

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA  
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

**Thèse de DOCTORAT**

Spécialité : Electrotechnique

Présentée par :

**Mourad HAMIMID**

---

**MODELES DE L'HYSTERESIS MAGNETIQUE ET LEURS  
IMPLEMENTATIONS PAR LA METHODE DES VOLUMES  
FINIS DANS LES DISPOSITIFS ELECTROMAGNETIQUES**

---

**Soutenu publiquement le 13 Juin 2011 devant le jury :**

**Président** Salah Eddine ZOUZOU Professeur, Université de Biskra  
**Rapporteurs** Sourì Mohamed MIMOUNE Professeur, Université de Biskra  
Mouloud FELIACHI Professeur, Université de Nantes FRANCE  
**Examineurs** Sebti BOUKHTACHE Professeur, Université de Batna  
Hassane MOHELLEBI, Professeur, Université de Tizi-Ouzou

## Liste des travaux concernant le travail de thèse

### – *Publications Internationales*

**M. Hamimid**, M. Feliachi, S. M. Mimoune “Modified Jiles-Atherton model and parameters identification using false position method” *Physica B : Condensed Matter*, Elsevier, Science Direct, Vol. 405, Issue 8, pp. 1947- 1950, 15 April 2010.

### – *Conférences maghrébines*

**M. Hamimid**, S. M. Mimoune “Integration of Jiles-Atherton Model in a Calculation Code using the Method of the Finites Volumes in a Ferromagnetic Device” *International Conference on Electrical Engineering Design and Technologies* 4-6 Nov.2007,HAMMAMET,Tunisia.

**M. Hamimid**, S. M. Mimoune “Identification des paramètres du modèle de Jiles-Atherton En utilisant un algorithme itératif couplé avec la méthode de Newton-Raphson.CAFMET *Seconde Conférence Internationale de Métrologie d’Afrique*,Tunisia, 21-25/04/2008.

### – *Conférences Internationales.*

**M. Hamimid**, M. Feliachi, S. M. Mimoune “Nonlinear electromagnetic field computation using the finite volume time domain method coupled to a modified inverse Jiles-Atherton model”, *XXI Symposium on Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuits EPNC 2010*, Dortmund-Essen, Allemagne, 29 June - 02 July 2010.

**M. Hamimid**, M. Feliachi, S. M. Mimoune “2D Finite Volume Modeling Using Modified Jiles- Atherton Hysteresis Model in Time-Stepping Calculations”, *Conférence sur les matériaux du génie électrique MGE*,Montpellier, France, 30 Août - 01 Septembre 2010.

# Remerciements

Ce travail est réalisé dans le cadre d'un accord programme de coopération Franco-algérien. Ce travail a été réalisé aux laboratoires LMSE de l'Université de Biskra ALGERIE et au Centre de Recherche et de Transfert de Technologies (CRTT), IREENA de Saint Nazaire FRANCE.

En premier lieu, je tiens à remercier mon co-encadreur de thèse, Mr. le Professeur **Mouloud FELIACHI** Professeur à l'Université de Nantes qui m'a accueilli au sein de son équipe de recherche au CRTT pour effectuer ces travaux de thèse. Je tiens également à vous exprimer toute ma reconnaissance pour ces dix-huit mois de stage que j'ai passé à vos côtés.

Je tiens à remercier également mon directeur de thèse Monsieur **Souri Mohamed MI-MOUNE** Professeur à l'Université de Biskra, pour son encadrement de grande qualité, spécialement en ce qui concerne le travail scientifique, et ses qualités humaines. Je le remercie plus particulièrement pour la confiance qu'il m'a accordée dès mon travail de Magister.

Je tiens à adresser mes plus sincères remerciements aux membres du jury :

Monsieur **Salah Eddine ZOUZOU**, Professeur à l'Université de Biskra, qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

Monsieur, **Sebti BOUKHTACHE** Professeur à l'Université de Batna, pour avoir accepté de juger ma thèse.

Monsieur **Hassane MOHELLEBI**, Professeur à l'Université de Tizi-Ouzou, pour avoir accepté de participer à mon jury.

Bien entendu, je n'oublie pas l'ensemble des doctorants de CRTT pour l'ambiance de travail dans la bonne humeur.

Je voudrais adresser un remerciement particulier au Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique du gouvernement Algérien, pour m'avoir accordé le financement de mon séjour au CRTT.

# Table des matières

<b>1. Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>2. Généralités sur les matériaux magnétiques</b>	<b>4</b>
2.1. Introduction . . . . .	4
2.2. Grandeurs magnétiques . . . . .	4
2.3. Origine du magnétisme . . . . .	5
2.3.1. Moment magnétique orbital . . . . .	5
2.3.2. Moment magnétique du spin . . . . .	6
2.4. Différents types des matériaux magnétiques . . . . .	6
2.4.1. Les matériaux diamagnétiques . . . . .	7
2.4.2. Les matériaux paramagnétiques . . . . .	8
2.4.3. Les matériaux ferromagnétiques . . . . .	9
2.5. La théorie du ferromagnétisme . . . . .	9
2.5.1. Configuration en domaines magnétiques . . . . .	9
2.5.2. Origines des domaines magnétiques- considération énergétique . . . . .	10
2.5.2.1. Les parois de domaines . . . . .	13
2.5.3. Processus de l'aimantation . . . . .	13
2.6. Le cycle d'hystérésis . . . . .	18
2.6.1. Caractérisation . . . . .	19
2.7. Classification des matériaux ferromagnétiques . . . . .	20
2.7.1. Les matériaux durs . . . . .	21
2.7.2. Les matériaux doux . . . . .	21

2.8. Les tôles magnétiques . . . . .	22
2.8.1. Classification des tôles . . . . .	22
2.8.1.1. Les tôles à grains orientés (G.O) . . . . .	23
2.8.1.2. Les tôles à grains non orientés (N.O) . . . . .	23
2.9. Les pertes fer dans la matière . . . . .	23
2.9.1. Expressions des pertes . . . . .	24
2.9.2. Principe de séparation des pertes . . . . .	24
2.10. Principe de la caractérisation Epstein . . . . .	26
2.10.1. Principe de la mesure . . . . .	26
2.11. Plage de fréquence d'utilisation . . . . .	28
<b>3. Les Modèles d'Hystérésis Magnétiques</b>	<b>31</b>
3.1. Introduction . . . . .	31
3.2. Les modèles analytiques . . . . .	32
3.2.1. Modèle d'Hystérésis de Rayleigh . . . . .	32
3.2.2. Le modèle d'hystérésis de Frölich . . . . .	34
3.2.3. Le modèle d'hystérésis de Potter . . . . .	35
3.2.4. Modèle à fonctions multiples . . . . .	36
3.2.5. Modèle à fonctions auxiliaires . . . . .	38
3.2.6. Le modèle d'Ising . . . . .	40
3.2.7. Modèle de (Stoner-Wohlfarth) . . . . .	43
3.2.8. Modèle de Amir NOUREDINE . . . . .	43
3.2.9. Modèle de Preisach . . . . .	44
3.3. Hystérésis dynamiques . . . . .	46
3.3.1. Le modèle de Duhem . . . . .	46
3.3.2. Modèle de Preisach-Bertotti . . . . .	47
3.3.3. Modèle de Raulet-Masson . . . . .	48
3.3.4. Modèle de Jiles- Szczyglowski . . . . .	48
3.4. Modèles d'hystérésis de type Langevin . . . . .	49
3.4.1. Théorie de Langevin pour le paramagnétisme . . . . .	49

3.4.2.	La correction de Weiss pour les matériaux ferromagnétiques . . . . .	51
3.4.3.	Le modèle d'hystérésis de Jiles-Atherton . . . . .	52
3.4.4.	Formulation du Modèle . . . . .	52
3.4.5.	La résolution numérique pour le modèle de J-A . . . . .	55
3.4.6.	Influence des paramètres sur le cycle d'hystérésis . . . . .	57
3.4.6.1.	Effet du paramètre $k$ . . . . .	57
3.4.6.2.	Effet du paramètre $\alpha$ . . . . .	57
3.4.6.3.	Effet du paramètre $a$ . . . . .	58
3.4.6.4.	Effet du paramètre $c$ . . . . .	58
3.4.7.	Détermination des paramètres du modèle . . . . .	59
3.4.7.1.	Détermination de $\mathbf{M}_s$ . . . . .	60
3.4.7.2.	Détermination de $k$ . . . . .	60
3.4.7.3.	Détermination de $\alpha$ . . . . .	60
3.4.7.4.	Détermination de $a$ . . . . .	61
3.4.7.5.	Détermination de $c$ . . . . .	62
3.4.8.	Procédure d'Identification des Paramètres . . . . .	62
3.4.9.	Validation de l'algorithme itératif . . . . .	63
<b>4.</b>	<b>Développement du Modèle de Jiles-Atherton</b>	<b>67</b>
4.1.	Introduction . . . . .	67
4.2.	Le modèle de Jiles-Atherton modifié . . . . .	67
4.2.1.	Identification des paramètres du modèle modifié . . . . .	69
4.2.2.	Paramètres du modèle modifié MJA . . . . .	70
4.2.3.	Paramètres du modèle originale de JA . . . . .	72
4.3.	Technique d'identification MPF . . . . .	73
4.3.1.	Application de la technique d'identification . . . . .	73
4.4.	Le modèle inverse modifié de Jiles-Atherton . . . . .	75
4.5.	Le modèle dynamique de Jiles-Atherton . . . . .	76
4.5.1.	Modèle dynamique direct . . . . .	76
4.5.2.	Nouvelle formulation du modèle dynamique inverse . . . . .	77

4.5.3. Validation du modèle dynamique inverse . . . . .	80
4.6. Conclusion . . . . .	88
<b>5. Formulations et modélisations</b>	<b>89</b>
5.1. Introduction . . . . .	89
5.2. Equations de Maxwell . . . . .	89
5.2.1. Lois constitutives du milieu . . . . .	91
5.2.2. Les conditions de passages . . . . .	91
5.2.3. Les conditions aux limites . . . . .	92
5.3. Les formulations électromagnétiques . . . . .	92
5.3.1. La formulation en potentiel vecteur magnétique . . . . .	94
5.3.2. Formulation magnétostatique non-linéaire . . . . .	95
5.3.3. Formulation magnétodynamique non-linéaire . . . . .	96
5.4. Outils numériques . . . . .	97
5.4.1. La méthode des volumes finis . . . . .	98
5.4.2. Discrétisation géométrique par la MVF . . . . .	98
5.4.3. Formulation volumes finis du problème électromagnétique . . . . .	99
5.4.4. Discrétisation de la formulation magnétostatique . . . . .	99
5.4.5. Discrétisation de la formulation magnétodynamique . . . . .	103
5.4.5.1. Différents schémas de discrétisation . . . . .	105
5.5. conclusion . . . . .	106
<b>6. Intégration du modèle de J-A dans un code de caclul par MVF</b>	<b>107</b>
6.1. Introduction . . . . .	107
6.2. Présentation du dispositif . . . . .	107
6.3. Etude du comportement électromagnétique linéaire . . . . .	109
6.4. Analyse du comportement électromagnétique non linéaire . . . . .	110
6.4.1. Analyse sans pertes excédentaires ( $C_{exc} = 0$ ) . . . . .	114
6.4.2. Analyse sans pertes induit par courants de Foucault ( $C_{edd} = 0$ ) . . . . .	115
6.5. Conclusion . . . . .	117

<b>7. Conclusion Générale</b>	<b>118</b>
<b>A. Annexe A.</b>	<b>120</b>
A.1. La Méthode de Fausse Position (Regula Falsi) . . . . .	120
<b>B. Annexe B.</b>	<b>122</b>
B.1. Développement du Modèle Dynamique de Jiles-Atherton . . . . .	122
B.2. Processus de résolution . . . . .	123
B.2.1. Méthode de Newton-Raphson . . . . .	123

# Table des figures

2.1. Le moment magnétique orbital . . . . .	6
2.2. Comportement diamagnétique . . . . .	8
2.3. Comportement paramagnétique . . . . .	9
2.4. Configuration en domaines magnétiques, (a) en l'absence du champ magnétique extérieur, (b) en présence du champ magnétique extérieur . . . . .	10
2.5. Rotation des moments magnétiques dans une paroi de Bloch à $180^\circ$ . . . . .	13
2.6. Echantillon initialement désaimanté, les points figurent des défauts . . . . .	14
2.7. Déplacement des parois jusqu'à des zones de blocage . . . . .	14
2.8. Déformation des parois . . . . .	15
2.9. Zone d'accrochage/décrochage de parois . . . . .	15
2.10. Zone de disparition de parois . . . . .	16
2.11. Zone de rotation des moments . . . . .	16
2.12. Retour au zéro d'excitation de l'excitation . . . . .	17
2.13. Passage par le champ coercitif $H_c$ . . . . .	17
2.14. Zone de rotation des moments . . . . .	18
2.15. Fermeture du cycle . . . . .	18
2.16. Cycle d'hystérésis représentant l'évolution de l'induction magnétique en fonction du champ magnétique appliqué . . . . .	19
2.17. Les grandes classes de matériaux magnétiques industriels . . . . .	20
2.18. Cycle d'hystérésis pour les matériaux durs . . . . .	21
2.19. Cycle d'hystérésis pour les matériaux doux . . . . .	22

2.20. Allure de l'évolution des trois contributions aux pertes totales par cycle et par unité de masse (W/kg) en fonction de la fréquence sur des tôles de type FeSi 3% (d'après le modèle de Giorgio Bertotti, 1988) à basse induction $B=1.4$ T.	25
2.21. Image du cadre d'Epstein . . . . .	26
2.22. Cadre Epstein . . . . .	28
2.23. Cycles d'hystérésis à différentes fréquences (tôles à grains non orientés FeSi 3%)	29
3.1. Cycle d'hystérésis simulé avec le modèle de Rayleigh . . . . .	33
3.2. Cycle d'hystérésis simulé avec le modèle de Frolich . . . . .	35
3.3. Cycle d'hystérésis simulé avec le modèle de Potter . . . . .	36
3.4. Cycle majeur d'hystérésis simulé . . . . .	38
3.5. Cycle d'hystérésis en utilisant les fonctions auxiliaires . . . . .	40
3.6. Représentation 2D d'un réseau cristallin et moments magnétiques . . . . .	41
3.7. moments magnétiques voisins du moment $\mathbf{i}$ . . . . .	42
3.8. (a) commutateur magnétique (b) plan de Preisach . . . . .	45
3.9. La courbe de première aimantation selon le modèle de Langevin . . . . .	51
3.10. Aimantation irréversible ( <b>a</b> ), réversible ( <b>b</b> ), anhystérétique ( <b>c</b> ) et l'aimantation totale ( <b>d</b> ) . . . . .	56
3.11. Comportement non physique au voisinage de la saturation d'un cycle majeur.	56
3.12. Effet de paramètre $k$ sur l'allure du cycle d'hystérésis . . . . .	57
3.13. Effet de paramètre $\alpha$ sur l'allure du cycle d'hystérésis . . . . .	58
3.14. Effet de paramètre $a$ sur l'allure du cycle d'hystérésis . . . . .	58
3.15. Effet de paramètre $c$ sur l'allure du cycle d'hystérésis . . . . .	59
3.16. Les susceptibilités différentielles utilisées pour la détermination des paramètres	59
3.17. Procédure d'identification des paramètres . . . . .	63
3.18. Cycle d'hystérésis d'un matériau (Doux) . . . . .	65
3.19. Cycle d'hystérésis d'un matériau (Durs) . . . . .	65
4.1. Cycles d'hystérésis mesurés et simulés . . . . .	74
4.2. Cycles d'hystérésis mesurés et simulés (Zoom) . . . . .	74
4.3. Cycles d'hystérésis obtenues par le modèle dynamique de J-A . . . . .	78

4.4. Cycle simulé et mesuré <b>(a)</b> pour $10Hz$ , <b>(b)</b> pour $50Hz$ , <b>(c)</b> pour $150Hz$ et <b>(d)</b> pour $250Hz$ . . . . .	82
4.5. Champ coercitif mesuré et calculé pour différentes fréquences . . . . .	83
4.6. Cycle simulé et mesuré <b>(a)</b> pour $50Hz$ , <b>(b)</b> pour $150Hz$ et <b>(c)</b> pour $250Hz$ . . . . .	83
4.7. Courant mesuré et simulé avec et sans pertes excédentaires pour $200Hz$ . . . . .	84
4.8. Les pertes spécifiques (W/Kg), mesurées et calculées . . . . .	85
4.9. densité de pertes : (a) excédentaires, (b) par courants de Foucault . . . . .	86
4.10. Confirmation de l'identification des paramètres (a) pertes excédentaires, (b) pertes par courant de Foucault. . . . .	87
4.11. densité de pertes spécifiques (W/Kg), mesurées et calculées en utilisant l'expression (4.44) . . . . .	88
5.1. Surface de séparation $\Gamma$ entre deux milieux $\Omega_1$ et $\Omega_2$ . . . . .	91
5.2. Problème typique de la magnétodynamique . . . . .	93
5.3. Schématisation d'un plan de symétrie . . . . .	96
5.4. Volume élémentaire $D\mathbf{p}$ . . . . .	99
5.5. Interfaces des volumes élémentaires . . . . .	101
6.1. Dispositif a étudié . . . . .	108
6.2. $\frac{1}{4}$ du cadre avec les conditions aux limites . . . . .	108
6.3. Maillage du domaine d'étude . . . . .	109
6.4. (a) Première aimantation, (b) Perméabilité relative . . . . .	109
6.5. Distribution du potentiel vecteur : (a) Volumes finis, (b) éléments finis avec (PDETOOL) . . . . .	110
6.6. Cycles d'hystérésis calculés par la MVF et cycles mesurés : (a) $f = 10 Hz$ , (b) $f = 50 Hz$ , (c) $f = 100 Hz$ et (d) pour $f = 200 Hz$ . . . . .	111
6.7. Les lignes de l'induction magnétique . . . . .	111
6.8. Distribution des pertes spécifiques : (a) $f = 10 Hz$ , (b) $f = 50 Hz$ , (c) $f = 100 Hz$ et pour $f = 200 Hz$ . . . . .	112
6.9. Les pertes spécifiques (W/Kg), calculées par le modèle dynamique inverse et par la MVF . . . . .	113

*Table des figures*

6.10. Intensité du champ magnétique mesurée et calculée pour $f = 50 Hz$ . . . . .	113
6.11. Cycles d'hystérésis calculés sans pertes excédentaires et cycles mesurés : (a) $f = 50 Hz$ , (b) $f = 100 Hz$ , (c) $f = 200 Hz$ et (d) pour $f = 250 Hz$ . . . . .	114
6.12. Evolution des pertes spécifiques sans pertes excédentaires calculées par le MDI et celles calculées par la MVF. . . . .	115
6.13. Cycles d'hystérésis calculés sans pertes par courants induits et cycles mesurés : (a) $f = 50 Hz$ , (b) $f = 150 Hz$ , (c) $f = 200 Hz$ et (d) pour $f = 250 Hz$ . . . . .	116
6.14. Evolution des pertes spécifiques sans pertes par courant de Foucault calculées par le MDI et celles calculées par la MVF. . . . .	116
A.1. Etapes successives de la MFP sur l'intervalle $[a_1; b_1]$ . . . . .	121

# Liste des tableaux

2.1. Susceptibilités des matériaux diamagnétiques . . . . .	7
2.2. Susceptibilités de certains matériaux paramagnétiques . . . . .	8
3.1. Les significations physiques des paramètres du modèle de J-A . . . . .	55
3.2. Paramètres d'un matériau doux . . . . .	64
3.3. Paramètres d'un matériau durs . . . . .	64
4.1. Paramètres extraits de l'expérience . . . . .	73
4.2. Paramètres identifiés . . . . .	73
4.3. Caractéristiques physiques des tôles . . . . .	80
4.4. Paramètres identifiés dans le cas quasi- statique . . . . .	81
4.5. Les nouveaux paramètres dynamiques . . . . .	81
4.6. Champ coercitif mesuré et calculé . . . . .	82
4.7. Les pertes spécifiques (W/Kg), mesurées et calculées . . . . .	85
4.8. Paramètres identifiés . . . . .	87

# 1. Introduction Générale

Le principe de fonctionnement des dispositifs d'électrotechniques comme les machines tournantes et les transformateurs est lié à la distribution du champ électromagnétique dans leurs circuits magnétiques. Ces derniers sont fabriqués à partir des matériaux magnétiques, leur principal rôle est la canalisation du flux magnétique. Sans ces matériaux aucune conversion d'énergie n'est possible. La détermination précise du champ magnétique dans ces dispositifs nécessite la connaissance, en premier lieu, du comportement magnétique de ces matériaux. Si nous nous intéressons à la construction des machines électriques nous constatons que les matériaux utilisés dans la fabrication de leurs circuits magnétiques, sont le plus souvent des matériaux ferromagnétiques où la loi de comportement magnétique est fortement non linéaire et de type hystérétique. De plus ces dispositifs sont soumis à des formes d'ondes très diverses imposées par l'alimentation. Cela pose une grande difficulté pour la modélisation de ces derniers. Néanmoins, des approches analytiques et empiriques sont utilisées dans cette modélisation. Mais ces approches ne permettent pas de prendre en compte des pertes d'origine ferromagnétiques. La détermination de ces pertes est une étape plus importante lors de la conception des dispositifs électrotechniques. Il existe des formules empiriques qui permettent de déterminer ces pertes mais elles restent toujours approximatives. Pour remédier à ces problèmes, il est nécessaire de trouver un modèle d'hystérésis permettant de représenter et avec précision ces pertes et de l'intégrer dans un code de calcul de champ basé sur la méthode des volumes finis [VER-95]. C'est dans ce contexte que s'inscrit notre travail. Ce travail de thèse s'intéresse à la rencontre de deux domaines très différents mais complémentaires. D'une part il faut trouver un modèle hystérésis capables de reproduire de manière précise le comportement magnétique du matériau dans le cas quasi-statique et dynamique. Ce dernier est le résultat de mécanismes complexes liés à la microstructure du matériau.

D'autre part ce modèle doit être intégré dans des outils de modélisation. Il est alors important de tenir compte des contraintes liées à la modélisation par la méthode des volumes finis et plus particulièrement de minimiser le temps de calcul et la place mémoire nécessaire. C'est donc en tenant compte du phénomène d'hystérésis magnétique dans un code de calcul par la méthode des volumes finis que l'on fait se rencontrer les deux domaines du magnétisme et de la modélisation numérique.

On commence à disposer de nos jours en génie électrique des outils performants pour la modélisation des systèmes électromagnétiques. Grâce à des méthodes numériques tel que la méthode des éléments finis [ZIE-91] et la méthode des volumes, il est possible d'étudier des systèmes complexes avant même de les fabriquer, le but des outils numériques est de garantir des résultats précis de la simulation avec le moindre coût en terme de temps de calcul et de consommation de mémoire.

La modélisation numérique, quant à elle, est un domaine d'étude récent. En fait, cette discipline a connue une évolution importante avec l'apparition des ordinateurs. L'essor de l'informatique a permis le calcul numérique approché des grandeurs magnétiques par résolution des équations de Maxwell qui permettent de formaliser les principes de base des différentes machines. Ceci n'aurait pas de sens si c'était fait en dépit des phénomènes physiques.

Le domaine de la physique qui va nous intéresser est celui du magnétisme et plus précisément, le phénomène d'hystérésis magnétique. Le l'objectif de ce travail est de modéliser le comportement hystérétique des matériaux magnétiques et de l'intégrer dans un code de calcul par la méthode des volumes finis.

Plusieurs modèles d'hystérésis sont proposés dans la littérature [LIO-00]. Certains sont purement analytiques [CHU-70, HOD-88, MAY-91], et d'autres sont basés sur des considérations physiques [JIL-86]. Cette diversité de modèles montre bien la difficulté rencontrée lors de la représentation du comportement magnétique hystérétique des matériaux. De plus, dans le cas des matériaux conducteurs, l'apparition à haute fréquence des courants induits entraîne la déformation du cycle d'hystérésis. Il doit être tenir en compte cette contribution dans la loi de comportement.

On commence ce manuscrit, par une généralité sur les matériaux magnétiques, ainsi, les notions de bases du point vue des sciences des matériaux, suivies d'une description détaillée

## 1. Introduction Générale

du processus d'aimantation à l'échelle macroscopique dans les matériaux ferromagnétiques, ainsi que l'évolution des pertes dans ces matériaux. Enfin, le principe de caractérisation de ces matériaux. Dans le troisième chapitre, nous présentons les différents modèles d'hystérésis magnétiques rencontrés dans la littérature, à la fin de ce chapitre, nous développons le modèle de Jiles-Atherton, ainsi, nous proposons une technique d'identification des paramètres de ce modèle. Les résultats seront comparés avec des cycles théoriques pour deux types de matériaux (doux et durs). Au quatrième chapitre, nous développons le modèle de Jiles-Atherton dans le cas statique et dynamique. Nous modifions ce modèle dans le cas statique en tenant compte des considérations physiques, nous proposons, aussi, une nouvelle technique d'identification des paramètres de ce modèle. Dans le cas dynamique nous présenterons une nouvelle formulation de ce modèle, qui est capable de générer les cycles d'hystérésis dans le cas dynamique sans avoir identifié les paramètres de ce modèle à nouveau. Les résultats de cette nouvelle formulation seront comparés avec les mesures relevées sur un banc expérimental pour différentes fréquences. Le cinquième chapitre présente, les modèles mathématiques des phénomènes électromagnétiques basés sur les équations de Maxwell. Nous présenterons dans ce chapitre les formulations à l'aide du potentiel vecteur magnétique et ce, dans le cas magnétostatique et magnétodynamique non linéaire. A la fin de ce chapitre nous présenterons en détaille la méthode des volumes finis, ainsi, la discrétisation des différentes formulations à l'aide cette méthode. Le dernier chapitre traite l'intégration de modèle dynamique inverse de Jiles-Atherton dans un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis. Le dispositif testé est le cadre Epstein, où les tôles magnétiques (de type FeSi 3% à grain non-orienté) sont caractérisées. Enfin, nous effectuons une étude des pertes spécifiques en régime dynamique basée sur le principe de séparation des pertes fer.

## 2. Généralités sur les matériaux magnétiques

### 2.1. Introduction

Les matériaux magnétiques ont une importance technologique considérable, grâce à leur grande richesse de comportement. Par ailleurs le magnétisme occupe une place remarquable dans la description des propriétés fondamentales de la matière. Ces matériaux ont une large gamme d'applications technologiques. Ainsi, dans certains dispositifs tels que les transformateurs, les moteurs, les générateurs et les bobines d'induction, on utilise habituellement des noyaux de fer pour augmenter l'intensité des champs magnétiques. Bon nombre de dispositifs, tels que les haut-parleurs et les microphones, fonctionnent à l'aide de matériaux magnétiques. La détermination précise des grandeurs magnétiques dans ces dispositifs est une préoccupation de l'électrotechnicien en vue d'une optimisation à la fois économique et technique.

### 2.2. Grandeurs magnétiques

La théorie magnétique emploie deux grandeurs de champ pour décrire les phénomènes magnétiques, qui sont le champ magnétique  $\mathbf{H}$  et l'induction  $\mathbf{B}$ . La relation entre ces deux grandeurs dans le vide est linéaire et donnée par l'équation suivante :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.1)$$

où  $\mu_0$  représente la perméabilité magnétique du vide ( $4\pi 10^{-7}$  H/m). En présence des maté-

rioux magnétiques, la relation (1.1), lie ces deux grandeurs vectorielles, ne reste plus valable, car une nouvelle grandeur vectorielle ( $\mathbf{M}$  aimantation magnétique) apparaît pour traduire la réaction du milieu au champ électromagnétique. A l'échelle macroscopique, l'aimantation  $\mathbf{M}$  du matériau est donnée par :

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial v} \quad (2.2)$$

Où  $\mathcal{M}$  représente la somme des moments magnétiques atomiques et  $\partial v$  est l'élément du volume considéré. Ainsi, en présence du matériau, la relation qui lie les grandeurs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  est donnée par :

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (2.3)$$

La relation  $\mathbf{B}=f(\mathbf{H})$  ou  $\mathbf{M}=f(\mathbf{H})$  appelée processus général d'aimantation et il est représenté graphiquement par une courbe dite courbe d'aimantation.

Ce processus dépend de la géométrie et de la structure de la matière ainsi que certaines constantes magnétiques[BER-98] .

### 2.3. Origine du magnétisme

Le champ magnétique est généré par le déplacement de charges électriques à l'intérieur du matériau. A l'échelle atomique le mouvement des électrons crée un petit moment magnétique perpendiculaire au plan de l'orbite.

En effet, l'électron possède deux types de mouvement, orbital et de spin. La contribution relative du mouvement orbital et de la rotation dépend du type de matériau à considérer.

#### 2.3.1. Moment magnétique orbital

Une petite boucle de fil électrique parcourue par un courant d'intensité  $I$  crée un moment magnétique  $m$  dont l'intensité est proportionnelle à  $I$  et à la surface de la boucle, par analogie le mouvement de l'électron autour du noyau est décrit par une orbite embrassant une section  $S$  en un temps  $\tau$  figure 2.1. Ce mouvement des électrons autour du noyau crée donc un

moment magnétique qu'on appelle orbital  $\mathbf{m}_o$  et s'exprime par l'équation suivante :

$$\mathbf{m}_o = -\frac{eS}{\tau} \mathbf{u}_z \quad (2.4)$$

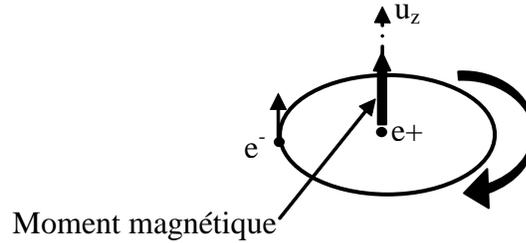


FIGURE 2.1.: Le moment magnétique orbital

### 2.3.2. Moment magnétique du spin

Chaque électron possède un mouvement de rotation sur lui-même et porte un moment magnétique intrinsèque. Ce dernier s'exprime par :

$$\mathbf{m}_s = -\frac{e\hbar}{2m_e} \mathbf{u}_z \quad (2.5)$$

Avec :

$e$  : la charge élémentaire

$\hbar$  : la constante de Planck normalisée

$m_e$  : la masse de l'électron

Le moment magnétique total  $\mathbf{m}$  de l'électron est la somme des deux moments de spin  $\mathbf{m}_s$  et orbital  $\mathbf{m}_o$ . Pour un atome la somme des moments magnétiques orbitaux et de spin de chaque électron donne le moment magnétique total. Suivant les orbitales des électrons et leur nombre, l'atome aura un moment magnétique plus ou moins important.

## 2.4. Différents types des matériaux magnétiques

En général les matériaux qui peuvent être magnétisés par un champ magnétique sont appelés matériaux magnétiques. On définit la relation lie le champ magnétique  $\mathbf{H}$  avec l'ai-

mantation  $\mathbf{M}$  par :

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H} \quad (2.6)$$

où  $\chi$  est la susceptibilité magnétique, l'équation (1.3) peut être réécrite comme suit :

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H} \quad (2.7)$$

Ainsi, la perméabilité magnétique relative du matériau est exprimée à partir de la susceptibilité par :

$$\mu_r = 1 + \chi \quad (2.8)$$

Les matériaux magnétiques peuvent être classifiés à l'aide des valeurs de la susceptibilité magnétique. Il existe plusieurs types de matériaux magnétiques, chacun d'eux est caractérisé par sa structure propre. Ils sont regroupés en trois grandes catégories des matériaux et sont décrits en dessous.

### 2.4.1. Les matériaux diamagnétiques

Les matériaux diamagnétiques sont composés d'atomes ne présentant pas de moment magnétique (ex : Bi, Be, Ag, Au, ...). Sous l'action d'une excitation appliquée, leurs aimantations s'opposent à celle-ci, figure 2.2. Le mouvement orbital des électrons est modifié par cette excitation et, avec la loi de Lenz, les courants induits s'opposent à la variation de l'excitation dans le matériau. Le tableau 2.1 donne les susceptibilités de quelques matériaux diamagnétiques, dont la loi de comportement est linéaire.

Matériaux	Susceptibilité $\chi$
Silicium	$-1.2 \cdot 10^{-6}$
Cuivre	$-1.08 \cdot 10^{-6}$
Plomb	$-1.4 \cdot 10^{-6}$

TABLE 2.1.: Susceptibilités des matériaux diamagnétiques

Pour ce type de matériaux la susceptibilité est très faible ( $|\chi| \ll 1$ ) et la loi de comportement peut être assimilée à celle du vide.

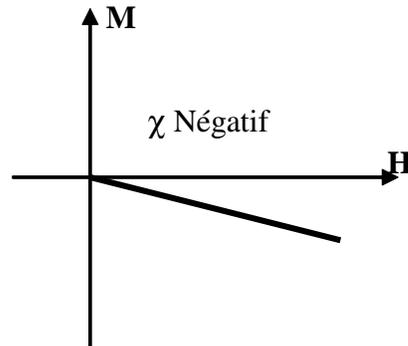


FIGURE 2.2.: Comportement diamagnétique

### 2.4.2. Les matériaux paramagnétiques

Les substances paramagnétiques ont une faible susceptibilité magnétique positive ( $0 < \chi < 1$ ), qui est due à la présence d'atomes ou d'ions ayant des moments magnétiques dipolaires permanents. Ces dipôles n'exercent entre eux que de faibles interactions et, en l'absence du champ magnétique, leurs orientations sont aléatoires. Par contre lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique, ils ont tendance de s'aligner suivant l'orientation du champ. Le degré d'alignement des dipôles et, par conséquent, leur degré d'aimantation sont proportionnels à l'intensité du champ extérieur et inversement proportionnel à la température absolue du matériau. Les valeurs des susceptibilités pour quelques matériaux sont présentées sur le tableau 2.2[BEN-02]

Matériaux	Susceplibilité $\chi$
Aluminium	$7.7 \cdot 10^{-6}$
Tungstène	$3.5 \cdot 10^{-6}$
Plaline	$1.2 \cdot 10^{-6}$

TABLE 2.2.: Susceptibilités de certains matériaux paramagnétiques

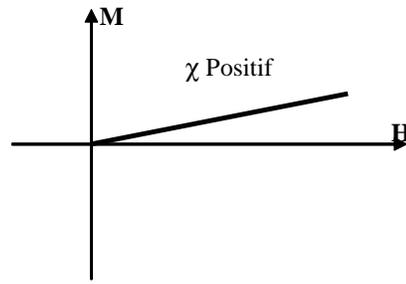


FIGURE 2.3.: Comportement paramagnétique

### 2.4.3. Les matériaux ferromagnétiques

Dans la plupart des matériaux, l'ensemble des moments magnétiques sont orientés dans des directions aléatoires et le champ magnétique total résultant est nul. Par contre, les matériaux ferromagnétiques comme le (Fer, Cobalt, Nickel et leurs alliages), possèdent un fort moment magnétique. Les moments magnétiques de leurs atomes sont ordonnés en petites zones uniformément magnétisées, appelées domaines de *Weiss*. Chaque domaine présente une orientation aléatoire en absence du champ magnétique extérieur. Les matériaux ferromagnétiques présentent donc également une aimantation spontanée importante indispensable dans les applications en génie électrique. C'est cette catégorie que nous étudierons en détail par la suite. Afin de rendre la liste des catégories exhaustive, il reste deux types de matériaux à citer : les matériaux antiferromagnétiques et les ferrimagnétiques. Les premiers ont à l'échelle macroscopique, un comportement proche des paramagnétiques (mais ne réagissent pas de la même façon en température). Les seconds ont macroscopiquement un comportement proche des ferromagnétiques.

## 2.5. La théorie du ferromagnétisme

### 2.5.1. Configuration en domaines magnétiques

Un échantillon de matériau ferromagnétique se subdivise en général en plusieurs domaines (*domaines de Weiss*) à l'intérieure desquels l'aimantation est uniforme. En effet, à l'intérieur de chaque domaine, les moments magnétiques sont maintenus parallèles par l'inter-

action d'échange, de telle sorte que chaque domaine se présente comme un petit volume saturé avec une orientation différente de celles des ces voisins telle que l'aimantation globale de l'échantillon peut forte et bien être nulle. De plus, des domaines adjacents sont séparés par des parois (parois de Bloch), de quelques centaines à quelques milliers d'Angström ( $10^{-10}\text{m}$ ), à travers lesquelles l'orientation des moments magnétiques passe progressivement d'un domaine à l'autre. Lorsqu'un champ magnétique extérieur est appliqué, les domaines déjà orientés dans la direction du champ s'élargissent avec l'augmentation de l'intensité du champ appliqué, tout le matériau s'aimante uniformément dans le sens du champ extérieur. Si l'on supprime le champ magnétique extérieur le matériau reste aimanté dans la direction du champ précédemment appliqué figure 2.4.

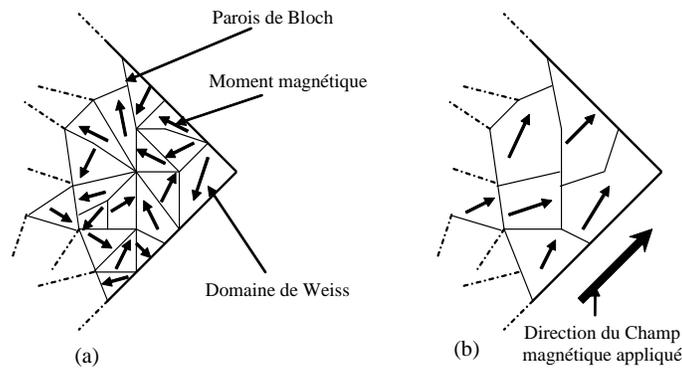


FIGURE 2.4.: Configuration en domaines magnétiques, (a) en l'absence du champ magnétique extérieur, (b) en présence du champ magnétique extérieur

### 2.5.2. Origines des domaines magnétiques- considération énergétique

L'organisation des atomes, pour un matériau, obéit au principe général suivant : « Tout système physique se place, s'il est permis, dans un état correspondant à une énergie minimale »[DUC-03]. L'organisation d'un matériau ferromagnétique monocristallin se constitue en domaines qui correspondent à la minimisation des énergies suivantes :

**-L'énergie d'échange** : souvent, dans la matière les moments magnétiques ne sont pas libres, ils interagissent entre eux et avec leur environnement. Il en résulte un comportement collectif qui se manifeste en dessous d'une température critique. A haute température,

## 2. Généralités sur les matériaux magnétiques

l'agitation thermique finit par l'emporter et l'on observe un comportement paramagnétique. L'interaction d'échange est une interaction d'origine électrostatique qui a été introduite en 1929 par *Heisenberg* dans le cadre de la mécanique quantique. L'énergie associée à cette interaction peut s'exprimer en fonction des moments magnétiques de deux atomes voisins  $i$  et  $j$  de la façon suivante :

$$\xi_{ij} = -\mu_0 n_{ij} \mathbf{m}_i \mathbf{m}_j \quad (2.9)$$

Selon que le coefficient  $n_{ij}$  positif ou négatif, les moments magnétiques  $m_i$  et  $m_j$  ont tendance à s'orienter respectivement parallèlement ou antiparallèlement. L'énergie d'échange  $E_{ech}$  par unité de volume s'écrit :

$$\mathbf{E}_{ech} = -\frac{\mu_0}{2} \sum_{i,j \approx i} n_{ij} \mathbf{m}_i \mathbf{m}_j \quad (2.10)$$

Cette expression peut encore s'écrire :

$$\mathbf{E}_{ech} = -\frac{\mu_0}{2} \sum_i \mathbf{m}_i \mathbf{H}_i \quad (2.11)$$

avec :

$$\mathbf{H}_i = \sum_{i \approx j} n_{ij} \mathbf{m}_j \quad (2.12)$$

Dans le cas des ferromagnétiques, cette énergie tend à aligner dans le même sens les moments voisins.

**-L'énergie dipolaire :** (*porte aussi énergie démagnétisante*) Lorsqu'un échantillon est plongé dans un champ extérieur ou qu'il présente une aimantation uniforme, il se comporte comme un « dipôle magnétique » par analogie avec l'électrostatique. Ce dipôle est à l'origine d'un champ dit démagnétisant ou dipolaire, présent à l'intérieur du matériau, noté  $\mathbf{H}_d$  et opposé à l'aimantation. Il s'écrit :

$$\mathbf{H}_d = -NM \quad (2.13)$$

## 2. Généralités sur les matériaux magnétiques

Où  $N$  est le tenseur des coefficients démagnétisants sans dimensions.

