UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Soutenance

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Thème

Estimation Empirique De La Mesure Spectrale Des Risques Financiers

Par

OUAAR Fatima

Jeudi le 06/05/2010.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
   1. VaR comme Mesure de Risque.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
    1. VaR comme Mesure de Risque.
    2. Axiomes de Cohérence.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
    1. VaR comme Mesure de Risque.
    2. Axiomes de Cohérence.
    3. L'ES Comme Mesure Alternative du VaR.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
    1. VaR comme Mesure de Risque.
    2. Axiomes de Cohérence.
    3. L'ES Comme Mesure Alternative du VaR.
2. Mesures Spectrales des Risques Financiers.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
   1. VaR comme Mesure de Risque.
   2. Axiomes de Cohérence.
   3. L'ES Comme Mesure Alternative du VaR.
2. Mesures Spectrales des Risques Financiers.
   1. Concepts des MSRs.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
    1. VaR comme Mesure de Risque.
    2. Axiomes de Cohérence.
    3. L'ES Comme Mesure Alternative du VaR.
2. Mesures Spectrales des Risques Financiers.
    1. Concepts des MSRs.
    2. Cohérence des MSRs.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
    1. VaR comme Mesure de Risque.
    2. Axiomes de Cohérence.
    3. L'ES Comme Mesure Alternative du VaR.
2. Mesures Spectrales des Risques Financiers.
    1. Concepts des MSRs.
    2. Cohérence des MSRs.
    3. L'ES Comme Exemple des MSRs.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
    1. VaR comme Mesure de Risque.
    2. Axiomes de Cohérence.
    3. L'ES Comme Mesure Alternative du VaR.
2. Mesures Spectrales des Risques Financiers.
    1. Concepts des MSRs.
    2. Cohérence des MSRs.
    3. L'ES Comme Exemple des MSRs.
3. Valeurs Extrêmes en Finance et Modélisation Stable.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
    1. VaR comme Mesure de Risque.
    2. Axiomes de Cohérence.
    3. L'ES Comme Mesure Alternative du VaR.
2. Mesures Spectrales des Risques Financiers.
    1. Concepts des MSRs.
    2. Cohérence des MSRs.
    3. L'ES Comme Exemple des MSRs.
3. Valeurs Extrêmes en Finance et Modélisation Stable.
    1. Distributions des Valeurs Extrêmes.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
    1. VaR comme Mesure de Risque.
    2. Axiomes de Cohérence.
    3. L'ES Comme Mesure Alternative du VaR.
2. Mesures Spectrales des Risques Financiers.
    1. Concepts des MSRs.
    2. Cohérence des MSRs.
    3. L'ES Comme Exemple des MSRs.
3. Valeurs Extrêmes en Finance et Modélisation Stable.
    1. Distributions des Valeurs Extrêmes.
    2. Modélisation avec les Lois Stables.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
    1. VaR comme Mesure de Risque.
    2. Axiomes de Cohérence.
    3. L'ES Comme Mesure Alternative du VaR.
2. Mesures Spectrales des Risques Financiers.
    1. Concepts des MSRs.
    2. Cohérence des MSRs.
    3. L'ES Comme Exemple des MSRs.
3. Valeurs Extrêmes en Finance et Modélisation Stable.
    1. Distributions des Valeurs Extrêmes.
    2. Modélisation avec les Lois Stables.
4. Estimation Empirique des MSRs.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
    1. VaR comme Mesure de Risque.
    2. Axiomes de Cohérence.
    3. L'ES Comme Mesure Alternative du VaR.
2. Mesures Spectrales des Risques Financiers.
    1. Concepts des MSRs.
    2. Cohérence des MSRs.
    3. L'ES Comme Exemple des MSRs.
3. Valeurs Extrêmes en Finance et Modélisation Stable.
    1. Distributions des Valeurs Extrêmes.
    2. Modélisation avec les Lois Stables.
4. Estimation Empirique des MSRs.
    1. Estimation Classique Des MSRs.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
    1. VaR comme Mesure de Risque.
    2. Axiomes de Cohérence.
    3. L'ES Comme Mesure Alternative du VaR.
2. Mesures Spectrales des Risques Financiers.
    1. Concepts des MSRs.
    2. Cohérence des MSRs.
    3. L'ES Comme Exemple des MSRs.
3. Valeurs Extrêmes en Finance et Modélisation Stable.
    1. Distributions des Valeurs Extrêmes.
    2. Modélisation avec les Lois Stables.
4. Estimation Empirique des MSRs.
    1. Estimation Classique Des MSRs.
    2. Utilisation des L-functionals.

