

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE MOHAMED KHIDER BISKRA

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de Mathématiques



MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Magister en Mathématiques

Par

Fatima OUAAR

Thème

*ESTIMATION EMPIRIQUE DE LA MESURE SPECTRALE
DES RISQUES FINANCIERS*

Option

Probabilités & Statistique

Soutenu publiquement le : Jeudi 06 Mai 2010

Devant le jury :

Président: Brahim MEZERDI	Pr.	U.M.K BISKRA
Rapporteur: Abdelhakim NECIR	Pr.	U.M.K BISKRA
Examineur: Djamel MERAGHNI	M.C. (A)	U.M.K BISKRA
Examineur: Khaled MELKEMI	M.C. (A)	U.M.K BISKRA



Table des matières

Remerciments	v
Abréviations et Notations	vi
Glossaire Relatives au Mesure: de Rsique	vii
Introduction Générale	ix
1 Risques Extrêmes en Finance	1
1.1 Les Risques Financiers	2
1.1.1 Définitions	2
1.1.2 Zoologie des Risques Financiers	2
1.1.3 Nécessité d'Intégrer des Mesures dans la Gestion de Risque	3
1.2 Mesures des Risques Extrêmes en Finance	4
1.2.1 Définitions et Notions Fondamentaux	4
1.2.2 Définition Formelle d'une Mesure de Risque	5
1.2.3 Paramètres d'une Mesure de Risque	6
1.3 VaR comme Mesure de Risque	7
1.3.1 Définition de la VaR	7
1.3.2 Formidable Avantages Présentées par la VaR	8
1.3.3 Limites de la VaR	9
1.4 Mesures Convexes et Cohérentes des Risques Financiers	10
1.4.1 Axiomes de Cohérence	11
1.4.2 Importance de Sous Additivité	12
1.4.3 Prolongation des Mesures Cohérentes aux Mesures Convexes	13
1.4.4 Mesures Alternatives à la VaR	15
2 Mesures Spectrales des Risques Financiers	17
2.1 Concepts des Mesures Spectrales de Risque	18
2.1.1 Définition des Mesures Spectrales de Risque	18
2.1.2 Fonction d'Aversion au Risque	22
2.1.3 Cohérence des Mesures Spectrales de Risque	24
2.1.4 Convexité des Mesures Spectrales de Risque	24
2.2 Exemples des Mesures Spectrales de Risque	26
2.2.1 L'Expected Shortfall	27
2.2.2 La Transformée de Wang	28

2.2.3	La Proportional Hazard	29
2.2.4	L'Espérance Mathématique	30
2.3	Relation entre les MSRs et les Mesures de Distorsions	31
2.3.1	Définition des Mesures de Distorsions	31
2.3.2	Mesures de Distorsions Concaves et Cohérentes	32
2.3.3	Equivalence entre Les Mesures Spectrales et les Mesures de Distorsions	33
2.4	Comparaison Entre Les Mesures de Risque Alternatives	37
3	Valeurs Extrêmes en Finance et Modélisation Stable	39
3.1	Présentation de La Théorie des Valeurs Extrêmes	40
3.1.1	Définition des Statistiques d'Ordre	41
3.1.2	Distributions des Valeurs Extrêmes	42
3.1.3	Théorème de Fisher-Tippett	45
3.1.4	Maximum Domaine d'Attraction	46
3.1.5	Estimateurs Non Paramétriques de L'indice de Queue	48
3.2	Modélisation avec Les Lois Stables	50
3.2.1	Stabilité au sens de Lévy ou L-stabilité	50
3.2.2	Interprétation des Paramètres d'une Variable Stable	53
3.2.3	Convenance des Modèles Stables et Propriétés Arithmétiques	53
4	Estimation Empirique des Mesures Spectrales De Risque	56
4.1	Motivation	57
4.1.1	Estimation Classique Des Mesures Spectrales De Risque	57
4.1.2	Utilisation des L-functionals	59
4.1.3	Quelques hypothèses sur la régularité de J	60
4.2	Estimation Empirique Des Mesures Spectrales De Risque	61
4.2.1	Estimation Des Quantiles Extrêmes	61
4.2.2	Choix optimal du Nombre des Statistiques d'ordre Supérieures	62
4.2.3	Définition de l'Estimateur Empirique	63
4.3	Construction Des Bornes de L'intervalle de Confiance	67
	Conclusion Générale et Perspectives	69
	Bibliographie	72
	Annexe A	83
	Annexe B	86