La conséquence directe de l'existence de  $\mathbf{H}_d$  est que le champ interne d'un matériau s'écrit alors :

$$\mathbf{H}_{\text{int}} = \mathbf{H}_{\text{ext}} + \mathbf{H}_d = \mathbf{H}_{\text{ext}} - N\mathbf{M} \quad (2.14)$$

L'énergie d'échange associée à  $\mathbf{H}_d$  s'écrit :

$$\mathbf{E}_d = -\frac{\mu_0}{2}\mathbf{M}_d\mathbf{H}_d \quad (2.15)$$

La valeur des coefficients démagnétisants dépend de la forme géométrique de l'échantillon et la relation :  $N_x+N_y+N_z=1$  doit être vérifiée. Dans un film mince de dimension infinie, nous aurons  $N_x=N_y=0$  et donc  $N_z=1$ .

- **L'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline** : Les moments magnétiques interagissent avec leur environnement atomique via le couplage spin-orbite, Cet environnement est caractérisé par les symétries du cristal. L'aimantation sera donc plus facile à aligner suivant certains axes du réseau cristallin. En particulier, certaines directions cristallographiques sont énergétiquement favorables, on parle de directions de facile aimantation. L'expression de l'énergie d'anisotropie magnéto-cristalline  $\mathbf{E}_{\text{mc}}$  dépend des symétries du cristal. Dans le cas d'un système cubique comme le Fer, cette énergie prend la forme :

$$\mathbf{E}_{\text{mc}} = \iiint (K_1(m_x^2m_y^2 + m_y^2m_z^2 + m_z^2m_x^2) + K_2m_x^2m_y^2m_z^2) dV \quad (2.16)$$

Avec :  $K_1$  et  $K_2$  sont les constantes d'anisotropie magnéto-cristallines, intrinsèques à chaque matériau et les axes x, y, z sont choisis selon les axes du cube. Dans cette expression les termes d'ordres supérieurs ont été négligés.

Jusqu'à présent, nous avons supposé que l'échantillon ne subissant aucun champ magnétique. Dans le cas contraire, un terme d'énergie supplémentaire apparaît, il s'agit de l'énergie de *Zeeman*.

- **L'énergie de Zeeman** : c'est une énergie magnétostatique due à l'excitation magnétique extérieure, elle s'exprime comme :

$$\mathbf{E}_z = -\mu_0 \mathbf{M} \mathbf{H}_{\text{ext}} \quad (2.17)$$

Cette énergie tend à aligner l'aimantation de l'échantillon parallèlement à l'excitation extérieure appliquée.

### 2.5.2.1. Les parois de domaines

Les parois sont les interfaces obligées entre domaines. La structure en domaines engendre l'apparition de zones de transition entre les domaines voisins où l'orientation des moments magnétiques bascule d'une orientation vers une autre. La transition entre l'orientation d'un domaine et celle d'un domaine voisin n'est pas brutale mais se fait de manière progressive. En effet, l'existence de parois permet de réduire autant que possible l'énergie mise en jeu à la frontière entre domaines. Lorsque la paroi de Bloch sépare deux domaines aimantés antiparallèlement, elle est appelée paroi à 180°. Dans le cas des systèmes uniaxes, dont l'axe de facile aimantation est l'axe préférentiel, il n'existe que ce type de paroi figure 2.5.

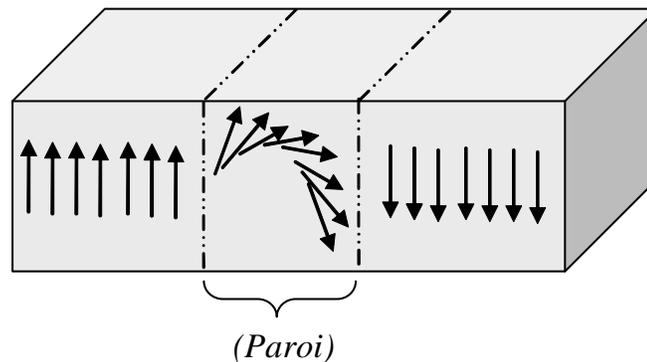


FIGURE 2.5.: Rotation des moments magnétiques dans une paroi de Bloch à 180°

Plus cette paroi est étalée, plus le coût énergétique sera moindre en terme d'énergie d'échange.

### 2.5.3. Processus de l'aimantation

On suppose un échantillon de matériau ferromagnétique initialement désaimanté figure 2.6. Ce matériau contient des défauts dans son réseau cristallin. Ces défauts sont, par exemple, des

dislocations, des inclusions non magnétiques, des joints de grains... ils vont être une bonne part dans la présence du phénomène qui nous intéresse. Trois régions différentes peuvent se présenter en fonction de la valeur de l'excitation appliquée.

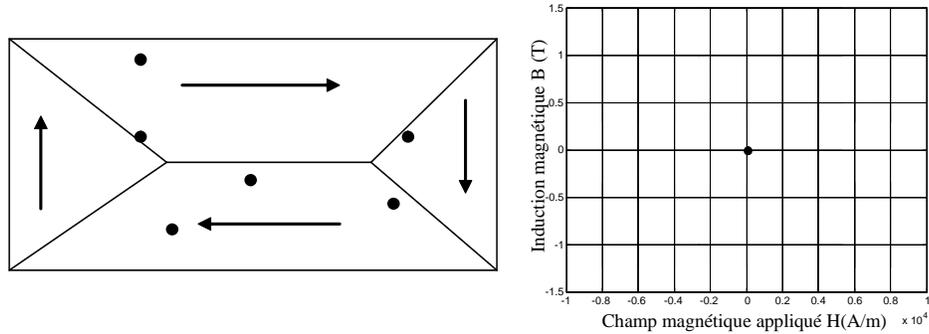


FIGURE 2.6.: Echantillon initialement désaimanté, les points figurent des défauts

– *Pour les faibles valeurs de l'excitation*

Dans ce cas les domaines dont l'aimantation a une direction proche de celle du champ appliqué, vont croître. Cela se fait au détriment des autres domaines. Pour se faire les parois vont se déplacer (glisser) jusqu'à rencontrer les défauts du matériau, figure 2.7, ou se déformer si elles sont déjà en contact avec les défauts, figure 2.8.

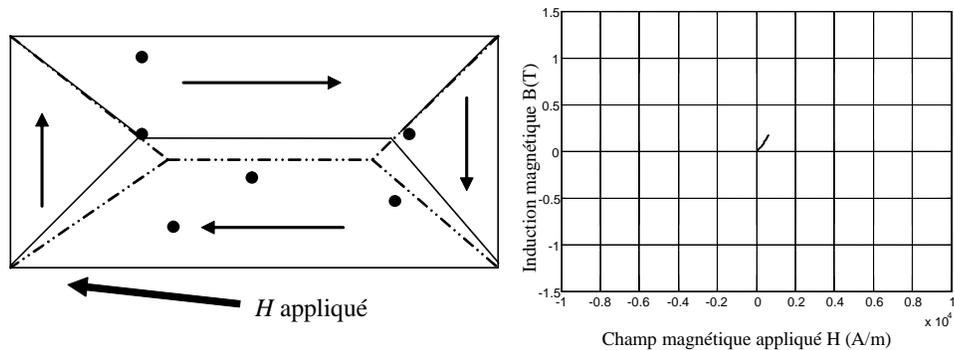


FIGURE 2.7.: Déplacement des parois jusqu'à des zones de blocage

## 2. Généralités sur les matériaux magnétiques

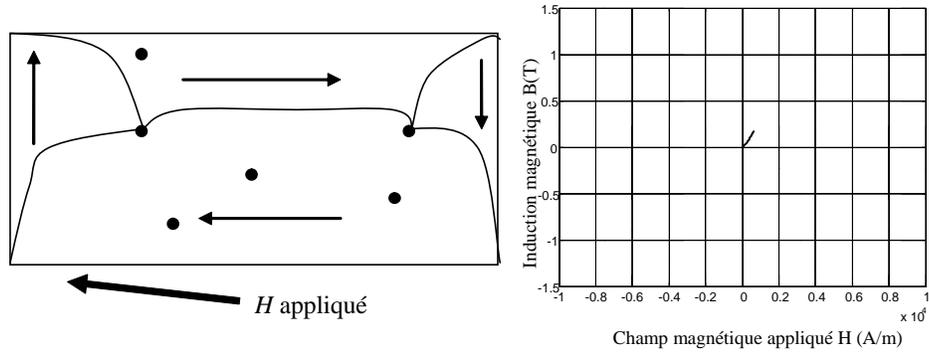


FIGURE 2.8.: Déformation des parois

Ce processus est réversible, tant que les parois ne rencontrent pas d'obstacle (figure 1.7). Il n'engendre pas de pertes magnétiques. La zone du plan  $B(H)$  concernée est nommée zone de Rayleigh (le modèle de Rayleigh sera détaillé dans le deuxième chapitre).

### – Pour les valeurs intermédiaires de l'excitation (zone non réversible)

Pour ces valeurs de l'excitation, les parois continuent leur déplacement, afin d'augmenter le volume des domaines dont le moment est correctement orienté par rapport au champ appliqué. Elles commencent par se libérer de leurs points d'ancrage, se déplacent, puis, s'accrochent de nouveau... , jusqu'à ce que tout le volume de l'échantillon soit occupé par le domaine dont l'aimantation a le sens le plus proche de l'excitation imposée. C'est dans cette zone que les pertes électromagnétiques sont les plus fortes. Sur la figure 2.9 et 2.10, on présente successivement le cas d'accrochage/décrochage des parois et le cas de disparition de parois.

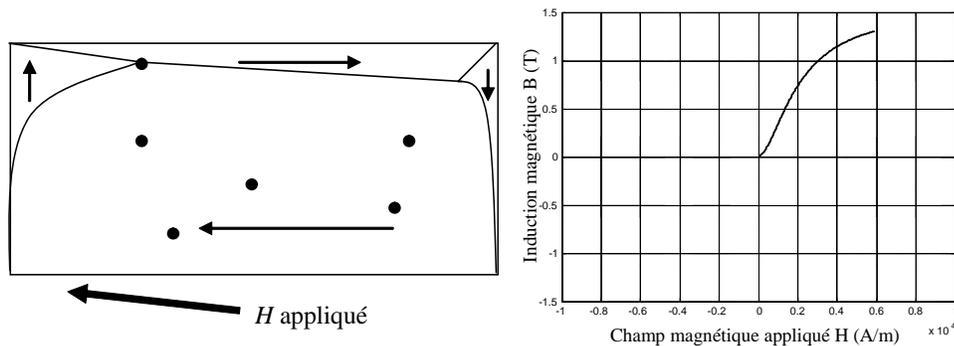


FIGURE 2.9.: Zone d'accrochage/décrochage de parois

## 2. Généralités sur les matériaux magnétiques

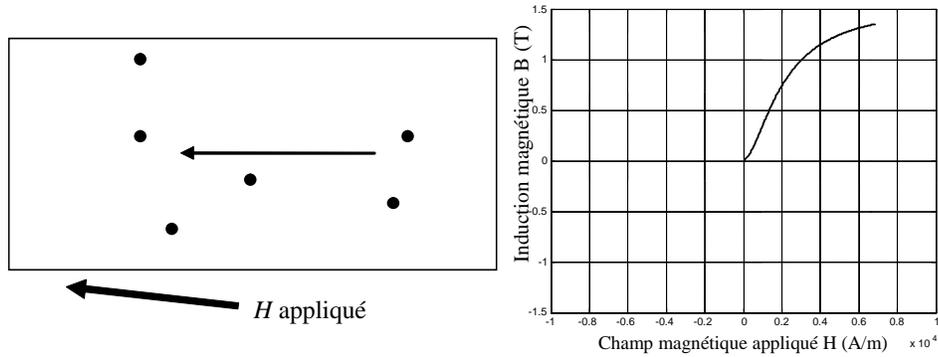


FIGURE 2.10.: Zone de disparition de parois

### – Pour les fortes valeurs de l'excitation (zone de rotation des moments)

Ce processus est réversible, il s'agit de la rotation des moments, ici on atteint ce qu'on appelle l'aimantation à saturation de l'échantillon, figure 2.11. L'échantillon est dans son état de saturation haut, on peut par décroissance puis inversion de l'excitation décrire la branche descendante du cycle majeur.

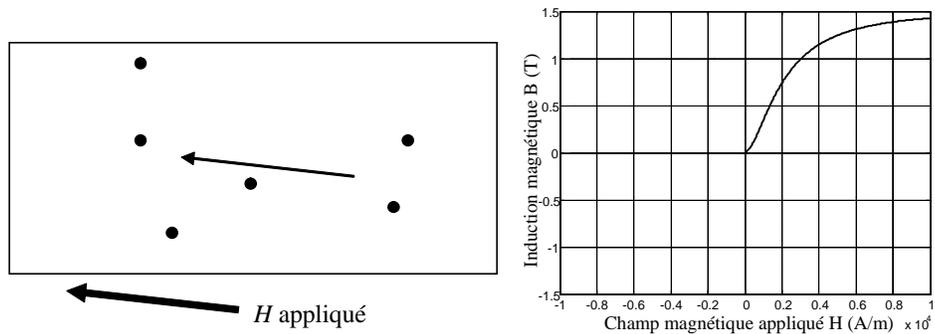


FIGURE 2.11.: Zone de rotation des moments

### – Branche descendante du cycle majeur

À ce stade, apparaît l'irréversibilité du phénomène. En effet, le passage par zéro de l'excitation se fera avec le retour de chacun des moments atomiques dans la direction de leur axe facile aimantation et la réapparition des domaines. On atteint alors l'aimantation rémanente, figure 2.12.

## 2. Généralités sur les matériaux magnétiques

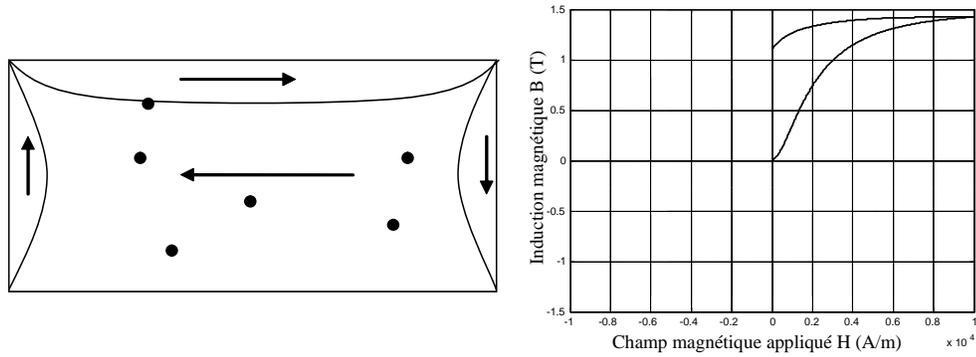


FIGURE 2.12.: Retour au zéro d'excitation de l'excitation

Les étapes suivantes du parcours du cycle d'hystérésis majeur sont obtenues en imposant une excitation de même direction mais de sens opposé. Ensuite, comme précédemment, les parois vont se déplacer et s'accrocher aux défauts, puis se décrocher en avançant de nouveau. La valeur de l'excitation, sur le cycle majeur, pour laquelle l'aimantation passe par zéro est appelée excitation coercitive (noté  $H_c$ ) figure 2.13.

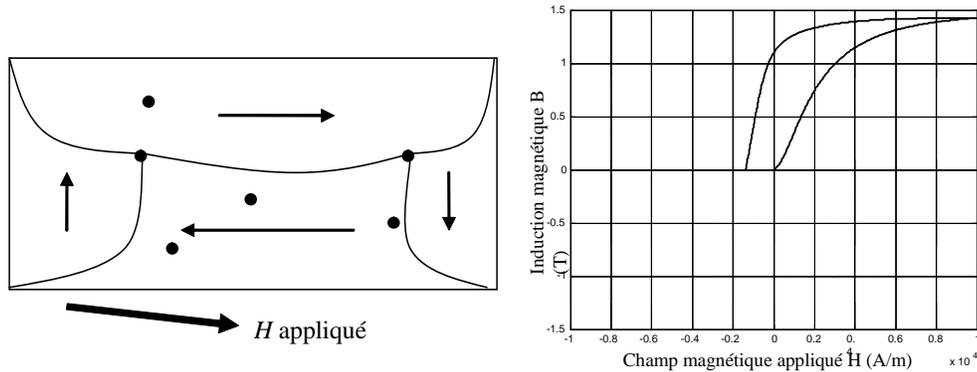


FIGURE 2.13.: Passage par le champ coercitif  $H_c$

Les parois se déplacent jusqu'à disparaître de nouveau au profit du domaine de sens opposé à celui de la saturation haute précédemment évoquée. Enfin la dernière étape est de nouveau la rotation des moments, figure 2.14. Cette nouvelle étape place l'échantillon dans son état de saturation basse. La branche montante du cycle d'hystérésis se parcourt en partant de cet état de saturation basse et en augmentant l'excitation. Elle permet de fermer le cycle majeur, cette branche est parfaitement symétrique par rapport à la branche descendante, figure 2.15.

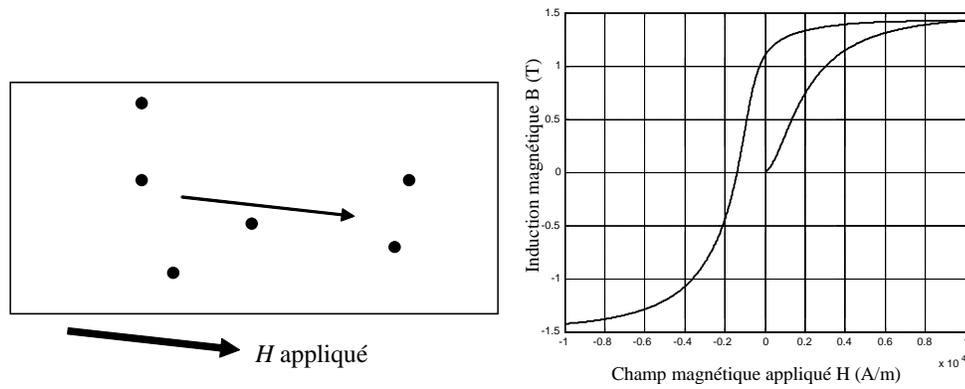


FIGURE 2.14.: Zone de rotation des moments

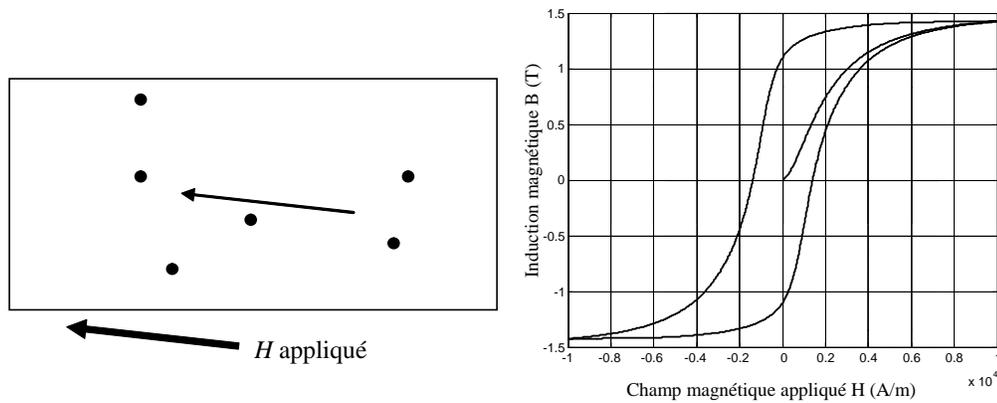


FIGURE 2.15.: Fermeture du cycle

Encore une fois, ce phénomène a pu être observé grâce à différentes méthodes. Cette représentation simplifiée décrite par les parois dans le processus d'aimantation donne une idée assez précise du processus qui génère le comportement hystérétique du matériau.

## 2.6. Le cycle d'hystérésis

Le mot féminin hystérésis trouve son origine étymologique dans la notion de retard entre un stimulus et une réaction. Son sens a été élargi au caractère non univoque de la relation liant une excitation (ici le champ magnétique) et une réponse (ici l'aimantation ou l'induction), qui ne peut alors plus être décrite à l'aide d'une fonction mathématique simple et univoque. Cette relation, souvent assimilée à la loi de comportement macroscopique observable du système considéré, se présente généralement sous la forme d'un cycle, appelé cycle d'hystérésis ;

qui se caractérise par plusieurs points et courbes remarquables (le champ coercitif, l'induction à saturation, l'induction rémanente, ...). On peut choisir de représenter différents cycles (l'aimantation  $\mathbf{M}$  en fonction du champ appliqué  $\mathbf{H}$ , l'induction  $\mathbf{B}$  en fonction de  $\mathbf{H}$ ). La dernière inclut la réponse du vide en plus de celle du matériau, c'est elle que nous observons directement [BER-98], figure 2.16. La connaissance d'une de ces réponses implique la connaissance des autres et nous choisissons celle liant  $\mathbf{B}$  à  $\mathbf{H}$ . L'induction observable est liée à la tension et à la fréquence de mesure ; le champ appliqué (en surface) à l'intensité du courant d'excitation et à la géométrie du circuit magnétique étudié.

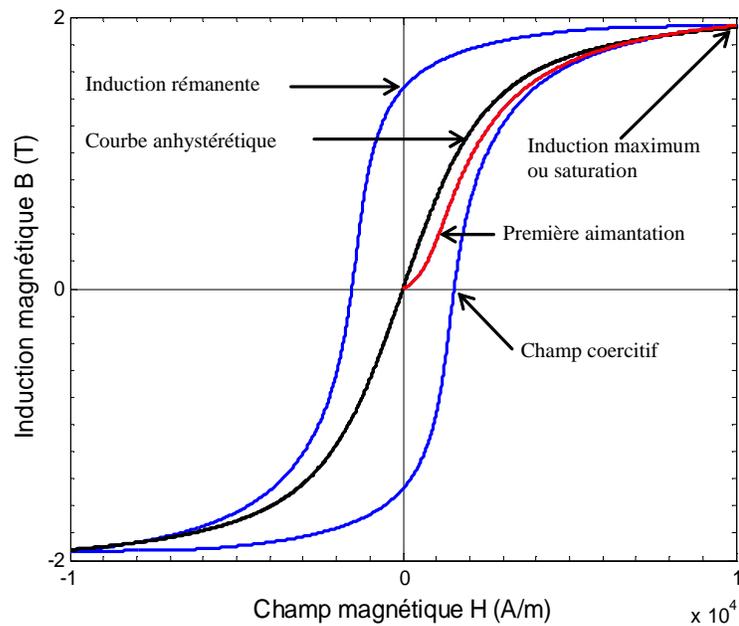


FIGURE 2.16.: Cycle d'hystérésis représentant l'évolution de l'induction magnétique en fonction du champ magnétique appliqué

### 2.6.1. Caractérisation

Un matériau peut être caractérisé par différents tracés et paramètres. On distingue : la courbe anhystrétique, la courbe de première aimantation, le champ coercitif, l'induction rémanente.

**Courbe anhystrétique** : La courbe anhystrétique est la courbe représentant l'induction en fonction du champ tel qu'il serait si les transformations dans le matériau étaient réversibles

(sans pertes).

**Courbe de première aimantation** : On appelle courbe de première aimantation, la courbe qui à partir de l'état désaimanté donne l'induction lorsque le champ varie de zéro vers l'infini.

**Histoire du matériau** : Ce qui fait la complexité des phénomènes est l'histoire du matériau. En effet, il ne suffit pas de connaître les variables d'état extérieures au matériau pour établir un lien entre le champ et l'induction. Les matériaux magnétiques ont une mémoire. Pour une valeur donnée du champ magnétique  $H$ , plusieurs états stables de la matière sont possibles et par-là, plusieurs valeurs de l'induction. Pour évaluer la caractéristique  $B(H)$ , il faudra connaître le passé du matériau.

## 2.7. Classification des matériaux ferromagnétiques

L'observation des cycles d'hystérésis permet de regrouper les matériaux ferromagnétiques en deux catégories, les matériaux ferromagnétiques durs et les matériaux ferromagnétiques doux, figure 2.17. La classe de chaque type de matériau repose essentiellement sur les valeurs du champ coercitif et de l'aimantation rémanente qui lui sont associées.

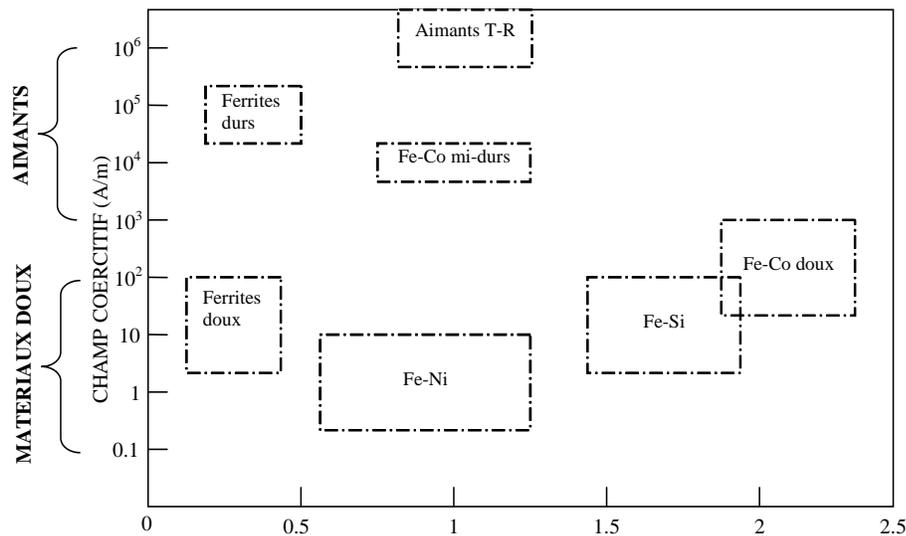


FIGURE 2.17.: Les grandes classes de matériaux magnétiques industriels

### 2.7.1. Les matériaux durs

Dans ce type de matériaux, l'aimantation rémanente et le champ coercitif sont les paramètres physiques essentiels. En effet, ils possèdent une aimantation rémanente  $M_r$  très importante. En général, celle-ci est très difficile à annuler puisque  $H_c$  est aussi très important figure 2.18. Les matériaux magnétiques présentant ces propriétés sont souvent utilisés pour des applications de types aimants permanents. Dans ce cas, le cycle d'hystérésis est très large ( $H_c \geq 10^4 A/m$ ) et, dans le cas d'applications à aimants permanents,  $H_c$  devient le champ démagnétisant à ne pas dépasser.

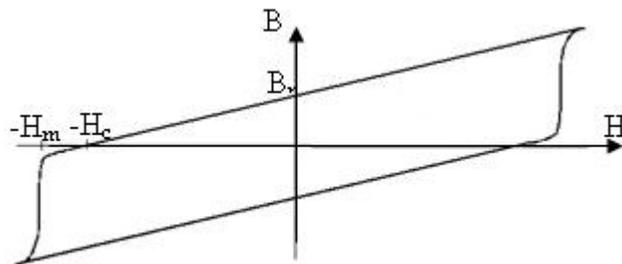


FIGURE 2.18.: Cycle d'hystérésis pour les matériaux durs

### 2.7.2. Les matériaux doux

Les matériaux doux possèdent la capacité de réagir à de faibles champs d'excitation. Ainsi, la susceptibilité initiale est très importante. De plus, leur aimantation rémanente est facile à annuler puisque  $H_c$  n'est pas très important. En effet, le cycle d'hystérésis associé à ce type de matériaux est étroit, voire même quasiment inexistant ( $H_c \leq 100 A/m$ ), figure 2.19. Les matériaux magnétiques possédant ces propriétés sont très utilisés dans les applications où il est nécessaire de guider le flux magnétique (transformateurs ou moteurs). Il existe deux types de matériaux magnétiques doux utilisés pour limiter les pertes par courants de Foucault : les matériaux en tôles isolées comme (les tôles de type FeSi) et les matériaux en poudres de fer. Les premiers sont les plus répandus et les plus utilisés notamment en basses fréquences, les seconds étant utilisés pour les fréquences élevées.

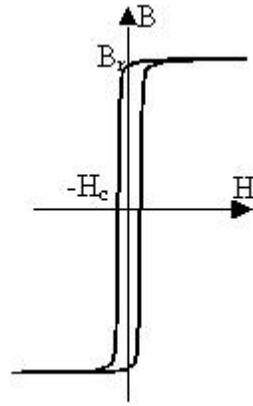


FIGURE 2.19.: Cycle d'hystérésis pour les matériaux doux

## 2.8. Les tôles magnétiques

Les matériaux constituent l'élément principal de nombreux dispositifs électrotechniques sont des matériaux magnétiques doux. Ces matériaux sont obtenus à partir du Fer qui présente des propriétés magnétiques remarquables, à température ambiante son aimantation à saturation est grande 2.16 T, et sa température de Curie élevée (1043 K). Afin de limiter les pertes par courant de Foucault dans les circuits, ces matériaux sont utilisés sous forme de tôles magnétiques minces. Ces tôles sont le plus souvent des alliages fer-silicium. L'addition de faible concentration de Silicium, (jusqu'à 3.2 % en poids pour des fréquences d'utilisation de quelques dizaines à quelques centaines de Hz) présente quelques avantages tels que, l'alliage Fer-Silicium a des caractéristiques mécaniques supérieurs au fer pur, la résistivité de l'alliage est augmentée d'un facteur 4-5 par rapport au fer pur pour 3-3.4% Si, ce qui permet de réduire sensiblement les pertes par courants induits [ROU-96]. Leur inconvénient est de diminuer l'aimantation de saturation.

### 2.8.1. Classification des tôles

Deux grandes familles d'aciers sont utilisées pour la fabrication des circuits magnétiques des équipements électriques.

### 2.8.1.1. Les tôles à grains orientés (G.O)

Ce type des tôles est utilisé dans les circuits magnétiques où le flux doit circuler à tout instant dans une même direction [ROU\_96]. Ces tôles à grains orientés (notés G.O) à texture dite de « Goss » présentent une forte anisotropie. Ces matériaux à forte texture, s'aimantent très facilement lorsqu'on applique un champ dans leur direction de laminage, l'induction obtenue pour un champ de 800 A/m est de l'ordre de 1.8 T. En revanche, dans la direction travers, on obtient pour un même champ une induction de 1.3 T.

### 2.8.1.2. Les tôles à grains non orientés (N.O)

Les tôles à grains non orientés (N.O) sont utilisées, vue leur comportement magnétique assez isotrope, dans les machines tournantes de petite, moyenne et grosse puissances. Les constructeurs évaluent l'efficacité intrinsèque d'un matériau magnétique à partir de la valeur des pertes totales massiques mesurées à induction et à la fréquence de travail. Les pertes totales par rapport aux tôles G.O sont plus importantes, la mesure des pertes à 50 Hz et induction maximum 1.5 T dans le cas du FeV 400-50 HA sont de l'ordre de 4 W/kg. Globalement, les pertes des tôles G.O sont inférieures à celles des tôles N.O. [BAV-92].

## 2.9. Les pertes fer dans la matière

Ce terme "pertes fer" englobe généralement toutes les pertes intervenant dans les pièces ferromagnétiques des organes magnétiques des dispositifs électrotechniques. On distingue deux phénomènes physiques principaux à l'origine de ces pertes : les pertes par *hystérésis* (déplacement de parois) et les pertes par *courants de Foucault*. Ces pertes dépendent évidemment de la nature du matériau utilisé mais aussi de la nature des processus dynamiques qui s'y développent, et enfin des modes de diffusion spatio-temporelle dans la géométrie considérée. Il faut noter que les pertes ont souvent la même origine, à savoir des courants induits mais à des échelles différentes (microscopique et macroscopique).

### 2.9.1. Expressions des pertes

Lors d'un parcours complet du cycle d'hystérésis, l'énergie fournie pour  $\mathbf{H}$  croissant est plus importante que l'énergie récupérée pour  $\mathbf{H}$  décroissant, cette différence constitue les pertes par hystérésis. On montre que, sur un cycle complet, le travail fourni le milieu extérieur pour parcourir un cycle au sein du matériau, vaut par unité de volume ( $J/m^3$ ) :

$$W = \oint \mathbf{H} d\mathbf{B} \quad (2.18)$$

Ce travail représente les pertes totales volumiques par cycle. Il est converti en chaleur par le processus d'aimantation. Sous l'action d'un champ extérieur périodique de fréquence  $f$ , la puissance moyenne totale dissipée en ( $W/m^3$ ) est donnée par :

$$P_h = f \oint \mathbf{H} d\mathbf{B} \quad (2.19)$$

En régime dynamique la forme de cycle d'hystérésis peut fortement évoluer avec la fréquence d'utilisation, en conséquence de quoi le terme  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{B}$  dépend aussi de la fréquence. Il est toujours possible d'effectuer des mesures précises de ces pertes et de les étudier en fonction des conditions d'induction et de fréquence.

### 2.9.2. Principe de séparation des pertes

Pour étudier l'évolution de ces pertes et les lois physiques les régissant, les expérimentateurs ont rationalisé leurs mesures, les deux variables expérimentales d'évolution étant alors la tension de mesure (liée au niveau d'induction et à la fréquence) et le courant d'excitation (lié à l'excitation magnétique, aussi appelée champ magnétique). Dans un souci d'analyse comparative et intrinsèque aux matériaux, il s'avère pertinent de retenir les variables induction moyenne  $\langle B \rangle$  et fréquence  $f$  de mesure (grandeurs macroscopiques observables). Ils ont alors observé que ces pertes mesurées peuvent s'expliquer en sommant trois contributions de provenances différentes, figure 2.20, [BER-85][BER-88].

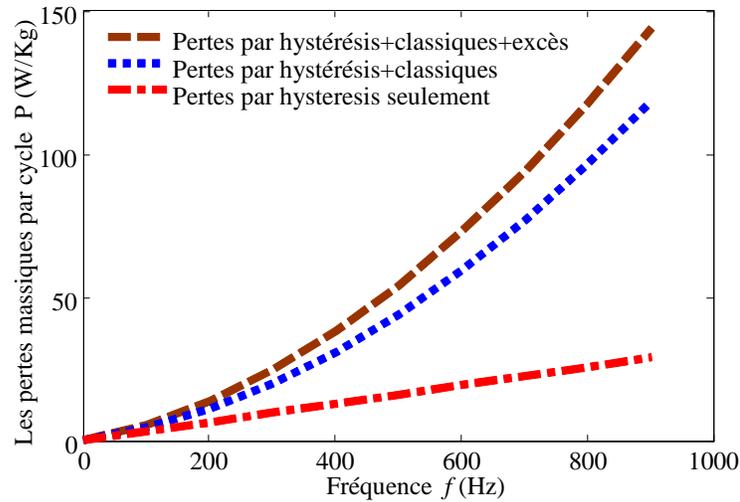


FIGURE 2.20.: Allure de l'évolution des trois contributions aux pertes totales par cycle et par unité de masse (W/kg) en fonction de la fréquence sur des tôles de type FeSi 3% (d'après le modèle de Giorgio Bertotti, 1988) à basse induction  $B=1.4$  T.

- **Contribution quasi-statique** : (pertes par hystérésis seulement). La contribution dite quasi-statique, comme son nom l'indique, ne dépend pas de la fréquence, dès lors que nous nous intéressons uniquement aux pertes mesurées par cycle. Ces pertes sont donc uniquement liées, de manière intrinsèque, aux propriétés physiques du matériau et sa géométrie.
- **Contribution classique** : (pertes par courants de Foucault). En augmentant la fréquence d'utilisation, l'aire des cycles grossit et les pertes augmentent. En adoptant une démarche classique de calcul de pertes à l'aide d'un modèle de diffusion et d'induction de courants de Foucault à l'échelle macroscopique de l'échantillon, on est en mesure de calculer cette augmentation de pertes qui reste malgré tout inférieure à la croissance réelle observée.
- **Contribution en excès** : Enfin, les pertes totales mesurées excédant en fait la somme des deux précédentes contributions, nous appelons la différence (perte en excès). Elle peut-être modélisée et expliquée à l'aide de considérations sur les processus microscopiques dissipatifs réels d'aimantation dynamique. On remarque bien l'écart sur la figure 2.20 entre les pertes totale (hystérésis+classiques+excès) et (hystérésis+classique) il dépasse les 17% pour une fréquence de 800 Hz et 14% pour une fréquence de 50 Hz.

## 2.10. Principe de la caractérisation Epstein

On observe dans une caractérisation, soit l'évolution du champ  $\mathbf{H}$  en fixant l'induction  $\mathbf{B}$ , soit l'inverse. Classiquement en régime sinusoïdal c'est l'induction qui est contrôlée. Le cadre Epstein est une structure qui accueille un nombre donné de tôles figure 2.21. Ces tôles sont mises en contact de manière à réaliser un circuit fermé de forme carrée. Chaque côté du carré est composé d'un empilement de tôles. Le principe de cadre Epstein est basé de celui du transformateur, dont l'enroulement primaire est constitué de 640 spires et de 320 spires pour l'enroulement secondaire figure 2.22. La longueur moyenne du contour d'Ampère de ce dispositif est de 47 cm.

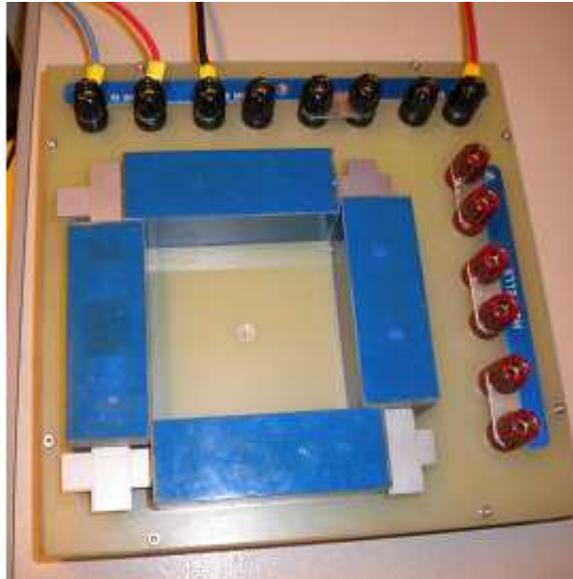


FIGURE 2.21.: Image du cadre d'Epstein

### 2.10.1. Principe de la mesure

La détermination du champ magnétique  $\mathbf{H}(t)$  est obtenue à partir de la mesure du courant primaire  $\mathbf{i}(t)$ . Ce courant circule dans la première bobine, nommée bobine excitatrice. L'autre bobine, dite bobine secondaire est laissée en circuit ouvert. On relève la tension à ses bornes. Avec une approximation du théorème d'Ampère, en considérant que la ligne de parcours moyen du flux est de longueur  $l$ , on peut écrire :

$$\mathbf{H}(t)l = n_1\mathbf{i}(t) \quad (2.20)$$

Dans cette équation  $n_1$  est le nombre de spires de la bobine d'excitation. En régime d'induction sinusoïdale, le champ  $\mathbf{H}(t)$  est distordu mais présente une période égale à celle de l'induction. De l'équation (2.20), l'excitation magnétique  $\mathbf{H}(t)$  est calculée à partir des grandeurs électriques mesurables.

$$\mathbf{H}(t) = \frac{n_1}{l}\mathbf{i}(t) \quad (2.21)$$

A propos de la tension secondaire, celle-ci est due à la variation de flux.

$$u_2(t) = n_2 \frac{d\phi}{dt} \quad (2.22)$$

Où  $n_2$  est le nombre de spires de la bobine secondaire. Cette équation peut être donnée en fonction de l'induction magnétique  $\mathbf{B}(t)$  par :

$$u_2(t) = n_2 S \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} \quad (2.23)$$

Dans cette équation  $S$  représente la surface traversée par le flux. L'induction magnétique  $\mathbf{B}(t)$  est déterminée par l'intégration de la tension secondaire  $u_2(t)$ .

$$B(t) = \frac{1}{n_2 S} \int u_2(t) dt \quad (2.24)$$

Ces résultats sont, cependant, obtenus sous certaines hypothèses. En particulier, on a fait l'approximation que l'induction était uniforme dans le matériau.

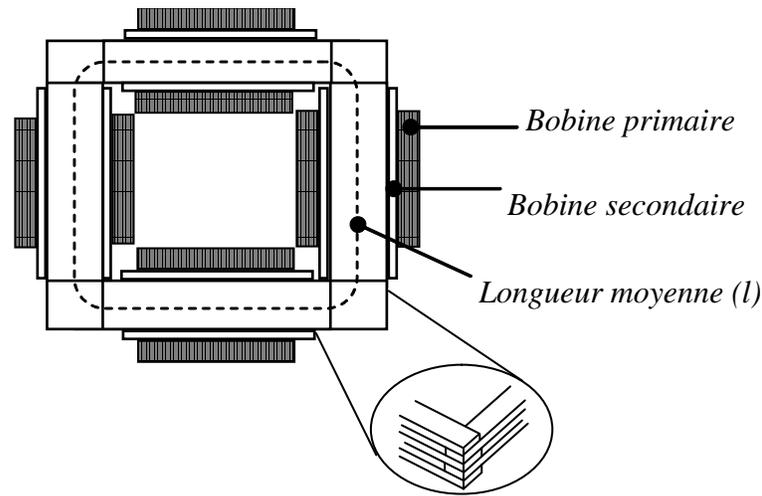


FIGURE 2.22.: Cadre Epstein

## 2.11. Plage de fréquence d'utilisation

Les dispositifs électromagnétiques sont essentiellement construits de matériaux ferromagnétiques. Ces matériaux sont exploités sous forme des tôles pour minimiser les pertes par des courants induits. Nous nous sommes intéressés dans cette étude aux tôles Fer-Silicium usuelles comportant au plus 3 % de Silicium. Ces tôles sont utilisées pour une plage de fréquence de 0 à 1 kHz [ROU-96]. La raison est que pour une fréquence donnée, une épaisseur de la tôle est requise pour des conditions de travail optimales, mais au-delà d'une certaine fréquence (le kHz ici), des épaisseurs suffisamment faibles ne peuvent être obtenues.

