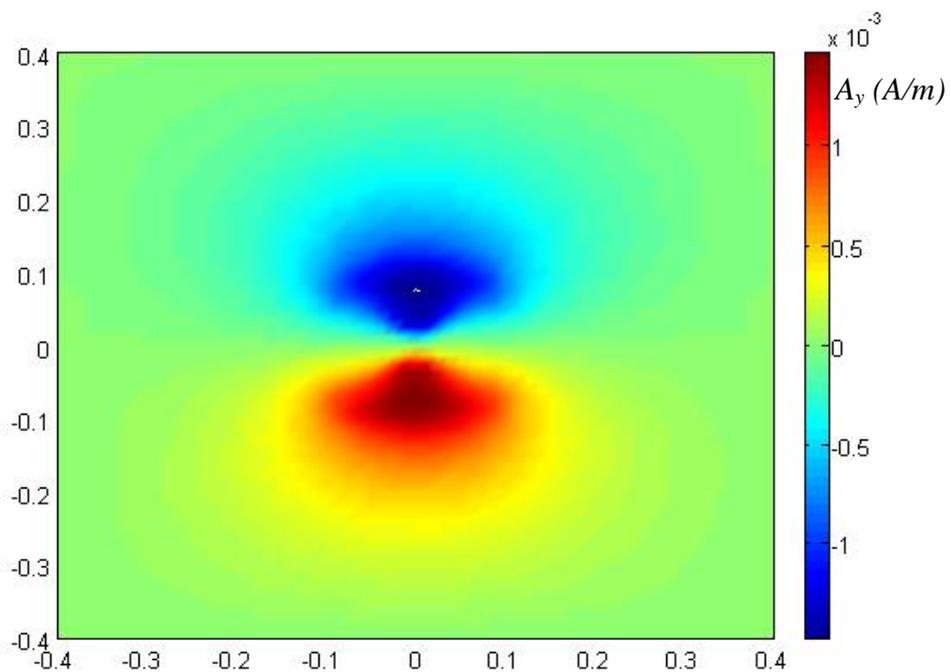


Fig.IV.22.b. Dégradés 2D de la composante A_y du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (au milieu du noyau).

Les figures IV.22. (c, d) montrent respectivement les dégradés 3D des composantes A_x et A_y du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (au milieu du noyau).

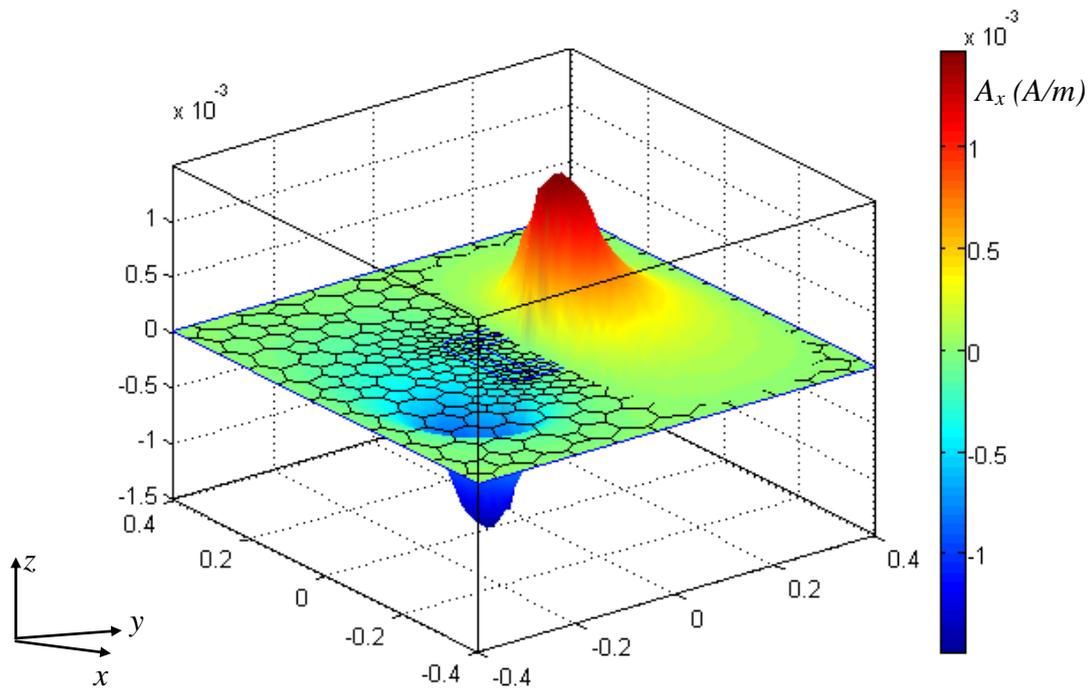


Fig.IV.22.c. Dégradés 3D de la composante A_x du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (au milieu du noyau).