Table des figures

<u>Figure</u>	<u>Page</u>
FIG. 2.1. Convexité des MSR _s	25
FIG. 2.2. La MSR est une fermeture convexe d'ES.	25
FIG. 2.3. L'allure du spectre d'ES.....	28
FIG. 2.4. L'allure de spectre pour la Transformée de Wang.	29
FIG. 2.5. L'allure de spectre pour la Proportional Hazard.	30
FIG. 2.6. Pondération des quantiles de l'espérance mathématiques	31
FIG. 2.7. Relation entre les MSR _s et les mesures de distorsions de risque.....	34
FIG. 2.8. Equivalence entre les MSR _s et les mesures de distorsions de risque.....	35
FIG. 3.1. Fonctions de distribution du Gumbel (en noir), de Fréchet (en rouge) et de Weibull (en bleu).....	44
FIG. 3.2. L'estimateur de Pickands.....	49
FIG. 3.3. L'estimateur de Hill.....	50
FIG. B.1. Prix des séries financières: Nasdaq, Nikkei225 et S&P500.....	86
FIG. B.2. Séries des rendements de Nasdaq, Nikkei225 et S&P500.....	87
FIG. B.3. La Volatilité des rendements.....	88
FIG. B.3. Test graphique de la normalité des séries des rendements.....	89
FIG. B.5. Histogrammes des séries de rendement:	90

Liste des tableaux

<u>Tableau</u>		<u>Page</u>
TAB. 3.1.	Comparaison entre les mesures de distorsions et les MSR.....	37
TAB. 3.1.	Distributions des Valeurs Extrêmes.....	42
TAB. 3.2.	Moments d'une v.a. suivant une loi stable.....	54
TAB. B.1.	Statistiques des séries des rendements.....	88

Abréviations et Notations

n	Nombre entier supérieur à 1.
\mathbb{N}	Ensemble des valeurs entiers.
\mathbb{R}	Ensemble des valeurs réelles.
\mathbb{R}_+	Ensemble des valeurs réelles positives.
$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	Distribution de la loi Normale avec moyenne μ et variance σ^2 .
$\mathcal{N}(0, 1)$	Distribution de la loi Normale (ou Gaussienne) standard.
(Ω, \mathcal{F}, P)	L'espace probabilisé.
(Ω, \mathcal{F})	L'espace mesurable.
$\mathcal{L}^1([0, 1])$	Classes de fonctions définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} sommables sur $[0, 1]$.
TVE	Théorie des valeurs extrêmes
$\mathbb{E}(X)$	L'espérance mathématiques ou moyenne du v.a. X
$Var(X)$	La variance ou moment d'ordre 2 pour la v.a. X .
F	La fonction de distribution.
F^{\leftarrow}	La fonction des quantiles (l'inverse généralisé).
F_n^{\leftarrow}	La fonction des quantiles empirique.
F_n	La fonction de distribution empirique.
VEG	Valeurs Extrêmes Généralisée.
MDA	Maximum domaine d'attraction.
$D(\cdot)$	Domaine d'attraction.
i.i.d.	Indépendante et identiquement distribués.
v.a.	Variable aléatoire défini sur l'espace (Ω, \mathcal{F}, P) .
v.a.r.	Variable aléatoire réelle défini sur l'espace (Ω, \mathcal{F}, P) .
VaR	Value-at-Risk.
ES	Expected Shortfall.
MSR	Mesure Spectrale de Risque.
$\xrightarrow{\mathcal{P}}$	La convergence en probabilité.
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	La convergence en distribution.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	La convergence en loi.
$CVaR$	Conditional Value-at-Risk.
i.e.	Autrement dit.
1_A	La fonction indicatrice sur l'ensemble A .
X	v.a. défini sur (Ω, \mathcal{F}, P) .
(X_1, \dots, X_n)	Echantillon de taille n de X .
$(X_{1,n}, \dots, X_{n,n})$	Statistiques d'ordre associées à l'échantillon (X_1, \dots, X_n) .
$X_{i,n}$	La $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre.

Glossaire Relative au Mesure de Risque

Actuaire : L'origine du mot actuaire est latine Les actuaires sont des professionnels qui analysent l'impact financier du risque, en estimant les flux futurs associés. Les actuaires utilisent des techniques en mathématiques, en économie et en statistiques pour modéliser certains évènements futurs, tels que la durée de la vie humaine ou les pertes pécuniaires associées aux accidents. Habituellement le travail d'un actuaire (actuariat) implique la quantification des montants que représentent à une date donnée une somme d'argent ou une responsabilité financière futures. Des modèles stochastiques peuvent être utilisés pour déterminer une distribution et les paramètres de la distribution telle que la valeur moyenne probable. Récemment la portée du domaine actuariel s'est étendue pour inclure les conseils d'investissement, et même la gestion d'actifs.