En effet, pour des raisons économiques ainsi que électriques, les tôles destinées à la construction des dispositifs électromagnétiques doivent présenter une épaisseur adaptée vis-à-vis de leur fréquence de travail et donc éviter la concentration du flux magnétique en surface de la tôle. Cette zone de concentration du flux connue par l'épaisseur de peau, ou aussi la profondeur de pénétration du flux, on la calcule d'une façon classique par :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \sigma \mu}} \quad (2.25)$$

$f$  est la fréquence (Hz),  $\sigma$  la conductivité ( $\Omega^{-1}m^{-1}$ ) et  $\mu$  est la perméabilité du matériau ( $Hm^{-1}$ ), que l'on peut choisir égale à la pente moyenne du cycle d'hystérésis dans le cas

quasi-statique.  $\delta$  ne nous donne qu'une première approximation sur la répartition du flux dans la section de la tôle. En conséquence, lorsque la fréquence de travail augmente, on doit diminuer l'épaisseur des tôles utilisées. Enfin, la fréquence à laquelle le champ est appliqué va provoquer le développement de courants induits. L'induction magnétique  $\mathbf{B}$  n'est plus homogène dans la section de la tôle. Il faut alors s'intéresser au flux d'induction magnétique  $\phi$  véhiculé par la tôle ( $\phi = \mathbf{B}S$ ).

Les tôles de FeSi présentent un comportement dynamique non négligeable pour des fréquences de travail de l'ordre de quelques Hz. Les cycles  $B(H)$  diffèrent en fonction de la fréquence figure 2.23. De façon générale, on parlera de cycles d'hystérésis  $B(H)$  obtenus pour une fréquence  $f$ . lorsque la fréquence de travail est faible ( $<10$  Hz), le cycle  $B(H)$  correspondant sera appelé cycle d'hystérésis quasi-statique. Dans ce cas l'induction  $\mathbf{B}$  et le champ  $\mathbf{H}$ , sont quasi-homogènes dans la section de la tôle.

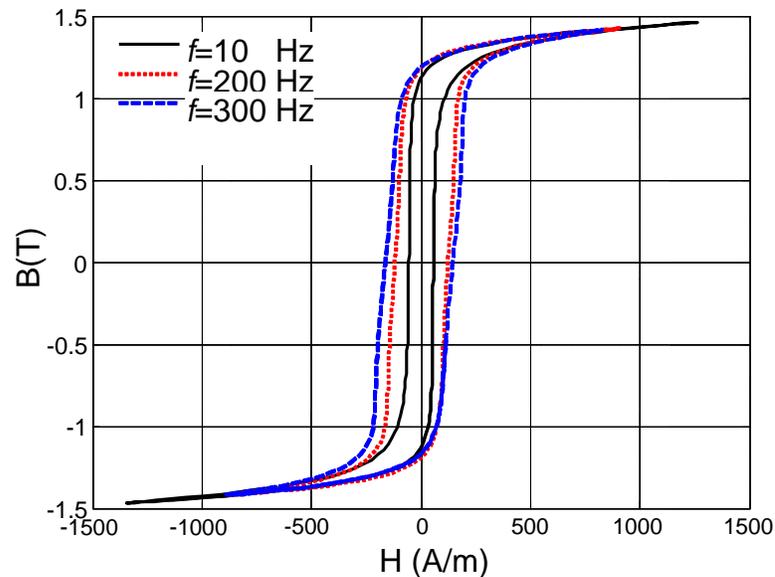


FIGURE 2.23.: Cycles d'hystérésis à différentes fréquences (tôles à grains non orientés FeSi 3%)

## Conclusion

Dans ce chapitre, et en première partie, nous avons présenté les généralités sur les matériaux magnétiques, ainsi, les notions de bases du point de vue des sciences des matériaux, pour bien comprendre comment le magnétisme s'insère dans l'ensemble plus vaste de la physique des solides. Dans une deuxième partie de ce premier chapitre, nous avons détaillé le processus d'aimantation à l'échelle macroscopique dans les matériaux ferromagnétiques, ce processus est basé sur les déformations des parois de Bloch, pour avoir un certain équilibre énergétique. En effet, ce processus n'est pas toujours réversible. Les pertes dans la matière sont présentées dans la troisième et la dernière partie de ce chapitre, ces pertes sont directement liées à la surface du cycle d'hystérésis, généré au cours du processus d'aimantation. A cet effet, plusieurs modèles sont proposés pour décrire ce phénomène, ces derniers feront l'objet du chapitre suivant.

# 3. Les Modèles d'Hystérésis Magnétiques

## 3.1. Introduction

Plusieurs modèles d'hystérésis ont été développés avec l'évolution des calculateurs numériques, la validité de ces modèles n'est pas limitée à la description des phénomènes d'hystérésis ferromagnétique. Ils sont largement acceptés dans d'autres domaines scientifiques notamment dans la biologie, l'économie, la mécanique, ... etc. On peut classer les modèles d'hystérésis en trois principales catégories : microscopique, macroscopique et celui dit mésoscopique.

Le modèle microscopique décrit le phénomène d'hystérésis à l'échelle atomique (modèle d'Ising). Ce type de modèles n'est pas adapté à simuler l'effet d'hystérésis dans des situations compliquées, comme la modélisation d'un matériau à l'échelle réelle.

Les modèles macroscopiques ont pour but de satisfaire les besoins du modèle microscopique. Les modèles macroscopiques sont généralement des fonctions d'approximations des cycles d'hystérésis. Plusieurs types de fonctions analytiques peuvent être appliquées, nous citons par exemple : les fonctions auxiliaires, les fonctions polynomiales et les fonctions multiples.

Nous remarquons que, ni le modèle microscopique ni le modèle macroscopique ne puisse répondre aux besoins de l'ingénierie car les modèles microscopiques sont trop lents dans les calculs et les modèles macroscopiques ne décrivent pas le phénomène physique de l'hystérésis.

Par conséquent, les modèles mésoscopiques sont devenus très populaires dans l'ingénierie. Ces derniers sont classés entre les modèles microscopiques et macroscopiques, car ils sont moins précis que les modèles microscopiques mais ils sont plus souples que les modèles macroscopiques. Parmi eux, nous citons le modèle de Jiles-Atherton et le modèle de Preisach.

Le premier modèle fait l'objet de ce présent travail et sera donné plus en détaille.

Dans ce chapitre nous présenterons les différents modèles d'hystérésis rencontrés dans la littérature, nous citerons les avantages et les inconvénients de chacun d'eux.

## 3.2. Les modèles analytiques

Plusieurs formulations analytiques simples décrivant le comportement fortement non linéaire des matériaux magnétiques ont été développées. Cependant, ces modèles décrivent le phénomène par des expressions mathématiques sans tenir compte des aspects physiques du phénomène.

### 3.2.1. Modèle d'Hystérésis de Rayleigh

Cet ancien modèle est développé par le physicien anglais, *Lord Rayleigh* (1842-1919)[IVA-97]. *Rayleigh* a remarqué que, dans la région à faible champ magnétique sur la courbe de première aimantation, la perméabilité magnétique peut être représentée par les deux premiers termes d'un polynôme de puissance croissante :

$$\mu(\mathbf{H}) = \frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{H}} = \mu_{in} + \eta\mathbf{H} \quad (3.1)$$

L'équation ci-dessus résulte une relation parabolique entre l'intensité de champ magnétique  $\mathbf{H}$  et la densité du flux  $\mathbf{B}$ , pour la partie initiale de la courbe d'aimantation. L'intégrale de l'équation (3.1) nous donne :

$$\mathbf{B} = \mu_{in}\mathbf{H} + \frac{1}{2}\eta\mathbf{H}^2 \quad (3.2)$$

Dans l'approximation (3.2), le premier terme  $\mu_{in}\mathbf{H}$  représente la composante réversible, alors que le deuxième terme  $\frac{1}{2}\eta\mathbf{H}^2$  décrit le changement irréversible de l'induction magnétique. Avec  $\mu_{in}$  est la perméabilité initiale et  $\eta$  la constante de Rayleigh.

$$\eta = \frac{2\mathbf{B}_r}{\mathbf{H}_{max}^2} \quad (3.3)$$

### 3. Les Modèles d'Hystérésis Magnétiques

$$\mu_{in} = \frac{\mathbf{B}_{max}}{\mathbf{H}_{max}} - \eta \mathbf{H}_{max} \quad (3.4)$$

$\mathbf{H}_{max}$ ,  $\mathbf{B}_{max}$  sont respectivement le champ magnétique maximal appliqué et l'induction maximale résultante,  $\mathbf{B}_r$  représente l'induction rémanente. Ainsi, par l'application d'une excitation périodique  $\mathbf{H}(t)$ , l'induction magnétique est de faible amplitude variant entre  $\pm \mathbf{B}_{max}$ , en se déplaçant le long du cycle d'hystérésis de Rayleigh telle qu'il est représenté sur la figure 3.1. La branche ascendante du cycle d'hystérésis est de la forme suivante :

$$\mathbf{B} = \mu_{in}(\mathbf{H} + \mathbf{H}_{max}) + \frac{\eta}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}_{max})^2 - \mathbf{B}_{max} \quad (3.5)$$

Tandis que la branche descendante est donnée par :

$$\mathbf{B} = \mu_{in}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{max}) - \frac{\eta}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_{max})^2 + \mathbf{B}_{max} \quad (3.6)$$

où la courbe de première aimantation est donnée par l'équation (3.2) L'inconvénient majeur de ce modèle est sa limitation aux champs faibles ce qui ne permet pas une description de la saturation.

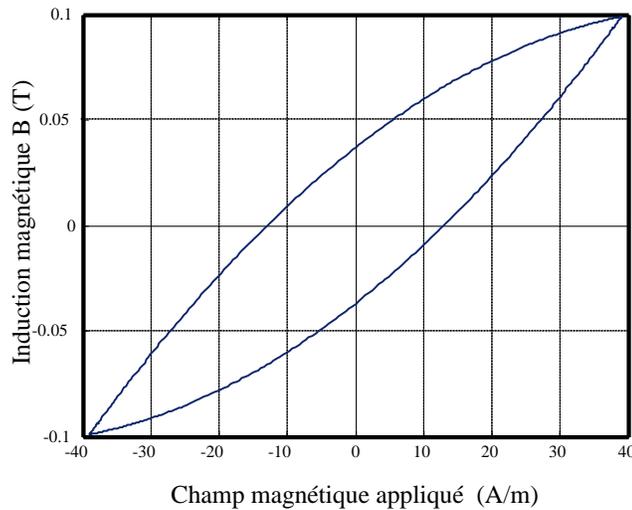


FIGURE 3.1.: Cycle d'hystérésis simulé avec le modèle de Rayleigh

### 3.2.2. Le modèle d'hystérésis de Frölich

Probablement l'un des premiers modèles empiriques qui a été proposé pour la présentation de l'aimantation est le modèle de Frölich [IVA-97]. La relation entre la densité du flux magnétique  $\mathbf{B}$  et l'intensité du champ magnétique  $\mathbf{H}$  est développée pour décrire seulement la courbe d'aimantation anhystérétique. Les deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de ce modèle sont les caractéristiques du matériau étudié.

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{\alpha + \beta |\mathbf{H}|} \quad (3.7)$$

Ce modèle à été amélioré par les travaux présentés par (Akbaba 1991)[AKB-91], où l'aimantation est subdivisée en deux régions, la première est avant où  $\mathbf{B} \leq \mathbf{B}_s$  et donnée par :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H}}{a_1 + b_1 \mathbf{H}} \quad (3.8)$$

La deuxième région est définie lorsque  $\mathbf{B}_s \geq \mathbf{B}$  :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_s + \frac{\mathbf{H} - \mathbf{H}_s}{a_2 + b_2(\mathbf{H} - \mathbf{H}_s)} \quad (3.9)$$

Dans le cas des matériaux ferromagnétiques doux le cycle d'hystérésis est étroit, ainsi le modèle s'adapte mal pour certains cas des matériaux magnétiques. Toutefois, en cas de matériaux magnétiques durs, le cycle d'hystérésis devient large ce qui peut créer des difficultés dans la modélisation de la courbe de désaimantation. Sur la base du modèle Frölich, la courbe de désaimantation (deuxième quadrant de l'hystérésis) peut être approchée par une courbe décalée  $\mathbf{B}(\mathbf{H})$  passant par le champ coercitif. En effet, l'expression du modèle sur la courbe de première aimantation est décrite par (3.7). Mais, sur la courbe montante du cycle majeur elle est décrite par :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H} - \mathbf{H}_c}{\alpha + \beta |\mathbf{H} - \mathbf{H}_c|} \quad (3.10)$$

Et, sur la courbe descendante du cycle majeur on a :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{H} + \mathbf{H}_c}{\alpha + \beta |\mathbf{H} + \mathbf{H}_c|} \quad (3.11)$$

### 3. Les Modèles d'Hystérésis Magnétiques

Les paramètres du modèle ( $\alpha$  et  $\beta$ ) sont déterminés à partir du point de saturation ( $\mathbf{B}_s, \mathbf{H}_s$ ) et rémanente ( $\mathbf{B}_r, 0$ ).

$$\begin{cases} \mathbf{B}_s = \lim_{\mathbf{H} \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{H} + H_c}{\alpha + \beta(\mathbf{H} + H_c)} = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{1}{B_s} \\ \mathbf{B}_r = \lim_{\mathbf{H} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{H} + H_c}{\alpha + \beta(\mathbf{H} + H_c)} \Rightarrow \alpha = H_c \left( \frac{B_s - B_r}{B_s B_r} \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

Contrairement au modèle de Rayleigh, ce modèle donne une bonne approximation du phénomène pour des valeurs plus élevées du champ d'excitation (cycle Majeur). Afin de représenter les cycles d'hystérésis mineurs, ce modèle a été amélioré par les travaux de [JUF-76] et [WON-88]. La figure 3.2 représente le cycle d'hystérésis obtenu par ce modèle.

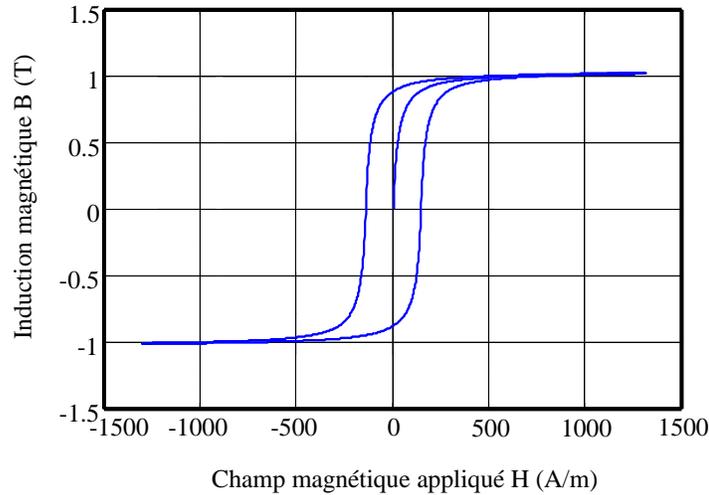


FIGURE 3.2.: Cycle d'hystérésis simulé avec le modèle de Frolich

#### 3.2.3. Le modèle d'hystérésis de Potter

D'après les travaux présentés par Potter [POT-71], ce modèle est basé sur des relevés expérimentaux tels que : l'aimantation de saturation  $\mathbf{M}_s$ , l'aimantation rémanente  $\mathbf{M}_r$ , le champ de saturation  $\mathbf{H}_s$  et le champ coercitif  $\mathbf{H}_c$ . Ces relevés sont nécessaires pour l'élaboration de ce modèle. L'aimantation totale est donnée par :

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}, \alpha) = \mathbf{M}_s \left[ \text{sign}(\alpha) - \alpha \left[ 1 + \tanh \left( \frac{H_c - \mathbf{H} \text{sign}(\alpha)}{\mathbf{H}_c} \tanh^{-1} \left( \frac{\mathbf{M}_r}{\mathbf{M}_s} \right) \right) \right] \right] \quad (3.13)$$

Le facteur  $\alpha$  vaut  $\pm 1$  sur le cycle majeur. Il est redéfini par (3.14) à chaque point de renversement caractérisé par  $\mathbf{H}^*$  et  $\alpha^*$ . L'aimantation  $\mathbf{M}$  sera alors calculée en fonction de  $\mathbf{H}^*$  et de  $\alpha^*$ . Il est positif lorsque  $\mathbf{H}$  est croissant et négatif si  $\mathbf{H}$  est décroissant tel que  $|\alpha| \leq 1$ .

$$\alpha^* = -\frac{2\text{sign}(\alpha) - \alpha \left[ 1 + \tanh \left( \left( 1 - \text{sign}(\alpha) \frac{\mathbf{H}^*}{\mathbf{H}_c} \right) \tanh^{-1} \left( \frac{\mathbf{M}_r}{\mathbf{M}_s} \right) \right) \right]}{1 + \tanh \left( \left( 1 + \text{sign}(\alpha) \frac{\mathbf{H}^*}{\mathbf{H}_c} \right) \tanh^{-1} \left( \frac{\mathbf{M}_r}{\mathbf{M}_s} \right) \right)} \quad (3.14)$$

Ce modèle permet de décrire le cycle d'hystérésis à partir d'une fonction analytique paramétrée en  $\alpha$  évoluant à chaque point de renversement, le cycle généré par ce modèle est présenté sur la figure 3.3.

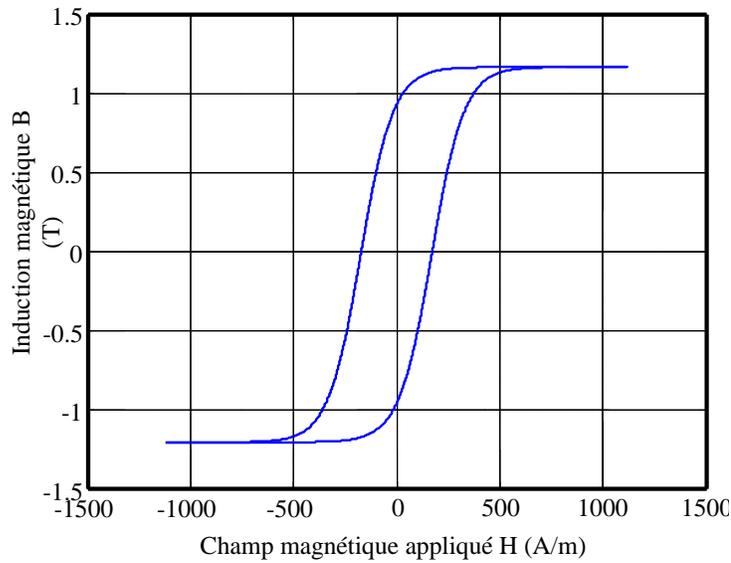


FIGURE 3.3.: Cycle d'hystérésis simulé avec le modèle de Potter

### 3.2.4. Modèle à fonctions multiples

Ce modèle est basé sur des fonctions d'approximations sous formes exponentielles, trigonométriques ou hyperboliques. Dans les travaux présentés par [TRU-68] les auteurs ont constaté que l'utilisation de la relation (3.15) donne une bonne approximation de la courbe représentant l'aimantation anhystérétique.

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_s \exp \left( \frac{\mathbf{H}}{a + b\mathbf{H}} \right) \quad (3.15)$$

### 3. Les Modèles d'Hystérésis Magnétiques

Une évaluation de l'aimantation anhystérétique basée sur la sommation des séries exponentielles a été proposée par [SHE-73] et donnée comme suit :

$$\mathbf{B} = \sum_{i=0}^N a_i \exp\left(-\frac{b_i}{\mathbf{H}}\right) \quad (3.16)$$

Les paramètres d'approximation peuvent être déterminés en utilisant une procédure d'identification. D'autres types d'approximation du cycle en série de fonctions trigonométriques associés à la loi de comportement magnétique du matériau, Eq.(3.3), ont été utilisés pour la modélisation des couches-minces (matériaux destinés pour l'enregistrement magnétique). D'après les études réalisées par [NOY-88], l'aimantation peut être donnée sous la forme :

$$\mathbf{M} = \frac{2}{\pi} \mathbf{M}_s \tan^{-1}\left(\frac{\mathbf{H}}{\mathbf{H}_c} \pm 1\right) \tan\left(\frac{\pi \mathbf{M}_r}{2 \mathbf{M}_s}\right) \quad (3.17)$$

Les cycles mineurs de l'hystérésis peuvent être calculés par :

$$M = \frac{2K}{\pi} M_s \tan^{-1}\left(\frac{\mathbf{H}}{\mathbf{H}_c} \pm 1\right) \tan\left(\frac{\pi \mathbf{M}_r}{2 \mathbf{M}_s}\right) \pm (1 - K) M_r \quad (3.18)$$

avec :

$$K = \frac{M_r + M_{rm}}{2M_r}, \quad M_{rm} \text{ est l'aimantation rémanente du cycle mineur parcouru.}$$

En représente ci-dessous, figure 3.4, le cycle majeur d'hystérésis obtenu par ce modèle.

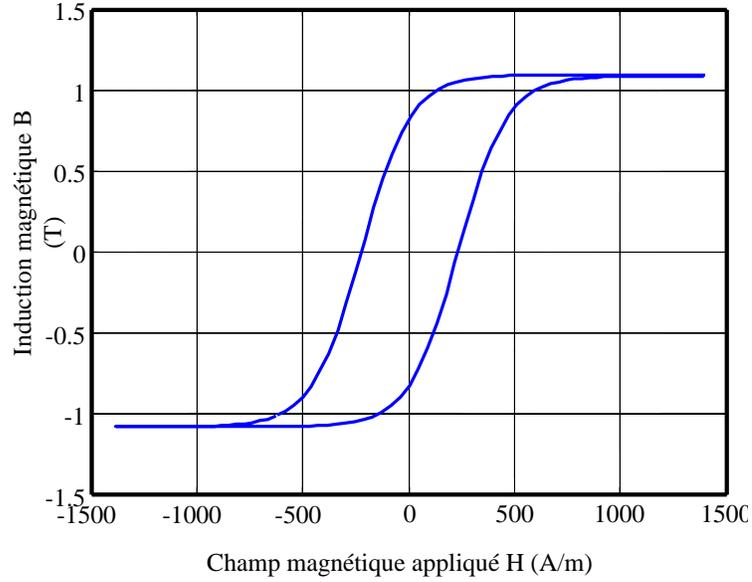


FIGURE 3.4.: Cycle majeur d'hystérésis simulé

### 3.2.5. Modèle à fonctions auxiliaires

Ce modèle est basé sur l'approximation de l'aimantation  $\mathbf{M}$  par une fraction de polynômes de second ordre dépendant des paramètres  $(a_0, a_1, a_2, b_1, b_2$  et  $\mathbf{H})$ .

$$\mathbf{M} = \frac{a_0 + a_1\mathbf{H} + a_2\mathbf{H}^2}{1 + b_1\mathbf{H} + b_2\mathbf{H}^2} \quad (3.19)$$

Ces paramètres sont déterminés dans deux régions (faibles valeurs de  $\mathbf{H}$ , loi de Rayleigh, et pour les champs magnétiques plus élevés loi de *Néel*). Sur la première région ( $\mathbf{H} \rightarrow 0$ ) l'aimantation  $\mathbf{M}$  donnée par (3.19), est approximée par :

$$\mathbf{M} = \chi\mathbf{H} + \eta\mathbf{H}^2 \quad (3.20)$$

Avec  $\chi$  est la susceptibilité initiale et  $\eta$  la constante de Rayleigh. D'autre part, dans la région de saturation ( $\mathbf{H} \rightarrow \infty$ ) l'aimantation  $\mathbf{M}$  est approximée par :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_s \left(1 - \frac{\alpha}{\mathbf{H}}\right) \quad (3.21)$$

où  $\mathbf{M}_s$  est l'aimantation de saturation,  $\alpha$  est la constante de Néel.

### 3. Les Modèles d'Hystérésis Magnétiques

Les paramètres de l'équation (3.19) peuvent être identifiés en utilisant l'équation (3.20) et (3.21).

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \chi \\ a_2 = \frac{\eta \mathbf{M}_s + \chi^2}{\mathbf{M}_s + \alpha \chi} \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \frac{\alpha \eta + \chi}{\mathbf{M}_s - \alpha \chi} \\ b_2 = \frac{\eta \mathbf{M}_s + \chi^2}{\mathbf{M}_s (\mathbf{M}_s - \alpha \chi)} \end{cases} \quad (3.22)$$

L'expression (3.19) nous permet de représenter seulement la courbe de première aimantation. Cependant, dans la majorité des applications les matériaux magnétiques, constituant les machines électriques, sont souvent excités par des champs périodiques. Pour une modélisation précise de ces dispositifs, il est plus commode de considérer les cycles d'hystérésis. Dans les travaux présentés par Rivas [RIV-81], on trouve que le cycle d'hystérésis est divisé en deux branches, descendante  $f_1$  et ascendante  $f_2$ , tel que ce cycle peut être reproduit à partir de deux fonction auxiliaires  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_2$  définies par :

$$\mathbf{B}_1 = \frac{f_1 + f_2}{2}, \quad \mathbf{B}_2 = \frac{f_1 - f_2}{2} \quad (3.23)$$

L'induction magnétique totale  $\mathbf{B}$  peut être calculée par :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \pm \mathbf{B}_2 \quad (3.24)$$

Où le signe (+) est utilisé pour la branche descendante et le signe (-) pour la branche ascendante.

Les fonctions auxiliaires ont été identifiées dans les travaux de *Rivas* par :

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = \mu_0 \left( \mathbf{H} + \frac{a'_1 \mathbf{H} + a'_2 \mathbf{H} |\mathbf{H}|}{1 + b_1 |\mathbf{H}| + b_2 \mathbf{H}^2} \right) \\ \mathbf{B}_2 = \mu_0 \left( \frac{c_1 (\mathbf{H}_m - |\mathbf{H}|) + c_2 (\mathbf{H}_m^2 - \mathbf{H}^2)}{1 + b_1 |\mathbf{H}| + b_2 \mathbf{H}^2} \right) \end{cases} \quad (3.25)$$

Les coefficients  $b_1$  et  $b_2$  sont les mêmes donnés par (3.22), les nouveaux coefficients  $a'_0$ ,  $a'_2$ ,  $c_1$  et  $c_2$  sont identifiés à partir du cycle d'hystérésis,  $\mathbf{H}_m$  correspond à l'intensité du champ maximale. Ces nouveaux coefficients ont été identifiés dans [RIV-81] comme :

$$\begin{cases} a'_1 = \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{dB}{dH} \right)_{H=0} - 1 = \frac{\mu_{diff,0}}{\mu_0} - 1 \\ a'_2 = \frac{B_m - \mu_0 H_m}{H_m^2} (1 + b_1 H_m + b_2 H_m^2) - \frac{a'_1}{H_m} \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = \frac{b_1 B_r}{\mu_0} \\ c_2 = \frac{B_r}{\mu_0 H_m^2} (1 + b_1 H_m) \end{cases} \quad (3.26)$$

$B_m$  et  $B_r$  représentent respectivement l'induction maximale et l'induction rémanente,  $\mu_{diff,0}$  est la perméabilité différentielle initiale au point  $(H = 0, B = B_r)$ . Une autre identification des fonctions auxiliaires permet de donner :

$$\begin{cases} g_1(H) = B_m \arctan\left(\frac{H}{H_m}\right) \\ g_2(H) = \frac{B_m}{H_m} \frac{1}{1 + \left(\frac{H}{H_m}\right)^2} - \frac{\partial g_1}{\partial H} \Big|_{H=H_m} \end{cases} \quad (3.27)$$

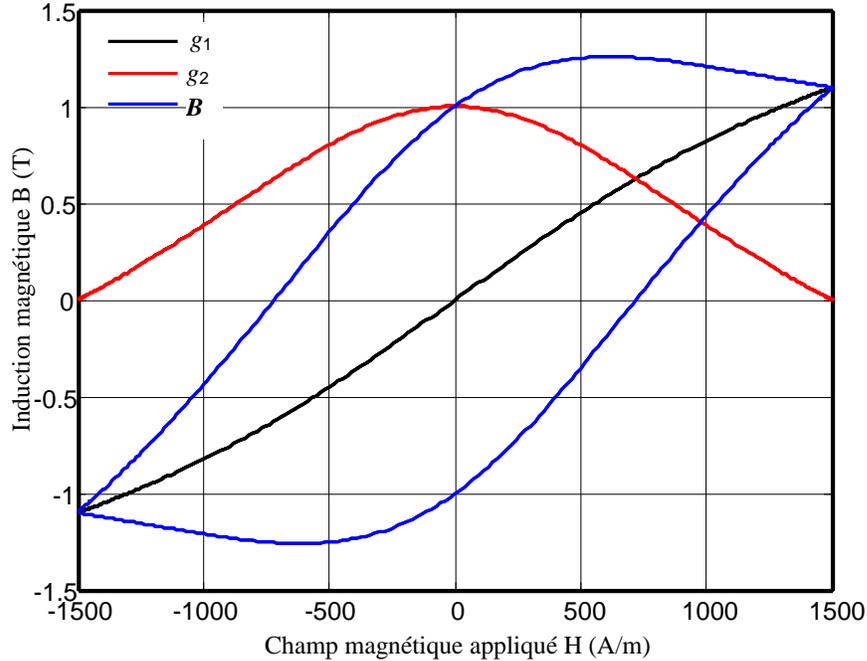


FIGURE 3.5.: Cycle d'hystérésis en utilisant les fonctions auxiliaires

### 3.2.6. Le modèle d'Ising

Ce modèle a été proposé par le physicien *Ernst Ising* en 1927, afin de modéliser de façon simple certains phénomènes physiques, comme l'aimantation, ou les interactions entre parti-

### 3. Les Modèles d'Hystérésis Magnétiques

cules dans un mélange de deux phases liquides. Sa description est simple, il s'agit d'un réseau cristallin 2D régulier et constitué de  $N$  moments magnétiques de même nature, figure 3.6. De plus, dans le modèle simple à deux niveaux, chaque site  $(i, j)$  de ce réseau possède un moment magnétique unitaire  $S_i$  pouvant prendre deux orientations possibles ( $S_i = \pm 1$ ).

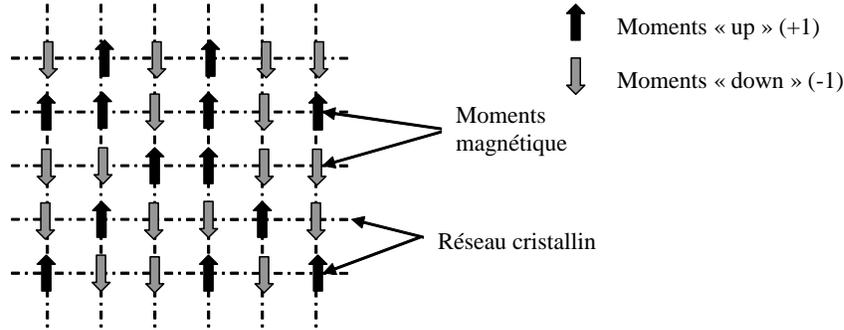


FIGURE 3.6.: Représentation 2D d'un réseau cristallin et moments magnétiques

Pour un système ferromagnétique d'Ising le hamiltonien, en présence d'un champ magnétique extérieur  $\mathbf{H}$ , est donné par :

$$\mathcal{H}_{ising} = \sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j - \mathbf{H} \sum_{i=1}^N S_i \quad (3.28)$$

Les interactions entre les moments magnétiques sont supposées isotropes, c'est-à-dire que tous les sites du cristal sont équivalents. Ceci conduit à un facteur de couplage magnétique  $J$  identique et positif, puisque le système considéré est ferromagnétique. D'autre part, l'énergie d'échange étant principalement due aux interactions entre les moments magnétiques proches voisins, figure 3.7, la sommation de la contribution des interactions de paires est effectuée sur les proches voisins [BEN-02]. L'hamiltonien du système devient donc :

$$\mathcal{H}_{ising} = - \sum_{i=1}^N S_i \left( \mathbf{H} + J \sum_{j \text{ voisins}} S_j \right) \quad (3.29)$$

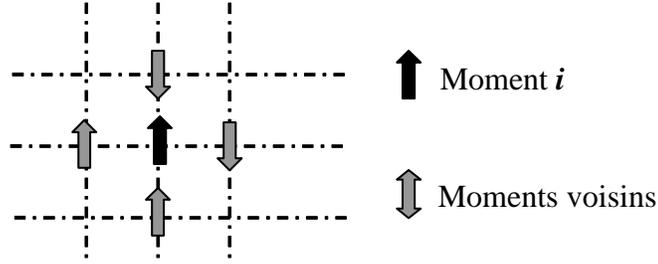


FIGURE 3.7.: moments magnétiques voisins du moment  $i$

A partir de l'expression de l'hamiltonien (3.28), nous pouvons en déduire le champ  $\mathbf{H}_i$  auquel est soumis un moment magnétique  $i$  de la part des  $N-1$  autres moments magnétiques et du champ extérieur :

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H} + J \sum_{j \text{ voisins}} S_j \quad (3.30)$$

L'état d'un moment magnétique peut être déterminé à partir de l'équation (3.29) tel que :

- Si  $H_i > 0$  le moment  $S_i$  est égal à  $+1$
- Si  $H_i < 0$  le moment  $S_i$  est égal à  $-1$

Finalement l'aimantation totale peut être déterminée à partir de l'expression suivante :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \quad (3.31)$$

Ce modèle est complété par l'introduction de l'effet thermique tel que la probabilité pour que le moment magnétique  $S_i$  bascule vers l'état  $-S_i$  est donnée par :

$$P(S_i \rightarrow -S_i) = \frac{\exp(-\beta \Delta E_i)}{1 + \exp(-\beta \Delta E_i)} \quad (3.32)$$

où  $\beta = \frac{1}{kT}$  avec  $k$  est la constante de Boltzmann et  $T$  la température (en Kelvin).  $\Delta E_i$  est la variation d'énergie du système si le moment magnétique  $S_i$  bascule. La variation d'énergie du moment magnétique est donnée comme suit :

$$\Delta E_i = 2S_i \left( \mathbf{H} + J \sum_{j \text{ voisins}} S_j \right) \quad (3.33)$$

Notons ici que, ce modèle nécessite une mémoire de stockage importante lorsque le réseau cristallin est composé de plusieurs sites ( $N \times N$ ). Néanmoins, ce modèle présente des vertus pédagogiques indéniables pour mettre en évidence l'énergie d'échange et l'influence de la température.

#### 3.2.7. Modèle de (Stoner-Wohlfarth)

Le principe de ce modèle est basé sur la compétition entre diverses tendances énergétiques principalement régies par l'anisotropie et le couplage avec le champ magnétique [STO-47]. Il décrit le processus de la rotation cohérente de l'aimantation dans un monocristal à anisotropie uniaxial [MOR-08]. Ce modèle est très utilisé dans la description des aimants permanents pouvant être assimilés à un ensemble de petits aimants juxtaposés quasi-isolés [MAL-06], il est aussi très répandu dans le domaine de l'enregistrement magnétique. Il est peu usité pour les matériaux doux dont l'hystérésis statique s'explique physiquement plus par des problématiques d'accrochages et de décrochages de parois au niveau des défauts cristallins, pour la coercivité [MAL-06]; et de rotations cohérentes de moments dans les domaines magnétiques, pour l'approche à saturation [BRO-40, BRO-41].

#### 3.2.8. Modèle de Amir NOUREDINE

Les processus d'aimantation statiques (en particulier le mouvement des parois magnétiques) sont décrits comme une réaction chimique dans laquelle le volume de certains domaines magnétiques diminue en faveur d'autres domaines [NOU-02]. Pour aboutir à des expressions mathématiques des cycles parcourus, l'auteur propose une formulation proche de celui de la thermodynamique chimique. Ce modèle est basé sur deux mécanismes, le retournement des moments magnétiques qui traduit les déplacements des parois, et la rotation progressive des moments qui correspond à leur changement de direction. Cependant, le retournement des moments magnétiques peut être considéré comme le basculement d'un état '+' vers un état '-' qui correspond à une modification du spin des atomes. Dans un matériau magnétique soumis à un champ magnétique extérieur, lorsque  $\mathbf{H}$  augmente la réaction est :

$$S^+ + h \rightarrow S^- \quad (3.34)$$

Où  $S^-$  désigne un moment magnétique orienté dans le sens négatif,  $S^+$  un moment magnétique orienté dans le sens positif,  $h$  une quantité liée au champ appliqué  $\mathbf{H}$ . la réaction définie en (3.33) doit être irréversible pour traduire le fait que les mouvements des parois soient irréversibles. Par équilibre thermodynamique de (3.33) l'aimantation du matériau  $\mathbf{M}$  due aux retournements des moments magnétiques vaut quand le champ  $\mathbf{H}$  augmente :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_s \arctan \left( \left( \frac{\beta}{2\gamma} \right) \ln (\exp (\gamma \cdot \mathbf{H}) + b) - \beta \frac{\mathbf{H}_c}{2} \right) \quad (3.35)$$

Donc, lorsque  $\mathbf{H}$  diminue, on passe de  $S^+$  vers  $S^-$  par une autre réaction irréversible :

$$S^- + h' \rightarrow S^+ \quad (3.36)$$

Dans ce cas l'aimantation magnétique du matériau est donnée par :

$$\mathbf{M} = -\mathbf{M}_s \arctan \left( \left( \frac{\beta}{2\gamma} \right) \ln (\exp (-\gamma \cdot \mathbf{H}) + b) - \beta \frac{\mathbf{H}_c}{2} \right) \quad (3.37)$$

$$b = K \left( \frac{\mathbf{M}_s + \mathbf{M}_i}{\mathbf{M}_s - \mathbf{M}_i} \right)^{\frac{\gamma}{\beta}} - \exp (\gamma \cdot \mathbf{H}_i) \quad (3.38)$$

Où  $\mathbf{M}_s$  est l'aimantation de saturation.

$\gamma, K$  et  $\beta$  : sont des constantes

$\mathbf{H}_c$  : Champ coercitif

Le modèle est caractérisé par quatre paramètres qui peuvent être identifiés par deux cycles centrés, l'un obtenu à saturation technique et l'autre à un niveau plus bas d'induction. Il a des performances remarquables aussi bien pour la fiabilité que pour la simplicité d'utilisation.

### 3.2.9. Modèle de Preisach

Le modèle de Preisach est un modèle phénoménologique proposé par le physicien *Frederik Preisach* en 1935 pour décrire le phénomène de dissipation d'énergie par hystérésis. Ajour-

d'hui encore il fait l'objet de nombreuses études pour étendre son domaine d'application. L'idée de base du modèle de Preisach est que tout système hystérétique peut se mettre sous la forme d'une combinaison de plusieurs éléments du système hystérétique le plus simple possible. En effet, l'état magnétique du matériau à un instant donné est représenté par un ensemble de commutateurs magnétiques ayant deux états de saturation possibles ( $\mathbf{M} = \pm 1$ ). Ce type de commutateur est défini par un cycle élémentaire rectangulaire, appelée aussi hystéron. En présence d'un champ magnétique extérieur  $\mathbf{H}$ , chaque commutateur peut basculer vers l'un des états stables (+1 ou -1) figure 3.8(a). L'état de stabilité haut est atteint lorsque la variable d'entrée en augmentant dépasse une valeur  $\alpha$ . L'état de stabilité bas est atteint lorsque la variable d'entrée en diminuant sous une valeur  $\beta$  (la variable d'entrée est l'excitation magnétique  $\mathbf{H}$  et la variable de sortie est l'aimantation  $\mathbf{M}$ ). La détermination de l'aimantation du matériau nécessite une connaissance complète de la distribution statistique des cycles élémentaires. Cette distribution est appelée généralement fonction de distribution de Preisach  $\rho(\alpha, \beta)$ . Le domaine de définition de cette fonction est représenté par un triangle de surface  $\mathcal{S}$ , limité par la droite  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha = \mathbf{H}_s$  et  $\beta = -\mathbf{H}_s$  dans le plan formé par deux axes ( $O\alpha$  et  $O\beta$ ), ce plan est appelé triangle de Preisach figure 3.8(b). L'aimantation  $\mathbf{M}(t)$ , résultant de l'application du champ  $\mathbf{H}(t)$  à l'instant  $t$ , s'écrit alors :

$$\mathbf{M}(t) = \iint_S \iint \rho(\alpha, \beta) \gamma_{\alpha, \beta} [\mathbf{H}(t)] d\alpha d\beta \quad (3.39)$$

Avec l'opérateur,  $\gamma_{\alpha, \beta} [\mathbf{H}(t)]$  associé à l'entité magnétique en admettant que les champs de basculement  $\alpha$  et  $\beta$  valent (+1) dans l'état positif et (-1) dans l'état négatif.