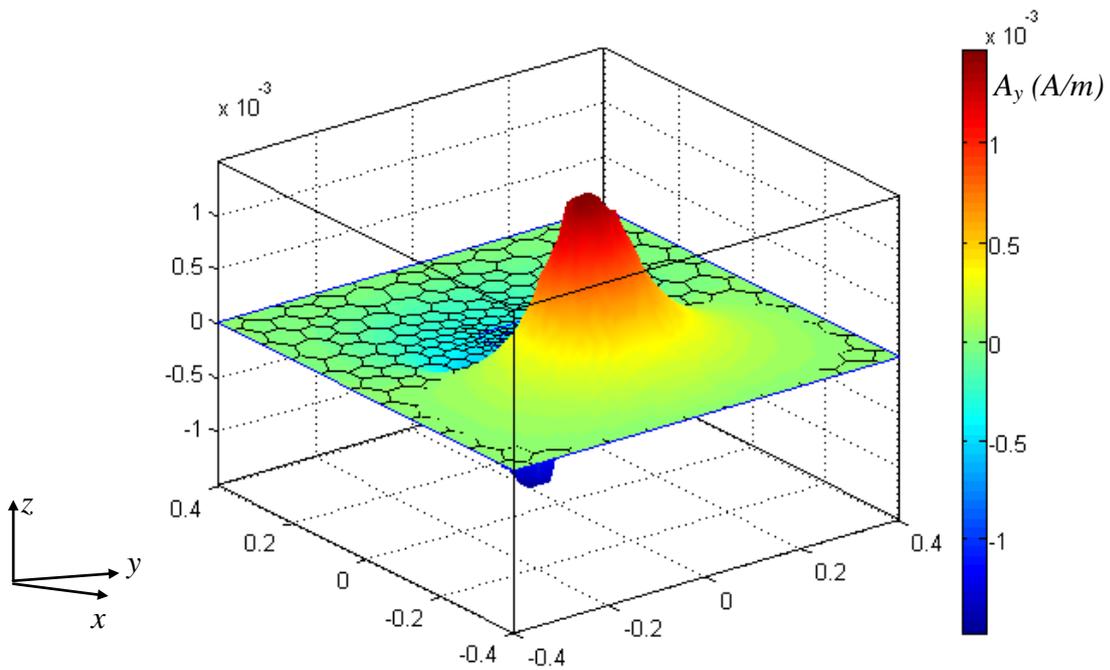


Fig.IV.22.d. Dégradés 3D de la composante A_y du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} (au milieu du noyau).

Nous présentons la composante Z de l'induction B_z en utilisant la MVFM dans la figure IV.23. Ce résultat est comparé à la donnée expérimentale.