Actifs financiers : est un titre ou un contrat, généralement transmissible et négociable (par exemple sur un marché financier), qui est susceptible de produire à son détenteur des revenus et/ou un gain en capital, en contrepartie d'une certaine prise de risque.

Analyse de scénario : est un processus d'analyser les futurs événements possibles en considérant des résultats possibles alternatifs (scénarios).

Capital : désigne un ensemble de biens ou de richesses accumulés générant de nouveaux biens ou revenus. Le terme de capital est toutefois employé avec des définitions spécifiques en sciences économiques, en finance et comptabilité ou en sociologie.

Diversification : est le fait pour une entreprise de créer ou d'acquérir de nouvelles activités, ou de les étendre à d'autres territoires géographiques. Elle est destinée à :diviser ses risques d'exploitation ou au contraire à prendre de nouveaux risques pour profiter d'occasions (options réelles) et si possible de synergies (diversification offensive) ou éventuellement compenser un recul de rentabilité de ses activités et marchés traditionnels (diversification défensive), c'est alors un outil de reconversion.

Finance : désigne les méthodes et les institutions qui permettent d'obtenir les capitaux nécessaires dont on ne dispose pas et de placer ceux dont on a la disposition sans emploi immédiat ou que l'on compte utiliser plus tard. Les acteurs de la finance

sont tous les agents économiques qui recherchent des capitaux ou qui souhaitent les placer.

Flux financier : s'exerce entre différents secteurs institutionnels, c'est la valeur de ventes et d'achats dans une période comptable, le plus souvent un trimestre ou une année.

Investisseur : Personne qui place ses avoirs dans des actifs financiers. L'investisseur neutre au risque est indifférent entre deux actifs qui possèdent des rendements moyens égaux mais des niveaux de risques différents. L'investisseur averse au risque est confronté à deux actifs ayant des rendements moyens identiques, l'investisseur averse au risque préfère l'actif le moins risqué. L'investisseur risquophile est confronté à deux actifs ayant des rendements moyens identiques, l'investisseur risquophile préfère l'actif le plus risqué.

Marchés financiers : (en anglais, on dit de plus en plus : capital markets, soit marchés de capitaux, au lieu de financial markets), sont les marchés où sont effectuées les transactions sur des actifs financiers et, de plus en plus, leurs produits dérivés

Portefeuille : En finance, un portefeuille désigne une collection d'actifs financiers détenus par un établissement ou un individu. Une caractéristique importante d'un portefeuille est son degré de diversification qui permet d'atteindre un juste milieu entre le risque, la volatilité et la rentabilité du portefeuille, tout en tenant compte de la durée prévue du placement (horizon de temps).

Volatilité : En finances, la volatilité est une mesure de l'ampleur des variations du cours d'un actif financier.

Introduction Générale

Nous vivons dans une société du risque. Non que les dangers qui nous entourent soient plus nombreux ou redoutables qu'auparavant, mais parce que la notion de risque occupe désormais une place centrale dans les politiques publiques, le management des organisations publiques et privées, et les controverses autour des nouvelles technologies ; Téléphonie mobile, déchets nucléaires, boues d'épuration urbaines. On ne compte plus les activités qualifiées de risque pour la santé ou l'environnement. Ainsi, compte tenu de l'évolution et le changement dans le domaine financier, il est plus que jamais dans l'intérêt des gestionnaires de portefeuilles et des investisseurs en général de comprendre et de gérer convenablement les risques extrêmes due a cet changement. En effet, le changement est la seule constante.

Dans ce contexte, la gestion des risques devenue si prédominante au cours des dernières années, elle est une préoccupation majeure pour les gouvernements et les entreprises, donnant lieu à des tentatives de "mesure" des risques à tous les niveaux en développant des outils pour une meilleure compréhension des risques financiers. Ces les mathématiques financières qui utilisent principalement des outils issus de l'actualisation de la théorie des probabilités, de calcul stochastiques, des statistiques et de calcul différentielles, elles ont pour but la modélisation, la quantification et la compréhension des phénomènes régissant les marchés financiers, elles aident à comprendre la nature d'un pari donné en offrant des méthodes pour préciser en quel sens le pari est avantageux, équitable ou acceptable, et en permettant de quantifier son risque et le mesurer.