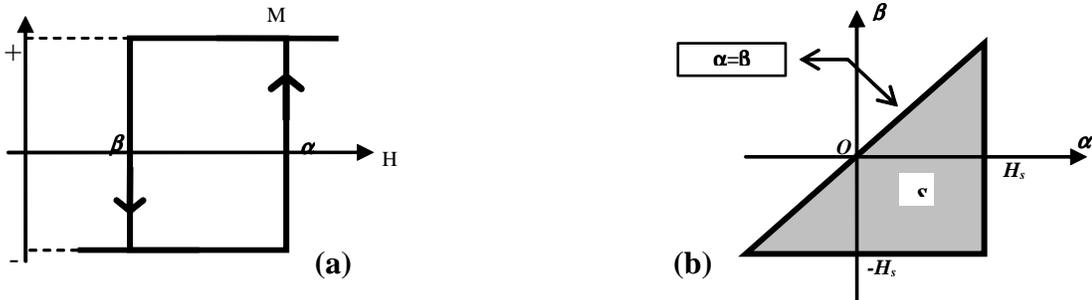


FIGURE 3.8.: (a) commutateur magnétique (b) plan de Preisach

### 3.3. Hystérésis dynamiques

Les modèles d'hystérésis précédents restent invariants par la modification de la fréquence d'utilisation. Donc ces modèles ne nous donnent que la succession des états et non pas les temps entre chaque passage d'un état à un autre. Nous disons que ces modèles d'hystérésis sont indépendants de la fréquence des sources [BER-98]. Cependant, les mesures des cycles d'hystérésis pour différentes fréquences, montrent que l'aire et la forme de ce dernier change en fonction de la fréquence. Cette hystérésis est appelée hystérésis dynamique. Le développement des modèles dynamiques est indispensable, car la majorité des processus industriels fonctionnent en moyenne ou en haute fréquence. Ces modèles sont capables de prendre en compte les courants induits et les pertes dynamiques de l'hystérésis. Nous en présentons ici quelques uns parmi les plus significatifs.

#### 3.3.1. Le modèle de Duhem

Ce modèle est l'un des premiers modèles d'hystérésis dynamique proposé par *Duhem* 1897-1903 [IVA-97]. Il est basé sur la description thermodynamique du processus d'aimantation, selon Duhem, le phénomène d'hystérésis peut être décrit en résolvant l'équation différentielle (3.39) :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = f(\mathbf{H}(t), \mathbf{B}(t), \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}) \\ \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0 \end{cases} \quad (3.40)$$

La fonction  $f$  peut être représentée par :

$$f\left(\mathbf{H}, \mathbf{B}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) = g\left(\mathbf{H}, \mathbf{B}, \text{sign}\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)\right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) \quad (3.41)$$

La fonction  $g$  est une fonction continue et a des formes différentes pour les branches ascendantes et descendantes :

$$\begin{cases} g(\mathbf{H}, \mathbf{B}, \text{sign}\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)) = g_1(\mathbf{H}, B) & \text{pour } \text{sign}\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) > 0 \\ g(\mathbf{H}, \mathbf{B}, \text{sign}\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)) = g_2(\mathbf{H}, B) & \text{pour } \text{sign}\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) < 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

La caractéristique dynamique du processus d'aimantation peut être simulée par :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = g_1(\mathbf{B}, \mathbf{H}) \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)^+ - g_2(\mathbf{H}, \mathbf{B}) \left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)^- \quad (3.43)$$

Les symboles  $\left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)^+$  et  $\left( \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right)^-$  définissent respectivement les dérivés du champ d'excitation par rapport au temps sur les deux branches (montante et descendante) du cycle d'hystérésis.

La difficulté de ce modèle réside dans l'identification des deux fonctions ( $g_1$  et  $g_2$ ). En effet, chaque échantillon ferromagnétique présente un cycle différent et avant d'entamer une modélisation du phénomène il est indispensable d'identifier ces fonctions.

### 3.3.2. Modèle de Preisach-Bertotti

Ce modèle basé sur une généralisation dynamique sur un ensemble de commutateurs [BER-93]. Cette dynamique peut intégrer tout type de processus d'aimantation, dont le mécanisme principal qui est le déplacement des parois magnétiques. Cette adaptation s'effectue par attribution aux commutateurs  $\gamma_{\alpha,\beta}$  d'une loi dynamique de changement d'état fonction de la dérivée temporelle du flux élémentaire par l'introduction d'un nouveau paramètre  $k$  lié à la mobilité des parois magnétiques.

$$\begin{cases} \partial_t \gamma_{\alpha,\beta} = k(\mathbf{H} - \alpha) \text{ si } \mathbf{H} \geq \alpha \text{ et } \gamma_{\alpha,\beta} < 1 \\ \partial_t \gamma_{\alpha,\beta} = k(\mathbf{H} - \beta) \text{ si } \mathbf{H} \leq \beta \text{ et } \gamma_{\alpha,\beta} > -1 \\ \partial_t \gamma_{\alpha,\beta} = 0 \text{ ailleurs} \end{cases} \quad (3.44)$$

L'aimantation résultante est toujours fonction de l'histoire, via une mémorisation de l'état pondéré des commutateurs du plan de Preisach; mais elle s'établit de plus ici avec une certaine constante de temps définie par la mobilité des parois.

$$d\mathbf{M}_{d\mathbf{H}>0} = \iint_{\Delta(\mathbf{H}_i, \mathbf{H}_{i-1})} \rho(\alpha, \beta) d\gamma_{\alpha,\beta} d\alpha d\beta \quad (3.45)$$

$$d\mathbf{M}_{d\mathbf{H}<0} = \iint_{\Delta(\mathbf{H}_{i-1}, \mathbf{H}_i)} \rho(\alpha, \beta) d\gamma_{\alpha,\beta} d\alpha d\beta \quad (3.46)$$

De ce fait, les cycles reconstruits vont dépendre de la fréquence de variation du champ

magnétique appliqué. Malgré une richesse et des possibilités quasi-infinies, ce modèle reste toujours très lourd et peu utilisé en pratique [PAR-93, HOL-02].

### 3.3.3. Modèle de Raulet-Masson

Dans ce modèle *Raulet* et *J.P. Masson* proposent d'intégrer la dynamique des parois magnétiques directement dans une loi de comportement différentielle non univoque, dite hystérique [ROU-00]. Elle fait à nouveau intervenir une propriété  $\gamma$ , prise comme une constante caractéristique représentative de la mobilité des parois magnétiques. Cependant, l'introduction du modèle dans une équation de diffusion de champ magnétique permet une description complète de l'ensemble des effets dynamiques qui se produisent dans le matériau. Le modèle fait intervenir un coefficient comportemental du matériau pratiquement indépendant de la géométrie et de l'excitation du matériau utilisé.

$$\partial_t \mathbf{B} = \gamma (\mathbf{H} - \mathbf{H}_s(\mathbf{B})) \quad (3.47)$$

où  $\mathbf{H}_s(\mathbf{B})$  correspond à la loi de comportement statique, pouvant elle aussi être hystérique. Elle peut être identifiée en régime quasi-statique [MAL-06]. L'inconvénient de ce modèle qui n'a besoin que d'un seul paramètre est l'alourdissement des calculs qui affecte l'amélioration des résultats.

### 3.3.4. Modèle de Jiles- Szczyglowski

Ce modèle est une extension du modèle statique de *Jiles-Atherton* [JIL-86], pour décrire l'aimantation magnétique sous une excitation alternative, *J. Szczyglowski* suppose une pénétration uniforme du champ magnétique à travers le matériau [SZC-01]. Le modèle consiste à modifier le champ interne effectif  $H_{eff}$  par ajout d'un champ d'amortissement dynamique :

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H} + \alpha \mathbf{M} + \beta \partial_t \mathbf{M} \quad (3.48)$$

## 3.4. Modèles d'hystérésis de type Langevin

### 3.4.1. Théorie de Langevin pour le paramagnétisme

La dérivation de la loi classique de Curie à été démontrée par Langevin, en utilisant les statistiques de Boltzmann [BUS-03].

Considérons une substance paramagnétique contient des atomes magnétiques dont le moment  $\mathbf{m}$  est libre de s'orienter dans n'importe quelle direction. En l'absence de champ magnétique, les atomes pointent statistiquement dans toutes les directions. Dans ce cas, la résultante macroscopique de l'aimantation est nulle. Lorsque l'on applique un champ magnétique, les moments ont tendance à s'orienter parallèlement à ce dernier, et si rien ne vient s'opposer à cet effet, le système acquiert une forte aimantation c'est ce qui se passe à température nulle. En revanche, à température finie, l'agitation thermique s'oppose au parallélisme, si bien que l'alignement des moments est partiel et que l'on observe seulement une faible susceptibilité positive. L'énergie potentielle  $W_{para}$  d'un moment magnétique est donnée par :

$$W_{para} = -\mathbf{m}\mathbf{H} = -mH \cos \theta \quad (3.49)$$

Avec  $\theta$  est l'angle entre  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{H}$ . L'énergie d'agitation thermique est de l'ordre de  $kT$ , où  $k$  est la constante de Boltzmann et  $T$  est la température absolue en Kelvins. Supposons que  $\cos \theta = 1$  et  $H = 10^6 \text{ A/m}$ . Le plus petit moment magnétique possible est le moment de Bohr  $m_B = 1.17 \cdot 10^{-29}$ , donc  $W_{para} = 1.17 \cdot 10^{-23} \text{ J}$ , à la température ambiante  $kT = 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 = 4.1 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ . Donc, l'agitation thermique est suffisante pour rendre la distribution angulaire des moments atomiques presque aléatoire, d'où seule une très faible aimantation parallèle au champ magnétique.

Le nombre de molécules ayant une énergie dans la gamme  $W_{para}$  et  $W_{para} + dW_{para}$  est donnée par la statistique de Boltzmann comme :

$$dn = n_0 \exp\left(-\frac{W_{para}}{kT}\right) dW_{para} \quad (3.50)$$

Où  $n_0$  est une constante choisie de telle manière que l'intégrale de l'équation (3.50) donne le nombre des molécules  $N$ . En utilisant l'équation (3.49) nous obtenons :

### 3. Les Modèles d'Hystérésis Magnétiques

$$\begin{aligned} dn &= n_0 \exp\left(\frac{mH \cos \theta}{kT}\right) d(-mH \cos \theta) \\ &= n_0 \exp\left(\frac{mH \cos \theta}{kT}\right) mH \sin \theta d\theta \end{aligned} \quad (3.51)$$

Le nombre total des molécules  $N$  est obtenu, en intégrant l'équation (3.51) sur l'intervalle de  $[0 \text{ à } \pi]$ . La magnétisation nette  $\mathbf{M}$  de l'échantillon est donnée par la résultante de tous les moments magnétiques le long de la direction de  $\mathbf{H}$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_0^\pi m \cos \theta dn \\ &= \frac{N \int_0^\pi m \cos \theta dn}{\int_0^\pi dn} \\ &= \frac{N \int_0^\pi m \cos \theta n_0 \exp\left(\frac{mH \cos \theta}{kT}\right) mH \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi n_0 \exp\left(\frac{mH \cos \theta}{kT}\right) mH \sin \theta d\theta} \\ &= Nm \left( \coth \lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \\ &= M_s \mathfrak{L}(\lambda) \end{aligned} \right. \quad (3.52)$$

avec  $\lambda = \frac{mH}{kT}$ .

Où  $\mathfrak{L}(\lambda)$  est la fonction de Langevin. Pour une valeur de  $\mathbf{H}$  suffisamment élevée, presque tous les moments magnétiques sont alignés dans la direction de  $\mathbf{H}$  et la valeur de l'aimantation  $\mathbf{M}$  vaut  $\mathbf{M} = Nm = M_s$ , Pour  $\lambda \ll 1$  la fonction de Langevin peut être développée comme suit :

$$\mathfrak{L}(\lambda) = \frac{\lambda}{3} - \frac{\lambda^3}{45} \dots \quad (3.53)$$

En négligeant les termes d'ordres supérieurs :

$$\mathbf{M} = \frac{Nm^2}{3kT} H \quad (3.54)$$

C'est la loi de Curie pour les matériaux paramagnétiques.

D'une manière générale l'équation (3.52) peut être donnée sous la forme suivante :

$$\mathbf{M} = M_s \left( \coth \frac{\mathbf{H}}{a} - \frac{a}{\mathbf{H}} \right) \quad (3.55)$$

avec  $a = \frac{kT}{m}$ .

Ainsi, l'évolution de la courbe de première aimantation est représentée par la figure 3.9

pour un matériau ayant  $M_s = 1.7 \cdot 10^6 A/m$  et  $a = 100 A/m$ .

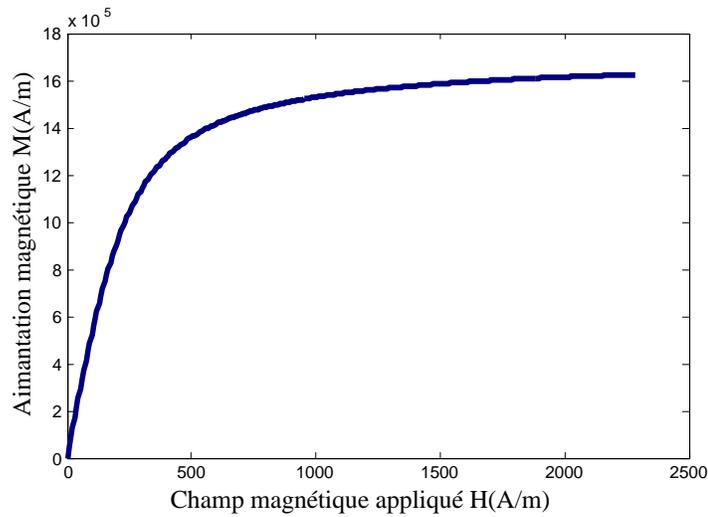


FIGURE 3.9.: La courbe de première aimantation selon le modèle de Langevin

Le modèle de Langevin donné par l'équation (3.55) n'est pas valable que pour les matériaux paramagnétiques. Pour appliquer ce modèle aux matériaux ferromagnétiques des corrections sont nécessaires.

### 3.4.2. La correction de Weiss pour les matériaux ferromagnétiques

Pour expliquer le ferromagnétisme, P. Weiss proposa 1906 le modèle de champ moléculaire, qui fut à l'origine de progrès considérables en magnétisme. Ce modèle consiste à considérer l'interaction entre les moments magnétiques. Ces interactions engendrent un champ d'interaction moléculaire appelé  $\mathbf{H}_m$ . Weiss considère que tous les moments sont identiques dans ce cas l'expression donnant ce champ est :

$$\mathbf{H}_m = \alpha \sum_j m_j = \alpha \mathbf{M} \quad (3.56)$$

Il en déduit donc que le champ effectif appliqué sur l'électron peut s'écrire :

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H} + \alpha \mathbf{M} \quad (3.57)$$

Où :  $\alpha$  est le coefficient du champ moléculaire. Dans ce cas, la caractéristique magnétique

anhystérétique du matériau ferromagnétique décrite par la théorie de Langevin et corrigée par la théorie de Weiss et donnée par :

$$\mathbf{M}_{an} = M_s \left( \coth \left( \frac{\mathbf{H} + \alpha \mathbf{M}}{a} \right) - \frac{a}{\mathbf{H} + \alpha \mathbf{M}} \right) \quad (3.58)$$

### 3.4.3. Le modèle d'hystérésis de Jiles-Atherton

Le modèle de Jiles-Atherton est un modèle qui décrit l'origine du phénomène d'hystérésis dans les matériaux ferromagnétiques à partir d'une approche physique. Ce modèle est largement utilisé dans la modélisation de la caractéristique magnétique non-linéaire des matériaux [HER-00]. Il a été implémenté dans plusieurs programmes, notamment dans le cadre de simulateur des circuits. Par exemple, la version commercialisée de **SPICE** nommé *Allegro AMS Simulator 210* de MicroSim, le modèle implémenté dans le simulateur est celui de Jiles-Atherton [IZY-06]. Il permet aussi la description mathématique de la courbe d'hystérésis  $B(H)$  en utilisant cinq paramètres qui dépendent des caractéristiques magnétiques du matériau. Cette description est essentiellement basée sur des considérations énergétiques liées aux déplacements de parois au sein du système magnétique. Jiles et Atherton supposent que l'échange d'énergie par unité de volume est égal à l'échange d'énergie magnétostatique additionné aux pertes par hystérésis [JIL-86]. Dans le cas où il n'y a pas des pertes par hystérésis l'énergie magnétostatique doit être égale à l'énergie totale fournie. Dans la suite de ce manuscrit on va détailler ce modèle pour but de l'intégrer dans un code de calcul du champ.

### 3.4.4. Formulation du Modèle

Dans ce modèle, Jiles et Atherton proposent de revenir à la physique microscopique des parois magnétiques en présence de défauts et de déformations internes pour mettre en exergue les lois mathématiques correspondantes susceptibles de permettre la reconstruction des cycles d'hystérésis effectivement parcourus expérimentalement [JIL-86]. Ils supposent que l'aimantation totale  $\mathbf{M}$  du matériau est décomposée en deux termes : la composante réversible  $\mathbf{M}_{rev}$  et la composante irréversible  $\mathbf{M}_{irr}$ .

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{rev} + \mathbf{M}_{irr} \quad (3.59)$$

La composante réversible représente la translation réversible des parois et la rotation réversible des domaines. Par contre la composante irréversible représente le déplacement irréversible des parois et des domaines magnétiques. La source de la composante irréversible est le déplacement irréversible des parois et des domaines magnétiques représentant les pertes d'énergie par hystérésis dans le matériau. Cette composante peut être déterminée à partir de l'équilibre énergétique pendant le processus d'aimantation comme suit : Au cours de processus d'aimantation et en absence des pertes par hystérésis, la variation de l'énergie magnétique doit être égale à l'énergie totale fournie. La caractéristique de l'aimantation suit la courbe anhystérétique  $\mathbf{M}_{an}(\mathbf{H})$ , (équation 3.58). Ainsi, le bilan énergétique de la variation de l'énergie fournie, l'énergie magnétique et les pertes par hystérésis générées par le mouvement des parois de domaine peuvent être exprimées comme :

$$\mu_0 \int \mathbf{M}_{an}(\mathbf{H})d\mathbf{H} = \mu_0 \int \mathbf{M}(\mathbf{H})d\mathbf{H} + \mu_0 \int k\delta \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} d\mathbf{H} \quad (3.60)$$

On peut écrire la relation reliant l'intensité du champ et l'aimantation à partir de l'équation (3.60).

$$\mathbf{M}_{an} = \mathbf{M} + k\delta \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} \quad (3.61)$$

En tenant compte de l'interaction entre les domaines magnétiques selon le champ effectif de Weiss ( $H_e = H + \alpha M$ ), dans l'équation (3.61) la composante irréversible peut être déterminée par la solution de l'équation différentielle suivante :

$$\mathbf{M}_{an}(\mathbf{H}_e) = \mathbf{M}_{irr} + k\delta \frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{H}_e} \quad (3.62)$$

En dérivant (3.59) par rapport à  $\mathbf{H}$ , la susceptibilité différentielle de la composante irréversible est de la forme suivante :

$$\frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{H}} = \frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{H}_e} \cdot \frac{d\mathbf{H}_e}{d\mathbf{H}} \quad (3.63)$$

### 3. Les Modèles d'Hystérésis Magnétiques

$$\frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{M}_{an}(\mathbf{H}_e) - \mathbf{M}_{irr}}{k\delta - \alpha(\mathbf{M}_{an}(\mathbf{H}_e) - \mathbf{M}_{irr})} \quad (3.64)$$

La composante réversible de l'aimantation peut être définie comme la différence entre l'aimantation anhystérétique et l'aimantation irréversible.

$$\mathbf{M}_{rev} = c(\mathbf{M}_{an}(\mathbf{H}_e) - \mathbf{M}_{irr}) \quad (3.65)$$

avec  $c$  est le coefficient de la réversibilité  $\in [0 \div 1]$

En combinant l'équation (3.59) et (3.65), l'expression de l'aimantation totale est de la forme suivante :

$$\mathbf{M} = (1 - c)\mathbf{M}_{irr} + c\mathbf{M}_{an}(\mathbf{H}_e) \quad (3.66)$$

En tenant compte de l'expression de la susceptibilité irréversible donnée par (3.64), la susceptibilité différentielle de l'aimantation totale peut être représentée de la manière suivante :

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} = (1 - c) \frac{\mathbf{M}_{an}(\mathbf{H}_e) - \mathbf{M}_{irr}}{k\delta - \alpha(\mathbf{M}_{an}(\mathbf{H}_e) - \mathbf{M}_{irr})} + c \frac{d\mathbf{M}_{an}(\mathbf{H}_e)}{d\mathbf{H}} \quad (3.67)$$

L'expression (3.67) donne la susceptibilité différentielle du modèle de Jiles-Atherton  $M(H)$ . Ce modèle peut aussi être adapté pour la détermination de la loi de comportement  $M(B)$  connu sous le nom « *modèle inverse de Jiles-Atherton* » [SAD-02]. Dans ce modèle inverse l'expression (3.66) est dérivée par rapport à  $\mathbf{B}$ .

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{B}} = \frac{(1 - c) \frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{B}_e} + c \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{B}_e}}{1 + \mu_0(1 - c)(1 - \alpha) \frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{B}_e} + \mu_0 c(1 - \alpha) \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{B}_e}} \quad (3.68)$$

avec  $\mathbf{B}_e = \mu_0 \mathbf{H}_e$  et  $\frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{B}_e} = \frac{\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}_{irr}}{\mu_0 k \delta}$

Dans les deux cas, les cinq paramètres  $a$ ,  $\alpha$ ,  $k$ ,  $c$  et  $M_s$  doivent être déterminés à partir de mesures expérimentales. Il est important de noter que les paramètres du modèle de Jiles-Atherton sont théoriquement les mêmes quelque soit le modèle utilisé ( $M(H)$  ou  $M(B)$ ). On résume les significations physiques des paramètres dans le tableau 3.1.

Paramètres	Propriété physique
$a$	Facteur de forme pour $\mathbf{M}_{an}$
$\alpha$	Coefficient du champ moléculaire
$k$	Coefficient d'épinglage
$c$	Coefficient de réversibilité
$M_s$	Aimantation à saturation

TABLE 3.1.: Les significations physiques des paramètres du modèle de J-A

### 3.4.5. La résolution numérique pour le modèle de J-A

La résolution numérique du modèle passe au premier lieu par la résolution de (3.64), nous a permet au départ d'obtenir la composante irréversible de l'aimantation, figure 3.10(a). Ensuite, à l'aide de (3.65) on peut déduire la composante réversible (figure 3.10(b), de cette dernière. Enfin, pour trouver l'aimantation totale il suffit d'effectuer la somme de ces deux composantes. Il faut noter aussi que la résolution de l'équation (3.64) passe par la détermination de  $\mathbf{M}_{an}$  donnée par (3.62), figure 3.10(c). La figure 3.10(d) montre le cycle majeur du phénomène d'hystérésis pour  $M_s = 1.7 \cdot 10^6$  A/m ,  $k = 2000$  A/m,  $c = 0.1$ ,  $a = 1000$  A/m et  $\alpha = 0.0017$ .

L'application d'un tel algorithme pour la détermination des cycles d'hystérésis suppose la connaissance des différents paramètres  $a$ ,  $\alpha$ ,  $k$ ,  $c$  et  $M_s$ . On remarque la simplicité de la programmation de ce modèle.

Lors de la résolution numérique du modèle il est nécessaire de vérifier le sens physique de l'aimantation, car le modèle peut générer dans certain cas des susceptibilités différentielles négatives qui ne sont pas des solutions physiquement réalistes. Ce comportement peut apparaître au sommet du cycle d'hystérésis majeur lors de la diminution du champ, figure 3.11. Un nouveau coefficient  $\delta_M$  mis en place et sa définition donnée par [PET-06] :

$$\delta_M = \begin{cases} 1 & si(\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}_{irr}) \frac{d\mathbf{H}}{dt} > 0 \\ 0 & si(\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}_{irr}) \frac{d\mathbf{H}}{dt} < 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

Ce coefficient peut être donné par une forme plus générale :

$$\delta_M = 0.5[1 + sign((\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}_{irr}) \frac{d\mathbf{H}}{dt})] \quad (3.70)$$

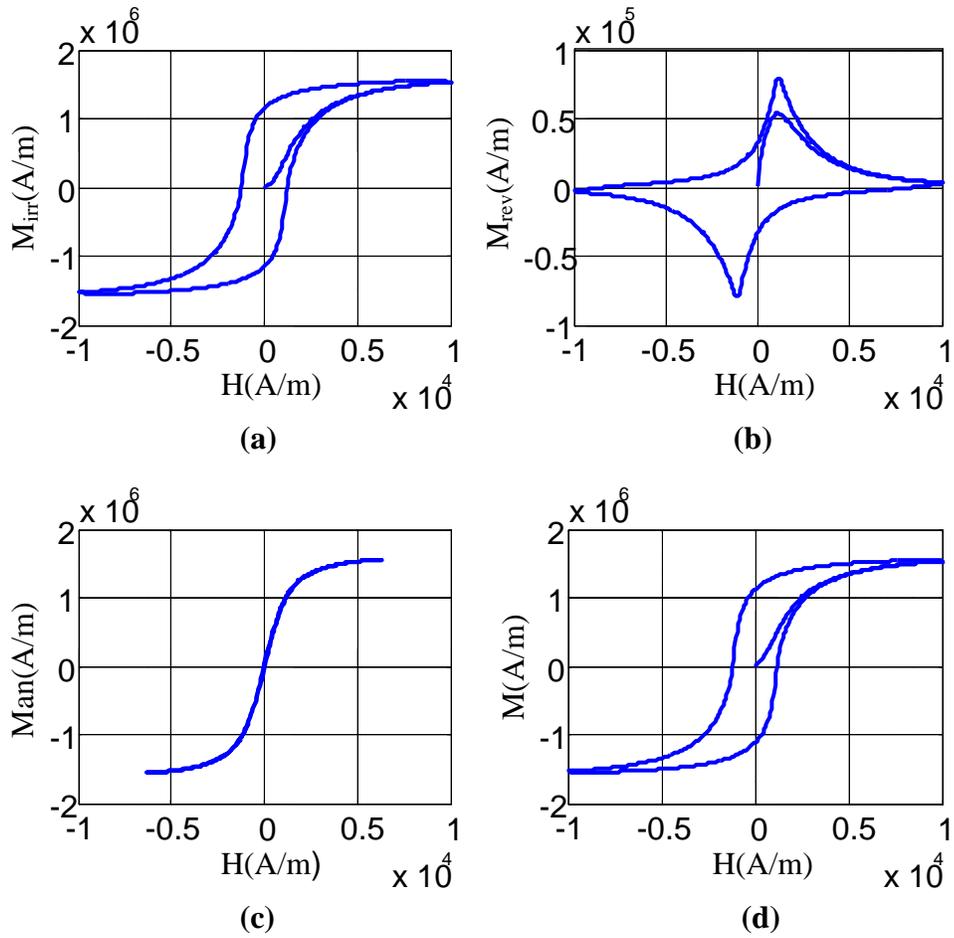


FIGURE 3.10.: Aimantation irréversible (a), réversible (b), anhystérétique (c) et l'aimantation totale (d)

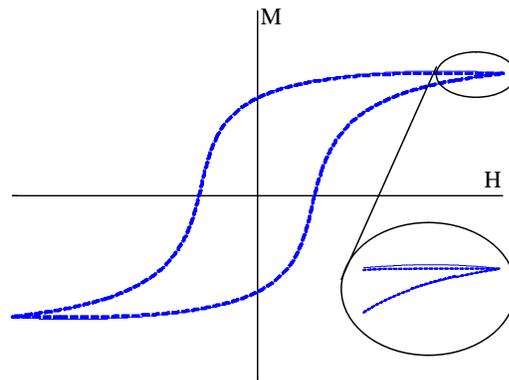


FIGURE 3.11.: Comportement non physique au voisinage de la saturation d'un cycle majeur.

### 3.4.6. Influence des paramètres sur le cycle d'hystérésis

Chaque matériau magnétique est caractérisé par son propre cycle d'hystérésis, donc, et d'après le modèle de Jiles-Atherton, chaque matériau est caractérisé aussi par cinq paramètres. Pour avoir l'effet des paramètres sur l'allure du cycle d'hystérésis nous varierons chaque paramètre en fixant les autres.

#### 3.4.6.1. Effet du paramètre $k$

D'après la figure 3.12 le paramètre  $k$  influe directement sur la largeur du cycle, on voit qu'il agit fortement sur le champ coercitif et l'induction rémanente. Son effet sur l'induction maximale est moins important mais on remarque une diminution de celle-ci lors de l'augmentation de paramètre  $k$ . Cette remarque doit être prise en compte lors de la procédure d'identification des paramètres. Ce paramètre, dans les matériaux doux, égal au champ coercitif dans une première approximation [JIL-92].

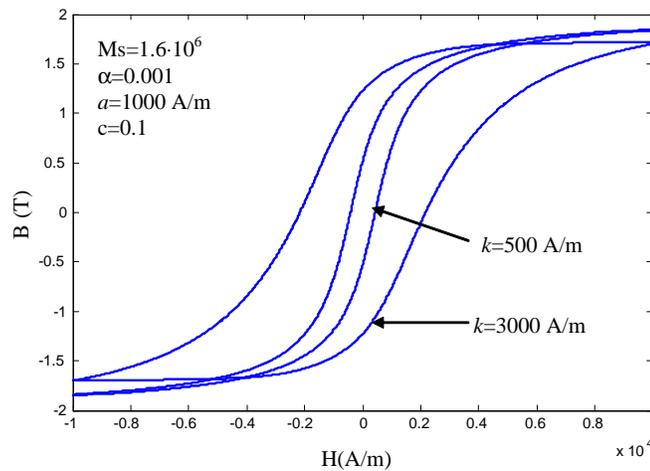


FIGURE 3.12.: Effet de paramètre  $k$  sur l'allure du cycle d'hystérésis

#### 3.4.6.2. Effet du paramètre $\alpha$

Ce paramètre agit fortement sur l'induction rémanente, figure 3.13, son effet sur le champ coercitif et sur l'induction maximale est moins important.

### 3. Les Modèles d'Hystérésis Magnétiques

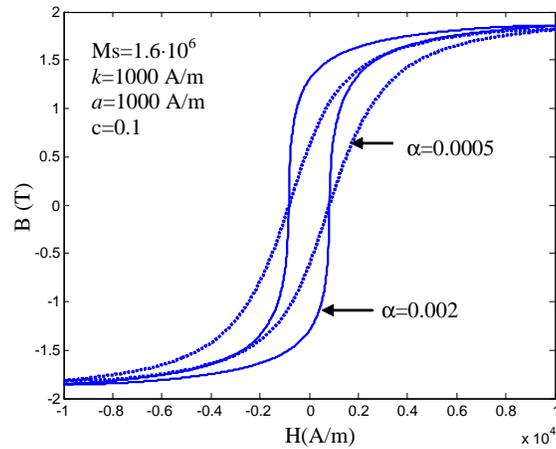


FIGURE 3.13.: Effet de paramètre  $\alpha$  sur l'allure du cycle d'hystérésis

#### 3.4.6.3. Effet du paramètre $a$

Ce paramètre dépend fortement de la température. En effet, l'influence de la température sur le cycle d'hystérésis est introduite par l'intermédiaire du paramètre  $a$  dans l'aimantation anhystérétique. La figure 3.14 montre l'effet de ce paramètre, l'augmentation de ce paramètre traduite par une diminution de l'induction maximale et rémanente.

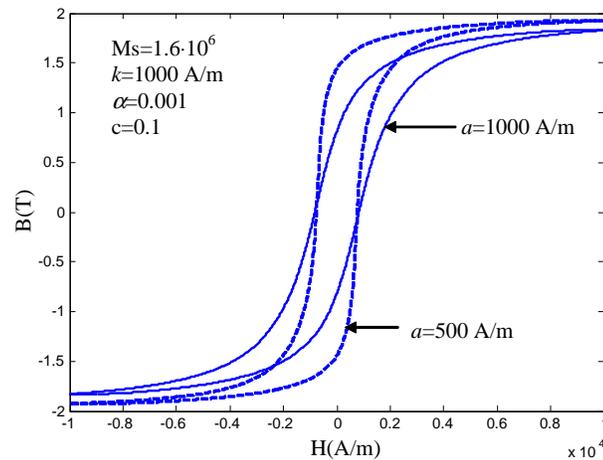


FIGURE 3.14.: Effet de paramètre  $a$  sur l'allure du cycle d'hystérésis

#### 3.4.6.4. Effet du paramètre $c$

Ce paramètre est lié à l'aimantation réversible, donc il caractérise le degré de la réversibilité de l'aimantation et influe aussi sur l'aimantation initiale. Son effet sur le cycle d'hystérésis

est présenté sur la figure 3.15.

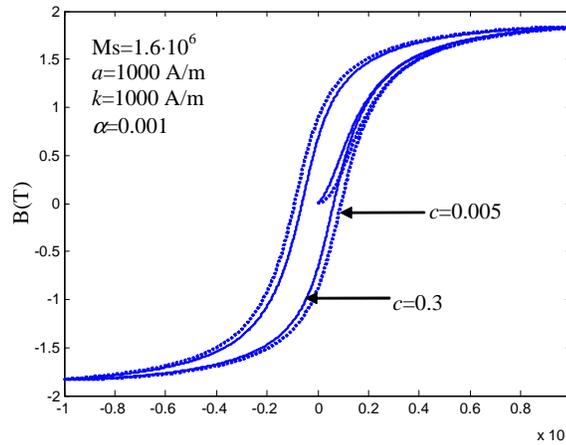


FIGURE 3.15.: Effet de paramètre  $c$  sur l'allure du cycle d'hystérésis

### 3.4.7. Détermination des paramètres du modèle

A partir du cycle expérimental  $B(H)$ , les cinq paramètres du modèle peuvent être obtenus. Comme nous l'avons vu à la fin de la section précédente, chaque paramètre a une influence sur certains points du cycle d'hystérésis. Nous nous servons de ces particularités pour les déterminer. La première étape consiste à transformer le cycle  $B(H)$  en  $M(H)$ , en utilisant l'équation (2.3). L'étape suivante consiste à identifier sur le cycle d'hystérésis les points particuliers et les différentes variables qui sont énumérées dans la figure 3.16. Dans cette figure, les variables  $\chi$  sont les susceptibilités différentielles où :  $\chi = \frac{dM}{dH}$ .

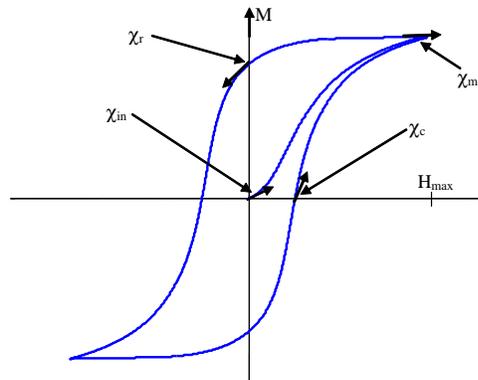


FIGURE 3.16.: Les susceptibilités différentielles utilisées pour la détermination des paramètres

### 3.4.7.1. Détermination de $\mathbf{M}_s$

Ce paramètre est probablement le plus simple à déterminer, dans la plupart des cas il est donné par le constructeur des tôles.  $\mathbf{M}_s$  est la valeur de l'aimantation lorsque le matériau est fortement saturé.

### 3.4.7.2. Détermination de $k$

Comme nous l'avons vu à la section (§ 3.4.6.1), ce paramètre influe directement sur la largeur du cycle d'hystérésis et il agit fortement sur le champ coercitif  $H_c$ . Dans les matériaux ferromagnétiques doux il est considéré comme étant le champ coercitif. Le paramètre  $k$  est déterminé à partir de la susceptibilité  $\chi_c$  au point coercitif ( $H = H_c, M = 0$ ). En utilisant l'expression donnant la susceptibilité différentielle de l'aimantation totale (3.67). Notez que dans ce cas  $\delta = +1$ .

$$\chi_c = \left. \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} \right|_{H=H_c, M=0} = (1-c) \frac{\mathbf{M}_{an}(H_c) - \mathbf{M}_{irr}}{k - \alpha(\mathbf{M}_{an}(H_c) - \mathbf{M}_{irr})} + c \frac{d\mathbf{M}_{an}(H_c)}{d\mathbf{H}} \quad (3.71)$$

Comme l'aimantation  $\mathbf{M}$  égale à zéro au point coercitif, et à partir de l'équation (3.66) on trouve que :

$$\mathbf{M}_{irr} = -\frac{c\mathbf{M}_{an}(H_c)}{1-c} \quad (3.72)$$

Et puis l'équation (3.71) nous donne :

$$k = \frac{\mathbf{M}_{an}(H_c)}{1-c} \left( \alpha + \frac{1-c}{\chi_c - c \frac{d\mathbf{M}_{an}(H_c)}{d\mathbf{H}}} \right) \quad (3.73)$$

Notez que le paramètre  $k$  peut être calculé si ( $a, \alpha$  et  $c$ ) sont connus.

### 3.4.7.3. Détermination de $\alpha$

Ce paramètre influe directement sur l'aimantation rémanente (§ 3.4.6.2), donc ce paramètre peut être déterminé en utilisant les coordonnées au point rémanente ( $H = 0, M = M_r$ ), sur la branche descendante (figure 3.16), dans ce cas  $\delta = -1$ . En utilisant l'équation (3.66) avec  $M = M_r$  on trouve :

$$M_{irr} = \frac{M_r - cM_{an}(\alpha M_r)}{1 - c} \quad (3.74)$$

D'une manière analogue à la détermination du paramètre  $k$ , nous allons écrire la susceptibilité  $\chi_r$  à l'aimantation rémanente comme :

$$\chi_r = \left. \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} \right|_{H=0, M=M_r} = (1 - c) \frac{\mathbf{M}_{an}(\alpha M_r) - \mathbf{M}_{irr}}{-k - \alpha(\mathbf{M}_{an}(\alpha M_r) - \mathbf{M}_{irr})} + c \frac{d\mathbf{M}_{an}(\alpha M_r)}{d\mathbf{H}} \quad (3.75)$$

En substituant l'équation (3.74) dans (3.75), nous avons :

$$M_r = M_{an}(\alpha M_r) + \frac{k}{\frac{\alpha}{1-c} + \frac{1}{\chi_r - c \frac{dM_{an}(\alpha M_r)}{dH}}} \quad (3.76)$$

Si les paramètres  $a$ ,  $k$  et  $c$  connus,  $\alpha$  peut être calculée à partir de l'équation (3.76).

#### 3.4.7.4. Détermination de $a$

Le paramètre  $a$  est obtenu aux coordonnées du point de saturation définies par  $(M_m, H_m)$  et la susceptibilité correspondante  $\chi_m$ . Supposons que le point de fonctionnement est au voisinage de la saturation, alors la susceptibilité définie à partir de l'aimantation totale est équivalente à celle définie à partir de l'aimantation anhystérétique, ceci se traduit par :

$$\left. \frac{dM}{dH} \right|_{H=H_m} = \left. \frac{dM_{an}}{dH} \right|_{H=H_m}.$$

L'équation (3.66) au point  $(H_m, M_m)$  devient :

$$M_{irr} = \frac{M_m - cM_{an}(H_{em})}{1 - c} \quad (3.77)$$

Avec  $H_{em} = H_m + \alpha M_m$ , l'expression de la susceptibilité maximale  $\chi_m$  (avec  $\delta = 1$ ) est donnée par :

$$\chi_m = \left. \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} \right|_{H=H_m, M=M_m} = (1 - c) \frac{\mathbf{M}_{an}(H_{em}) - \mathbf{M}_{irr}}{k - \alpha(\mathbf{M}_{an}(H_{em}) - \mathbf{M}_{irr})} + c\chi_m \quad (3.78)$$

Après quelques opérations algébriques le paramètre  $a$  peut être calculé, connaissant les autres paramètres, en résolvant l'équation suivante :

$$M_m = M_{an}(H_{em}) - \frac{(1-c)k\chi_m}{\alpha\chi_m + 1} \quad (3.79)$$

#### 3.4.7.5. Détermination de $c$

Comme indiqué au point (§ 3.4.6.4), le paramètre  $c$  est associé à l'aimantation réversible. Au début de la courbe de première aimantation nous avons :  $M_{irr} = 0$  et  $\frac{dM_{irr}}{dH} = 0$ , donc l'équation (3.67) devient :

$$\chi_{in} = \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H=0, M=0} = c \left. \frac{dM_{an}}{dH} \right|_{H=0, M=0} \quad (3.80)$$

avec  $c \left. \frac{dM_{an}}{dH} \right|_{H=0, M=0} = c \frac{M_s}{3a}$ .