Plan de l'exposé

- Introduction et Motivation.

1. Mesures des Risques Extrêmes en Finance.
   1. VaR comme Mesure de Risque.
   2. Axiomes de Cohérence.
   3. L'ES Comme Mesure Alternative du VaR.
2. Mesures Spectrales des Risques Financiers.
   1. Concepts des MSRs.
   2. Cohérence des MSRs.
   3. L'ES Comme Exemple des MSRs.
3. Valeurs Extrêmes en Finance et Modélisation Stable.
   1. Distributions des Valeurs Extrêmes.
   2. Modélisation avec les Lois Stables.
4. Estimation Empirique des MSRs.
   1. Estimation Classique Des MSRs.
   2. Utilisation des L-functionals.
   3. Définition de l'Estimateur Empirique.

- Qu'est ce qu'un risque financier ?

- Qu'est ce qu'un risque financier ?
- Pour quoi mesurer le risque ?

- Qu'est ce qu'un risque financier ?
- Pour quoi mesurer le risque ?
- Nécissité d'intégrer des mesures de risque dans la gestion financière ?

Introduction et Motivation

- Qu'est ce qu'un risque financier ?
- Pour quoi mesurer le risque ?
- Nécissité d'intégrer des mesures de risque dans la gestion financière ?
- Pourquoi choisirons-nous la classe des Mesures Spectrales Des Risques Financiers ?

Introduction et Motivation

- Qu'est ce qu'un risque financier ?
- Pour quoi mesurer le risque ?
- Nécissité d'intégrer des mesures de risque dans la gestion financière ?
- Pourquoi choisirons-nous la classe des Mesures Spectrales Des Risques Financiers ?
- Comment trouver un estimateur asymptotiquement normal de cette classe pour les distributions a queues lourdes ?

Définition (Mesure De Risque)

Une mesure de risque est une application :

$$\begin{aligned} \rho : \quad & \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & X \longrightarrow \rho\,(X) \end{aligned}$$

censée à quantifier le risque porté par la v.a. X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Pour chaque mesure de risque, il faut spécifier trois paramètres essentiels :

Définition (Mesure De Risque)

Une mesure de risque est une application :

$$\begin{aligned} \rho : \quad & \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & X \longrightarrow \rho(X) \end{aligned}$$

censée à quantifier le risque porté par la v.a. X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Pour chaque mesure de risque, il faut spécifier trois paramètres essentiels :
  - ✓ L'horizon de modélisation.

Définition (Mesure De Risque)

Une mesure de risque est une application :

$$\begin{aligned} \rho : \quad & \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & X \longrightarrow \rho(X) \end{aligned}$$

censée à quantifier le risque porté par la v.a. X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Pour chaque mesure de risque, il faut spécifier trois paramètres essentiels :
  - ✓ L'horizon de modélisation.
  - ✓ Le seuil de confiance.

Définition (Mesure De Risque)

Une mesure de risque est une application :

$$\begin{aligned} \rho : \quad & \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & X \longrightarrow \rho\,(X) \end{aligned}$$

censée à quantifier le risque porté par la v.a. X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- Pour chaque mesure de risque, il faut spécifier trois paramètres essentiels :
  - ✓ L'horizon de modélisation.
  - ✓ Le seuil de confiance.
  - ✓ La variable financière à modéliser.