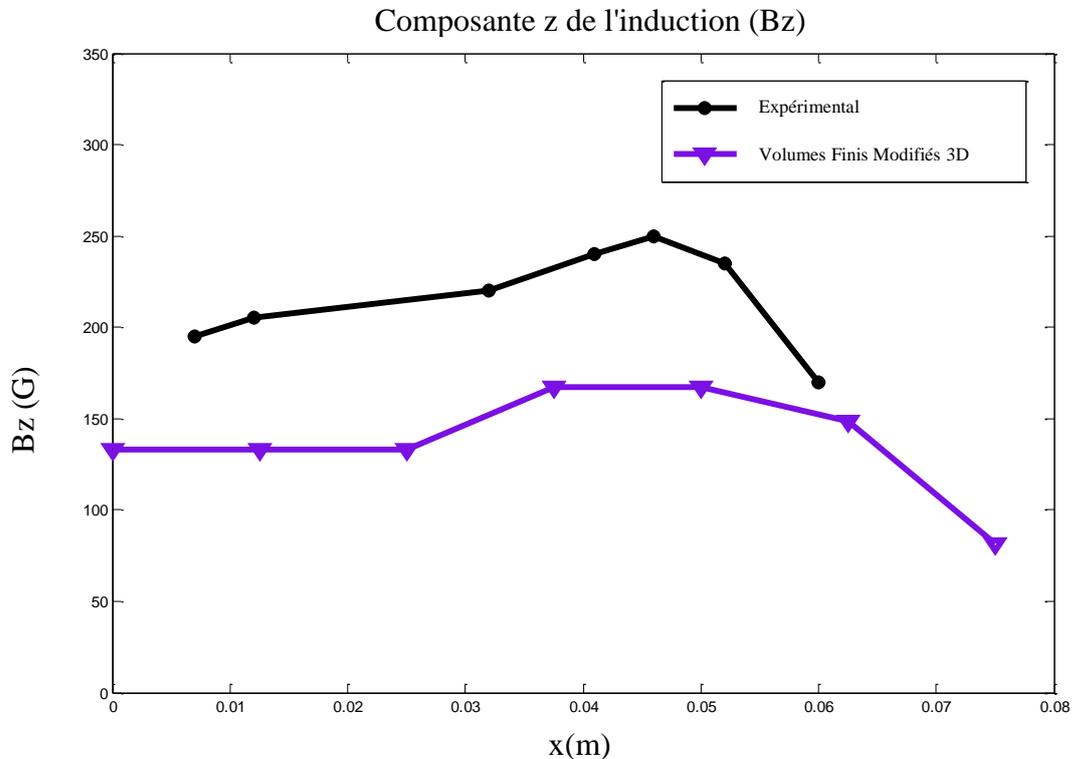


Fig.IV.23. Comparaison entre les résultats de la méthode des volumes finis modifiés MVFM 3D et expérimentaux.

Les résultats présentés sur la figure IV.23 ont un écart considérable. Grace aux modifications présentées précédemment ces résultats ont été améliorés considérablement. Ceci par la prise en compte de l'influence des corps magnétiques dans le dispositif étudié comme la montre la figure IV.24.

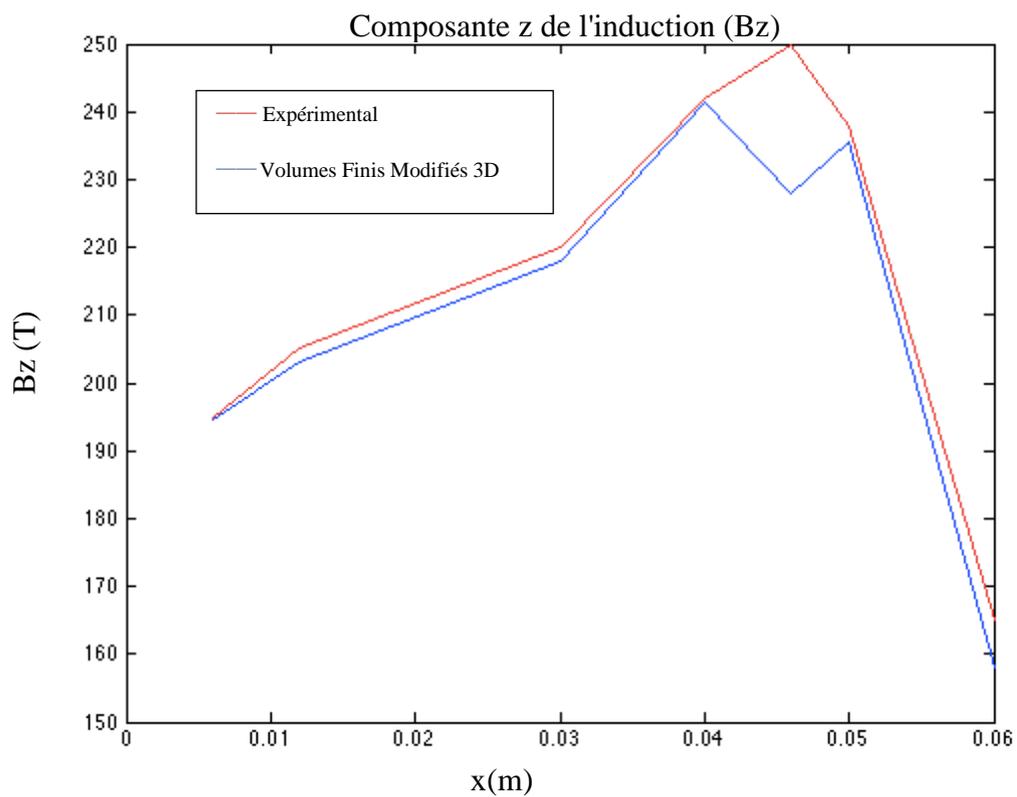


Fig.IV.24. Comparaison entre les résultats améliorés de la méthode des volumes finis modifiés MVFM 3D et expérimentaux.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion générale

Ce travail était relatif à l'application de la méthode des volumes finis pour la modélisation de configurations de contrôle non destructif par courants de Foucault. Nous avons élaboré un code de calcul tridimensionnel dédié à la modélisation et à la simulation des configurations de CND par courants de Foucault. Ce code de calcul programmé et implémenté sous l'environnement MATLAB, s'appuie sur la discrétisation en trois dimensions des équations de Maxwell par la méthode des volumes finis. Afin d'obtenir la résolution numérique du problème étudié, nous avons poursuivi le développement des deux codes de calcul numérique des grandeurs électromagnétiques où la méthode des volumes finis MVF a été adoptée. Le premier code utilise une approche de la MVF où le maillage structuré est utilisé (MVFC), le deuxième code utilise une autre approche de la MVF où le maillage non structuré est utilisé (MVFM). Le choix entre ces deux méthodes est basé essentiellement sur la géométrie du dispositif à modéliser. Si la géométrie possède une structure hexaédrique, l'application de la première approche est avantageuse en termes de temps de calcul et de simplicité. Par contre, cette première approche présente l'inconvénient de ne pas pouvoir modéliser des dispositifs ayant des géométries complexes. C'est véritablement tout l'intérêt de la deuxième approche de la MVF, le maillage va suivre naturellement la forme de la structure, les géométries complexes seront modélisées de façon plus rigoureuses et plus conformes sans que cela ne génère un nombre de mailles trop important.