Le paramètre  $c$  est donné par :

$$c = \frac{3a\chi_{in}}{M_s} \quad (3.81)$$

#### 3.4.8. Procédure d'Identification des Paramètres

Le paramètre  $M_s$  est facile à obtenir par mesure directe d'un cycle d'hystérésis majeur. Les autres paramètres ne sont pas directement calculables puisque les relations (3.73), (3.76), (3.79) et (3.80) font intervenir plusieurs paramètres couplés par des relations non-linéaires. Ainsi, plusieurs techniques d'identification sont proposées [HER-00, JIL-92, CHW-07, IZY-06, AND-07, SAL-02]. La plupart de ces techniques sont basées sur des méthodes numériques itératives. Nous avons proposé un algorithme itératif couplé avec la méthode de **Newton-Raphson** [HAM-08]. Cet algorithme, figure 3.17, est basé sur quelques points de mesure mentionnés au paragraphe (§3.4.7).

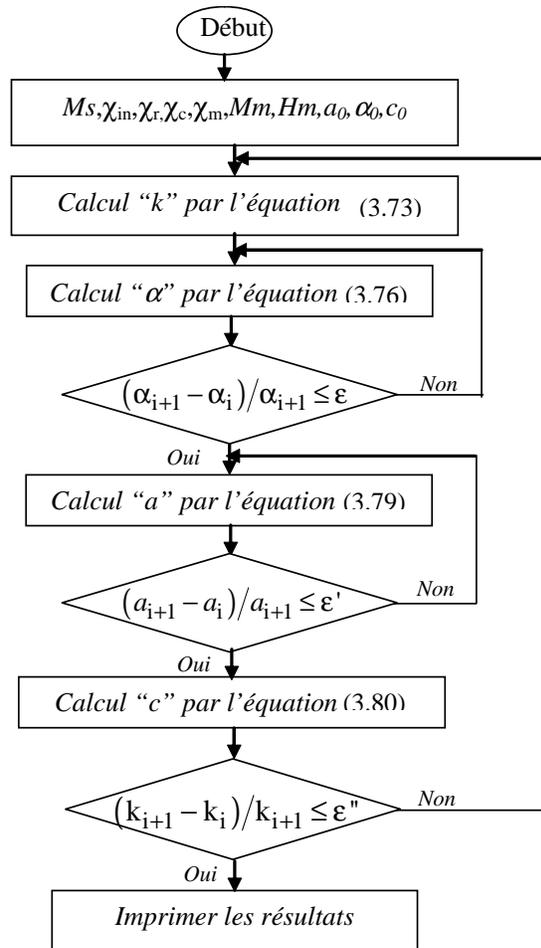


FIGURE 3.17.: Procédure d'identification des paramètres

### 3.4.9. Validation de l'algorithme itératif

Pour valider cet algorithme nous avons utilisés des cycles théoriques dont les paramètres sont connus au préalable [JIL-92]. Deux exemples ont été choisis, pour montrer que cet algorithme est valable et ce pour deux types de matériaux (Doux et Durs), car les techniques proposées au paragraphe précédent, sont destinées aux matériaux doux [IZY-06]. Nous présentons dans la première colonne, Tables 3.2 et 3.3, les données nécessaires pour l'identification des paramètres du modèle. La deuxième colonne présente les paramètres originaux données dans la Ref [JIL-86]. Les paramètres identifiés par notre algorithme sont présentés dans la troisième colonne. L'erreur, entre les paramètres originaux et ceux identifiés, est présentée sur la quatrième colonne

### 3. Les Modèles d'Hystérésis Magnétiques

Parameters Théoriques	Paramètres originaux	Paramètres identifiés	Errer (%)
$\chi_{in} = 61.6$	$M_s = 1.7 \cdot 10^6 A/m$	$M_s = 1.7 \cdot 10^6 A/m$	–
$\chi_c = 1207.9$	$a = 1000 A/m$	$a = 1003.4 A/m$	0.34
$\chi_r = 852.4$	$k = 500 A/m$	$k = 539.48 A/m$	7.89
$\chi_m = 14.4$	$\alpha = 0.001$	$\alpha = 0.00103$	3.21
$H_m = 10 kA/m$	$c = 0.1$	$c = 0.1029$	2.86
$H_c = 467 A/m$			
$M_s = 1.7 \cdot 10^6 A/m$			
$M_m = 1.545 \cdot 10^6 A/m$			
$M_r = 0.503 \cdot 10^6 A/m$			

TABLE 3.2.: Paramètres d'un matériau doux

Parameters Théoriques	Paramètres originaux	Paramètres identifiés	Errer (%)
$\chi_{in} = 0.1$	$M_s = 1.2 \cdot 10^6 A/m$	$M_s = 1.2 \cdot 10^6 A/m$	–
$\chi_c = 25.2$	$a = 120 kA/m$	$a = 154.65 kA/m$	28.87
$\chi_r = 0.2$	$k = 500 kA/m$	$k = 499.27 kA/m$	0.146
$\chi_m = 0.1$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6016$	20.32
$H_m = 1500 kA/m$	$c = 0.05$	$c = 0.0365$	27.00
$H_c = 412.178 kA/m$			
$M_s = 1.2 \cdot 10^6 A/m$			
$M_m = 1.067 \cdot 10^6 A/m$			
$M_r = 1.015 \cdot 10^6 A/m$			

TABLE 3.3.: Paramètres d'un matériau durs

Les résultats obtenus sont utilisés pour générer le cycle d'hystérésis. Sur la figure 3.18 nous superposons le cycle théorique et le cycle obtenu en utilisant les paramètres identifiés. Nous pouvons remarqué que les deux cycles sont bien superposés et ce, dans le cas des matériaux doux.

### 3. Les Modèles d'Hystérésis Magnétiques

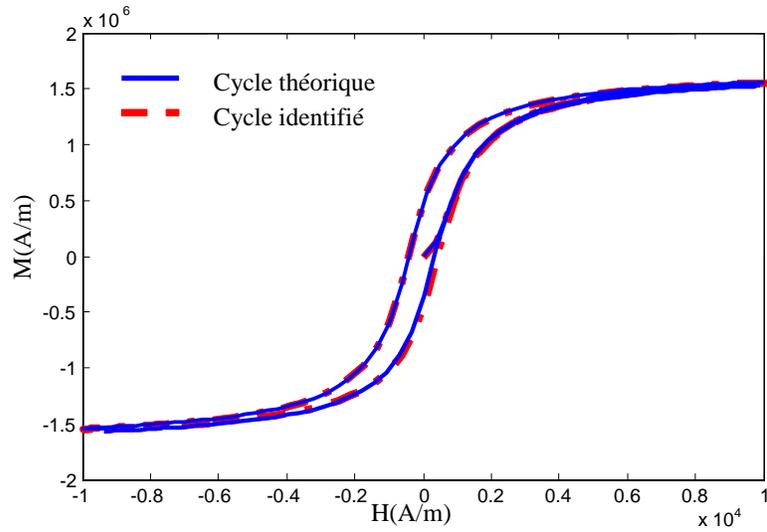


FIGURE 3.18.: Cycle d'hystérésis d'un matériau (Doux)

La figure 3.19 présente une comparaison entre les deux cycles, théorique et identifié, pour un matériau durs, nous pouvons remarqué dans ce cas, que les cycles sont écartés au voisinage du point coercitif.

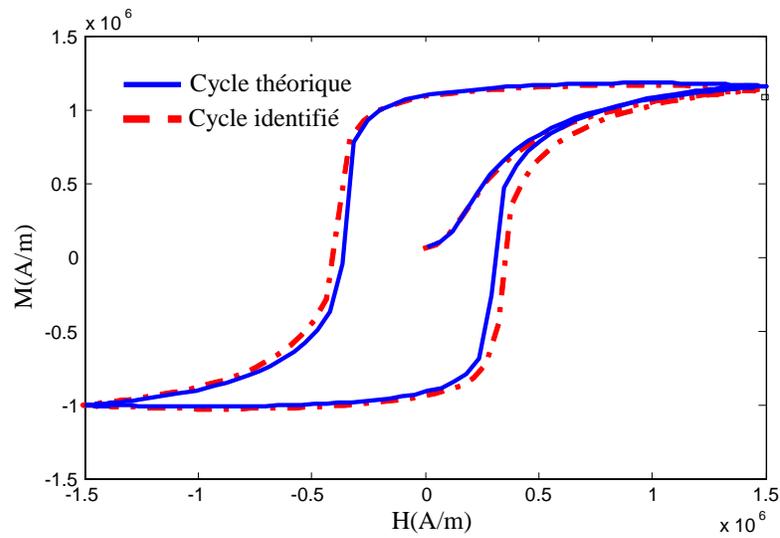


FIGURE 3.19.: Cycle d'hystérésis d'un matériau (Durs)

## Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les différents modèles d'hystérésis magnétiques rencontrés dans la littérature. L'objectif principal de cette recherche bibliographique est La sélection, parmi ces modèles, d'un modèle qui décrit le phénomène d'hystérésis du point de vue mathématique et physique, et cela pour leur intégration dans un code de calcul de champ électromagnétique destiné à la modélisation des dispositifs électromagnétiques.

Parmi les modèles cités, nous avons décrits les modèles analytiques qui présentent certains avantages telles que la rapidité de génération des cycles d'hystérésis et la simplicité de sa mise en oeuvre. Cependant, leur inconvénient majeur est qu'ils sont basés sur un développement purement mathématique dénué de toute interprétation physique. Nous avons cité aussi quelques modèles dynamiques, ce type de modèles est indispensable dans la majorité des processus industriels car ils fonctionnent en moyenne et/ou haute fréquence. La difficulté rencontrée par ceux-ci est la nécessité de l'identification de leurs paramètres à chaque fréquence d'utilisation.

Finalement, nous avons parlé de certains modèles qui demandent un temps de calcul important, ce qui rend leurs intégration dans des codes de calcul sans intérêt. Nous avons cité aussi quelques modèles simples qui sont caractérisés par un seul paramètre. Ces derniers ne donnent aucune amélioration aux résultats.

Il semble clair que le modèle de Jiles-Atherton est un modèle basé sur des considérations physiques, et par conséquent des modifications peuvent être s'ajoutées afin d'amélioré ce modèle.

Ce modèle fera l'objet du chapitre suivant, dont lequel nous nous intéresserons en particulier à leur développement dans les deux cas statique et dynamique. Nous énoncerons aussi notre contribution dans chacun de ces cas.

# 4. Développement du Modèle de Jiles-Atherton

## 4.1. Introduction

Dans ce chapitre nous présenterons le modèle de Jiles-Atherton dans le cas quasi-statique et dynamique, ainsi que notre contribution dans les deux cas. La première contribution est dans le cas quasi-statique, nous avons modifié le modèle en tenant compte des considérations physique [HAM-10.a]. La méthode de Fausse Position (MFP) couplée avec un algorithme itératif elle sera proposée pour l'identification des paramètres du modèle modifié ainsi que le modèle classique de Jiles-Atherton. Dans le cas dynamique nous modifierons le champ effectif, donné dans le cas quasi-statique, par l'introduction de l'effet des courants Foucault ainsi que les pertes dues par excès (anormales). Le nouveau modèle de Jiles-Atherton devient à sept paramètres (les paramètres identifiés dans le cas quasi-statique plus deux nouveaux paramètres dans le cas dynamique). Ces paramètres restent inchangeables pour n'importe quelle fréquence d'utilisation.

## 4.2. Le modèle de Jiles-Atherton modifié

Pour évaluer le champ magnétique effectif  $\mathbf{H}_e$ , Jiles et Atherton utilisent l'aimantation irréversible au lieu de l'aimantation totale, pour décrire une formulation simplifiée de la susceptibilité totale équation (3.67). Dans leur modèle Jiles et Atherton supposent que l'aimantation  $\mathbf{M}$  équivalente à l'aimantation irréversible  $\mathbf{M}_{irr}$  dans la relation qui lie le champ effectif  $\mathbf{H}_e$  et le champ magnétique appliqué  $\mathbf{H}$  :

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H} + \alpha \mathbf{M}_{irr} \quad (4.1)$$

Dans cette équation (4.1) ils ont supposé que l'aimantation réversible  $\mathbf{M}_{rev}$  est négligée devant l'aimantation irréversible  $\mathbf{M}_{irr}$  et ils ont obtenu la susceptibilité irréversible sous la forme de l'équation (3.64). L'hypothèse de négliger  $\mathbf{M}_{rev}$  dans l'équation (4.1) n'a pas un sens physique et peut influencer sur la précision des résultats dans le cas général. Notre proposition est d'utiliser la relation physique reliant le champ magnétique effectif  $\mathbf{H}_e$  avec le champ magnétique appliqué  $\mathbf{H}$  [HAM\_10] :

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H} + \alpha \mathbf{M} \quad (4.2)$$

Rappelons-nous les équations différentielles (3.62), (3.63) et (3.66), numérotées dans ce chapitre (4.3), (4.4) et (4.5) respectivement.

$$\mathbf{M}_{an}(\mathbf{H}_e) = \mathbf{M}_{irr} + k\delta \frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{H}_e} \quad (4.3)$$

$$\frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{H}} = \frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{H}_e} \cdot \frac{d\mathbf{H}_e}{d\mathbf{H}} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{M} = (1 - c)\mathbf{M}_{irr} + c\mathbf{M}_{an}(\mathbf{H}_e) \quad (4.5)$$

Le deuxième terme de la partie droite de l'équation (4.4) devient, en utilisant l'équation (4.2), :

$$\frac{d\mathbf{H}_e}{d\mathbf{H}} = 1 + \alpha \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} \quad (4.6)$$

Nous pouvons réécrire cette équation avec l'utilisation de l'équation (4.5) de la forme suivante :

$$\frac{d\mathbf{H}_e}{d\mathbf{H}} = 1 + \alpha(1 - c) \frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{H}} + \alpha c \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{H}} \quad (4.7)$$

Le terme à gauche de l'équation (4.4) est tiré de (4.3) est donné par :

$$\frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{H}_e} = \frac{\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}_{irr}}{k\delta} \quad (4.8)$$

A partir de l'équation (4.7) et (4.8) on peut récrire l'équation (4.4) sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{H}} = \frac{\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}_{irr}}{k\delta} \left[ 1 + \alpha(1-c) \frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{H}} + \alpha c \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{H}} \right] \quad (4.9)$$

En utilisant cette équation et à partir de quelques manipulations mathématiques la nouvelle forme de la susceptibilité différentielle irréversible est donnée par :

$$\frac{d\mathbf{M}_{irr}}{d\mathbf{H}} = \frac{(\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}_{irr}) \left( 1 + \alpha c \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{H}} \right)}{k\delta - \alpha(1-c)(\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}_{irr})} \quad (4.10)$$

Nous pouvons clairement voir que si  $c = 0$  la relation (4.10) devient la même que celle donnée par Jiles et Atherton, équation (3.64), car l'aimantation réversible  $\mathbf{M}_{rev}$  est liée directement à ce paramètre par l'équation (3.65).

Après quelques manipulations mathématiques, nous arrivons à la relation de la susceptibilité magnétique différentielle totale suivante :

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} = \frac{(1-c)(\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}_{irr}) + kc\delta \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{H}_e}}{k\delta - \alpha(1-c)(\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}_{irr}) - kc\alpha\delta \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{H}_e}} \quad (4.11)$$

Avec :

$$\frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{H}_e} = \frac{\mathbf{M}_s}{a} \left( 1 - \coth^2 \left( \frac{H_e}{a} \right) + \left( \frac{a}{H_e} \right)^2 \right) \quad (4.12)$$

Comme nous pouvons le voir la relation (4.11) du modèle modifié, on le note par la suite **MJA**, est complètement différente de la relation (3.67) donnant le modèle originale de Jiles et Atherton, on le note par la suite **JA**.

#### 4.2.1. Identification des paramètres du modèle modifié

Comme nous l'avons déjà vu l'importance de ce modèle et son utilisation dans des programmes commercialisés, il est nécessaire d'avoir déterminé ces paramètres d'une manière exacte. Dans ce contexte plusieurs travaux ont été publiés concernant les techniques d'iden-

tification des paramètres de ce modèle (§ 3.4.8). Dans ce travail, nous avons utilisé une technique qui combine un algorithme itératif et la Méthode de Fausse Position **MFP** pour les deux modèles [QUA-07]. Les paramètres que nous voulons identifier pour **MJA** sont regroupés en trois équations non linéaires et résolu par **MFP**. Cette technique nécessite la connaissance de quelques données de mesures telles que les susceptibilités, initiale, coercitive et rémanente. Elle nécessite également l'introduction de l'intensité du champ coercitif, l'aimantation rémanente et les coordonnées du point de saturation. Avant d'appliquer cette technique d'identification sur les deux modèles, nous déterminons les expressions des paramètres du modèle modifié **MJA**.

#### 4.2.2. Paramètres du modèle modifié MJA

La susceptibilité différentielle totale donnée par l'expression (4.11), peut être écrite en utilisant  $(1 - c)(\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}_{irr}) = \mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}$ , comme :

$$\chi = \frac{dM}{dH} = \frac{(\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}) + kc\delta \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{H}_e}}{k\delta - \alpha(\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}) - kc\alpha\delta \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{H}_e}} \quad (4.13)$$

Ou :

$$\chi = \frac{\eta}{k\delta - \alpha\eta} \quad (4.14)$$

Avec les relations complémentaires suivantes :

$$\eta = (\mathbf{M}_{an} - \mathbf{M}) + kc\delta \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{H}_e} \quad (4.15)$$

$$\delta = \begin{cases} +1 & \frac{dH}{dt} \geq 0 \\ -1 & \frac{dH}{dt} < 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

Les paramètres de ce modèle modifié **MJA** sont exprimés d'une manière différente par rapport a ceux du modèle original de **JA**, et sont déterminés à partir de quelques points expérimentaux.

Les paramètres gouvernant le modèle modifié sont obtenus à partir de la nouvelle expression

#### 4. Développement du Modèle de Jiles-Atherton

de la susceptibilité différentielle donnée par l'équation (4.14).

La susceptibilité initiale est calculée au point initial de la courbe de première aimantation ( $\mathbf{H}=0, \mathbf{M}=0$ ) où  $\delta=+1$ .

$$\chi_{in} = \left( \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} \right)_{H=0, M=0} = \frac{\eta_{in}}{k - \alpha\eta_{in}} \quad (4.17)$$

Le paramètre  $c$  est associé à l'aimantation réversible, au début de la courbe de première aimantation et est déterminé en utilisant la susceptibilité initiale avec  $\left( \frac{dM_{an}}{dH_e} \right)_{H=0, M=0} = \frac{M_s}{3a}$ , dans cette condition  $\eta_{in} = \frac{kcM_s}{3a}$ , connaissant les paramètres  $\alpha$  et  $a$ , le paramètre  $c$  peut être déterminé en utilisant l'équation (4.17) par :

$$c = \frac{3a\chi_{in}}{(1 + \alpha\chi_{in}) M_s} \quad (4.18)$$

Au point coercitif ( $H = H_c, M = 0$ ) sur la branche ascendante du cycle ( $\delta=+1$ ) la susceptibilité  $\chi_c$  est donnée par :

$$\chi_c = \left( \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} \right)_{H=H_c, M=0} = \frac{\eta_c}{k - \alpha\eta_c} \quad (4.19)$$

$$\text{Avec : } \eta_c = \left( M_{an}(H_c) + kc \frac{dM_{an}(H_c)}{dH_e} \right)$$

La relation entre le paramètre  $k$  et  $\chi_c$  est obtenue en utilisant (4.19), lorsque  $\alpha, c$  et  $a$  sont préalablement connues, l'équation (4.19) peut être écrite comme :

$$f_c(k) = \eta_c(1 + \alpha\chi_c) - k\chi_c = 0 \quad (4.20)$$

L'équation (4.20) est la première équation non linéaire, où le terme  $\eta_c$  est fonction des autres paramètres.

Au point rémanence ( $H = 0, M = M_r$ ) la susceptibilité différentielle  $\chi_r$  est donnée sur la branche descendante du cycle d'hystérésis où  $\delta = -1$  par :

$$\chi_r = \left( \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} \right)_{H=0, M=M_r} = \frac{\eta_r}{-k - \alpha\eta_r} \quad (4.21)$$

$$\text{Avec : } \eta_r = \left( (M_{an}(M_r) - M_r) - kc \frac{dM_{an}(M_r)}{dH_e} \right)$$

La relation entre le paramètre  $\alpha$  est la susceptibilité au point rémanence  $\chi_r$  est donnée en utilisant (4.21) :

$$f_r(\alpha) = \eta_r (1 + \alpha\chi_r) + k\chi_r = 0 \quad (4.22)$$

$f_r$  représente la deuxième équation non linéaire, avec le terme  $\eta_r$  est aussi fonction des autres paramètres.

Finalement et par l'utilisation des coordonnées au point maximum ( $H = H_m, M = M_m$ ) avec  $\delta = +1$ , la susceptibilité différentielle  $\chi_m$  peut être donnée de la forme suivante :

$$\chi_m = \left( \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} \right)_{H=H_m, M=M_m} = \frac{\eta_m}{k - \alpha\eta_m} \quad (4.23)$$

$$\text{Avec } \eta_m = \left( (M_{an}(H_m, M_m) - M_m) + kc \frac{dM_{an}(H_m, M_m)}{dH_e} \right)$$

Le paramètre  $a$  est déterminé en utilisant la susceptibilité différentielle au point maximum du cycle, en plus les paramètres  $c$ ,  $\alpha$  et  $k$  sont connus.

Le paramètre  $a$  est obtenu on résolvons l'équation (4.24) :

$$f_m(a) = \eta_m (1 + \alpha\chi_m) - k\chi_m = 0 \quad (4.24)$$

La dernière équation non linéaire est donnée par (4.24), où le terme  $\chi_m$  est fonction des autres paramètres.

Les paramètres  $k$ ,  $c$ ,  $a$  et  $\alpha$  sont couplés d'une façon non linéaire, pour les déterminer nous proposons de résoudre successivement les équations (4.18), (4.20), (4.22) et (4.24) en utilisant un algorithme itératif couplé avec la **M**éthode de **F**ausse **P**osition **MFP** (la méthode de Fausse position est détaillée dans **l'annexe A**).

### 4.2.3. Paramètres du modèle originale de JA

Les paramètres du modèle original de **JA**, donnés au deuxième chapitre par les expressions suivantes (3.73), (3.76), (3.79) et (3.81), sont les mêmes donnés dans la référence [JIL-92].

### 4.3. Technique d'identification MPF

Cette technique est basée sur le couplage entre un algorithme itératif et la méthode de fausse position **MFP** afin d'identifier les paramètres pour les deux modèles (**MJA** et **JA**). Dans le modèle **MJA** le paramètre  $c$  est déterminé en utilisant l'équation (4.18) avec les valeurs initiales données aux paramètres  $\alpha$  et  $a$ , et nous introduisons l'ensemble dans l'équation (4.20) qui est résolue par la **MFP** pour trouver une première estimation de  $k$ .

Les paramètres  $\alpha$  et  $a$  sont calculés à partir des équations (4.22) et (4.24) en utilisant la même technique **MFP**. Les valeurs courantes de  $\alpha$  et  $a$  sont utilisés pour déterminer une nouvelle valeur du paramètre  $c$ . Le processus de calcul est répété jusqu'à la satisfaction du critère suivant  $\left( \left| \frac{c^{new} - c^{old}}{c^{new}} \right| \leq \varepsilon \right)$ . avec  $\varepsilon$  est la précision désirée.

#### 4.3.1. Application de la technique d'identification

Pour identifier les paramètres du **MJA** et **JA** nous avons besoin de quelques points de mesure qui sont présentés au Tableau 4.1. Ceux-ci sont extraits du cycle expérimental. Les paramètres identifiés sont présentés dans le Tableau 4.2.

Paramètres	Valeurs mesurées
$\chi_{in}$	184.12
$\chi_m$	0.0443
$\chi_r$	$1.9725 \cdot 10^3$
$\chi_c$	$9.974 \cdot 10^5$
$H_m(A/m)$	$1.039 \cdot 10^3$
$H_c(A/m)$	69.37
$M_m(A/m)$	$1.134 \cdot 10^6$
$M_r(A/m)$	8.905105

TABLE 4.1.: Paramètres extraits de l'expérience

Paramètres identifiés	Modèle <b>JA</b>	Modèle <b>MJA</b>
$M_s(A/m)$	$1.18 \cdot 10^6$	$1.18 \cdot 10^6$
$a(A/m)$	46.858	46.9605
$k(A/m)$	81.10	79.001
$\alpha$	$1.4843 \cdot 10^{-4}$	$1.507 \cdot 10^{-4}$
$c$	0.0219	0.0214

TABLE 4.2.: Paramètres identifiés

#### 4. Développement du Modèle de Jiles-Atherton

Le cycle d'hystérésis obtenu par le modèle de **JA** et **MJA**, en utilisant les paramètres identifiés respectivement, Tableau 4.2 sont comparés à ceux expérimentaux. Figure 4.1 et Figure 4.2, montrent les cycles d'hystérésis de ces deux modèles avec ceux obtenus expérimentalement.

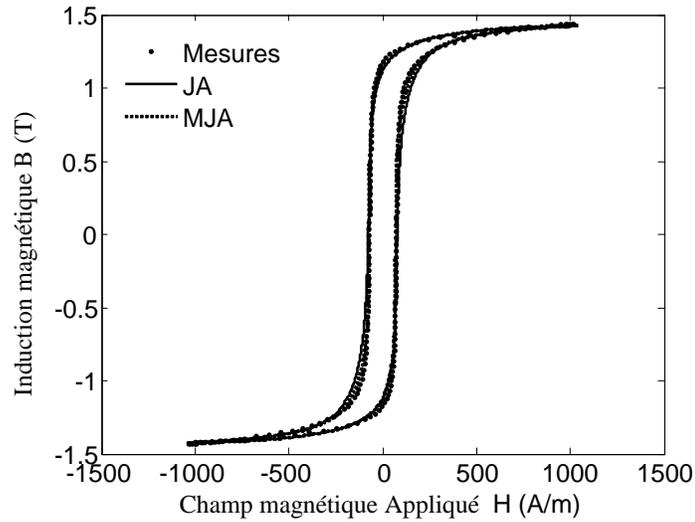


FIGURE 4.1.: Cycles d'hystérésis mesurés et simulés

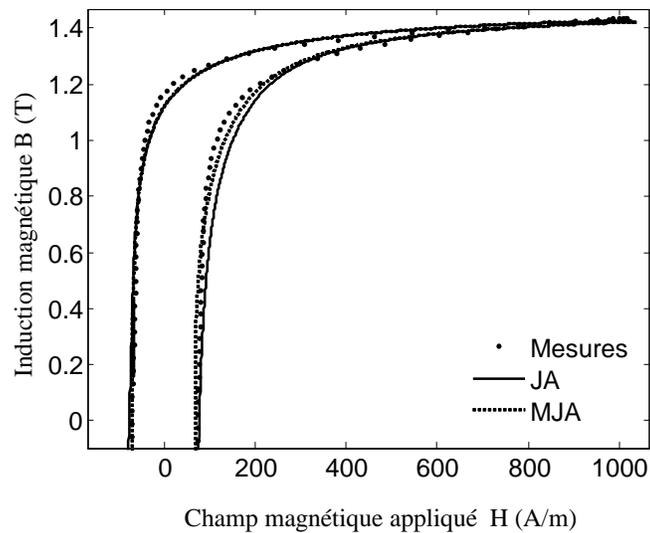


FIGURE 4.2.: Cycles d'hystérésis mesurés et simulés (Zoom)

Un bon accord entre les cycles mesurés et simulés est obtenu par les deux modèle **JA** et **MJA**, ce qui montre l'efficacité de la technique utilisée pour l'identification des paramètres, d'une part, d'autre part nous pouvons voir que le cycle d'hystérésis obtenu par le modèle **MJA** est mieux adapté au cycle mesuré. Nous concluons que l'utilisation de l'expression exacte reliant le champ effectif par l'aimantation totale au lieu de l'aimantation irréversible améliore les résultats obtenus par le modèle de Jiles-Atherton.

#### 4.4. Le modèle inverse modifié de Jiles-Atherton

Dans le modèle direct de Jiles-Atherton l'aimantation  $\mathbf{M}$  est calculée en utilisant le champ magnétique  $\mathbf{H}$  comme variable independent. Ce modèle représente le comportement magnétique non linéaire  $M(H)$ . Une autre possibilité de présenter le comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques, par l'utilisation de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  comme variable independent, dans ce cas l'aimantation  $\mathbf{M}$  est calculée en fonction de  $\mathbf{B}$ . Le modèle utilisant l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  comme variable d'entrée est appelé *le modèle inverse de Jiles-Atherton*. Lors de la modélisation des dispositifs électromagnétiques, en utilisant la formulation en potentiel vecteur magnétique, l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  est calculée directement en utilisant la loi de la conservation du flux magnétique connaissant le potentiel vecteur magnétique, donc, il est plus commode d'utiliser ce modèle dans un code de calcul du champ. Ce modèle est basé sur celui modifié de Jiles-Atherton présenté en section (§ 4.2). Nous détaillons par la suite les expressions gouvernantes ce modèle.

En multipliant l'équation (4.14) par  $\frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{B}}$  on trouve :

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{B}} \frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{H}} = \frac{\eta}{k\delta - \alpha\eta} \quad (4.25)$$

Avec :

$$\frac{d\mathbf{B}}{d\mathbf{H}} = \mu_0 \left( 1 + \frac{\eta}{k\delta - \alpha\eta} \right) \quad (4.26)$$

En remplaçant (4.26) dans (4.25) on trouve :

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{B}} = \frac{\eta}{\mu_0 (k\delta + \eta(1 - \alpha))} \quad (4.27)$$

L'expression (4.27) donne le modèle inverse de Jiles-Atherton modifié.

## 4.5. Le modèle dynamique de Jiles-Atherton

Une nouvelle approche basée sur la théorie de la séparation des pertes permet de développer le modèle dynamique de J-A. Jiles propose, dans [JIL-94], une extension en dynamique du modèle statique [JIL-86]. En réécrivant l'équation de bilan énergétique avec les contributions des pertes supplémentaires qui apparaissent en régime dynamique, il aboutit à un modèle d'hystérésis dépendant de la fréquence. Dans la suite, nous présentons le modèle dynamique direct de J-A, ainsi que la nouvelle formulation de modèle inverse dans le cas dynamique basée sur la théorie de séparation des pertes.

### 4.5.1. Modèle dynamique direct

Ce modèle nécessite le champ magnétique comme variable d'entrée. Dans ce modèle, les pertes totales sont séparées en trois contributions selon le principe de décomposition des pertes proposé par Bertotti [BER-88].

La première est celle des pertes statiques dues aux forces de friction lors des déplacements de parois. Ces pertes peuvent être calculées à partir du modèle de Jiles-Atherton statique.

La deuxième contribution aux pertes totales est due à l'apparition de courants induits en régime dynamique et les pertes associées dépendent de la forme de l'échantillon.

Pour des géométries simples et pour une pénétration uniforme du champ magnétique dans le matériau, il est possible de déterminer ces pertes par l'intermédiaire de l'expression :

$$\frac{dW_{edd}}{dt} = \frac{d^2}{2\rho\beta} \left( \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)^2 = \frac{\mu_0 d^2}{2\rho\beta} \left( \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right)^2 \quad (4.28)$$

La troisième contribution est celle que Bertotti dénomme pertes par excès et dont l'expression est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{dW_{exc}}{dt} = \left( \frac{GSV_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (4.29)$$

Où  $G$  une constante sans dimension qui vaut 0.1356,  $S$  la section transversale du matériau,  $\rho$  est la résistivité électrique du matériau et  $V_0$  est un paramètre avec la dimension d'un champ

magnétique, il caractérise la distribution statistique du champ coercitif local [BOT-00].

En se basant sur les équations (4.5), (4.8) et (4.13) et en ajoutant les deux contributions des pertes par courants induits et des pertes par excès.

L'équation différentielle du modèle  $M(H)$  est donnée par :

$$(k\delta - \alpha\eta) X - \eta + \left(\frac{\mu_0 d^2}{2\rho\beta}\right) \left(\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right) X^2 + \left(\frac{\mu_0 G S V_0}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} X^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (4.30)$$

avec  $X = \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}}$  et  $\eta$  donnée par (4.15).

L'équation (4.30) peut être résolue avec la méthode de **Newton-Raphson** avec ( $X = d\mathbf{M}/d\mathbf{H}$ ) comme inconnue, dans **l'Annexe B** on donne le développement des calculs de l'équation (4.30) ainsi que le processus de la résolution. Ce type de modèle donne une première approximation du phénomène d'hystérésis. Mais il n'est valable que pour les basses ou moyennes fréquences, car l'effet de peau est ignoré.

L'équation (4.30) est résolue par la méthode de Newton-Raphson, en utilisant les paramètres statiques du modèle,  $M_s = 1.7 \cdot 10^6 (A/m)$ ,  $a = 1000 (A/m)$ ,  $\alpha = 0.0017$ ,  $k = 2000 (A/m)$  et  $c = 0.1$ , ainsi que les paramètres géométriques et électrique du matériau  $\rho = 0.57 \cdot 10^{-6} \Omega m$ ,  $S = 1.5 mm^2$ ,  $\beta = 6$ ,  $G = 0.075$  et  $V_0 = 0.0075 (A/m)$ , c'est paramètres sont donnés par [SAL-02]. La figure 4.3 présente les cycles d'hystérésis obtenus pour différentes fréquences.

#### 4.5.2. Nouvelle formulation du modèle dynamique inverse

Ce modèle dynamique est inspiré de la théorie statistique de la séparation des pertes fer. Le concept associé à cette séparation est basée sur la modélisation physique des mécanismes microscopiques du processus d'aimantation. La perte spécifique d'énergie par cycle et par unité de volume est divisée en trois composantes [BER-88] comme l'indique l'équation (4.31).

$$W^T = W^{hys} + W^{edd} + W^{exc} \quad (4.31)$$

La composante  $W^{hys} (J/m^3)$  est égale à l'aire du cycle d'hystérésis, totalement indépendante de la fréquence. La deuxième composante  $W^{edd} (J/m^3)$  est appelée la densité des pertes classiques due par les courants de Foucault induits dans le matériau, la troisième contribution

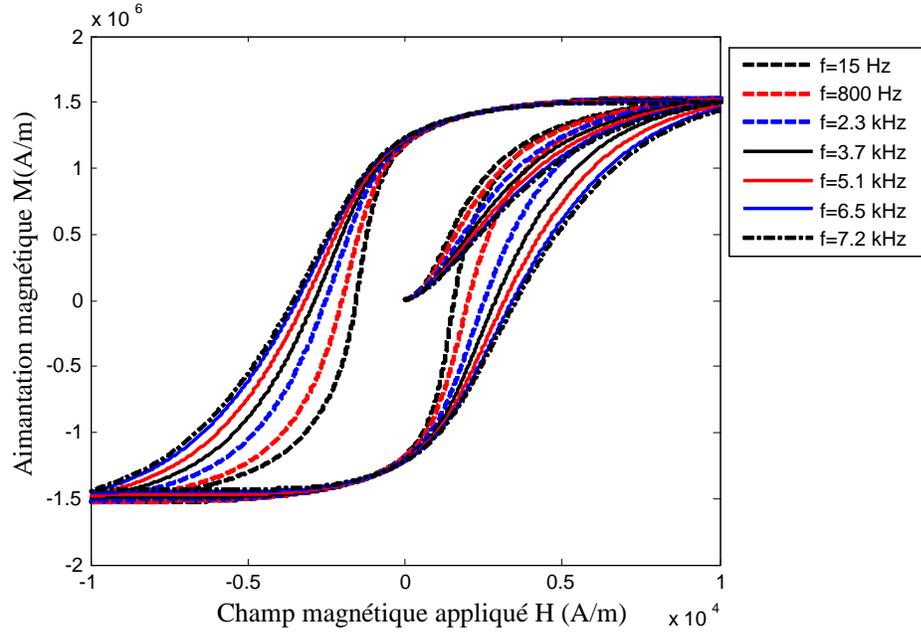


FIGURE 4.3.: Cycles d'hystérésis obtenus par le modèle dynamique de J-A

$W^{exc}(J/m^3)$  est appelée la densité des pertes en excès. La raison physique de cette décomposition est que  $W^{hys}$  proviennent de la nature discontinue du processus d'aimantation à une échelle microscopique.

D'autre part la quantité  $(W^{edd} + W^{exc})$  est associée au comportement macroscopique. De ce raisonnement, chaque composante de la densité totale d'énergie peut être exprimée à partir du champ qui lui est associé, et est donnée dans un intervalle de temps  $\Delta t$  par la forme suivante :

$$W = \int_{\Delta t} \mathbf{H}(t) d\mathbf{B} \quad (4.32)$$

$W^{edd}$  est donnée, en l'absence de l'effet de peau, par l'équation suivante [SAD-02].

$$W^{edd} = C_{edd} \int_{\Delta t} \left( \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right)^2 dt = C_{edd} \int_{\Delta t} \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta t} d\mathbf{B} \quad (4.33)$$

$C_{edd}$  est un coefficient lié aux paramètres physiques et géométriques du matériau, et est donnée par [JIL-94].

$$C_{edd} = \frac{d^2}{2\rho\beta} \quad (4.34)$$

$\rho$  est la résistivité du matériau,  $d$  et  $\beta$  sont des paramètres liés à la géométrie du matériau. Dans le cas d'une tôle magnétique,  $d$  correspond à l'épaisseur de la tôle et  $\beta$  est le facteur de forme.

La comparaison entre l'équation (4.32) et (4.33) donne l'expression du champ associé aux courants de Foucault  $\mathbf{H}_{edd}$  :

$$\mathbf{H}_{edd} = C_{edd} \frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t} \quad (4.35)$$

En outre, la densité d'énergie dissipée dans l'intervalle de temps  $\Delta t$  due aux pertes par excès est donnée par l'équation suivante [RIG-01].

$$W^{exc} = C_{exc} \int_{\Delta t} \left| \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right|^{\frac{3}{2}} dt \cong C_{exc} \int_{\Delta t} \left| \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t} d\mathbf{B} \quad (4.36)$$

Le coefficient  $C_{exc}$  lié aux pertes due par excès regroupe les paramètres physiques et géométriques du matériau est donnée par :

$$C_{exc} = \left( \frac{GV_0 S}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.37)$$

L'expression du champ associé aux pertes par excès  $\mathbf{H}_{exc}$  peut être donnée, en utilisant l'équation (4.36), sous la forme suivante :

$$\mathbf{H}_{exc} = C_{exc} \left| \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t} \quad (4.38)$$

L'expression de la densité totale d'énergie dissipée à l'intervalle du temps  $\Delta t$ , en utilisant (4.33) et (4.36), donné par (4.31) devient de la forme suivante :

$$W^T = C_{hys} + C_{edd} \int_{\Delta t} \frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t} d\mathbf{B} + C_{exc} \int_{\Delta t} \left| \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right|^{-\frac{1}{2}} \frac{\Delta\mathbf{B}}{\Delta t} d\mathbf{B} \quad (4.39)$$

Le terme  $W^{hys}$  est remplacé dans (4.39) par  $C_{hys}$ , juste pour une représentation homogène de l'équation (4.39).

Le paramètre  $V_0$  n'est pas connu pour tous les matériaux, en plus, la résistivité peut être inconnue pour certains matériaux. Dans tels cas, les paramètres  $C_{edd}$  et  $C_{exc}$  ne peut pas être déterminé à partir des relations (4.34) et (4.37), et doivent être identifiés à partir des mesures. Pour déterminer les paramètres  $C_{edd}$ ,  $C_{exc}$  et  $C_{hys}$  on est besoin de la connaissance de trois points expérimentaux. Notez que le coefficient  $C_{hys}$  représente la perte par hystérésis dans le cas statique. Pour décrire l'influence des pertes par courants de Foucault et les pertes due par excès sur le cycle d'hystérésis en régime dynamique, les deux contre-champs  $\mathbf{H}_{edd}$  et  $\mathbf{H}_{exc}$  sont ajoutés au champ effectif, donné par (4.2) du modèle statique. La nouvelle expression du champ effectif est de la forme suivante :

$$\mathbf{H}_e = \mathbf{H} + \alpha\mathbf{M} + \mathbf{H}_{edd} + \mathbf{H}_{exc} \quad (4.40)$$

### 4.5.3. Validation du modèle dynamique inverse

Les mesures des cycles d'hystérésis pour différentes fréquences ont été réalisés au sien du laboratoire **IREENA-CRTT** à l'aide du cadre d'Epstein (Cf. paragraphe 2.10 du 2<sup>ème</sup> chapitre), chaque côté du cadre est composé de quatre tôles de type fer-silicium 3% à grain non orienté ayant les caractéristiques présentées au tableau 4.3.