Après la publication du document technique de *RiskMetrics* en *1994*, par *JPMorgan*. Une définition qui est souvent utilisée pour *VaR* est la suivante :

Définition (La VaR)

Pour un risque X sur une période donnée $[0, T]$ et $0 < \alpha < 1$, la *VaR* est :

$$VaR(X) = F^{\leftarrow}(1 - \alpha)$$

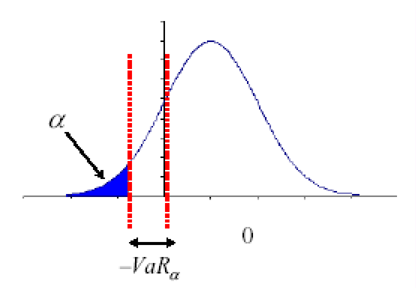

Fig 1. La *VaR*.

C'est en réponse aux lacunes de *VaR* qu'en 1997, *Artzner et al. (1999)* proposent les axiomes de cohérence :

Définition (Axiomes de Cohérences)

Une mesure du risque $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ est cohérente si elle vérifiée $(X, Y \in \mathcal{F})$:

1. La sous additivité : $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

C'est en réponse aux lacunes de *VaR* qu'en 1997, *Artzner et al. (1999)* proposent les axiomes de cohérence :

Définition (Axiomes de Cohérences)

Une mesure du risque $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ est cohérente si elle vérifiée $(X, Y \in \mathcal{F})$:

1. La sous additivité : $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
2. L'homogénéité positive : $\rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

C'est en réponse aux lacunes de *VaR* qu'en 1997, *Artzner et al. (1999)* proposent les axiomes de cohérence :

Définition (Axiomes de Cohérences)

Une mesure du risque $\rho : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ est cohérente si elle vérifiée $(X, Y \in \mathcal{F})$:

1. La sous additivité : $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
2. L'homogénéité positive : $\rho(\lambda X) \leq \lambda\rho(X) \quad$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
3. La monotonie : $\rho(X) \leq \rho(Y) \quad$ pour $\quad X \geq Y$.

C'est en réponse aux lacunes de *VaR* qu'en 1997, *Artzner et al. (1999)* proposent les axiomes de cohérence :

Définition (Axiomes de Cohérences)

Une mesure du risque $\rho : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ est cohérente si elle vérifiée $(X, Y \in \mathcal{F})$:

1. La sous additivité : $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.
2. L'homogénéité positive : $\rho(\lambda X) \leq \lambda \rho(X) \quad$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
3. La monotonie : $\rho(X) \leq \rho(Y) \quad$ pour $\quad X \geq Y$.
4. L'invariace par translation : $\rho(X+c) \leq \rho(X) - c \quad$ pour tout $\quad c \in \mathbb{R}$.

Des travaux récents d'*Artzner et all (1999), D. Tasche (2002)* et *C. Acerbi (2002)* montrent les propriétés d'*ES* :

- Elle tient compte du risque de queue.

Définition (L'ES)

L'*ES* est déterminée par un seul paramètre qui est le quantile de la distribution au-delà duquel on effectue la moyenne des pertes :

$$\begin{aligned} ES\left(X\right) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{\alpha} VaR_p dp = -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{\alpha} F_x^{\leftarrow}\left(p\right) dp \\ &= \text{La perte moyenne de } \left(1-\alpha\right) \text{ mauvais cas.} \end{aligned}$$

Des travaux récents d'*Artzner et all (1999), D. Tasche (2002)* et *C. Acerbi (2002)* montrent les propriétés d'*ES* :

- Elle tient compte du risque de queue.
- Démontre la propriété du sous additivité qui assure sa cohérence.