Nous avons présenté les résultats des simulations obtenus à partir des codes numériques développés et implémentés sous environnement MATLAB, où la méthode des volumes finis a été adoptée comme méthode de résolution des équations aux dérivées partielles. Nous avons proposé des applications en vue de la validation du modèle mathématico-numérique développé. Parmi ces applications, dans un premier temps nous avons modélisé un problème type proposé par benchmarks académiques, dans cette application, le benchmark utilisé est le TEAM Workshop n° 15-1, où nous avons abordé de manière détaillée, la réponse et la détermination de l'impédance Z de la sonde à double fonctions. Dans cette première application la prise en compte de défauts dont une des dimensions est très petite ce sont les défauts de type fissure ont été considérés. Dans un second temps nous avons modélisé un problème type proposé par IEEJ trouvé dans la littérature, traité par plusieurs auteurs, où la confrontation avec les résultats expérimentaux valide la justesse des modèles développés, le système proposé est un système électromagnétique entouré par un inducteur dont le rôle est de créer un champ magnétique alternatif.

Conclusion générale

Dans ce travail la nouvelle approche de la méthode des volumes finis proposée dédiés principalement à la modélisation tridimensionnelle des problèmes électromagnétiques aux seins des dispositifs ayant des géométries complexes. Cette approche basée sur un maillage non-structuré à permet de résoudre un problème type. Nous avons nous même développé un mailleur 3D sous environnement Matlab conçu principalement pour adopter la méthode des volumes finis proposé dans le cadre de notre travail. Ce mailleur est conçu dans un premier temps par un mailleur 2D de type Delaunay donné par l'outil Matlab dans son environnement `PDE TOOL`. Ce maillage primal est composé par des éléments triangulaires 2D. A partir d'un sous programme, les centres de gravités de chaque élément seront identifiés. A partir de là, un second maillage est construit par la connexion de tout les centre des gravités des éléments adjacents où on obtient un mailleur en volume finis 2D. L'élévation par tranche du maillage obtenu permet de construire un mailleur 3D sous environnement Matlab. 25 élévation été effectuée pour traiter le problème à modélisé, où un total de nœuds de 10800 nœuds est utilisés pour discrétiser le problème en volumes finis.

Nous avons présenté les résultats des simulations à caractère électromagnétiques obtenus à partir du code numérique développé sous environnement Matlab. Dans un premier temps, nous avons observé, à partir des résultats obtenus, une bonne approximation des courbes expérimentales par les deux méthodes utilisées la MVFC et la MVFM. Les résultats obtenus par le modèle des défauts fins sont satisfaisants aussi bien pour le benchmark Team Workshop où la profondeur de la pièce est semi-infinie en regard de l'épaisseur de peau. Pour ce type de défauts, les champs en présence évoluent rapidement dans l'espace. La modélisation des fissures par la MVFM nécessite ainsi une densité de maillage local très important (30x30 x30 volumes) qui d'une part, peut augmenter considérablement le temps de calcul qui est supérieures à ceux lorsqu'on utilise la MVFC. Dans un second temps nous avons vérifié la répartition spatiale du potentiel vecteur magnétique A , avec la répartition de la densité du courant source. Selon les équations de Maxwell, le potentiel vecteur magnétique A , suit une trajectoire imposée par la densité du courant source, ceci est confirmé par les résultats des simulations présentés. Nous avons présenté l'induction magnétique B aux voisinages de l'interface air/fer. Selon les résultats présentés, on peut dire que la répartition du champ d'induction magnétique B est portée sur le plan perpendiculaire au plan portant le potentiel vecteur magnétique A . aussi on peut dire que le champ d'induction magnétique B est parfaitement canalisé dans le noyau magnétique du dispositif. Tout ces résultats, valide la justesse des résultats obtenus.

Conclusion générale

Comme résultat final de ce travail de thèse : nous avons montré que la MVFM est une méthode très prometteuse en termes de précision et de rapidité dans la résolution des problèmes d'électrotechnique. La comparaison avec les résultats expérimentaux valide l'approche proposée. Un faible écart entre résultats de simulation et les résultats expérimentaux apparaît.