Epaisseur des tôles	0.35 mm
Largeur des tôles	15 mm
Longueur des tôles	160 mm
Masse volumique du matériau	7650 kg/m <sup>3</sup>
Conductivité électrique	2.074 · 10 <sup>6</sup> Ω <sup>-1</sup> m <sup>-1</sup>

TABLE 4.3.: Caractéristiques physiques des tôles

Les cinq paramètres du modèle ( $a$ ,  $\alpha$ ,  $k$ ,  $c$  et  $M_s$ ) ont été identifiés dans le cas quasi-statique ( $f = 10Hz$ ) à l'aide de la même procédure donnée dans [HAM-10.a]. Ces paramètres sont présentés dans le tableau 4.4.

#### 4. Développement du Modèle de Jiles-Atherton

Paramètres du modèle de J-A	Valeurs
$M_s(A/m)$	$1.18 \cdot 10^6$
$a(A/m)$	45.14
$k(A/m)$	60.1
$\alpha$	$1.5 \cdot 10^{-4}$
$c$	$1.3 \cdot 10^{-2}$

TABLE 4.4.: Paramètres identifiés dans le cas quasi- statique

Pour déterminer les trois nouveaux paramètres  $C_{hys}$ ,  $C_{exc}$  et  $C_{edd}$ , nous avons mesuré l'énergie totale dissipée par cycle pour trois différentes valeurs de la fréquence ( $f = 10, 50$  et  $100Hz$ ) et ce pour une valeur de l'induction maximale égale à  $1.4 \text{ T}$ , avec l'utilisation de l'équation (4.39) les trois paramètres sont obtenus et représentés dans le tableau 4.5.

$C_{hys} (J/m^3)$	$C_{exc} (A/m)^{1/2}$	$C_{edd} (m/\Omega)$
264.69	0.6115	0.0268

TABLE 4.5.: Les nouveaux paramètres dynamiques

Les cycles d'hystérésis simulés sont comparés avec ceux mesurés, figures 4.4.(a), 4.4.(b), 4.4.(c) et 4.4.(d), pour différentes fréquences (10, 50, 150 et 250Hz). Ces figures montrent que la largeur des cycles augmente avec l'augmentation de la fréquence, cette remarque est confirmée au tableau 4.6 et représentée sur la figure 4.5, où le champ coercitif augmente en fonction de la fréquence.

#### 4. Développement du Modèle de Jiles-Atherton

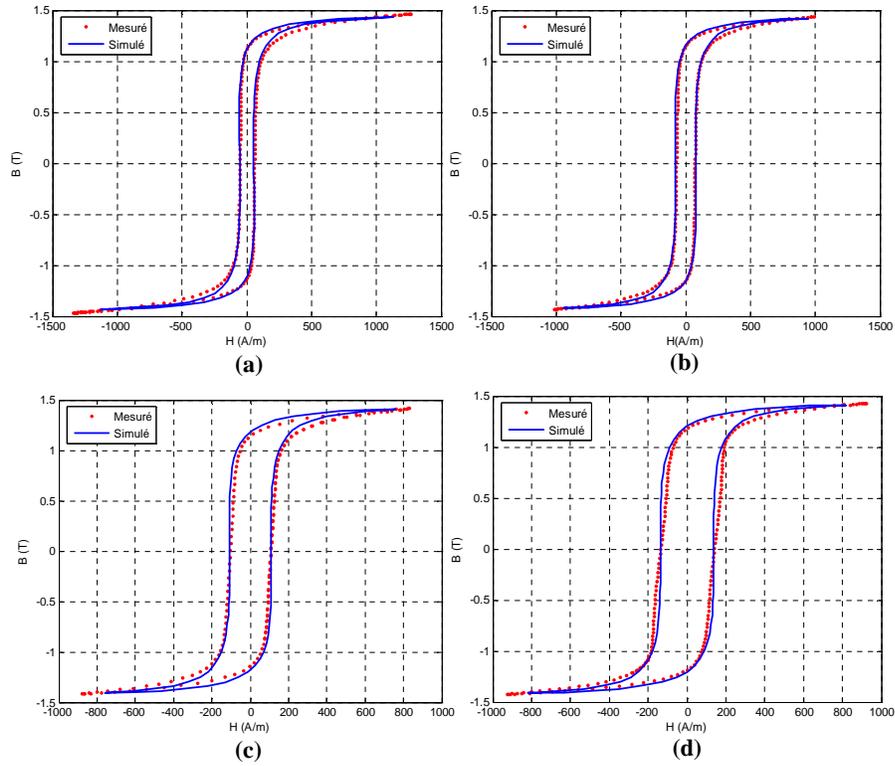


FIGURE 4.4.: Cycle simulé et mesuré (a) pour  $10Hz$ , (b) pour  $50Hz$ , (c) pour  $150Hz$  et (d) pour  $250Hz$

Fréquence ( $Hz$ )	$H_c$ mesuré	$H_c$ calculé	
		Hystérésis et courants de Foucault	Hystérésis, courants de Foucault et les pertes excédentaires
10	56.25	56.28	61.77
50	72.25	65	77.43
100	89	76	93.50
150	104.50	87	108.50
200	120	98.25	123
250	137.50	109.50	137.80
300	153.70	120.50	151.50

TABLE 4.6.: Champ coercitif mesuré et calculé

#### 4. Développement du Modèle de Jiles-Atherton

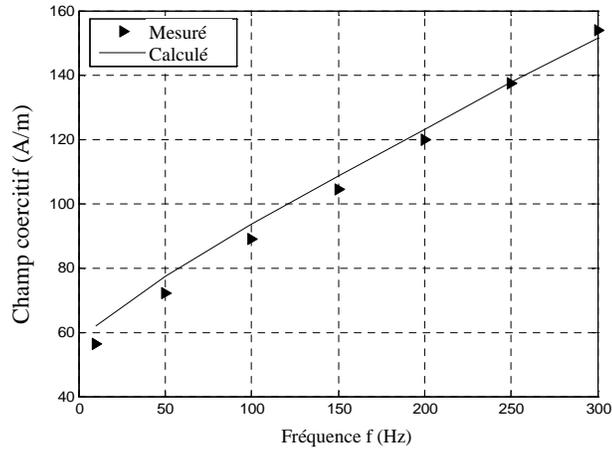


FIGURE 4.5.: Champ coercitif mesuré et calculé pour différentes fréquences

Sur les figures 4.6.(a), 4.6.(b) et 4.6.(c) nous avons présenté les cycles d'hystérésis simulés pour les même fréquences où les pertes excédentaires sont négligées ( $C_{exc} = 0$ ), dans chacune de ces figures nous avons comparé les cycles simulés avec ceux mesurés.

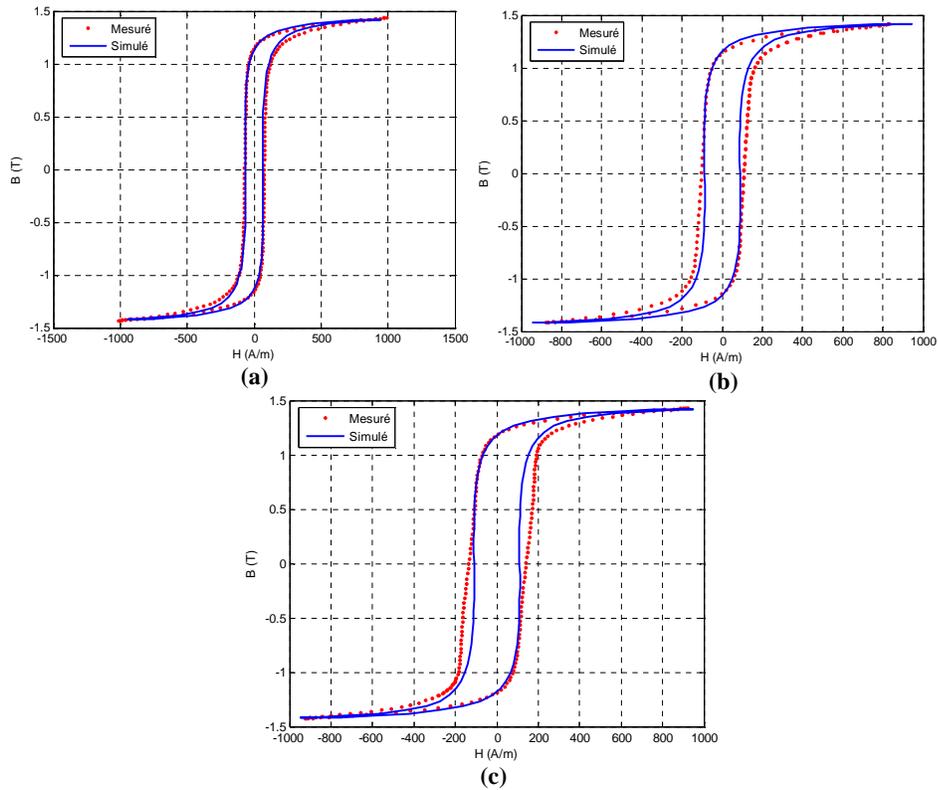


FIGURE 4.6.: Cycle simulé et mesuré (a) pour  $50Hz$ , (b) pour  $150Hz$  et (c) pour  $250Hz$

#### 4. Développement du Modèle de Jiles-Atherton

Les formes du courant simulées avec et sans pertes excédentaires sont comparées avec celles mesurées, pour une fréquence de  $200\text{Hz}$  et sont présentées sur la figure 4.7.

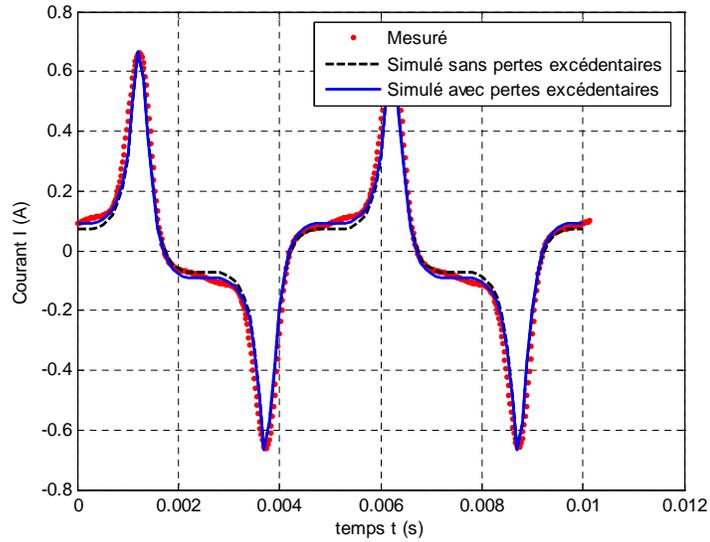


FIGURE 4.7.: Courant mesuré et simulé avec et sans pertes excédentaires pour  $200\text{Hz}$

Pour calculer l'énergie dissipée par cycle et par unité de volume ( $J/m^3$ ), nous calculons la surface du cycle obtenu par le modèle proposé, ensuite on détermine les pertes spécifiques en ( $W/Kg$ ) à l'aide de l'expression (4.41) en utilisant les caractéristiques physiques des tôles tel que la masse volumique  $\delta$ .

$$P = Wf/\delta \quad (4.41)$$

La comparaison entre les pertes fer, par unité de masse, mesurées et calculées pour différentes fréquences avec et sans pertes excédentaires est effectuée pour la même valeur de l'induction maximale  $\mathbf{B} = 1.4\text{ T}$ . Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.7 et tracés sur la figure 4.8, on observe un accord satisfaisant entre les pertes totales calculées et mesurées. Sur la même figure, (4.8), nous avons représenté les pertes sans terme excédentaire d'une part, et les pertes sans courants induits (pertes par courants de Foucault) d'autre part.

On constate, que les pertes excédentaires et les pertes dues par courants de Foucault sont comparables pour des fréquences inférieures à  $100\text{ Hz}$ , au-delà de cette fréquence les pertes dues par courants de Foucault deviennent plus élevées. Les figure (4.9(a) et 4.9(b),) montrent

#### 4. Développement du Modèle de Jiles-Atherton

respectivement l'évolution des pertes, excédentaires et celles dues par courants de Foucault, en fonction de la fréquence.

$f(\text{Hz})$	$P_{\text{mesurée}}$	$P_{\text{calculées}}$		
		$P_{\text{hys+eddy}}$	$P_{\text{hys+excé}}$	$P_{\text{Totale calculée}}$
10	0.40	0.35	0.36	0.38
50	2.22	1.96	1.97	2.28
100	5.12	4.46	4.2	5.37
150	8.98	7.49	6.59	9.16
200	13.52	11.05	9.12	13.63
250	18.90	15.15	11.77	18.76
300	24.89	19.79	14.52	24.55

TABLE 4.7.: Les pertes spécifiques (W/Kg), mesurées et calculées

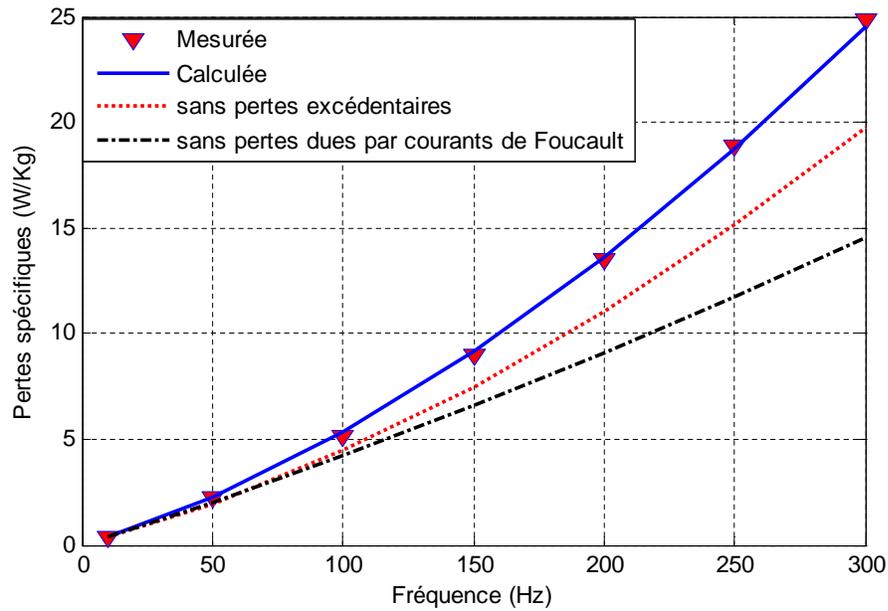


FIGURE 4.8.: Les pertes spécifiques (W/Kg), mesurées et calculées

#### 4. Développement du Modèle de Jiles-Atherton

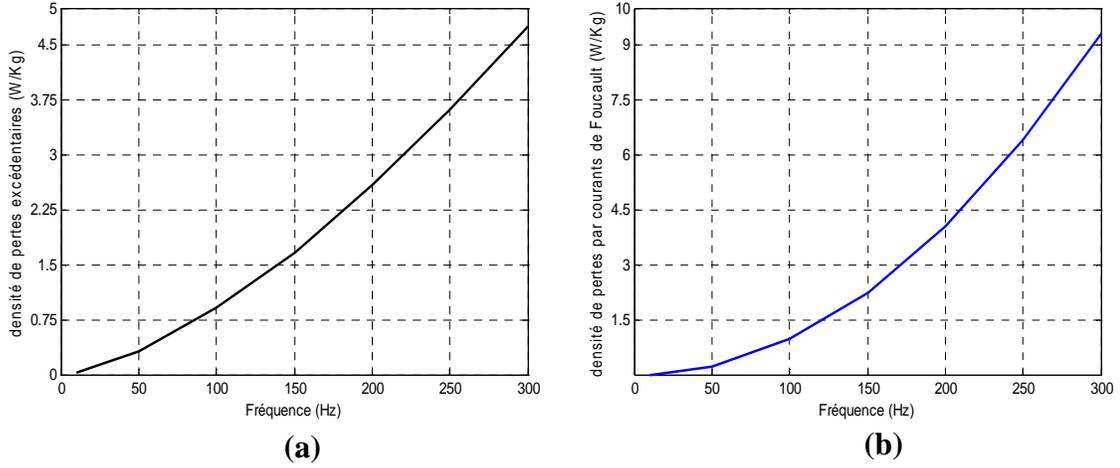


FIGURE 4.9.: densité de pertes : (a) excédentaires, (b) par courants de Foucault

D'après le théorème de séparation des pertes fer, la densité de pertes spécifiques totale (W/kg) peut être séparée en trois composantes :

$P_{hys}$  : densité de pertes spécifiques par hystérésis (W/Kg)

$P_{exc}$  : densité de pertes spécifiques excédentaire (W/Kg)

$P_{edd}$  : densité de pertes spécifiques par courants de Foucault (W/Kg).

L'expression classique de séparation des pertes est :

$$P_{tot} = P_{hys} + P_{exc} + P_{edd} \quad (4.42)$$

Cette expression peut être mise sous la forme proposée par C.P. Steinmetz [REI-01].

$$P_{tot} = k_h f \langle B \rangle^\beta + k_c (f \langle B \rangle)^{3/2} + k_e (f \langle B \rangle)^2 \quad (4.43)$$

Avec  $k_h, k_c, k_e$  et  $\beta$  sont des paramètres caractérisant l'échantillon.

Dans le cas où l'induction magnétique est constante, comme dans notre cas  $B = 1.4 T$ , on peut réécrire l'équation (4.43) sous la forme suivante :

$$P_{tot} = K_{hys} f + K_{exc} f^{3/2} + K_{edd} f^2 \quad (4.44)$$

Avec  $K_{hys}, K_{exc}$  et  $K_{edd}$  sont fonction de l'induction magnétique  $B$ .

#### 4. Développement du Modèle de Jiles-Atherton

En utilisant les résultats obtenus et présentés sur la figure ( 4.9(a) et 4.9(b)) on peut déterminé les paramètres  $K_{hys}$ ,  $K_{exc}$  et  $K_{edd}$  ces derniers sont regroupés sur le tableau 4.8. Les figure (4.10(a) et 4.10(b)) confirment cette identification.

$K_{hys}$	$K_{exc}$	$K_{edd}$
$3.46 \cdot 10^{-2}$	$9.16 \cdot 10^{-4}$	$1.032 \cdot 10^{-3}$

TABLE 4.8.: Paramètres identifiés

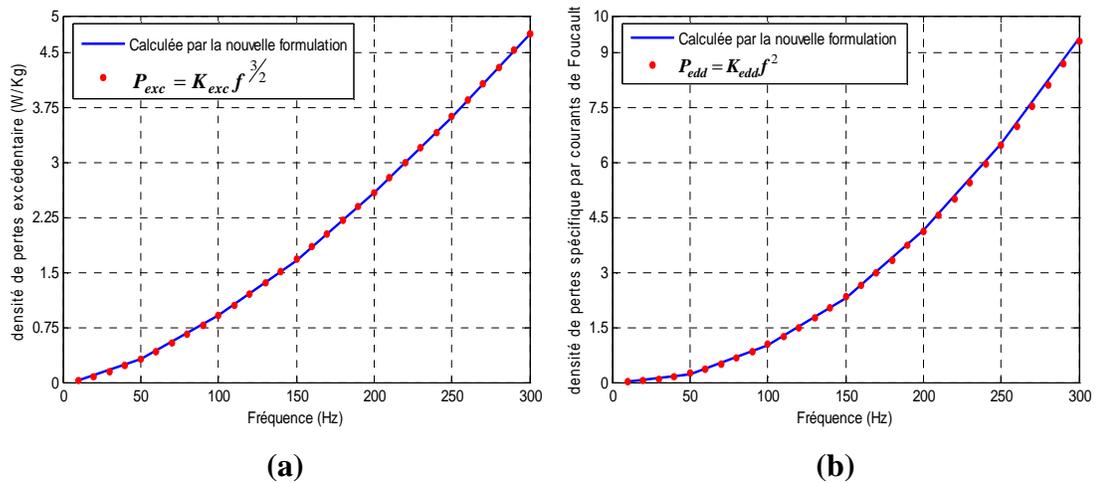


FIGURE 4.10.: Confirmation de l'identification des paramètres (a) pertes excédentaires, (b) pertes par courant de Foucault.

Une comparaison, entre les pertes spécifiques mesurées et calculées en utilisant l'expression (4.44) présentée sur la figure (4.11), montre la validité des paramètres identifiés d'une part, et d'autre part, la précision de la nouvelle formulation, du modèle dynamique inverse, proposée.

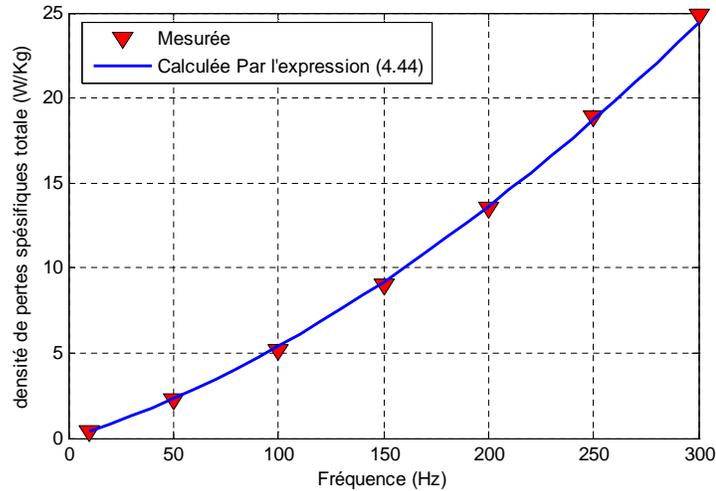


FIGURE 4.11.: densité de pertes spécifiques (W/Kg), mesurées et calculées en utilisant l'expression (4.44)

## 4.6. Conclusion

L'utilisation de l'expression exacte du champ effectif au lieu de celle simplifiée, nous a permis d'améliorer considérablement les résultats obtenus par le modèle de Jiles-Atherton. La technique de fausse position couplée avec un algorithme itératif est utilisée pour l'identification des paramètres du modèle modifié. Les cinq paramètres obtenus représentent le modèle dans le cas quasi-statique. Concernant le modèle dynamique, l'utilisation de l'induction magnétique comme variable indépendante elle est plus commode lorsque on utilise la formulation à l'aide du potentiel vecteur magnétique. Pour cette raison une nouvelle formulation a été proposée. Dans cette formulation nous avons modifié le champ effectif dans le régime dynamique, par l'introduction de deux champs de réaction associés aux pertes par courants de Foucault et aux pertes par excès. Les deux nouveaux paramètres sont identifiés par des mesures effectuées sur l'énergie dissipée par cycle. Cette approche nous a permis de conserver les cinq paramètres identifiés dans le régime quasi-statique. Pour montrer l'efficacité de cette nouvelle formulation nous avons comparé, pour différentes fréquences, les cycles hystérésis simulés avec ceux mesurés. Nous avons aussi comparé les pertes spécifiques mesurées et simulées. Les résultats obtenus nous encourageons d'intégrer par la suite cette formulation dans un code de calcul du champ.

# 5. Formulations et modélisations

## 5.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons les modèles mathématiques pour décrire l'évolution de systèmes électromagnétiques. Les équations de base pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques sont les équations de Maxwell. Celles-ci constituent un système d'équations aux dérivées partielles qui lie entre eux les phénomènes magnétiques et électriques, et unifie tous les principes de l'électromagnétisme. L'application de ces équations aux différentes applications et leur résolution est l'enjeu principal de nombreux travaux de recherche. Dans le cas de systèmes simples, les équations de Maxwell peuvent être résolues analytiquement. C'est le cas par exemple d'étude d'un système électromagnétique de géométrie simple dont l'hypothèse d'un comportement magnétique linéaire. En revanche dans le cas de systèmes complexes, l'utilisation de méthodes numériques comme la méthode des différences finis [MOR-05], éléments finis [DHA-05] et volume finis [PAT-80] est indispensable. Nous commençons ce chapitre par une présentation des équations de Maxwell ainsi que lois constitutives du milieu magnétique. Les différentes formulations des équations de Maxwell seront ensuite détaillées. A la fin de ce chapitre nous détaillons la méthode numérique utilisée dans ce travail de thèse qui est la méthode des volumes finis MVF.

## 5.2. Equations de Maxwell

L'ensemble des phénomènes électromagnétiques sont décrits par les grandeurs vectorielles suivantes [BOS-98].

- Les champs d'intensités

**H** : le champ magnétique ( $A/m$ )

**E** : le champ électrique ( $V/m$ )

- les densités de flux

**B** : la densité de flux magnétique ou induction magnétique ( $T$ )

**D** : la densité de flux électrique ou induction électrique ( $C/m^2$ )

**J** : la densité du courant ( $A/m^2$ )

Les relations entre ces grandeurs, qui régissent les phénomènes électriques et magnétiques, ont été regroupées par J.C. Maxwell dans quatre équations dites lois fondamentales de l'électromagnétisme :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.1)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (5.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.4)$$

L'équation (5.1), appelée loi de Faraday, rend compte des phénomènes d'induction tandis que l'équation (5.2) est une généralisation de la loi d'Ampère. Ce sont des équations de couplage électromagnétique, alors que les équations (5.3) et (5.4) constituent des équations dites de conservation. où  $\rho$  représente la densité volumique de charge électrique ( $C/m^3$ ). Le terme  $\partial_t \mathbf{D}$  dans l'équation (5.2) est appelé densité de courant de déplacement. Ce terme est au centre de la théorie des ondes électromagnétiques [JAC-99]. Il implique qu'une variation temporelle du champ électrique induit une variation spatiale du champ magnétique (équation (5.2)). De même, l'équation (5.1) implique qu'une variation temporelle du champ magnétique crée une variation spatiale du champ électrique. Les champs magnétiques et électriques sont donc intimement liés et l'on parle de couplage électromagnétique. Les équations de Maxwell sont complétées par les lois constitutives de milieu et les conditions de passage à l'interface

entre deux milieux différents.

### 5.2.1. Lois constitutives du milieu

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu\mathbf{H} \quad (5.5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \sigma\mathbf{E} + \sigma(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) \quad (5.7)$$

Où,  $\mu$  est la perméabilité magnétique ( $H/m$ ),  $\epsilon$  la permittivité diélectrique ( $F/m$ ),  $\sigma$  la conductivité électrique,  $\mathbf{v}$  la vitesse des pièces en mouvements et  $\mathbf{M}$  l'aimantation. Le terme  $\mathbf{J}_s$  correspond à la densité de courants sources issues des enroulements d'alimentation et le terme  $\sigma\mathbf{E}$  représente les courants induits dans les parties conductrices.

### 5.2.2. Les conditions de passages

Lors du passage d'un milieu à un autre, les champs électromagnétiques subissent des discontinuités et ne sont par conséquent pas différentiables. Cependant, il est possible de définir des conditions de passage des champs entre deux milieux. Considérons deux milieux continus  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  quelconques, séparés par une interface  $\Gamma$ , figure 5.1. La normale  $\mathbf{n}$  à  $\Gamma$  est orientée de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$ .

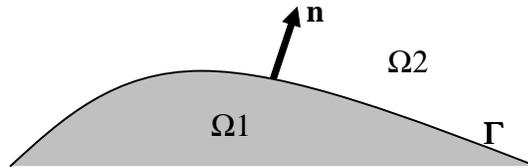


FIGURE 5.1.: Surface de séparation  $\Gamma$  entre deux milieux  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$

Les conditions traduisant la continuité des champs à l'interface  $\Gamma$  sont alors définies par les relations (5.8) [FOU-85] :

$$\begin{cases} (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) |_{\Gamma} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0}, & (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) |_{\Gamma} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{J}_s \\ (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) |_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = \rho_s, & (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) |_{\Gamma} \cdot \mathbf{n} = 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

Ces conditions de passage indiquent que la composante normale de  $\mathbf{B}$  et la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  sont continues à travers  $\Gamma$ . Par contre, si des densités de charges  $\rho_s$  ou de courant  $\mathbf{J}_s$  sont présentes à l'interface  $\Gamma$  entre les deux milieux, la composante normale de  $\mathbf{D}$  et la composante tangentielle de  $\mathbf{H}$  sont discontinues.

### 5.2.3. Les conditions aux limites

Le domaine d'étude n'étant pas infini, il faut par conséquent poser des conditions aux limites adéquates sur les frontières du domaine. Suivant le problème considéré, elles peuvent être liées aux composantes tangentielles de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  ou aux composantes normales de  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{B}$ . On définit les conditions aux limites aux différentes frontières de la façon suivante :

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_B} = 0 \quad (5.9)$$

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} |_{\Gamma_H} = 0 \quad (5.10)$$

Deux autres conditions peuvent être déduites des équations 5.1 et 5.2 et appliquées également sur ces deux frontières.

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} |_{\Gamma_B} = 0 \quad (5.11)$$

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} |_{\Gamma_H} = 0 \quad (5.12)$$

## 5.3. Les formulations électromagnétiques

Les formulations peuvent être modifiées selon la nature du système étudié et certaines grandeurs deviennent parfois négligeables. On se placera dans l'hypothèse de l'électrotech-

nique et on considère des fréquences inférieures à quelques MHz [LOU-95] et [EMM-99], les courants de déplacement sont négligeables devant les courants de conduction. Ceci traduit par :

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \ll \mathbf{J} \quad (5.13)$$

L'équation 5.2 devient alors :

$$\nabla \wedge \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (5.14)$$

Dans le cadre des systèmes étudiés, on peut considérer que les charges volumiques sont négligées. L'équation 5.3 devient :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (5.15)$$

Un problème de modélisation peut être schématisé par un modèle type composé de l'air, de matériau magnétique, de matériau conducteur et de source de courant électrique, figure 5.2. Il s'agit de calculer sous l'excitation  $\mathbf{J}_s$  variable dans le temps, la distribution du champ magnétique en tout point du domaine d'étude  $\Omega$ .

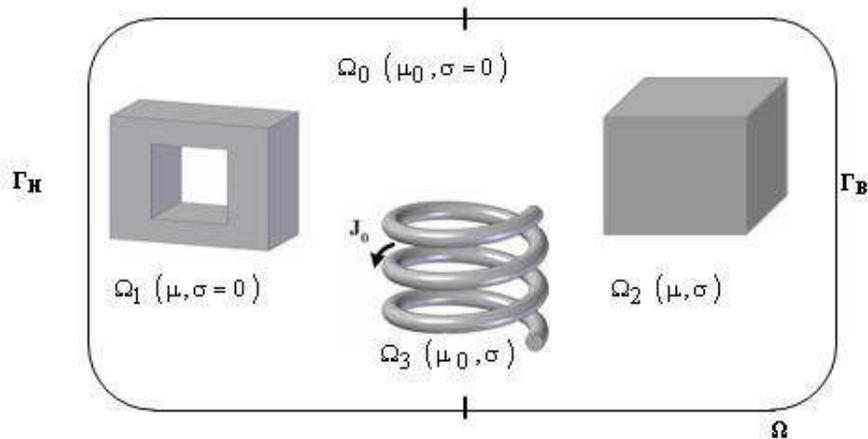


FIGURE 5.2.: Problème typique de la magnétodynamique

### 5.3.1. La formulation en potentiel vecteur magnétique

L'inconvénient de la formulation en terme de champ magnétique ou électrique est la discontinuité possible de ces grandeurs en passant d'un milieu à un autre, par contre la formulation en potentiel vecteur magnétique est plus générale le potentiel vecteur magnétique est continu, de plus il réduit le nombre d'inconnues, elle est très commode quand il s'agit des problèmes avec des régions multiples connexes et contenant plusieurs sources [YUN-97]. Compte tenu de l'équation (5.4), l'induction magnétique  $\mathbf{B}$  peut être exprimée comme suit :

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (5.16)$$

On appelle  $\mathbf{A}$  le potentiel vecteur magnétique. La combinaison des équations (5.1) et (5.16) conduit à :

$$\nabla \wedge \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (5.17)$$

On peut définir ainsi le potentiel scalaire électrique  $V$  tel que :

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (5.18)$$

La densité de courant donnée par l'équation (5.7) peut être exprimée comme :

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s - \sigma \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) \quad (5.19)$$

Nous avons à partir de l'expression (5.5) :

$$\mathbf{H} = \nu_0 \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (5.20)$$

où  $\nu_0$  est la reluctivité de vide magnétique (inverse de  $\mu_0$ ). La combinaison des équations (5.14), (5.16), (5.19) et (5.20) nous donne :

$$\nu_0 \nabla (\nabla \wedge \mathbf{A}) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_s + \nabla \wedge \mathbf{M} - \sigma \nabla V \quad (5.21)$$

L'expression (5.21) admet dans ce cas une infinité de solutions de la forme  $\mathbf{A} + \nabla V$ , d'où la nécessité d'imposer une condition de jauge afin d'assurer l'unicité de la solution. La jauge de Coulomb définie par  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  est la plus couramment utilisée [FET-97]. Dans le cadre des systèmes à deux dimensions la jauge de Coulomb est naturellement vérifiée. L'introduction de la jauge de Coulomb dans l'expression (5.21) assure l'unicité de la solution du potentiel vecteur magnétique et par conséquent conduit à une meilleure stabilité numérique [PRE-91].

Nous allons présenter par la suite les formulations des problèmes magnétostatique et magnétodynamique intégrant la non-linéarité introduite par le modèle d'hystérésis.

### 5.3.2. Formulation magnétostatique non-linéaire

La magnétostatique consiste en l'étude des phénomènes magnétiques en régime stationnaire. Le champ magnétique est alors invariant dans le temps et n'est dû qu'à des courants stationnaires imposés  $\mathbf{J}_s$  ou à des aimants permanents. Les équations à considérer sont issues des équations de Maxwell relatives aux phénomènes magnétiques dans le cas statique. En se basant sur l'équation (5.21) on a :

$$\nu_0 \nabla (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s + \nabla \wedge \mathbf{M} \quad (5.22)$$

Où l'aimantation  $\mathbf{M}$  du matériau est déterminée par le modèle d'hystérésis. Le système d'équations à résoudre dans ce cas est donné par :

$$\begin{cases} \nu_0 \nabla (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s + \nabla \wedge \mathbf{M} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \end{cases} \quad (5.23)$$

La résolution de système (5.23) nécessite aussi la connaissance des conditions aux limites relatives au domaine d'étude. Une condition aux limites usuelle est d'imposer un champ magnétique nul sur la surface extérieure  $\Gamma$ . On impose alors :

$$\mathbf{A} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad (5.24)$$

Cette condition est dite condition de type Dirichlet. En présence d'un plan de symétrie, une

autre condition dite de Newman peut être utilisée :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_s \quad (5.25)$$

avec  $\Gamma_s$  et  $\mathbf{n}$  sont respectivement le plan de symétrie et le vecteur unitaire normal, figure 5.3.

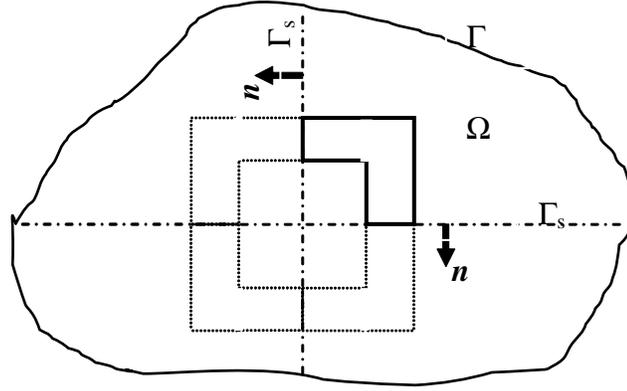


FIGURE 5.3.: Schématisation d'un plan de symétrie

### 5.3.3. Formulation magnétodynamique non-linéaire

La formulation magnétodynamique concerne les problèmes des courants induits dans les matériaux conducteurs. Dans ce cas les champs magnétiques et électriques sont couplés. Dans cette formulation, le champ électrique  $\mathbf{E}$  s'exprime en fonction des potentiels électrique scalaire  $V$  et vecteur magnétique  $\mathbf{A}$ . de l'équation (5.18) il en résulte l'écriture du champ électrique de la façon suivante :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (5.26)$$

De l'équation (5.14) on déduit également :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.27)$$

La combinaison des équations (5.19) et (5.27) nous donne :

$$\nabla \cdot \sigma \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = 0 \quad (5.28)$$

Le système d'équations relatives à ce problème est regroupé par :

$$\begin{cases} \nu_0 \nabla (\nabla \wedge \mathbf{A}) + \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \mathbf{J}_s + \nabla \wedge \mathbf{M} - \sigma \nabla V \\ \nabla \cdot \sigma \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) = 0 \end{cases} \quad (5.29)$$

Le comportement magnétique non-linéaire est introduit par le modèle d'hystérésis  $\mathbf{M}=f(\mathbf{H})$  où  $\mathbf{M}=f(\mathbf{B})$ . La condition à l'interface entre deux milieux différents est donnée par :

$$\left( \frac{1}{\mu_1} \nabla \wedge \mathbf{A}_1 \right) \wedge \mathbf{n} - \left( \frac{1}{\mu_2} \nabla \wedge \mathbf{A}_2 \right) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (5.30)$$

## 5.4. Outils numériques

Pour les dispositifs ayant des comportements magnétiques non-linéaires et en plus des géométries complexes la résolution analytique devenue pratiquement impossible. Il est alors indispensable d'avoir recours aux résolutions numérique approchées par la discrétisation spatiale et temporelle des équations de Maxwell. Les méthodes numériques les plus souvent utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles (**EDP**) sont la méthode des différences finies (**MDF**) la méthode des intégrales de frontières (**MIF**), la méthode des éléments finis (**MEF**) ou encore la méthode des volumes finis (**MFV**). La méthode des différences finies est relativement simple de mise en œuvre, puisqu'elle repose sur deux notions, la discrétisation d'une part et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu d'autre part, mais elle présente l'inconvénient d'avoir une faible qualité d'approximation des variables et l'incapacité de modéliser les géométries complexes. Elle est substituée après par la méthode des éléments finis vers les années 70. La méthode des éléments finis occupe une position dominante, son champ d'application étant incontestable plus vaste que celui des différences finies, la méthode des éléments finis s'adapte bien aux géométries complexes. Elle permet d'améliorer considérablement la précision de calcul par la prise en compte de différents types de fonctions d'interpolations des variables. La diversité dans le choix de l'élément de maillage donne une flexibilité importante à la méthode. La méthode des volumes finis qui fait l'objet de ce travail de thèse, commence à prendre place dans le domaine de la modélisation des problèmes d'électrotechnique.

### 5.4.1. La méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, comme la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis. Mais contrairement à la méthode de différences finies qui utilise des approximations de dérivées, la méthode des volumes finis utilise, comme la méthode des éléments finis, des approximations d'intégrales. Toutefois, la méthode des éléments finis utilise une formulation variationnelle de l'équation à résoudre (on parle aussi de la forme faible), tandis que la méthode des volumes finis est fondée directement sur la forme dite forte de l'équation à résoudre. La **MVF** a été mise au point initialement pour des lois de conservation, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques [VOH-05]. Ces équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. Les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface en utilisant le théorème de flux-divergence. Ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. Comme le flux entrant dans un volume donné est égale au flux sortant du volume adjacent, cette méthode est conservative. Le principal avantage de **MVF** est qu'elle est facile à utiliser avec des maillages non-structurés. La formulation de la **MVF** ne tient aucun compte de la complexité du maillage. La **MVF** a été présentée dans [HAM-99, HAM-01] comme une nouvelle méthode pour la modélisation des phénomènes électromagnétiques dans le cas axisymétrique. Suivi par d'autres travaux dans le même domaine tel que [CHE-07], [HAM-10.b, HAM-10.c].

### 5.4.2. Discrétisation géométrique par la MVF

Comme toutes les méthodes numériques de discrétisation, le domaine d'étude est divisé en un nombre d'éléments de taille réduite, chaque élément contient quatre nœuds de maillage (dans le cas bidimensionnel). A chaque élément de volume  $\mathbf{D}_p$ , on associe un nœud principal  $\mathbf{P}$  et quatre nœuds voisins :  $\mathbf{s}$  (Sud) et  $\mathbf{n}$  (Nord) selon la direction de  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{w}$  (West) et  $\mathbf{e}$  (Est) selon la direction  $\mathbf{x}$ , figure 5.4. Les volumes élémentaires voisins de l'élément  $\mathbf{D}_p$ , sont représentés par leurs nœuds principaux :  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{S}$  suivant l'axe  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{W}$  suivant l'axe  $\mathbf{x}$ .

L'équation au dérivé partielle est intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour cal-

culer l'intégrale sur ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, parabolique, exponentielle, etc...) entre deux nœuds consécutifs.