Définition (L'ES)

L'*ES* est déterminée par un seul paramètre qui est le quantile de la distribution au-delà duquel on effectue la moyenne des pertes :

$$\begin{aligned} ES(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{\alpha} VaR_p dp = -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^{\alpha} F_x^{\leftarrow}(p)\, dp \\ &= \text{La perte moyenne de } (1-\alpha) \text{ mauvais cas.} \end{aligned}$$

Définition (MSRs)

Soit, un spectre admissible $\phi \in \mathcal{L}^1([0,1])$, la mesure de risque :

$$M_\phi(X) = -\int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p)\,\phi(p)\,dp,$$

s'appelle la *MSR* produite par ϕ.

- ✓ $F_X^{\leftarrow}(p)$ est la fonction de quantile pour un niveau de probabilité p.
- ✓ ϕ s'appelle la fonction d'aversion de risque (pondération de quantile).

Exemple

L'*ES* est une *MSR* avec une fonction d'aversion $\phi(p) = \frac{1}{1-\alpha} 1_{[0,\alpha]}(p)$.

Théorème (Cohérence des MSRs)

Toute MSR est une mesure de risque cohérente. Réciproquement, si la mesure M_ϕ définie par :

$$M_\phi(X) = -\int_0^1 \phi(p) F_X^{\leftarrow}(p)\, dp \quad \text{pour } \phi \in \mathcal{L}^1([0,1]),$$

est une mesure cohérente, alors ϕ est un spectre admissible.

- La cohérence des *MSRs* vient des hypothèses faites sur le spectre ϕ. Si une hypothèse est détendu, la mesure n'est plus cohérente.

- L'*ES* est la plus simple des *MSRs* dans son expression. Elle correspond à un spectre constant sur une partie $[0,1]$ et valant 0 partout ailleurs.

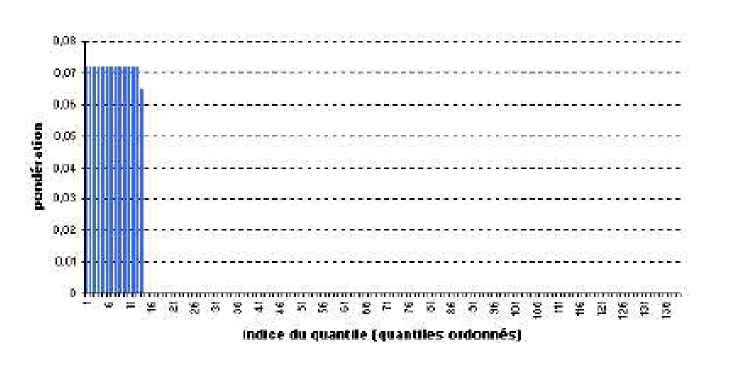

Fig 2. L'allure du spectre d'*ES*.

Théorème (Fisher et Tippett (1928), Gnedenko (1943))

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ *un échantillon de v.a. i.i.d., s'il existe deux suites réels* $c_n > 0$, $d_n \in R$, *et une fonction de distribution G non dégénérée tels que :*

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} G \quad pour \quad n \to \infty,$$

alors G doit être une distribution standard des valeurs extrêmes. i.e.

$$F^n\left(c_n x + d_n\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} G\left(x\right).$$

$\longrightarrow$ Il s'avère que seulement quelques distributions G peuvent être considérées comme distribution asymptotique de limite du maximum normalisé M_n. Elles sont désignées sous le nom des "Distribution Standard des Valeurs Extrêmes".

G est forcément d'une des trois formes suivantes :

Fréchet :

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \exp(-x^\alpha) & , x > 0 \end{cases}$$

Weibull :

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x^\alpha)\} & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$$

Gumbel :

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}) \quad , x \in \mathbb{R}.$$

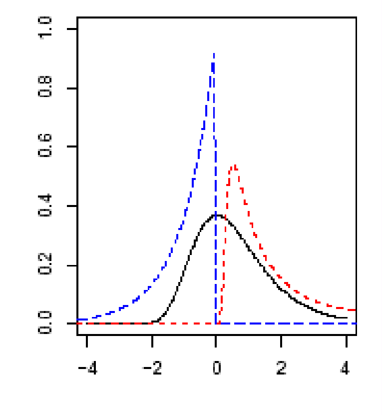

Fig 3. Densités des distributions Extrêmes".