Comme perspectives, nous proposons l'utilisation des codes de calcul développés pour étude des systèmes électromagnétiques avec Confrontation entre la MVFC, MVFM, MEF, FIT. Nous pensons aussi pouvoir améliorer les résultats de simulation par l'utilisation d'un mailleur tridimensionnel plus adapté en particulier le mailleur GMSH.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [Abakar 01] A. Abakar, “Modélisation tridimensionnelle de systèmes électromagnétiques comportant des régions filaires et des régions minces : application en CEM 50Hz à des dispositifs EDF”, Thèse de doctorat, Spécialité génie électrique, Institut national polytechnique de Grenoble, 2001.
- [Alloui 07] L. Alloui, “ Modélisation tridimensionnelle des matériaux supraconducteurs”, Thèse de doctorat, Spécialité génie électrique(Electrotechnique), de l’université paris sud, 2007.
- [Alloui 09 ^a] L. Alloui, F. Bouillault and S. M. Mimoune, “Numerical Study of the Influence of flux creep and of Thermal Effect on Dynamic Behaviour of Magnetic Levitation Systems with a high-Tc superconductor using control volume method”, EPJ. App. Phys., Vol. 37, No. 2, pp. 191-195, Feb. 2009.
- [Alloui 09 ^b] L. Alloui, F. Bouillault and S.M. Mimoune., “Modélisation 3D par la méthode des volumes finis des phénomènes électromagnétiques et thermiques couplés dans les matériaux supraconducteurs à haute température critique”, published in Revue internationale de Génie électrique, RIGE, 2009.
- [Alonso 04] D. R. Alonso, “Numerical analysis of high temperature superconductors with the critical-state model,” IEEE Trans on Applied superconductivity, vol. 14, no. 4, pp. 2053-2062, December. 2004.
- [Attal 96] J. Attal, “Microscopie acoustique”, technique de l’ingénieur R1402, 1996, pp. (1-10).
- [Benramdan 09] B. Benramdan, “Contribution à la modélisation tridimensionnelle de la technique thermo-inductive de contrôle non destructif : Développement d’un outil de conception, d’analyse et d’aide à la décision”, Thèse de Doctorat, Spécialité électrotechnique et génie électrique, Université de Nantes, 2009.
- [Berg 06] H. Berg, K. Alward et K. Lessmann : “Penetrant testing of standard parts, practical examples of process optimization.” In ECNDT 2006, novembre 2006.
- [Bird 08] J. Bird and al., “Calculating the forces created by an electrodynamic’s wheel using a 2-D steady-state finite element method,” IEEE Trans on Magnetics, vol. 44, no. 3, pp. 365-372, March. 2008.
- [Biro 89] O. Biro and K. Preis, “On the use of the magnetic vector potential in the finite element analysis of three dimensional eddy currents”, IEEE Trans. Magn., Vol. 25, No. 4, pp. 3145-3159, Jul. 1989.
- [Bonnet 97] F. Bonnet and F. Poupaud, “Berenger absorbing boundary condition with finite-volume scheme for triangular meshes, Applied Numerical Mathematics,” No 25, pages 333-354, 1997.
- [Bryan 55] H.E. Bryan : “Printed inductors and capacitors. ” Tele-Tech & Electronic Industries, 14(12):68, décembre 1955.

- [Buraïs 04] N. Buraïs, A. Nicolas, “Modèles pour la simulation des END par courants de Foucault”, Journées COFREND, Lyon, Oct 2004.
- [Burke 88] S. K. Burke. “A benchmark problem for computation of ΔZ in eddy current nondestructive evaluation (NDE)”. *Journal of Nondestructive evaluation*, Vol. 7, No. 1/2, pp. 3080–3083, 1988.
- [Chady 99] T. Chady, M. Enokizono, T. Todaka, Y. Tsuchida et R. Sikora : “A family of matrix type sensors for detection of slight flaws in conducting plates”. *IEEE Transactions on Magnetics*, 35(5):3655–3657, septembre 1999.
- [Chentouf 94] A. Chentouf, “Contribution a la Modélisation Electrique, Magnétique et Thermique d un Applicateur de Plasma Inductif Haute Fréquence ”, Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1994.
- [Choua 09] Y. Choua, “Application de la méthode des éléments finis pour la modélisation de configurations de contrôle non destructif par courants de Foucault”, Thèse de Doctorat, Spécialité Physique, Ecole Doctorale « Sciences et Technologies de l’Information des Télécommunications et des Systèmes », Université de Paris-Sud 11, 2009.
- [Cioni 95] J-P. Cioni, “Résolution numérique des équations de Maxwell instationnaires par une méthode de Volumes Finis,” Thèse de doctorat à l’université de Nice Sophia-Antipolis, Décembre 1995.
- [Davies 96] J. B. Davies and A. J. Dean., “Finite volume with non-uniform mesh for the solution of Maxwells equations”, *IEEE Transaction on Magnetic.*, Vol. 32, No. 3, pp. 1417-1420, May 1996.
- [Dumont-Fillon 96] J. Dumont-Fillon, “Contrôle non destructif (CND) ”, technique de l’ingénieur R1400, 1996, pp. (1-42).
- [Emmanuel 99] S. Emmanuel, “Diagnostic des machines asynchrones: modèles et outils paramétriques dédiés à la simulation et à la détection de défauts”, Thèse de doctorat, Automatique et informatique appliqué, Université de Nantes, 1999.
- [Feliachi10] A. Lakhdari, A. Cheriet, M. Feliachi, “Modélisation d’un capteur différentiel de CND-CF par la méthode des volumes finis”, *CEE’10, 6th International conférence en électrique engineering*, Batna, MAT97, N° 58, pp. 492-495, Oct 2010.
- [Fetzer 96] J. Fetzer, S. Kurz and G. Lehner, “Comparison between different formulations for the solution of 3D nonlinear Magnetostatic problems using BEM-FEM coupling”, *IEEE Trans. Magn.*, Vol. 32, No. 3, pp. 663-666, May 1996.
- [Fillon 96] J.Dumont-Fillon, “Contrôle non destructif (CND) ”, technique de l’ingénieur R1400, 1996, pp. (1-42).