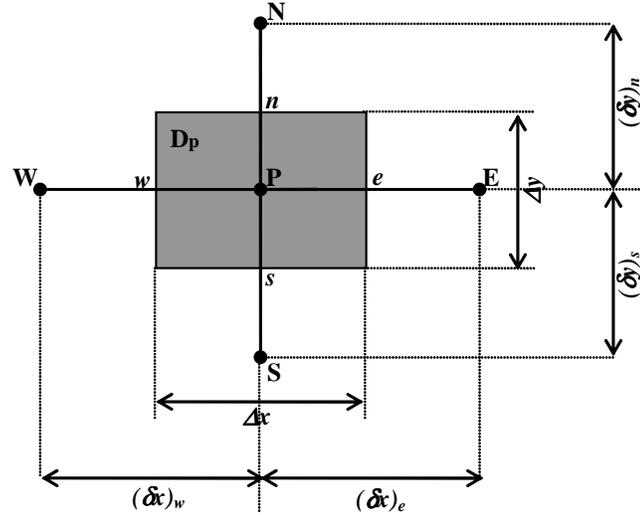


FIGURE 5.4.: Volume élémentaire  $\mathbf{D}_p$

### 5.4.3. Formulation volumes finis du problème électromagnétique

Les dispositifs étudiés s'adaptent à une modélisation en deux dimensions dans un système de coordonnées cartésiennes. La résolution de ce système par la méthode des volumes finis passe par la mise en équation de (5.23) et (5.29) sous formes d'équations aux dérivés partielles dans le système de coordonnées cartésiennes. Dans ce paragraphe, on présentera ces équations ainsi que leurs formes matricielles établies pour une résolution numérique.

### 5.4.4. Discrétisation de la formulation magnétostatique

La formulation en volumes finis du modèle magnétostatique, consiste à intégrer l'équation (5.23) dans le volume élémentaire  $\mathbf{D}_p$ , ainsi elle s'écrit :

$$\iiint_{\mathbf{D}_p} \nu_0 \nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) d\mathbf{V} = \iiint_{\mathbf{D}_p} (\mathbf{J}_s + \nabla \wedge \mathbf{M}) d\mathbf{V} \quad (5.31)$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes et dans le cas bidimensionnel (2D), le champ magnétique et l'aimantation du matériau évoluent dans le plan  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , la relation (5.31) s'écrit :

$$-\int_s^n \int_w^e \nu_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} dx dy - \int_s^n \int_w^e \nu_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} dx dy = \int_s^n \int_w^e \left( \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.32)$$

$\mathbf{J}_s$  est la densité de courant de la source,  $\mathbf{M}_x$  est la projection de l'aimantation  $\mathbf{M}$  sur l'axe  $(\mathbf{Ox})$  et  $\mathbf{M}_y$  sa projection sur l'axe  $(\mathbf{Oy})$ .

L'intégrale du premier terme de la partie gauche de l'équation (5.32) sur le volume fini, délimité par les frontières  $(\mathbf{e}, \mathbf{w}, \mathbf{s}, \mathbf{n})$  est :

$$-\int_s^n \int_w^e \nu_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} dx dy = - \left( \nu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right)_w^e \Delta y = -\nu_0 \left( \frac{\mathbf{A}_E - \mathbf{A}_P}{\delta x_e} - \frac{\mathbf{A}_P - \mathbf{A}_W}{\delta x_w} \right) \Delta y \quad (5.33)$$

L'intégrale du deuxième terme de la partie gauche de l'équation (5.32) sur le volume fini nous donne :

$$-\int_s^n \int_w^e \nu_0 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} dx dy = - \left( \nu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right)_s^n \Delta x = -\nu_0 \left( \frac{\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_P}{\delta y_n} - \frac{\mathbf{A}_P - \mathbf{A}_S}{\delta y_s} \right) \Delta x \quad (5.34)$$

L'intégrale de la partie droite de l'équation (5.32) sur le volume fini nous donne :

$$\int_s^n \int_w^e \left( \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial y} \right) dx dy = \mathbf{J}_{sP} \Delta x \Delta y + ((\mathbf{M}_y)_e - (\mathbf{M}_y)_w) \Delta y - ((\mathbf{M}_x)_n - (\mathbf{M}_x)_s) \Delta x \quad (5.35)$$

La simplification des équations (5.33), (5.34) et (5.35) nous donne l'équation algébrique suivante :

$$a_p A_P - a_E A_E - a_W A_W - a_N A_N - a_S A_S = S_p \quad (5.36)$$

avec :

## 5. Formulations et modélisations

$$S_p = \mathbf{J}_{sP} \Delta x \Delta y + ((\mathbf{M}_y)_e - (\mathbf{M}_y)_w) \Delta y - ((\mathbf{M}_x)_n - (\mathbf{M}_x)_s) \Delta x$$

$$a_E = \nu_0 \frac{\Delta y}{\delta x_e}, \quad a_W = \nu_0 \frac{\Delta y}{\delta x_w}, \quad a_N = \nu_0 \frac{\Delta x}{\delta y_n}, \quad a_S = \nu_0 \frac{\Delta x}{\delta y_s}, \quad \text{et} \quad a_p = a_E + a_W + a_N + a_S$$

Dans l'équation (5.35) les composantes de l'aimantation  $\mathbf{M}$  sont exprimées aux interfaces des volumes élémentaires, par exemple  $(\mathbf{M}_y)_e$  représente la composante de l'aimantation  $\mathbf{M}$  sur l'axe  $(Oy)$  à l'interface  $e$ . Pour calculer les composantes de l'aimantation  $\mathbf{M}$  aux nœuds principaux ( $\mathbf{W}, \mathbf{E}, \mathbf{S}, \mathbf{N}$ ), figure 5.5, une approximation linéaire de l'aimantation entre deux nœuds successifs, sur le même axe, à été choisie.

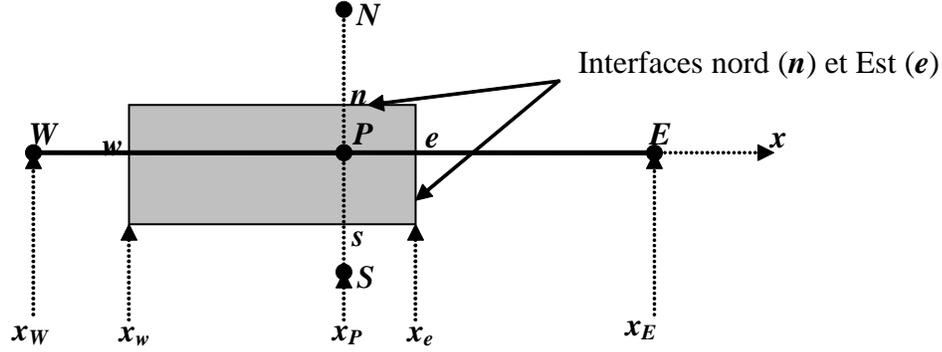


FIGURE 5.5.: Interfaces des volumes élémentaires

La variation de l'aimantation  $(\mathbf{M}_y)$  sur le segment  $(\mathbf{PE})$  est donnée par :

$$\mathbf{M}_y = \left( \frac{x - x_E}{x_P - x_E} \right) (\mathbf{M}_y)_P + \left( \frac{x_P - x}{x_P - x_E} \right) (\mathbf{M}_y)_E \quad (5.37)$$

Dans notre cas les interfaces du volume élémentaire sont situées au milieu des segments par exemple  $e$  est situé au milieu du segment  $(\mathbf{PE})$ . Dans ce cas :

$$(\mathbf{M}_y)_e = \frac{1}{2} (\mathbf{M}_y)_P + \frac{1}{2} (\mathbf{M}_y)_E \quad (5.38)$$

$$(\mathbf{M}_y)_w = \frac{1}{2} (\mathbf{M}_y)_P + \frac{1}{2} (\mathbf{M}_y)_W \quad (5.39)$$

$$(\mathbf{M}_x)_n = \frac{1}{2} (\mathbf{M}_x)_P + \frac{1}{2} (\mathbf{M}_x)_N \quad (5.40)$$

$$(\mathbf{M}_x)_s = \frac{1}{2} (\mathbf{M}_y)_P + \frac{1}{2} (\mathbf{M}_x)_S \quad (5.41)$$

La partie droite de l'équation (5.35) devient alors :

$$S_p = \mathbf{J}_{sP} \Delta x \Delta y + \left( \frac{(\mathbf{M}_y)_E - (\mathbf{M}_y)_W}{2} \right) \Delta y - \left( \frac{(\mathbf{M}_x)_N - (\mathbf{M}_x)_S}{2} \right) \Delta x \quad (5.42)$$

Donc, tous les inconnus sont exprimés aux nœuds du maillage,  $\mathbf{M}_y$  et  $\mathbf{M}_x$  sont les composantes de l'aimantation  $\mathbf{M}$  seront calculées par le modèle d'hystérésis choisi. On peut finalement construit le système matriciel de la forme suivante :

$$[a] [\mathbf{A}] = [D] [\mathbf{J}_{SP}] + \begin{bmatrix} K^x & K^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{xN,S} \\ M_{yE,W} \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Avec :  $[a]$  est la matrice globale du système, dans le cas général elle est creuse et symétrique.

Les différents éléments de cette matrice sont donnés par :

$$\begin{cases} a_{i,i} = a_{i,j-1} + a_{i,j+1} + a_{i-1,j} + a_{i+1,j} \\ a_{i,j-1} = \nu_0 \frac{\Delta y_{i,j-1}}{x_{i,j} - x_{i,j-1}}, & a_{i,j+1} = \nu_0 \frac{\Delta y_{i,j+1}}{x_{i,j+1} - x_{i,j}} \\ a_{i-1,j} = \nu_0 \frac{\Delta x_{i-1,j}}{y_{i,j} - y_{i-1,j}}, & a_{i+1,j} = \nu_0 \frac{\Delta x_{i+1,j}}{y_{i+1,j} - y_{i,j}} \end{cases}$$

Les coefficients liés au terme source  $\mathbf{J}_s$  sont :

$$D_{i,j} = \Delta x_{i,j} \Delta y_{i,j}$$

Les coefficients de terme source liés à l'aimantation  $\mathbf{M}$  sont donnés par :

$$\begin{cases} K_{i,j}^x = \frac{\Delta x_{i,j}}{2} \\ K_{i,j}^y = \frac{\Delta y_{i,j}}{2} \end{cases}$$

Les deux composantes de l'aimantation sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{x_{N,S}} = \mathbf{M}_{x_{i+1,j}} - \mathbf{M}_{x_{i-1,j}} \\ \mathbf{M}_{y_{E,W}} = \mathbf{M}_{y_{i,j+1}} - \mathbf{M}_{y_{i,j-1}} \end{cases}$$

Une fois que les différentes formulations en volumes finis intégrant le modèle d'hystérésis sont établies, une méthode de résolution du problème non linéaire doit être choisie.

### 5.4.5. Discrétisation de la formulation magnétodynamique

Pour un problème magnétodynamique et dans un système de coordonnées cartésiennes (dans le cas bidimensionnel (2D)), le champ magnétique et l'aimantation du matériau évoluent dans le plan  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , donc la relation (5.29) s'écrit :

$$\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{t}} - \nu_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) = \mathbf{J}_s - \sigma \nabla V + \frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial y} \quad (5.44)$$

Dans le cadre de cette étude, une alimentation en courant sera effectuée sur les dispositifs étudiés ; on peut donc négliger le terme  $\sigma \nabla V$ . Il est possible de discrétiser le terme temporel sur un intervalle du temps plus petit  $\Delta t$ , sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\mathbf{A}^{t+\Delta t} - \mathbf{A}^t}{\Delta t} \quad (5.45)$$

L'intégration de l'équation (5.44) sur un volume élémentaire doit être complétée par une intégration dans le temps.

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_s^n \int_w^e \left( \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{t}} \right) dx dy \right) dt &= \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_s^n \int_w^e \left( \nu_0 \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) \right) dx dy \right) dt + \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_s^n \int_w^e \left( \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial y} \right) dx dy \right) dt \end{aligned} \quad (5.46)$$

L'intégrale de la partie gauche de l'équation (5.46) donne :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left( \int_s^n \int_w^e \left( \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{t}} \right) dx dy \right) dt = \sigma_p \Delta x \Delta y \left( \mathbf{A}_P^{t+\Delta t} - \mathbf{A}_P^t \right) \quad (5.47)$$

Pour évaluer la partie droit de l'équation (5.46), nous devons faire une hypothèse sur la variation du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  avec le temps. Nous pourrions utiliser des

potentiels vecteurs à l'instant  $t$  ou à l'instant  $t + \Delta t$  pour calculer l'intégrale dans le temps, ou alternativement par une combinaison des potentiels vecteurs à l'instant  $t$  et à l'instant  $t + \Delta t$ . On peut généraliser l'approche par le paramètre de pondération  $\theta$  compris entre 0 et 1, et écrire l'intégrale  $I_A$  du potentiel vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  par rapport au temps comme :

$$I_A = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{A} dt = [\theta \mathbf{A}^{t+\Delta t} + (1 - \theta) \mathbf{A}^t] \Delta t \quad (5.48)$$

D'où :

$\theta$	0	$\frac{1}{2}$	1
$I_A$	$\mathbf{A}^t \Delta t$	$\frac{1}{2} (\mathbf{A}^t + \mathbf{A}^{t+\Delta t})$	$\mathbf{A}^{t+\Delta t}$

Nous avons mis en évidence les valeurs suivantes de l'intégrale  $I_A$  ; si  $\theta = 0$  on utilise le potentiel vecteur à l'instant  $t$  (ancien) , si  $\theta = 1$  le potentiel vecteur magnétique à l'instant  $t + \Delta t$  (nouveau) et finalement si  $\theta = 1/2$ , le potentiel vecteur magnétique à l'instant  $t$  et  $t + \Delta t$  sont également pondérés. En utilisant la formule (5.48) pour  $\mathbf{A}_W, \mathbf{A}_E, \mathbf{A}_P, \mathbf{A}_S$  et  $\mathbf{A}_N$ , et en divisant par  $\Delta t$  nous avons :

$$\begin{aligned} a_t (\mathbf{A}_P + \mathbf{A}_P^o) = & \theta [a_E (\mathbf{A}_E - \mathbf{A}_P) - a_W (\mathbf{A}_P - \mathbf{A}_W)] \\ & + (1 - \theta) [a_E (\mathbf{A}_E^o - \mathbf{A}_P^o) - a_W (\mathbf{A}_P^o - \mathbf{A}_W^o)] \\ & + \theta [a_N (\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_P) - a_S (\mathbf{A}_P - \mathbf{A}_S)] \\ & + (1 - \theta) [a_N (\mathbf{A}_N^o - \mathbf{A}_P^o) - a_S (\mathbf{A}_P^o - \mathbf{A}_S^o)] \\ & + \overline{S}_P \end{aligned} \quad (5.49)$$

Dans l'équation (5.49) l'exposant 'o' se réfère à des potentiels vecteurs à l'instant  $t$ , au moment  $t + \Delta t$  les potentiels vecteurs ne sont pas en exposant.

avec :

$a_t = \sigma_P \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta t}$ ,  $a_E$ ,  $a_W$ ,  $a_N$  et  $a_S$  sont donnés au section §(5.4.4),  $\overline{S}_P$  est donnée par l'équation (5.42).

L'équation (5.49) peut être réorganisé de manière à donner :

$$\begin{aligned}
 (a_t + \theta a_p) \mathbf{A}_P = & a_E (\theta \mathbf{A}_E + (1 - \theta) \mathbf{A}_E^o) \\
 & + a_W (\theta \mathbf{A}_W + (1 - \theta) \mathbf{A}_W^o) \\
 & + a_N (\theta \mathbf{A}_N + (1 - \theta) \mathbf{A}_N^o) \\
 & + a_S (\theta \mathbf{A}_S + (1 - \theta) \mathbf{A}_S^o) \\
 & + (a_t - (1 - \theta) a_P) \mathbf{A}_P^o \\
 & + \overline{S}_P
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

avec :  $a_P = (a_E + a_W + a_N + a_S)$ .

Il est plus important de s'assurer que tous les coefficients, de l'équation (5.50), sont positifs pour avoir des résultats physiques et réalistes [VER-95]. Selon la valeur de  $\theta$  on peut distinguer trois schémas différents.

#### 5.4.5.1. Différents schémas de discrétisation

- **schéma explicite** : La substitution de  $\theta = 0$  dans l'équation (5.50) donne la discrétisation explicite. Pour avoir tous les coefficients de l'équation (5.50) positif, nous devons avoir  $a_t - a_P > 0$ , pour un maillage uniforme nous avons,  $a_E = a_W = a_N = a_S$  et  $a_P = 4a_E = 4\nu_0$ , cette condition peut être écrite comme :

$$\Delta t < \sigma_P \frac{(\Delta x)^2}{4\nu_0} \tag{5.51}$$

D'après l'équation (5.51), on remarque une sérieuse limitation pour le schéma explicite, car la taille du pas de temps doit être inférieure au carré du  $\Delta x$ , donc ce schéma devient très coûteux pour améliorer la précision. Par conséquent, cette méthode n'est pas recommandée pour les problèmes transitoires

- **schéma de Crank-Nicolson** : Le schéma de Crank-Nicolson résulte de la substitution de  $\theta = 1/2$  dans l'équation (5.50). Toujours pour réaliser la condition des coefficients positifs de l'équation (5.50), il faut avoir le terme  $a_t - \frac{a_P}{2} > 0$ , pour un maillage uniforme, cette condition peut être écrite aussi comme :

$$\Delta t < \sigma_P \frac{(\Delta x)^2}{2\nu_0} \tag{5.52}$$

Cette limitation du pas de temps n'est que légèrement moins que l'expression (5.51) associée au schéma explicite.

- *schéma implicite* : Lorsque la valeur de  $\theta$  est égale à 1, nous obtenons le schéma implicite, l'équation discrétisée (5.50) devient de la forme suivante :

$$(a_t + a_p) \mathbf{A}_P = a_E \mathbf{A}_E + a_W \mathbf{A}_W + a_N \mathbf{A}_N + a_S \mathbf{A}_S + a_t \mathbf{A}_P^o + \overline{S_P} \quad (5.53)$$

On peut voir que tous les coefficients de l'équation (5.53) sont positifs, ce qui rend le schéma implicite inconditionnellement stable pour toutes les tailles de pas de temps. La méthode implicite est recommandée pour les calculs à usage transitoires en raison de sa robustesse et la stabilité inconditionnée.

## 5.5. conclusion

Au cours de ce chapitre, nous avons abordé les modèles mathématiques destinés à l'analyse des problèmes électromagnétiques. Nous avons choisi la formulation à l'aide du potentiel vecteur magnétique pour la modélisation des phénomènes magnétostatiques et magnétodynamiques non linéaires. Vu la non linéarité des phénomènes étudiés nous avons choisi la méthode des volumes finis comme outil numérique de discrétisation. La méthode des volumes finis est donnée en détaille soit dans le cas magnétostatique ou dans le cas magnétodynamique. Nous avons aussi donné les différents schémas possibles. La méthode implicite est la plus recommandée pour les calculs à usage transitoires en raison de sa robustesse et la stabilité inconditionnée. Dans le but d'avoir une étude plus complète nous avons introduit l'aimantation magnétique dans les deux formulations, magnétostatique et magnétodynamique, cette aimantation est calculée par le modèle d'hystérésis de Jiles-Atherton. L'intégration du modèle d'hystérésis de Jiles-Atherton dans un code de calcul de champ par la méthode des volumes finis fera l'objet de chapitre suivant.

# 6. Intégration du modèle de J-A dans un code de calcul par MVF

## 6.1. Introduction

Dans le but de la caractérisation des tôles magnétiques utilisées dans le cadre de ce travail, nous essayons de modéliser le cadre d'Epstein (§ 2.10), par la méthode des volumes finis dans le cas bidimensionnel. Le code de calcul développé nous a permis de visualiser les cycles d'hystérésis pour différentes fréquences ainsi que la détermination des pertes dues par hystérésis dans le cas dynamique et aussi leurs distributions. Pour avoir l'évolution de ces pertes en fonction de la fréquence nous introduisons le comportement magnétique des tôles par l'intégration du modèle d'hystérésis dynamique de Jiles-Atherton, développé dans le 4<sup>ème</sup> chapitre, dans ce code de calcul.

## 6.2. Présentation du dispositif

Vu la symétrie géométrique du cadre d'Epstein, figure 6.1, nous ne modélisons que l'un quart (1/4) de ce cadre pour des raisons informatiques (espace mémoire) et de temps de calcul.

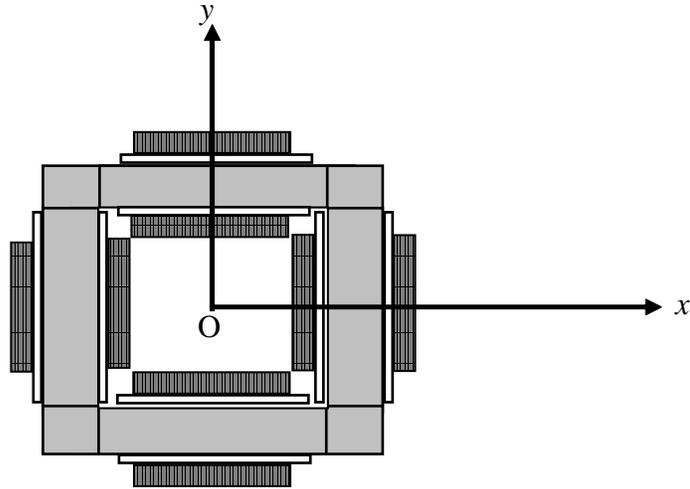


FIGURE 6.1.: Dispositif a étudié

Les conditions aux limites associées à l'équation magnétique sont du type Neumann Homogène  $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$  sur  $\Gamma$  et du type Dirichlet  $A = 0$  sur  $\Gamma'$ , nous avons présenté ces conditions sur la figure 6.2.

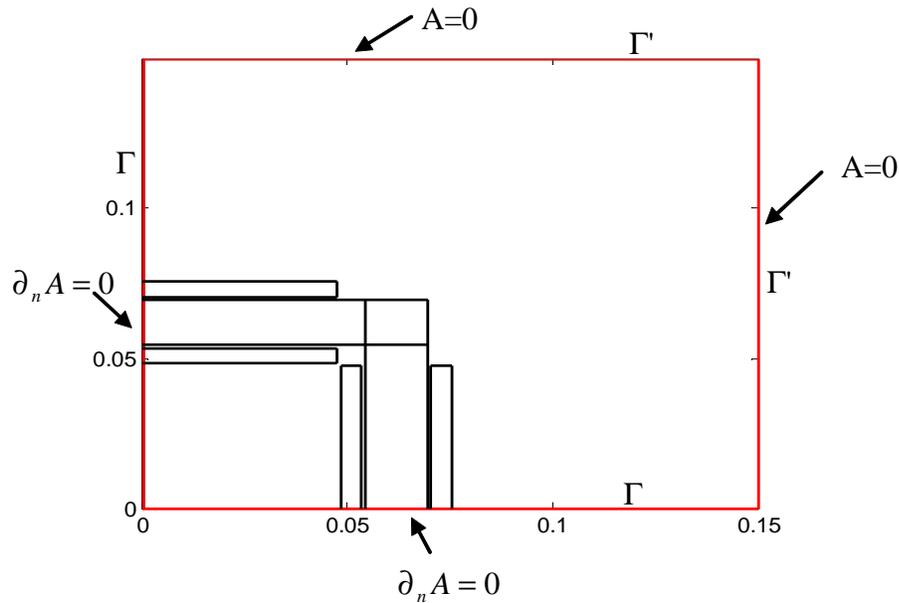


FIGURE 6.2.:  $\frac{1}{4}$  du cadre avec les conditions aux limites

Le maillage du domaine de résolution qui comporte les tôles magnétiques, l'inducteur et le milieu ambiant est présenté sur la figure 6.3. Ce maillage est non régulier, dans différentes parties du domaine, le maillage est raffiné dans les tôles ainsi que dans les conducteurs.

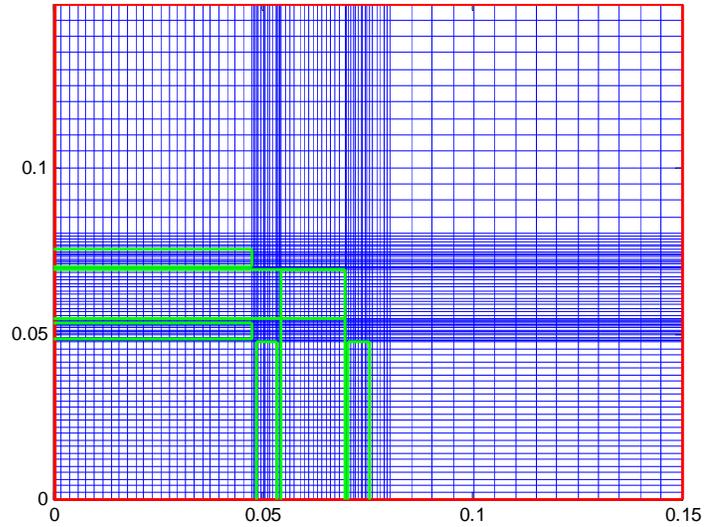


FIGURE 6.3.: Maillage du domaine d'étude

### 6.3. Etude du comportement électromagnétique linéaire

La courbe de première aimantation, figure 6.4(a), est générée en utilisant le modèle dynamique inverse de Jiles-Atherton pour une fréquence de  $50\text{ Hz}$ . La perméabilité relative est déterminée à chaque niveau d'excitation, figure 6.4(b). On peut ainsi déduire une perméabilité relative moyenne  $\mu_r = 6576$ .

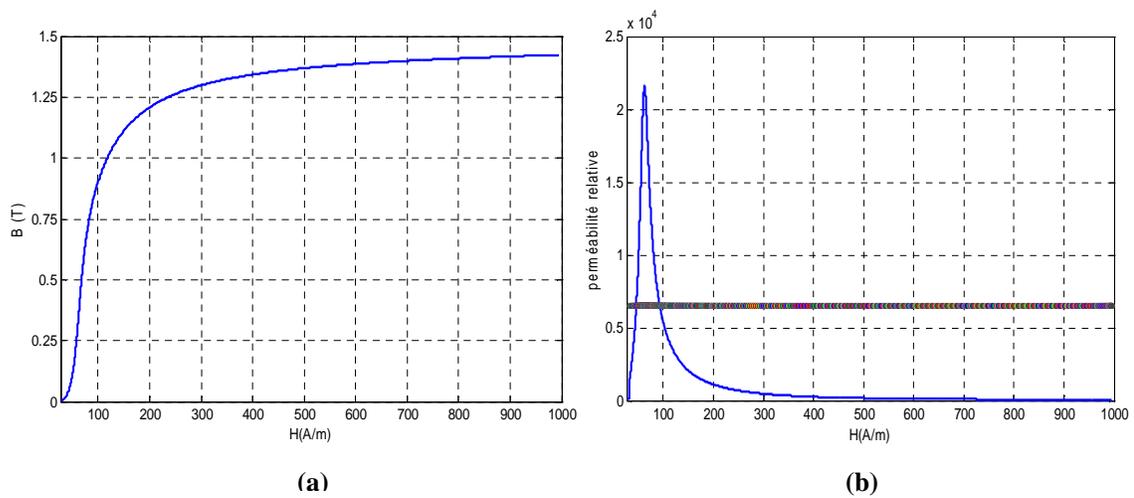


FIGURE 6.4.: (a) Première aimantation, (b) Perméabilité relative

Le problème magnétodynamique devient un problème linéaire avec l'utilisation d'une perméabilité moyenne. Nous avons exécuté notre code de calcul, dans le cas d'un problème linéaire, avec les paramètres suivants : la densité du courant source  $J_s = 2.5 \cdot 10^6 \text{ A/m}$ , la conductivité des tôles  $\sigma = 2.074 \cdot 10^6 \text{ S/m}$ .

La distribution du potentiel vecteur magnétique représentée sur la figure 6.5 est comparée avec celle obtenue en utilisant PDETOOL sous MATLAB.

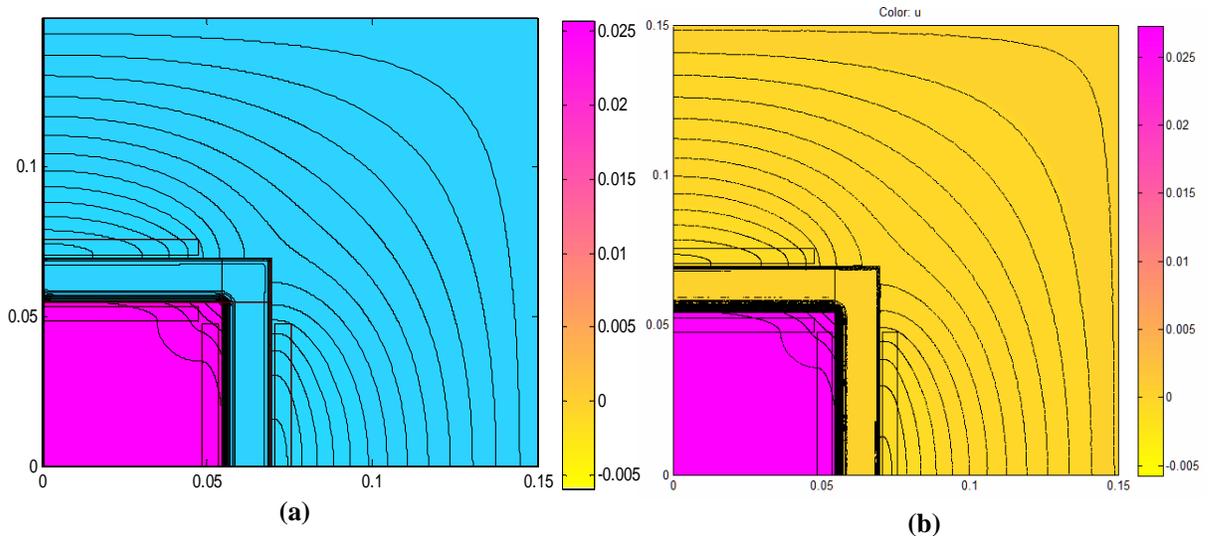


FIGURE 6.5.: Distribution du potentiel vecteur : (a) Volumes finis, (b) éléments finis avec (PDETOOL)

On remarque que, la distribution de potentiel vecteur magnétique, dans les deux cas, a la même forme et même grandeur.

## 6.4. Analyse du comportement électromagnétique non linéaire

Nous avons résolu le problème électromagnétique en utilisant la méthode des volumes finis avec l'intégration du modèle d'hystérésis dynamique de Jiles-Atherton, et cela pour différentes fréquences. Les cycles d'hystérésis obtenus par simulation sont comparés avec ceux mesurés pour les valeurs suivantes de la fréquence (10, 50, 100, 200  $\text{Hz}$ ), la figure 6.6 montre une bonne concordance entre les résultats numériques et l'expérimentation.

## 6. Intégration du modèle de J-A dans un code de calcul par MVF

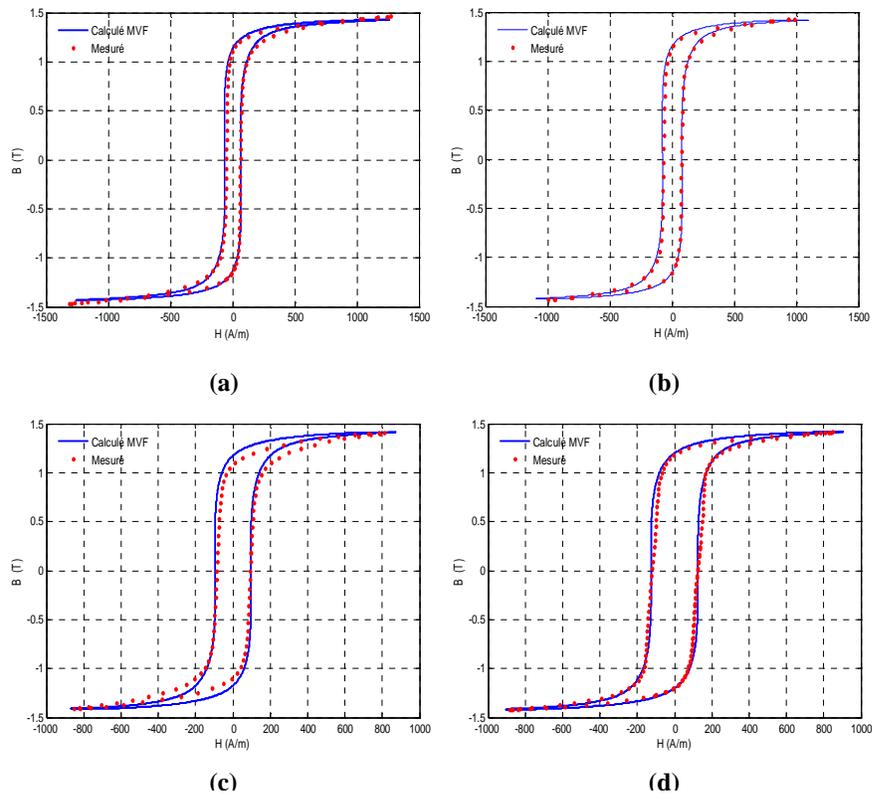


FIGURE 6.6.: Cycles d'hystérésis calculés par la MVF et cycles mesurés : (a)  $f = 10 \text{ Hz}$ , (b)  $f = 50 \text{ Hz}$ , (c)  $f = 100 \text{ Hz}$  et (d) pour  $f = 200 \text{ Hz}$

Les lignes de l'induction magnétique sont illustrées sur la figure 6.7 nous avons fait un zoom au coin du dispositif pour visualiser la concentration de ces dernier. Cette distribution de l'induction est tracée pour une fréquence de  $10 \text{ Hz}$ , à l'instant  $t = 25 \text{ ms}$ .

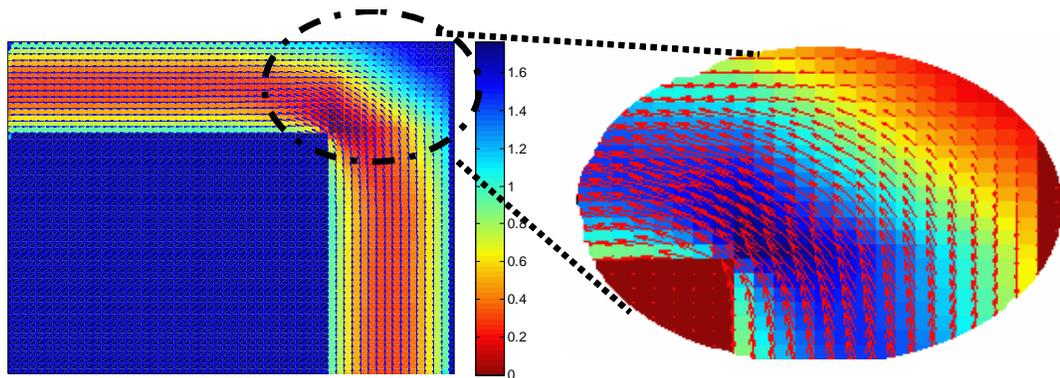


FIGURE 6.7.: Les lignes de l'induction magnétique

## 6. Intégration du modèle de J-A dans un code de calcul par MVF

La distribution des pertes spécifiques pour différentes fréquences est présentée sur la figure 6.8. On peut remarquer que les pertes sont très intenses au coin intérieur du dispositif. L'évolution de ces pertes en fonction de la fréquence est illustrée sur la figure 6.9, nous avons comparé les résultats obtenus par le modèle dynamique de J-A avec ceux calculés par la méthode des volumes finis.

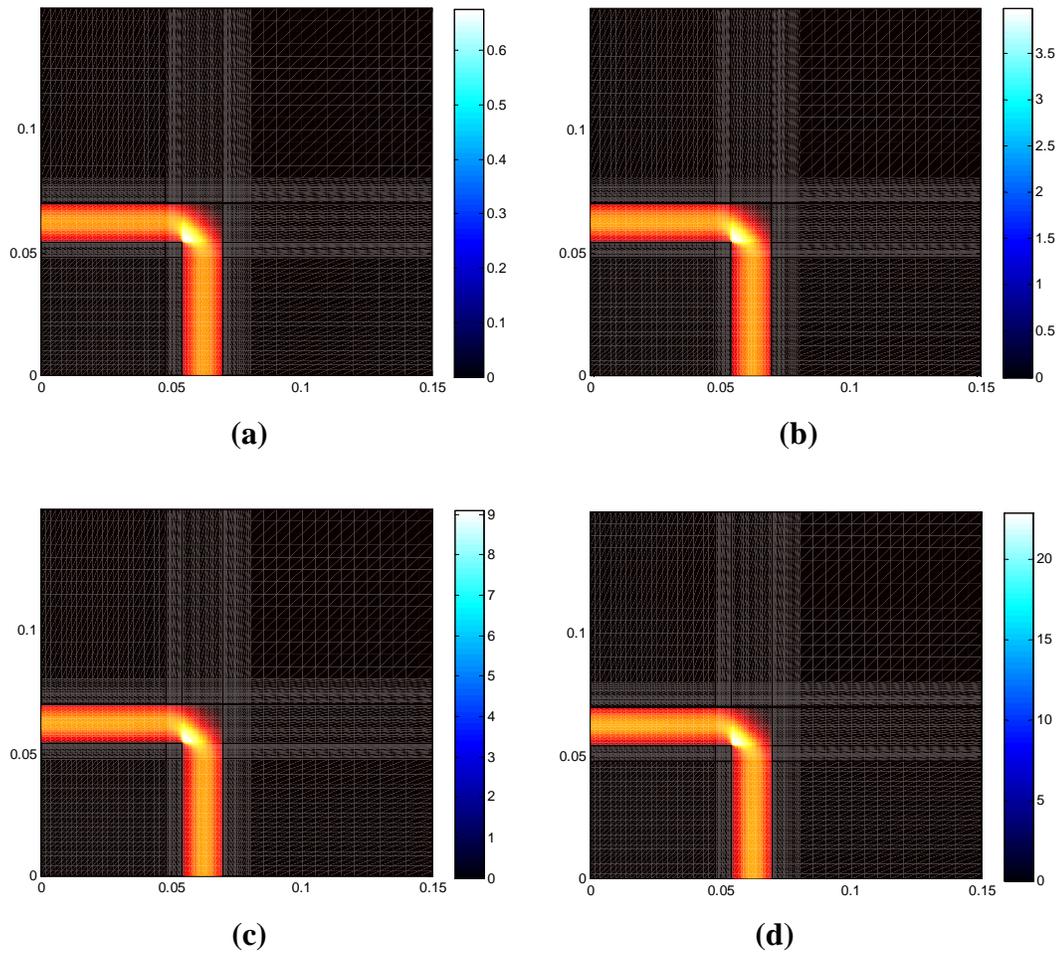


FIGURE 6.8.: Distribution des pertes spécifiques : (a)  $f = 10 \text{ Hz}$ , (b)  $f = 50 \text{ Hz}$ , (c)  $f = 100 \text{ Hz}$  et pour  $f = 200 \text{ Hz}$ .

## 6. Intégration du modèle de J-A dans un code de calcul par MVF

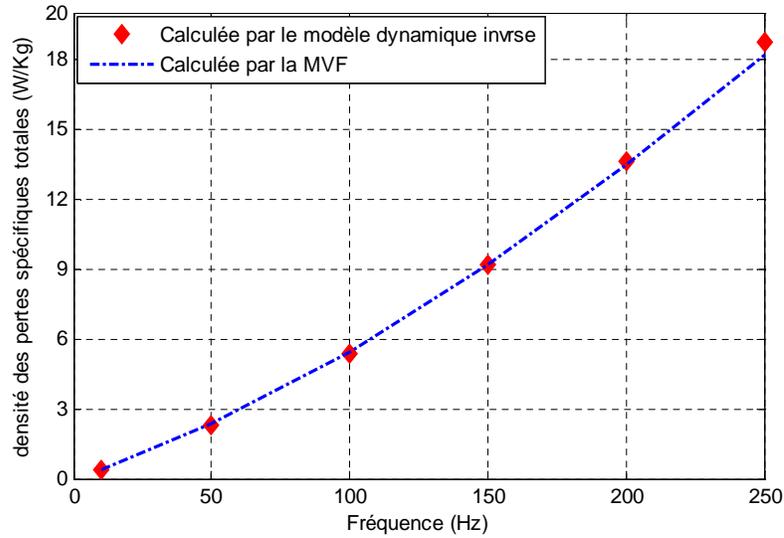


FIGURE 6.9.: Les pertes spécifiques (W/Kg), calculées par le modèle dynamique inverse et par la MVF

On peut noter l'existence d'un régime transitoire lié essentiellement à la courbe de première aimantation, c'est pour cette raison que la simulation du dispositif est effectuée sur plusieurs périodes (*trois périodes dans notre cas*) afin d'atteindre le régime permanent au-delà duquel les pertes spécifiques moyennes par période restent sensiblement les mêmes. Nous avons présenté ce régime transitoire sur la figure 6.10 pour une fréquence de  $50\text{ Hz}$ .