Propriété (Stabilité)

Les v.a. $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes et symétriquement stables avec le même exposant caractéristique α si et seulement si pour n'importe quelles constantes $a_1, ..., a_n$ la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ est également une distribution stable.

Propriété (Queues lourdes des données financières)

Soit X une v.a. avec une fonction de distribution F qui appartient à la famille $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ alors :

$$G(x) := \Pr(|X| \leq x) = F(x) - F(-x),\ x \in \mathbb{R} \quad \text{pour} \quad \alpha > 1.$$

G change régulièrement avec l'index de queue α et satisfait une condition d'équilibre de queue sachant $\lim_{t\to\infty} \{1 - G(tx)\} / \{1 - G(t)\} = x^{-\alpha}$ pour tout $x > 0$, et

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1 - F(t)}{1 - G(t)} = p \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{F(-t)}{1 - G(t)} = 1 - p =: q.$$

Définition (MDA des lois $\alpha - stable$)

On dit que F appartient au MDA d'une loi stable avec l'index de stabilité $0 < \alpha < 2$; notation : $F \in D(\alpha)$; s'ils existent deux suites réelles $A_n > 0$ et C_n tels que :

$$A_n^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_t - C_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} S_\alpha(\beta,\sigma,\mu),$$

où $S_\alpha(\beta,\sigma,\mu)$ est une distribution stable avec les paramètres $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq +1$, $\sigma > 0$ et $-\infty < \mu < +\infty$.

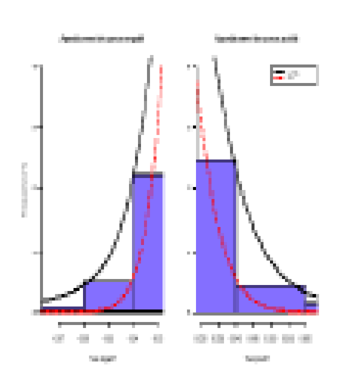

Fig. 4 Modélisation avec les lois stables

- Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de taille $n \geq 1$ pour la v.a. X avec fonction de distribution F ; l'estimateur de l'échantillon $M(\phi)$ est :

$$\hat{M}_n(\phi) := -\int_0^1 F_n^{\leftarrow}(s)\,\phi(s)\,ds, \quad 0 < s \leq 1, \tag{1}$$

tel que $F_n^{\leftarrow}(s)$ est la fonction empirique des quantiles correspondantes au fonction de distribution empirique.

- Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon de taille $n \geq 1$ pour la v.a. X avec fonction de distribution F ; l'estimateur de l'échantillon $M(\phi)$ est :

$$\hat{M}_n(\phi) := -\int_0^1 F_n^{\leftarrow}(s)\,\phi(s)\,ds, \quad 0 < s \leq 1, \tag{1}$$

tel que $F_n^{\leftarrow}(s)$ est la fonction empirique des quantiles correspondantes au fonction de distribution empirique.

- Il est claire que $\hat{M}_n(\phi)$ peut être réécrite comme :

$$\hat{M}_n(\phi) = -\sum_{i=1}^{n} \phi_{i,n} X_{i,n}, \tag{2}$$

tel que $\phi_{i,n} := \int_{(i-1)/n}^{i/n} \phi(s)ds; i = 1, ..., n$ et $X_{1,n}, ..., X_{n,n}$ représente les statistiques d'ordre associées à l'échantillon $(X_1, ..., X_n)$.