- [Fujioka 96] T. Fujioka. "3-D analysis of current distribution and AC loss induced by external AC magnetic field in multifilamentary superconducting wires," IEEE Trans on Magnetics, vol. 32, no. 3, pp. 1140-1143, May. 1996
- [Gauthier02] F. Gauthier, "Les rails du métrosous le regard des courants de Foucault", Mesures physiques, Mesures.750, Dec 2002.
- [Hashizume 96] H. Hashizume and al., "three dimensional evaluation of the current distribution in twisted superconductors," IEEE Trans on Magnetics, vol. 32, no. 3, pp. 1152-1155, May. 1996.
- [Ioan 06] C. Ioan and all, "Modèle numérique électrothermique pour l'optimisation des contacts démontables de forts courants ", Annals of the niversity of craiova, electrical engineering series, No. 30, 2006.
- [Joo 07] J. H. Joo and al., "Design of electromagnet for high levitation force in 3D superconducting actuator," Proceeding of international conference on electrical machines and systems 07, pp. 1549-1552, Seoul, Korea, Oct 2007.
- [Kameni 09] A. Kameni, D. Netter, F. Sirois, B. Douine, and J. Lévêque, "New Hybrid FE-FV Method for Computing Current Distribution in 2-D Superconductors: Application to an HTS Cylinder in Transverse Magnetic Field," IEEE Trans. Appl. Supercond., vol. 19, no.3, pp. 2423-2427, June. 2009.
- [Kanayama 03] H. Kanayama, D. Tagami, K. Imoto, and S. Sugimoto, "Finite element computation of magnetic field problems with the displacement current," Jour. Comput. Appl. Math., 159, pp. 77-84, 2003.
- [Kanayama 06] H. Kanayama and S. I. Sugimoto, "Effectiveness of A- ϕ method in a parallel computing with an iterative domain decomposition method", IEEE Trans. Magn., Vol. 42, No. 4, pp. 539-542, Apr. 2006.
- [Kanayama 90] H. Kanayama, H. Motoyama et al., "Three-dimensional Magnetostatic analysis using Nedelec's elements", IEEE Trans. Magn., Vol. 26, No. 2, pp. 682-685, Mar. 1990.
- [Klutsch 03] I. Klutsch "Modélisation des supraconducteurs et mesures," Thèse de l'INP de grenoble, 2003.
- [Kringe 06] C. Kringe et T. Willems : "Performance of water-washable, fluorescent penetrants on water-basis as compared to traditional water-washable, fluorescent penetrants on petroleum-basis". In ECNDT 2006, novembre 2006.
- [Labbé 98] S. Labbé and P. Leca., "Résolution rapide des équations de Maxwell quasistationnaires : matrices Toeplitz multidimensionnelles. Application au micromagnétisme", C. R. Acad. Sci. Paris, Série I (t. 327) :415 420, 1998.