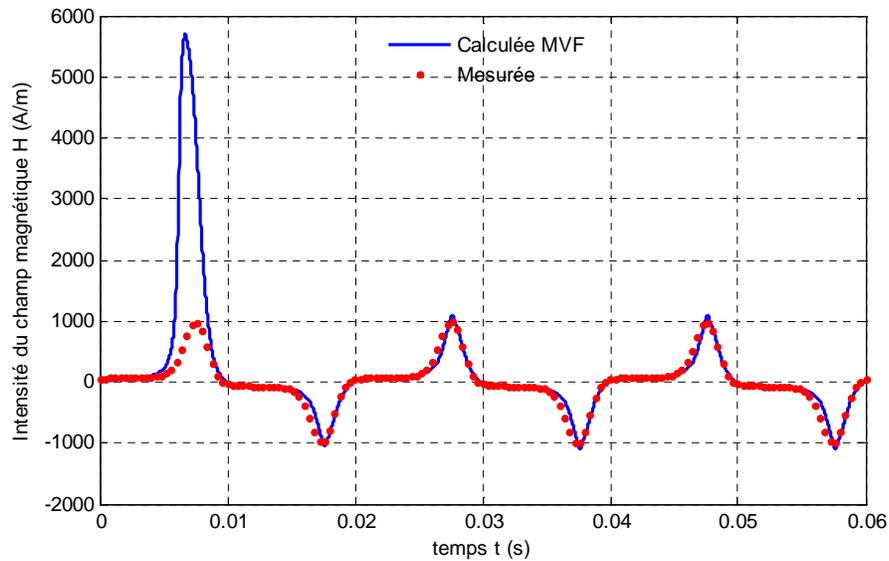


FIGURE 6.10.: Intensité du champ magnétique mesurée et calculée pour  $f = 50\text{ Hz}$ .

### 6.4.1. Analyse sans pertes excédentaires ( $C_{exc} = 0$ )

Dans le modèle dynamique de J-A on néglige les pertes excédentaires, nous posons le terme ( $C_{exc}$  égal à 0), dans ce cas le champ magnétique de réaction  $H_{exc}$  est éliminé dans l'équation (4.40) donnant le champ effectif. Nous avons représenté, sur la figure 6.11, les cycles d'hystérésis obtenus par simulation avec ceux mesurés pour différentes fréquences,  $f = 50 Hz$ ,  $f = 100 Hz$ ,  $f = 200 Hz$ ,  $f = 250 Hz$ . Nous remarquons que, pour des fréquences plus élevées, l'effet de négliger ces pertes devient très claire sur les figures 6.11(c) et 6.11(d). Cette remarque est aussi confirmée sur la figure 6.12.

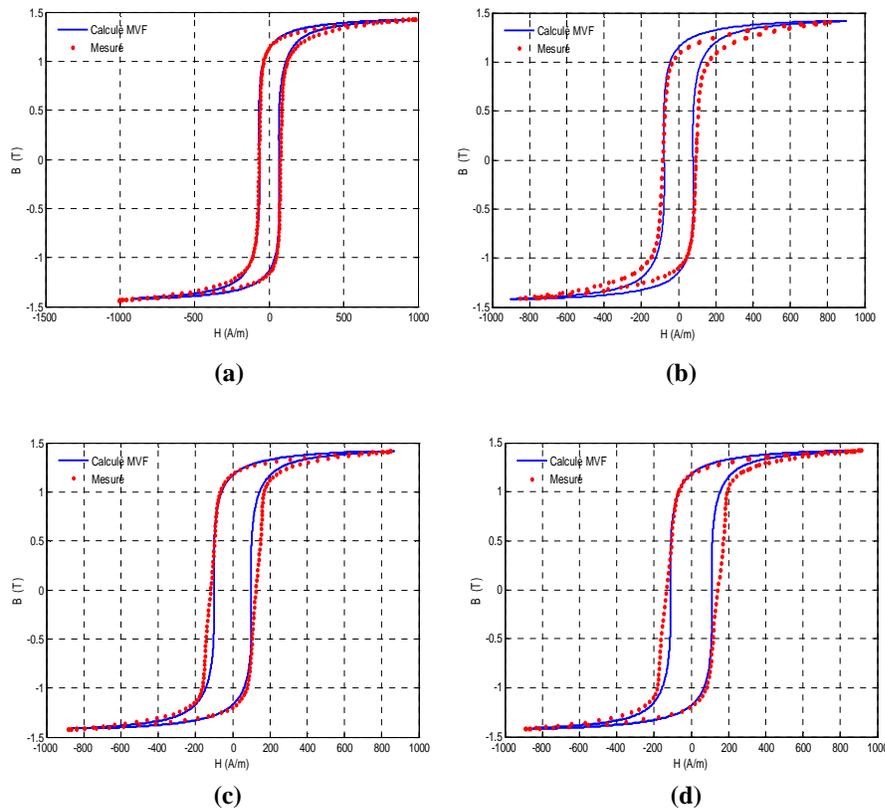


FIGURE 6.11.: Cycles d'hystérésis calculés sans pertes excédentaires et cycles mesurés : (a)  $f = 50 Hz$ , (b)  $f = 100 Hz$ , (c)  $f = 200 Hz$  et (d) pour  $f = 250 Hz$

Nous pouvons remarquer l'influence de ces pertes sur le cycle d'hystérésis, et par conséquent leurs influences sur la puissance spécifique totale. Sur la figure 6.12 nous avons représenté l'évolution des pertes spécifiques sans pertes excédentaires calculées par le modèle dynamique inverse de J-A (**MDI**) et celles calculées par la méthode des volumes finis (**MVF**), en fonction

de la fréquence.

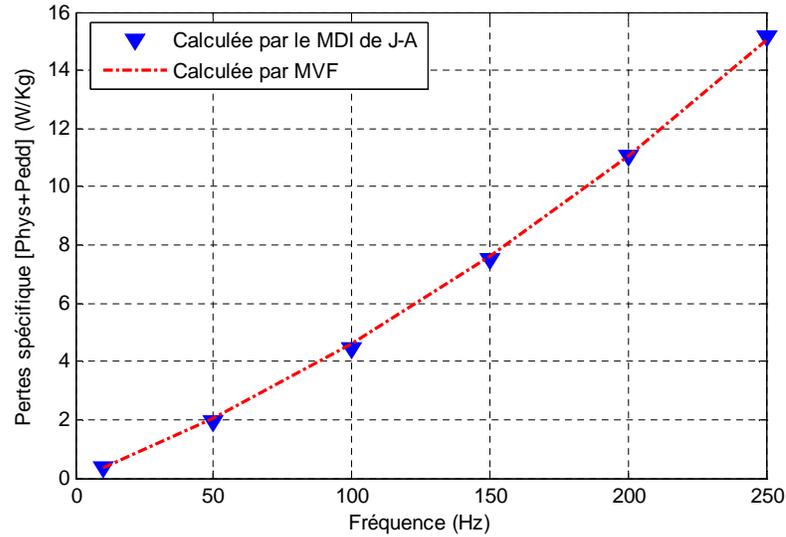


FIGURE 6.12.: Evolution des pertes spécifiques sans pertes excédentaires calculées par le MDI et celles calculées par la MVF.

#### 6.4.2. Analyse sans pertes induit par courants de Foucault ( $C_{edd} = 0$ )

Notre code de calcul nous a permis aussi d'éliminer le coefficient  $C_{edd}$ , ceci traduit par l'élimination des pertes dues par les courants induits. Le champ magnétique de réaction correspondant à ces courants induits est nul et par conséquent le terme  $H_{edd}$  est éliminé de l'équation (4.40) donnant le champ effectif.

La figure 6.13 montre l'effet de l'élimination de ces pertes sur les cycles d'hystérésis. Les pertes par courant de Foucault sont proportionnelles au carré de la fréquence, en remarque bien l'influence de ces pertes si on augmente la fréquence, figure 6.13(c) et 6.13(d). Nous avons montré sur la figure (6.14) l'évolution des pertes spécifiques, calculées sans courant de Foucault, par le modèle dynamique inverse de J-A (MDI) et celles calculées par la MVF.

6. Intégration du modèle de J-A dans un code de calcul par MVF

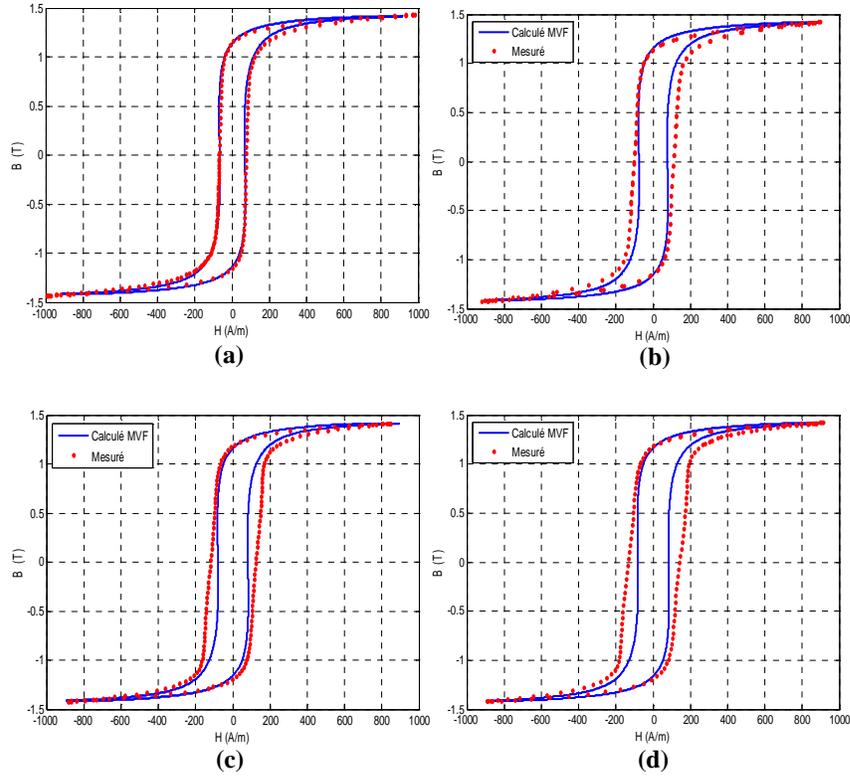


FIGURE 6.13.: Cycles d'hystérésis calculés sans pertes par courants induits et cycles mesurés : (a)  $f = 50 \text{ Hz}$ , (b)  $f = 150 \text{ Hz}$ , (c)  $f = 200 \text{ Hz}$  et (d) pour  $f = 250 \text{ Hz}$

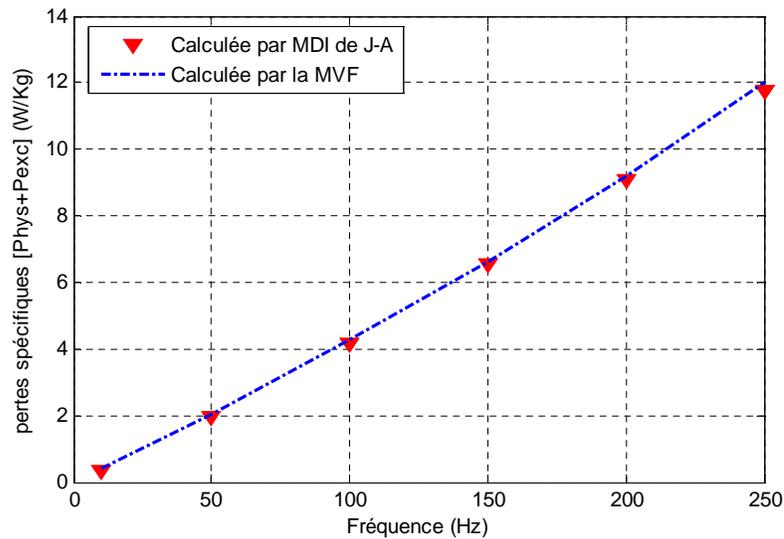


FIGURE 6.14.: Evolution des pertes spécifiques sans pertes par courant de Foucault calculées par le MDI et celles calculées par la MVF.

## 6.5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons intégré le modèle dynamique de Jiles Atherton dans un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis. Ce code de calcul nous a permis d'étudier l'évolution des densités de pertes spécifiques totales en fonction de la fréquence. Nous avons déterminé ces densités selon le principe de séparation des pertes. Le code de calcul réalisé nous permet aussi de calculer la somme de la densité des pertes par hystérésis et excédentaires, d'une part, et la somme de la densité des pertes par hystérésis et celle due par courant de Foucault, d'autre part.

## 7. Conclusion Générale

Le choix d'un modèle d'hystérésis, pour représenter le comportement non linéaire des matériaux ferromagnétiques, est un élément essentiel lors de la modélisation des circuits magnétiques.

Dans ce travail, nous avons étudié les différents modèles rencontrés dans la littérature. L'objectif de cette étude est le choix d'un modèle qui permet de représenter le comportement hystérétique des dispositifs électromagnétiques dans le cas statique et dynamique. Parmi les modèles cités, dans ce manuscrit, nous avons décrits les modèles analytiques qui présentent certains avantages telles que la rapidité de la génération des cycles d'hystérésis et leurs simplicités de sa mise en oeuvre. Cependant, leur inconvénient majeur est qu'ils sont basés sur un développement purement mathématique dénué de toute interprétation physique.

Nous avons rencontré aussi quelques modèles dynamiques, ce type de modèles est indispensable dans la majorité des processus industriels. La difficulté liée à ces modèles est la nécessité de l'identification de leurs paramètres à chaque fréquence d'utilisation. Nous avons porté aussi de certains modèles qui demandent un temps de calcul important, ce qui rend leur intégration dans un code de calcul sans intérêt.

Notre choix est fixé sur le modèle de Jiles-Atherton vu sa base théorique. Ce modèle est basé sur des considérations physiques, et par conséquent on peu le modifié dans le cas dynamique afin d'amélioré ce modèle dans le cas général.

Dans le cas statique nous avons modifié ce modèle en tenant compte la relation physique exacte reliant le champ effectif avec le champ magnétique appliqué, et nous avons proposé une technique d'identification des paramètres de ce modèle dans le cas statique. Nous avons comparé les cycles d'hystérésis obtenues par le modèle originale de Jiles-Atherton et le modèle modifié avec les cycles mesurés. Cette comparaison montre que les cycles obtenus par le

modèle modifié sont mieux adaptés aux mesures.

Dans le cas dynamique nous avons proposé un modèle inverse de Jiles-Atherton  $M(B)$ . Ce modèle est très intéressant dans un code de calcul en utilisant la formulation à l'aide du potentiel vecteur magnétique. Ce modèle dynamique est inspiré de la théorie statistique de séparation des pertes fer, dans ce modèle en garde les cinq paramètres identifiés dans le cas statique et en ajoutons deux nouveaux paramètres, l'un lié aux courants induits macroscopiques et l'autre lié aux courants induits microscopiques. L'identification de ces deux paramètres est effectuée grâce à la mesure de l'énergie dissipée par cycle et ce, pour différentes fréquences. Nous avons testé la validité de ce modèle sur des tôles de type Fe-Si 3% à grain non orienté et ce, pour différentes fréquences. Les mesures sont effectuées en utilisant le cadre Epstein. L'évolution de la puissance spécifique (W/kg), mesurée, avec la fréquence est comparée avec celle calculée montre la validité de ce modèle. Finalement, nous avons modélisé le cadre Epstein dans le cas bidimensionnelle en utilisant la méthode des volumes finis.

Nous avons introduit le modèle dynamique inverse proposé, les paramètres de ce modèle sont les mêmes que ceux identifiés dans le cas statique en ajoutons les deux paramètres liés au cas dynamique. Les résultats obtenus sont bien adaptés aux mesures.

Comme perspectives de ce travail, le phénomène d'hystérésis dépend aussi de la température, il serait intéressant d'étudier ce phénomène en tenant compte l'influence de la température.

# A. Annexe A.

## A.1. La Méthode de Fausse Position (Regula Falsi)

La méthode de Fausse Position, est une technique de recherche d'un zéro d'une fonction, cette méthode combine les possibilités de la méthode de **Dichotomie** et de la méthode de la **Sécante**.

On prend par exemple l'équation (A.1), cette équation donne la relation entre le paramètre  $\alpha$  et les autres paramètres  $a, c$  et  $k$ . cette équation est la même que celle donnée au 4<sup>ème</sup> chapitre par (4.22).

$$f_r(\alpha) = \eta_r(1 + \alpha\chi_r) + k\chi_r = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\text{avec : } \eta_r = \left( (M_{an}(M_r) - M_r) - kc \frac{dM_{an}(M_r)}{dH_e} \right)$$

La méthode de Fausse Position commence par deux points  $a_1$  et  $b_1$  tels que  $f_r(a_1)$  et  $f_r(b_1)$  soient de signes opposés, ce qui implique que la fonction  $f_r$  possède au moins un zéro dans l'intervalle  $[a_1, b_1]$ . La méthode consiste à produire une suite décroissante, à l'étape  $n$  l'inconnu  $\alpha$  est calculé comme :

$$\alpha_n = a_n - \frac{a_n - b_n}{f_r(a_n) - f_r(b_n)} f_r(a_n) \quad (\text{A.2})$$

Le processus de calcul est donné par :

Si  $f_r(a_n) \times f_r(\alpha_n) > 0$  alors nous posons  $a_{n+1} = \alpha_n$  et  $b_{n+1} = b_n$

Sinon nous posons  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = \alpha_n$ .

Ce procédé est répété jusqu'à ce que  $f_r(\alpha_n) \simeq 0$

Sur la figure (A.1) nous avons représenté schématiquement les étapes successives de cette

méthode dans l'intervalle  $[a_1, b_1]$ .

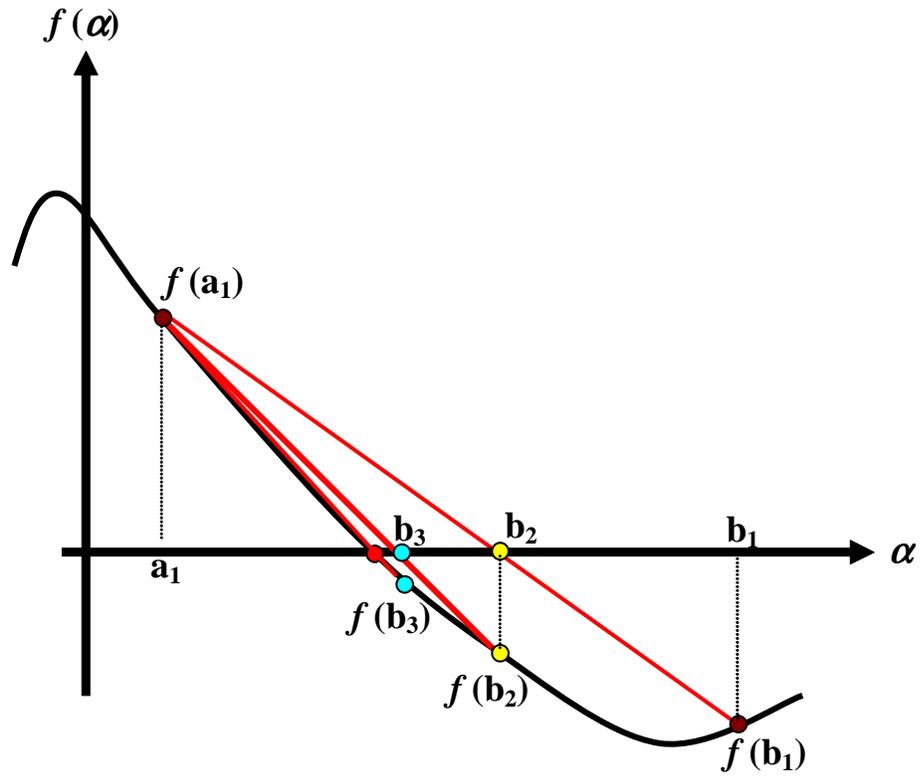


FIGURE A.1.: Etapes successives de la MFP sur l'intervalle  $[a_1; b_1]$

## B. Annexe B.

### B.1. Développement du Modèle Dynamique de Jiles-Atherton

Le bilan énergétique statique, en utilisant les équations (4.5) et (4.8) données au 4<sup>ème</sup> chapitre, s'écrit :

$$\mu_0 \int \mathbf{M}_{an} d\mathbf{H}_e = \mu_0 \int \mathbf{M} d\mathbf{H}_e + \mu_0 k \delta (1 - c) d\mathbf{M}_{irr} \quad (\text{B.1})$$

L'aimantation irréversible est donnée par , en utilisant (4.5) :  $\mathbf{M} = \frac{\mathbf{M} - c\mathbf{M}_{an}}{1 - c}$  dans ce cas l'équation de bilan énergétique statique (B.1) devient :

$$\mu_0 \int \mathbf{M}_{an} d\mathbf{H}_e = \mu_0 \int \mathbf{M} d\mathbf{H}_e + \mu_0 k \delta \int \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}_e} d\mathbf{H}_e - \mu_0 k c \delta \int \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{H}_e} d\mathbf{H}_e \quad (\text{B.2})$$

En ajoutant les pertes par courants induits (Eq. 4.28) et les pertes excédentaires (Eq. 4.29) dans le terme de droite :

$$\begin{aligned} \mu_0 \int \mathbf{M}_{an} d\mathbf{H}_e = & \mu_0 \int \mathbf{M} d\mathbf{H}_e + \mu_0 k \delta \int \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}_e} d\mathbf{H}_e - \mu_0 k c \delta \int \frac{d\mathbf{M}_{an}}{d\mathbf{H}_e} d\mathbf{H}_e \\ & + \int \frac{\mu_0 d^2}{2\rho\beta} \left( \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right)^2 dt + \int \left( \frac{GSV_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\mu_0 d\mathbf{M}}{dt} \right)^{\frac{3}{2}} dt \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

en posant :

$$\left( \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right)^2 dt = \left( \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right) \left( \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}_e} \right) d\mathbf{H}_e$$

$$\left( \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right)^{\frac{3}{2}} dt = \left( \frac{d\mathbf{M}}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}_e} \right) d\mathbf{H}_e$$

en introduisant ces expressions dans l'équation B.3. Ainsi en divisant par  $\mu_0$  et en intégrant par rapport à  $\mathbf{H}_e$  nous obtenons l'équation différentielle suivante :

$$(k\delta - \alpha\eta) \left( \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} \right) - \eta + \left( \frac{\mu_0 d^2}{2\rho\beta} \right) \left( \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right) \left( \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} \right)^2 + \left( \frac{\mu_0 GSV_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{H}} \right)^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (\text{B.4})$$

## B.2. Processus de résolution

### B.2.1. Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est une méthode itérative de recherche de racines d'une fonction.

On va chercher à construire une bonne approximation d'un zéro de l'équation (B.4), en se basant sur son développement de Taylor au premier ordre. L'équation (B.4) devient, en posant ( $X = d\mathbf{M}/d\mathbf{H}$ ), comme :

$$f(X) = a(t)X^2 + b(t)X^{\frac{3}{2}} + c(t)X - d(t) = 0 \quad (\text{B.5})$$

avec :

$$a(t) = \left( \frac{\mu_0 d^2}{2\rho\beta} \right) \left( \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right), \quad b(t) = \left( \frac{\mu_0 GSV_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{d\mathbf{H}}{dt} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad c(t) = (k\delta - \alpha\eta) \text{ et } d(t) = \eta.$$

On va résoudre l'équation (B.5) où les paramètres  $a, b, c$  et  $d$  sont considérés comme des constants à chaque instant du temps  $t$ .

Formellement, on part d'un point  $X_0$  appartenant à l'ensemble de définition de la fonction  $f(X)$  et on construit par récurrence la suite :

$$X_{n+1} = X_n - \frac{f(X_n)}{f'(X_n)} \quad (\text{B.6})$$

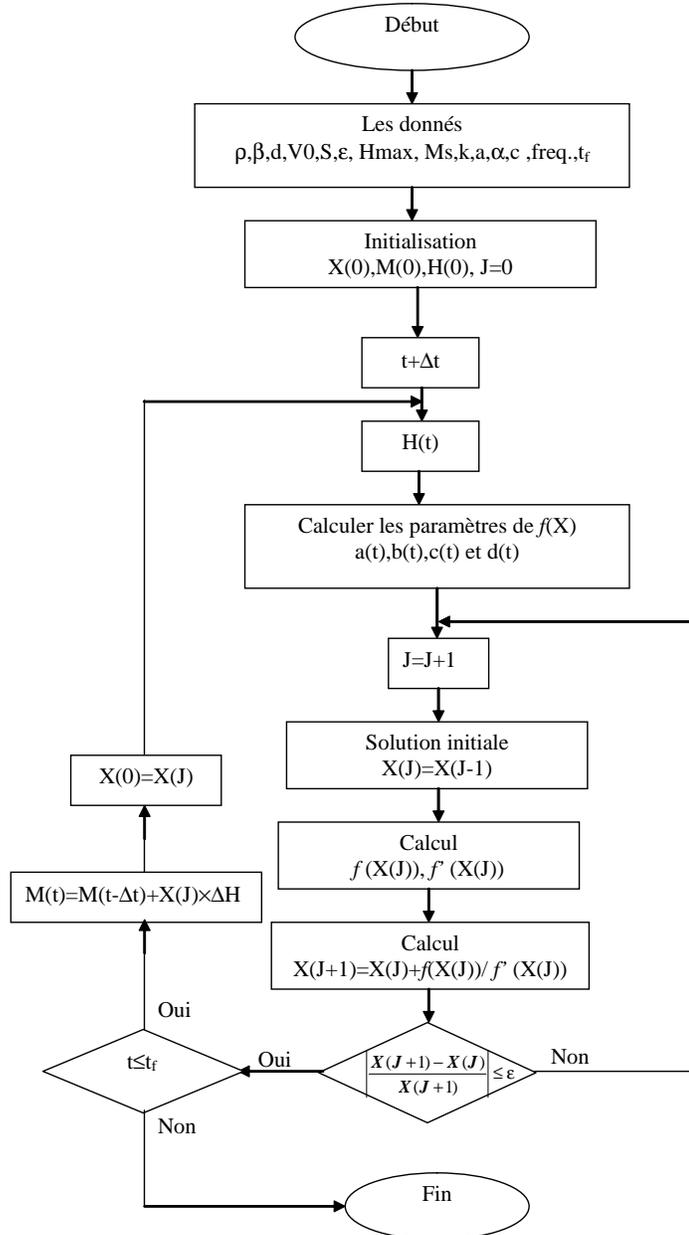
où  $f'(X)$  désigne la dérivée de la fonction  $f(X)$

$$f'(X) = 2a(t)X + \frac{3}{2}b(t)X^{\frac{1}{2}} + c(t) = 0 \quad (\text{B.7})$$

La solution souhaitée est obtenue l'orsque l'écart entre  $X_n - X_{n-1} \leq \varepsilon$ . où  $\varepsilon$  est la précision donnée.

Sur la figure (B.1) nous avons détaillé le processus de résolution de l'équation (B.4).

**Algorithm B.1** Processus de résolution



# Bibliographie

- [BEN-02] Abdelkader BENABOU “Contribution à la caractérisation et à la modélisation de matériaux magnétiques en vue d’une implantation dans un code de calcul de champ”, Thèse de doctorat, Spécialité Génie Electrique, Université de LILLE I, France, 2002
- [BER-98] G. Bertotti, “Hysteresis in magnetism”, 1998 : Academic Press.
- [DUC-03] Benjamin DUCHARNE “Caractérisation et modélisation de circuits magnétiques du global vers le local”, Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon1, France, 2003.
- [ROU-96] Laure-Line ROUVE, “Prise en compte du comportement magnétique fréquentiel des tôles FeSi en modélisation électrotechnique”, Thèse de doctorat, Spécialité Génie Electrique, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 1996.
- [BAV-92] J.C. BAVAY, J. VERDUN, “Alliages fer-silicium”, Techniques de L’Ingénieur, traité Génie Electrique, 1992, pp D2110-D2113.
- [BER-85] G. Bertotti, “Physical interpretation of eddy current losses in ferromagnetic materials I : theoretical considerations”, Journal of Applied Physics, 1985, vol. 57(6) : p. 2110-2117.
- [BER-88] G. Bertotti, “General properties of Power losses in soft ferromagnetic materials”, IEEE Transactions on Magnetics, 1988, vol. 24(1) : pp. 621-630.
- [IVA-97] AMALIA IVANYI “Hysteresis Models in Electromagnetic Computation.” Edition Akademiai Kiado, Budapest 1997.
- [AKB-91] Akbaba (1991), “A modified Frôlich’s type equation for accurate modeling of ma-

- gnetizing characteristics of magnetic cores,”. *Electrical Machines and Power Systems*, Vol.19, pp 303-311.
- [JUF-76] Jufer, Apostolides, “An analysis of eddy current and hysteresis losses in solid iron based upon simulation of saturation and hysteresis characteristics,”. *IEEE Transactions on Power Applications and Systems*, Vol.95, No.4, pp 1786-1794, 1976.
- [WON-88] Wong C.C, “A dynamic hysteresis model”. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol 24 1988 pp 1966-1968.
- [POT-71] Potter, Schmulian, “Self consistently computed magnetization patters in thin magnetic recording media,”. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.7 N° 4, pp 873-879, 1971.
- [TRU-68] Trutt, F.c., Erdelyi, E.A., Hopkins, R.E, “ Representation of the magnetization characteristic of Dc machines for computer use,” *IEEE Transactions on Power App. and Sys.* Vol.87. pp 665-669, 1968.
- [SHE-73] El-Sherbiny, M.k, “Representation of magnetization characteristic by a sum of exponential,”. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.9, pp 60-61, 1973.
- [NOY-88] Noyau, R.H., Middleton, B.K, Miles, J.J., Mackintosh, N.D, “Modelling digital recording in thin film media,”. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.24, pp 2494-2496, 1988.
- [RIV-81] Rivas, J., Zamarro, J.M., Martin, E., Pereira, C, “ Simple approximation for magnetization curve and hysteresis loops,”. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.17, pp 1498-2265, 1981.
- [STO-47] E.C. Stoner, E.P. Wohlfarth, ”A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys”, *Phil. Trans. R. Soc. London*, 1947, vol. A240 : p. 599-642.
- [MOR-08] Mourad MORDJAOUI “Modélisation des effets électromagnétiques « Apport de la logique floue et neuro-floue » ”, Thèse de doctorat, Spécialité Electrotechnique, Option Machines Electrique, Université de Batna, 2008.
- [MAL-06] Olivier MALOBERTI “Contribution à la modélisation de la dynamique d’aimantation dans les matériaux magnétiques doux : caractérisation et simulation”, Thèse de

- doctorat, Spécialité Génie Electrique, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 2006
- [BRO-40] W. F. Brown, "Theory of the approach to magnetic saturation", Physical Review, 1940, vol. 58 : p. 736-743.
- [BRO-41] W.F. Brown, "The effect of dislocations on magnetization near saturation", Physical Review, 1941, vol. 60 : p. 139-147.
- [NOU-02] Amir NOURDINE "Modélisation de l'hystérésis dans les matériaux magnétiques et introduction de modèles dans le logiciel de simulation aux éléments finis Flux3D", Thèse de doctorat, Spécialité Génie Electrique, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 2002.
- [BER-93] G. Bertotti, V. Basso, M. Pasquale, "Application of the Preisach Model to the calculation of magnetization curves and power losses in ferromagnetic materials", IEEE Transactions on Magnetics, 1993.
- [PAR-93] G.S. Park, S.Y. Kahn, "Implementation of hysteresis characteristics using the Preisach model with M-B variables", IEEE Transactions on Magnetics, 1993, vol. 29(2) : p. 1542-1545.
- [HOL-02] K. Hollaus, O. Birò, "Derivation of a complex permeability from the Preisach model", IEEE Transactions on Magnetics, 2002, vol. 38(2) : p. 905-908.
- [ROU-00] M.A. Raulet, et al., "Test of the sample geometry independence of a dynamic hysteresis behavioral model of magnetic materials", Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 2000, vol. 215-216 : p. 620-622.
- [JIL-86] D. C. JILES and J. L. Atherton, "Theory of ferromagnetic hysteresis," Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol. 61, pp. 48-60,1986.
- [SZC-01] J. Szczyglowski, "Influence of eddy currents on magnetic hysteresis loops in soft magnetic materials", Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 2001, vol. 223 : p. 97-102.
- [BUS-03] K.H.J. Buschow, F.R. de Boer; "Physics of Magnetism and Magnetic Materials,"2003, Academic Press.

- [IZY-06] Jacek IZYDORCZYK, “Extraction of Jiles and Atherton parameters of ferrite from initial magnetization curves,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 302, pp. 517-528, 2006.
- [HER-00] Emilio Del Moral HERNANDEZ, Carlos S. Muranaka and José R. Cardoso, “Identification of Jiles-Atherton model parameters using random and deterministic searches,” *Physica B* 275 (2000) 212-215.
- [HAM-10.a] M. Hamimid, M. Feliachi, S. M. Mimoune “Modified Jiles–Atherton model and parameters identification using false position method”, *Physica B.*, 405 (2010) 1947—1950.
- [SAD-02] N. Sadowski, N. J. Batistela, J. P. A. Bastos, and M. Lajoie-Mazenc, “An inverse Jiles-Atherton model to take into account hysteresis in time stepping finite-element calculations,” *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, no. 2, pp. 797-800, Mar. 2002.
- [JIL-92] D.C. JILES, J.B. Thoenke and M.K. Devine, “Numerical determination of hysteresis parameters for the modelling of magnetic properties using the theory of ferromagnetic hysteresis,” *IEEE Transactions on Magnetics*, 1992, vol. 28, pp. 27-35.
- [CHW-07] K. CHWASTEK J. Szczyglowski, “An alternative method to estimate the parameters of Jiles-Atherton model,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 314, pp. 47-5, 2007.
- [IZY-06] Jacek IZYDORCZYK, “Extraction of Jiles and Atherton parameters of ferrite from initial magnetization curves,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 302, pp. 517-528, 2006.
- [AND-07] P. ANDREI, L. Oniciuc, A. Stancu and L. Stoleriu, “Identification techniques for phenomenological models of hysteresis based on the conjugate gradient method,” *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Vol. 316, pp. 330-333, 2007
- [SAL-02] A. SALVINI and F. Riganti Fulginei, “Genetic algorithms and neural networks generalizing the Jiles–Atherton model of static hysteresis for dynamic loops,” *IEEE Transactions on Magnetics*, 2002, vol. 38, pp. 873-876.
- [HAM-08] M. HAMIMID et S. M. Mimoune “Identification des Paramètres du Modèle de Jiles-Atherton en utilisant un algorithme Itératif Couplé avec la Méthode de

- Newton-Raphson,” International Metrology Conference CAFMET22-24 April 2008, REF S8-5.
- [QUA-07] A. QUARTERONI, A. Sacco, F.Saleri, “Méthode Numériques, Algorithmes, Analyse et Applications,” Springer 2007.
- [JIL-94] D. C. Jiles, “Modelling the effects of eddy current losses on frequency dependent hysteresis in electrically conducting media,” IEEE Trans. Magn., vol. 30, pp. 4326-4328, Nov. 1994.
- [BOT-00] O. Bottauscio, M. Chiampi, D. Chiarabaglio, “Iron losses in soft magnetic materials under periodic non-sinusoidal supply conditions.” Physica B., 275 (2000) 191—196.
- [RIG-01] L. A. Righi, Nelson Sadowski, R. Carlson, J. P. A. Bastos, and N. J. Batistela, “A New Approach for Iron Losses Calculation in Voltage Fed Time Stepping Finite Elements,” IEEE Trans. Magn., vol. 37, no.5, pp. 3353-3356, Sep. 2001.
- [MOR-05] K.W. Morton and D.F. Mayers. “Numerical Solution of Partial Differential Equation”, Cambridge University Press 2005.
- [DHA-05] G. Dhatt, G. Touzot, and E. Lefrançois. “Méthode des éléments finis”, Lavoisier, Paris 2005.
- [PAT-80] S. V. Patankar, “Numerical heat transfer and fluid flow”, Series in computational methods in mechanics and thermal sciences. 1980 Hemisphere Publishing Corporation.
- [BOS-98] A. Bossavit, “Computational Electromagnetism”, Academic Press, Boston 1998.
- [JAC-99] J.D. Jackson. “Classical electrodynamics”. John Wiley & Sons, 1999.
- [FOU-85] G. Fournet . “Electromagnétisme à partir des équations locales” , Masson 1985.
- [LOU-95] F. Z. Louai, “Modèles magnétodynamiques d’éléments finis pour structures tridimensionnelles de chauffage par induction”, Thèse de doctorat, Spécialité systèmes électroniques et informatiques, Université de Nantes, 1995.
- [EMM-99] S. Emmanuel, “Diagnostic des machines asynchrones : modèles et outils paramétriques dédiés à la simulation et à la détection de défauts”, Thèse de doctorat, Automatique et informatique appliqué, Université de Nantes, 1999.

- [YUN-97] Z. Q. Yun, B. D. Tan and J. Hung, “Alternative vector formulations for magneto-statics”, IEEE Trans. Magn., Vol. 33, No. 2, pp. 1239-1242, Mar. 1997.
- [FET-97] J. Fetzner, S. Kurz and G. Lehner, “Comparison of analytical and numerical integration techniques for the boundary integrals in the BEMFEM coupling considering TEAM workshop problem no. 13”, IEEE Trans. Magn., Vol. 33, No. 2, pp. 1227-1230, Mar. 1997.
- [PRE-91] K. Preis, I. Bardi, et al., “Numerical analysis of 3-D magnetostatic fields”, IEEE Trans. Magn., Vol. 27, No. 5, pp. 3798-3803, Sep. 1991.
- [VOH-05] Martin VOHRALIK “Méthodes numériques pour des équations elliptiques et paraboliques non linéaires”, Thèse de doctorat, Spécialité mathématique, Université de Paris VI d’Orsay, France, 2005.
- [HAM-99] M. Hamimid, S.M. Mimoune, K. Srairi, J. Fouladgar et M. Féliachi, “Modélisation Axisymétrique des Phénomènes Electromagnétiques par la Méthode des Volumes Finis ”, 2ème Séminaire National en Génie Electrique, SNGE’99, Université de Biskra, pp.77-81, 22 au 24 Novembre, 1999.
- [HAM-01] M. Hamimid, “Modélisation Axisymétrique par la Méthode des Volumes Finis : Application transformateur à Plasma Thermique”, Thèse de Magistère, Option, réseaux Electrique, Université de Biskra, 2001.
- [CHE-07] A. Cheriet, “Contribution a la modélisation tridimensionnelle par la méthode des volumes finis de dispositifs électromagnétiques”, Thèse de doctorat, Spécialité Electrotechnique, Université de Biskra, 2007.
- [HAM-10.b] M. Hamimid, M. Feliachi and S.M. Mimoune, “Nonlinear electromagnetic field computation using the finite volume time domain method coupled to a modified inverse Jiles-Atherton model”, XXI symposium on Electromagnetic Phenomena in Nonlinear Circuits EPNC 2010, Dortmund-Essen, Germany, 29 June-02 July 2010
- [HAM-10.c] M. Hamimid, M. Feliachi and S.M. Mimoune, S.H. Ould Ouali, “2D Finite Volume Modeling Using Modified Jiles-Atherton Hysteresis Model in Time-Stepping Calculations”, Conférence sur les matériaux du genie électrique MGE, Montpellier France, 30 Août -01 Septembre 2010.

## *Bibliographie*

- [ZIE-91] O.C. Zienkiewicz et R.L. Taylor, “La méthode des éléments finis”, Afnor technique, 1991.
- [LIO-00] F.Liorzou, B. Phelps et D.L. Atherton, “ Macroscopic models of magnetization”, IEEE Trans. Magn., Vol. 36, No. 2, pp. 418-428, 2000.
- [CHU-70] L.O. Chua et K. A. Stromsmoe. IEEE Trans on Circuit Theory, CT-17, No. 4, pp. 564-574, 1970
- [HOD-88] M. L. Hodgdon. IEEE Trans. Magn., Vol. 24, No. 6, pp. 3120-3122, 1988.
- [MAY-91] I.D. Mayergoyz, “Mathematical models of hysteresis”, Springer Verlag, New York, 1991.
- [VER-95] H. K. VERSTEEG and W. MALALASEKERA “An introduction to computational Fluid dynamics the finite volume method”, Longman Group Ltd, 1995.
- [PET-06] Kis PETER “Jiles-Atherton Model Implementation to Edge finite Element Method”, Thèse de doctorat, Spécialité Electrical Engineering, Université de technologie de Budapest, 2006.
- [REI-01] J. Reinert, A. Brockmeyer, W.A.A.D. Donker, “Calculation of losses in Ferro- and Ferrimagnetic materials based on the modified Steinmetz equation”, IEEE Trans. Magn. Vol. 37, No.4, pp. 1055-1060, 2001.