- Le premier théorème général sur la normalité asymptotique de $\hat{M}_n(\phi)$ est établie par *Chernoff et al. (1967)*. Donc, nous avons :

$$\sqrt{n}\left(\hat{M}_n(\phi) - M(\phi)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(\phi)\right), \tag{3}$$

sachant que :

$$\sigma^2(\phi) := \int_0^1 \int_0^1 (\min(s,t) - st)\, \phi(s)\phi(t) dF^{\leftarrow}(s)\, dF^{\leftarrow}(t) < \infty. \tag{4}$$

- Le premier théorème général sur la normalité asymptotique de $\hat{M}_n(\phi)$ est établie par *Chernoff et al. (1967)*. Donc, nous avons :

$$\sqrt{n}\left(\hat{M}_n(\phi) - M(\phi)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(\phi)\right), \tag{3}$$

sachant que :

$$\sigma^2(\phi) := \int_0^1 \int_0^1 (\min(s,t) - st)\,\phi(s)\phi(t)dF^{\leftarrow}(s)\,dF^{\leftarrow}(t) < \infty. \tag{4}$$

- Cette condition n'est plus applicable pour la classe des distributions F ayant des variances infini.

Definition (L-functionals)

Soit X une v.a. réelle avec la fonction de distribution F ; Les L-functionals correspondant sont définis par :

$$L\left(J\right) := \int_0^1 F^{\leftarrow}\left(s\right) J\left(s\right) ds,$$

où $F^{\leftarrow}\left(s\right) := \inf\left\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\right\}, 0 < s \leq 1$; est la fonction de quantile associée a F, et J une fonction mesurable definie sur $[0, 1]$.

- Remarquons que les L-functionals sont des Mesures Spectrales des Risques Financiers.

Des travaux récents pour les L-functionals :

- ✓ Necir, A., Rassoul, A., Zitikis, R., 2010. Estimating the Conditional Tail Expectation in the Case of Heavy-Tailed Losses. Journal of Probability and Statistics.
- ✓ Necir, A., Meraghni, D., 2010. Estimating L-functionals for Heavy-Tailed Distributions and Applications. Journal of Probability and Statistics

Pour les besoins d'application, les hypothèses de régularité sur la fonction J sont nécessaires :

(H_1) J est différentiable sur $(0,1)$.

(H_2) $\lambda := \lim_{s\downarrow 0} J(1-s)/J(s) < \infty$.

(H_3) Les deux fonctions $J(s)$ et $J(1-s)$ sont à variations régulières au voisinage de zéro avec un indice commun $\beta \in \mathbb{R}$.

(H_4) Il existe une fonction $a(.)$ ne change pas de signe proche de zéro tel que :

$$\lim_{t\downarrow 0}\left(J(xt)/J(t) - x^{\beta}\right)/a(t) = x^{\beta}\frac{x^{\omega}-1}{\omega} \text{pour tout } x > 0,$$

où $\omega \leq 0$ est le paramètre de seconde ordre.

Considérons $F \in D(\alpha)$ ($\sigma^2(\phi)$ est infinie) et $0 < \alpha < 2$ et soient $k = k_n$ et $\ell = \ell_n$ des suites des nombres entiers satisfaits :

$$1 < k < n,\ 1 < \ell < n,\ k \to \infty,\ \ell \to \infty,\ k/n \to 0,\ \ell/n \to 0, \tag{5}$$

avec la condition additionnelle :

$$\ell/k \to \theta < \infty \quad \text{quand} \quad n \to \infty. \tag{6}$$

D'abord, nous devons noter lorsque $1 + \beta - 1/\alpha > 0$ et lorsque tous les deux $\hat{\alpha}_L$ et $\hat{\alpha}_R$ sont des estimateurs consistants de α, nous prenons pour tout n grand :

$$\begin{aligned} \Pr(1 + \beta - 1/\hat{\alpha}_L > 0) &= \Pr(1 + 1 + \beta - 1/\hat{\alpha}_R > 0) \qquad (7) \\ &= 1 + o(1). \end{aligned}$$