- [Lakhdari11] A. Lakhdari, "Etude et modélisation de capteurs en CND par courants de Foucault : Application a la détection des fissures", Mémoire de Magister, Spécialité électrotechnique, Option électricité industrielle, Université de Biskra, 2011.
- [Louai 95] F. Z. Louai, "Modèles magnétodynamiques d'éléments finis pour structures tridimensionnelles de chauffage par induction", Thèse de doctorat, Spécialité systèmes électroniques et informatiques, Université de Nantes, 1995.
- [Mathew sadiku 92] N. O. Mathew sadiku, "Numerical Technique in Electromagnetic", CRC, London, 1992.
- [Mekideche 93] M. R. Mekideche, "Contribution a la Modelisation Numerique de Torches a Plasma d Induction " Thèse de Doctorat, Université de Nantes, 1993.
- [Meunier 02] G. Meunier, "Electromagnétisme et problèmes couples". EGEM électronique, génie électrique, microsystèmes, paris Hermès 2002 Chapitre I pp. 21-63.
- [Minciunescu 98] P. Minciunescu, "Contributions to integral equation method for 3D magnetostatic problems", IEEE Trans. Magn., Vol. 34, No. 5, pp. 2461- 2464, Sep. 1998.
- [Mix 05] E. Mix, "Introduction to nondestructive testing: a training guide", Wiley Interscience, 2nd edition, United States of America, 2005.
- [Nath 93] S. Nath and W. Lord, "Three dimensional hybrid finite-boundary element model for eddy current NDE", IEEE Trans. Magn., Vol. 29, No. 2, pp. 1853-1856, Mar. 1993.
- [Nougier] J. P. Nougier, "Méthodes de calcul numérique", 3^{ème} édition, Edition Masson.
- [Oukhellou 97] L. Oukhellou, P. Aknin, "Structure multicapteur originale a courants de Foucault pour la détection en voie de défauts de rail", COFREND, Congrès sur les essais non destructifs. Nantes, 1997.
- [Oukhellou 97] L. Oukhellou, "Paramétrisation et Classification de Signaux en Contrôle Non Destructif. Application à la Reconnaissance des Défauts de Rails par Courants de Foucault", Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, 1997.
- [Pascal 03] R. Pascal, "Modélisation des traitements thermique superficiel par induction", Thèse de doctorat, Spécialité mécanique, Ecole centrale de Lyon, 2003.
- [Peix 88] Gilles Peix, "Contrôle non destructif par courant de Foucault", I.N.S.A. de Lyon, 1988.
- [Pelletier] J. P. Pelletier, "Techniques numériques appliqués au calcul scientifique," Edition Masson et Cie ; pp. 132, 135.
- [Piskounov 80] N. Piskounov, " Calcul Différentiel et Intégral ", Tome 1, Edition Moscou, 1980.
- [Ravat 08] Cyril Ravat, "Conception de multicapteurs à courants de Foucault et inversion des signaux associés pour le contrôle non destructif", Thèse de doctorat en sciences de l'université Paris-Sud11 soutenue le 15 décembre 2008.

- [Ravat 09] C. Ravat, Y. Le Bihan, P.-Y. Joubert, C. Marchand, M. Woytasik, E. Dufour Gergam, J. Moulin, E. Martincic, "Detection of small surface breaking cracks using a microcoil array eddy current sensor", CNI'09, Colloque National sur l'Inductique, Laghouat, N° 98, Avril 2009.
- [Remaki 98] M. Remaki and all, "Un nouveaux schéma de types volumes finis appliqué aux équations de Maxwell en milieu hétérogène ", Rapport de recherche No. 3351, INRIA, ISSN 0249-6399, Janvier 1998.
- [Sawa 1990] K. Sawa and T. Hirano, "An evaluation of the computational error near the boundary with magnetostatic field calculation by B.E.M.", IEEE Trans. Magn., Vol. 26, No. 2, pp. 403-406, Mar. 1990.
- [Techno-Science] www.Techno-Science.net.
- [Terman 43] F.E. Terman : Radio Engineers' Handbook. McGraw-Hill, New-York, 1943.
- [Tsuchimoto 94] M. Tsuchimoto and al., "Nulerical evaluation of levitation force of HTSC flywheel," IEEE Trans on Applied superconductivity, vol. 4, no. 4, pp. 211-215, December. 1994.
- [Vinot 02] E. Vinot and al., "Circuit coupling method applied to bulk superconductors" IEEE Trans on Applied superconductivity, vol. 38, no. 6, pp. 3661-3664, November. 2002.
- [Woytasik 06] M. Woytasik, J.-P. Grandchamp, É. Dufour-Gergam, J.-P. Gilles, S. Megherbi, É. Martincic, H. Mathias et P. Crozat : "Two- and three-dimensional microcoil fabrication process for three-axis magnetic sensors on flexible substrates. " Sensors and Actuators A : Physical, 132(1):2-7, novembre 2006.
- [Yaoqin 01] X. Yaoqin, L. Feng and M. Xinshan, "Computation of eddy current problems by the finite volume method", ICEMS'2001, International conference on electrical machines and systems, Vol. 2, pp. 1117-1120, Aug. 2001.
- [Yaoqin 02] X. Yaoqin, L. Feng and M. Xinshan, "Calculation of TEAM problem 21 by the finite volume method", IEEE'2002, International conference on communications circuits and systems, Vol. 2, pp. 968-971, Jun. 2002.
- [Zaidi12] H. Zaidi, " Méthodologies pour la modélisation des couches fines et du déplacement en contrôle non destructif par courants de Foucault : application aux capteurs souples ", Thèse de Doctorat, Spécialité Physique, Ecole Doctorale « STITS, Laboratoire de Génie Electrique de Paris », Université de Paris-Sud, 2012.
- [Zitouni 06] A. Zitouni, "Modélisation et Conception d'un Capteur à Courants de Foucault Intelligent pour l'Identification de Canalisations Enterrées ", Thèse de Doctorat, Spécialité Génie informatique, automatique et traitement du signal, Université de Reims Champagne-Ardenne, 2006.
- [Zou 04] J. Zou and all, "Magnetic field analysis of iron-core reactor coils by the finite-volume method", IEEE Transaction on Magnetic, Vol. 40, no. 2, pp. 814-817, March 2004.

ملخص

نقدم مساهمة في النمذجة ثلاثية الأبعاد للظواهر الكهرومغناطيسية في المواد المغناطيسية. لقد اعتمدنا في هذه الدراسة على طريقة الحجم المنتهية لحل المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية التي تفسر الظواهر الفيزيائية المراد معالجتها. هذه الطريقة يتم تطبيقها لفحص نوعي للهيكل، من بين طرق الفحص غير المتلف الكثيرة الاستعمال، نختار تقنية الفحص غير المتلف بواسطة تيارات فوكو. هذه التقنية تعتمد على كاشف حثي. نقدم نهجين مختلفين لطريقة الأحجام الجزئية، الأولى تعتمد على شبكة مهيكلة، مصنفة لطريقة الأحجام الجزئية الكلاسيكي و النهج الثاني، يستند إلى شبكة غير المهيكلة التي تتطلب شبكة مستقلة، مصنفة لطريقة الأحجام الجزئية لطريقة الأحجام الجزئية المعدلة. النماذج الرياضية والرقمية المقترحة لدراسة الظواهر الكهرومغناطيسية تنفذ وتحدد قيمة ممانعة الكاشف ونحن مهتمون في النظر في العيوب من نوع التشقق. وتعرض النتائج طبيعة الكهرومغناطيسية. في الأخير قمنا بمقارنة النتائج ذات الخاصية الكهرومغناطيسية المتحصل عليها عن طريق النموذج الرياضي والرقمي المقترح وعن طريق التجربة للتأكد من فعالية البرنامج الحسابي المقترح والنتائج المعروضة.

Résumé--- nous présentons une contribution à la modélisation tridimensionnelle des phénomènes électromagnétiques dans les matériaux magnétiques. La méthode des volumes finis est adoptée comme méthode de résolution des équations aux dérivées partielles caractéristiques aux phénomènes physiques traités. Cette méthode est appliquée pour la modélisation de configurations de contrôle non destructif par courants de Foucault. Nous proposons deux approches différentes de la MVF, la première basée sur un maillage structuré, c'est la méthode des volumes finis classique notée 'MVFC', la deuxième approche, basée sur un maillage non-structuré qui requiert un maillage indépendant, c'est la méthode des volumes finis modifiée notée 'MVFM'. L'ensemble des modèles mathématico-numériques ainsi développés et implémentés sous Matlab, sont appliqués pour étudier des problèmes, électromagnétiques où nous abordons la réponse et la détermination de l'impédance de la sonde. On s'intéresse à la prise en compte de défauts de type fissure. Les résultats à caractère électromagnétiques sont présentés. La validité du travail proposé est atteinte par comparaison des résultats ainsi obtenus à ceux donnés par l'expérimentation.

Mots clés--- Contrôle Non Destructif (CND), Contrôle Non Destructif Par Courants de Foucault (CND-CF), Modélisation Numérique, Electromagnétisme, Volumes Finis, Méthode de Volumes Finis Classique, Méthode de Volumes Finis Modifiés.

Abstract--- We present a contribution for three-dimensional modelling electromagnetic in magnetic materials. The control finite volume method is used for the resolution of the partial derivative equations characterising of the treated physical phenomena. This method is applied for the modeling of non-destructive eddy current control configurations, We propose two different approaches to the FVM, the first based on a structured mesh, it is the classical finite volume method noted 'CFVM', The second approach, based on an unstructured mesh that requires an independent mesh, is the modified finite volume method denoted 'MFVM'. The set of mathematical-numerical models thus developed and implemented under Matlab software, are applied for studying problems, electromagnetic where we approach the response and the determination of the impedance of the probe. We are interested in the taking into account of defects of the crack type. The results in Electromagnetic are largely presented. The validity of the proposed work is attained by comparing the results thus obtained with those given by the experiment.

Key words -- Non-Destructive Testing, Eddy Current Non-Destructive Testing (CND-CF), Numerical Modeling, Electromagnetism Numerical Modelling, Control Volumes, classical finite volume method 'CFVM', modified finite volume method denoted 'MFVM'.