Observons maintenant que $M(\grave{\phi})$ peut être diviser en trois intégrales comme suit :

$$\begin{aligned} M(\grave{\phi}) &= \int_0^1 F_{\grave{\phi}}^{-1}(s)\,\grave{\phi}(s)\,ds \\ &= \int_0^{k/n} F_{\grave{\phi}}^{-1}(s)\,\grave{\phi}(s)\,ds + \int_{k/n}^{1+\ell/n} F_{\grave{\phi}}^{-1}(s)\,\grave{\phi}(s)\,ds \\ &\quad + \int_{1+\ell/n}^{1} F_{\grave{\phi}}^{-1}(s)\,\grave{\phi}(s)\,ds \\ &: = [M_{L,n} + M_{M,n} + M_{R,n}]. \end{aligned} \tag{8}$$

Utilisons :

- $\hat{F}_L^{\leftarrow}(s)$ et $\hat{F}_R^{\leftarrow}(1-s)$ les estimateurs de Weissman pour $F^{\leftarrow}(1-s)$ et $F^{\leftarrow}(s)$ respectivement.
- $\hat{\alpha}_L$ et $\hat{\alpha}_R$ les deux formes de l'estimateur de Hill *(1975)* pour l'index de stabilité α.

Nous pouvons estimater $M_{L,n}$, $M_{R,n}$ et $M_{M,n}$ respectivement par :

$$\hat{M}_{L,n} := \frac{(k/n)\,\grave{\phi}\,(k/n)}{1+\beta-1/\hat{\alpha}_L} X_{k,n}, \quad (9)$$

$$\hat{M}_{R,n} := \frac{(\ell/n)\,\grave{\phi}\,(1-\ell/n)}{1+\beta-1/\hat{\alpha}_R} X_{n-\ell,n}, \quad (10)$$

$$\hat{M}_{M,n} := \int_{k/n}^{1+\ell/n} \grave{\phi}\,(s)\,F^{\leftarrow}(s)\,dt = \sum_{i=k+1}^{n-\ell} \grave{\phi}_i X_{i,n}. \quad (11)$$

Alors, la formule définitive de notre estimateur est :

$$\boxed{\hat{M}_{k,\ell}\left(\grave{\phi}\right) = \frac{(k/n)\,\grave{\phi}\,(k/n)}{1+\beta-1/\hat{\alpha}_L} X_{k,n} + \sum_{i=k+1}^{n-\ell} \grave{\phi}_{i,n} X_{i,n} + \frac{(\ell/n)\,\grave{\phi}\,(1-\ell/n)}{1+\beta-1/\hat{\alpha}_R} X_{n-\ell,n}}$$

Un estimateur universel de $M(\phi)$ peut se résumer par :

$$\hat{M}_n^*\left(\grave{\phi}\right) = \hat{M}_{k,\ell}\left(\grave{\phi}\right) 1_{\left\{\sigma^2\left(\grave{\phi}\right)=\infty\right\}} + \hat{M}_n\left(\grave{\phi}\right) 1_{\left\{\sigma^2\left(\grave{\phi}\right)<\infty\right\}}. \tag{12}$$

Où $\hat{M}_n\left(\grave{\phi}\right)$ est l'estimateur classique.

Théorème (La normalité asymptotique)

Supposons que $F \in D(\alpha)$ *avec* $0 < \alpha < 2$. *Pour toute fonction mesurable* $\grave{\phi}$ *satisfaisant les hypothèses* $(H_1) - (H_4)$ *avec l'index* $\alpha \in R$ *tel que* $1/2 < 1/\alpha - \beta < 1$, *et pour toutes suites d'entiers* k *et* ℓ *tel que :* $1 < k < n$, $1 < \ell < n$, $k \to \infty$, $\ell \to \infty$, $k/n \to 0$, $\ell/n \to 0$, $\ell/k \to \theta < \infty$ *et* $\sqrt{ka}\,(k/n)\, A\,(k/n) \longrightarrow 0$, *quand* $n \to \infty$, *nous avons :*

$$\sqrt{n}\left(\hat{M}_{k,\ell}\left(\grave{\phi}\right) - M\left(\grave{\phi}\right)\right)/\sigma_n\left(\grave{\phi}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_0^2\right), \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

avec

$$\begin{aligned}\sigma_0^2 &= \sigma_0^2\,(\alpha,\beta) := (\alpha\beta+1)\,(2\alpha\beta+2-\alpha)\\ &\quad\times\left(\frac{2\alpha^2 + (\beta\alpha-1)^2 + 2\alpha\,(\beta\alpha-1)}{2\left((1+\beta)\,\alpha-1\right)^4} + \frac{1}{(1+\beta)\,\alpha-1}\right)+1.\end{aligned}$$

Conclusion

Ces résultats permettent alors :

- ✓ De construire d'une manière efficace un intervalle de confiance permettrait à des directeurs de risque d'évaluer mieux la qualité de l'analytique rapporté de risque.
- ✓ Nous avons montré la praticabilité des *MSRs* qui possèdent des propriétés théoriquement intéressantes et utile pour mesurer le risque :
  - La cohérence.
  - Elle sont basées sur la fonction d'aversion au risque.au lieu de l'intervalle de confiance.
  - La non négativité des poids des *MSRs* et leur normalisation.

"Merci Pour Votre Attention"

Liste des références

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., Heath, D., 1999. Coherent measures of risk. Mathematical Finance 9, 203–228.
- Acerbi, C., Nordio, C., Sirtori, C., 2008. Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management. Abaxbank, Corso Monforte 34, 20122 Milano Italy.
- Acerbi, C., Tasche, D., 2001. Expected shortfall : A natural alternative to value at risk. Economic Notes 31, 379–388.
- Acerbi, C., Tasche, D., 2001. On the coherence of Expected Shortfall.
- Charpentier, A., 2007. Estimating quantiles and related risk measures. Seminaire du GREMAQ, univ-rennes1.

Liste des références

- Jones, B., Empirical estimation of risk measure values and parameters. Department of Statistical and Actuarial Sciences University of Western Ontario.
- Jones, B.L., Zitikis, R., 2003. Empirical estimation of risk measures and related quantities. North American Actuarial Journal 7, 44–54. Series in Statistics, Springer.
- Jones, B. L., Zitikis, R., 2005. Testing for the order of risk measures : an application of L-statistics in actuarial science. International Journal of Statistics, vol. LXIII, n. 2, pp. 193-211.
- Meraghni, D., 2008. Modelling distribution tails. A Thesis Presented For The Degree of Doctor of Sciences, University of Mohamed Kheider, Biskra, Algeria.

Liste des références

- Necir, A., 2006. A Nonparametric Sequential Test with Power 1 for the Mean of Lévy-stable Laws with Infinite Variance. Springer Science + Business Media, LLC.
- Sordo, M.A., 2008. Characterizations of classes of risk measures by dispersive orders. Insurance : Mathematics and Economics 42 1028–1034.
- Samorodnitsky, G. Taqqu, M.S., 1994. Stable non-Gaussian random processes : stochastic models with infinite variance. Chapman & Hall, New York.

Liste des références

- Wang, S.S., 2000. A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks. Journal of Risk and Insurance 167(1), 15–36.
- Wang, S.S., 1998. An Actuarial Index of the Right-Tail Risk. North American Actuarial Journal 2(2) : 88–101.
- Wang, Y., Chen, Z., 2008. Two side coherent risk measures and their application in realistic portfolio optimization
- Wirch, J.L. Hardy, M.R., Ordering of Risk Measures for Capital Adequacy.
- Suluck, P., Mokkhavesa, S., Pratabjai N., 2008. Value-at-Risk and Expected Shortfall under Extreme Value Theory.