Ce Pendant, les mesures du risque financier se manifestent explicitement dans beaucoup de différents types de problèmes d'assurance et de finance, y compris la détermination des réservations ou capital, l'arrangement des primes et des seuils, et l'évaluation des valeurs telles que des pertes prévues et des pertes maximum probables ; elles se manifestent implicitement dans les problèmes impliquant le déficit et les ruines des probabilités. Dont le rôle important que peut jouer dans la prévision du comportement des marchés financiers. La mesure de rsisque est un problème actuariel important basé sur de divers systèmes d'axiomes.

Il existe nombreuses façons de mesurer le risque, la mesure la plus répandue est la Value-at-Risk (VaR) établie par *JP Morgan (1994)*. VaR comme mesure de risque est profondément dénigrée et souffre des contradictions en raison de ne pas être une mesure cohérente de risque selon *Artzner et al. (1999)*, pour éviter ces inconvénients,

on assiste à l'émergence d'une mesure qui présente entre autres la propriété de sous additivité, il s'agit de l'Expected Shortfall (ou Contidional- VaR) qui est considérée comme alternative de la VaR comme il est mentionné dans *Acerbi et al. (2001)*, *Acerbi et Tasche (2001, 2002)* et *Cotter et Dowd (2006)*.

En effet, une la plus intéressante mesure de risque dans les dernières années est la théorie spectrale des mesures de risque proposée par *Acerbi (2002, 2004)*. Elle satisfait les propriétés de cohérence, contrairement aux mesures du risque classique, les mesures spectrales prennent également en compte l'aversion au risque d'utilisateur. Cependant, la classe des mesures spectrales est les seules mesures de risque qui sont à la fois cohérentes et prennent compte explicitement de degré d'aversion de risque d'utilisateur. Elles ont de nombreuses applications ; elles pourraient être utilisées dans les problèmes d'allocation du capital économique entre les différentes activités, elles pourraient représenter une ouverture intéressante à fin d'examiner des différents profils de risque et différents portefeuilles efficaces d'actifs financiers...

Tandis que les mesures spectrales de risque demeurent exactement une tâche critique pour les établissements financiers, l'attention croissante est concentrée sur l'estimation de ces mesures ; d'où leur est un excellent outil d'aide à la décision, pour évaluer la probabilité d'occurrence d'événements rares qui se traduit par l'apparition des valeurs extrêmes dans la série des rendements financiers, c'est dans ce cadre, que la théorie des valeurs extrêmes présentée par *Fisher et Tippett (1928)* a récemment trouvé sa place dans le domaine de la finance afin d'étudier les fluctuations des cours extrêmes, et la modélisation des événements rares.

Cela nous a conduit à lancer notre problématique :

Dans le cas des événements rares ; peut-on établir un estimateur asymptotiquement normal pour la mesure spectrale des risques financiers et de construire leur intervalle de confiance ?

Afin de répondre à notre problématique, on va dans le parcours poser nos hypothèses :

1. Les phénomènes financiers, pour lesquels il était tout à fait clair que les modèles gaussiens ne convenaient pas. On s'appuie sur les lois α -stables.
2. Dans le cas des événements extrêmes dans la finance, les méthodes classiques d'estimation telle que le théorème de la limite centrale devient inapplicable à cause des faits stylisés représentés par les séries financières, à cet effet on va proposer un estimateur asymptotiquement normal par la méthode empirique.

L'objectif alors est de comparer et évaluer la performance des résultats d'estimation empirique des mesures spectrales qui s'intéressent à toute la distribution, et l'approche des valeurs extrêmes qui s'intéresse en particulier aux queues de distribution, pour savoir si la théorie des valeurs extrêmes fournit un estimateur efficace et robuste de la mesure spectrale des risques financiers plus précise que celles obtenues par les méthodes classiques. Une telle estimation sert à atteindre d'autres objectifs pratiques, telle que :

Décrire (quantifier et qualifier les risques financiers), contrôler (établir et surveiller des limites opérationnelles), réduire (déterminer la tactique de diminution des risques).

Dans le but d'arriver à la réalisation de nos objectifs, nous proposons un plan qui s'articule autour de 4 chapitres :

Le Chapitre 1 : Se décompose en quatre sections ; dans la première nous allons définir le risque comme étant un outil de mesure du risque tel que nous allons parler de toutes ces types avec plus de concentration aux risques financiers, la deuxième sections n'est plus qu'une motivation et quelques définitions fondamentaux. L'exemple le plus récent des mesures de risque et la mesure de la VaR qui est l'objet de la troisième section. On va conclure le premier chapitre par la quatrième section dont nous allons prendre la définition axiomatique des mesures cohérentes de risque et leur importance. Nous allons exposer les mesures convexes de risque, et nous allons remarquer que les mesures cohérentes de risque n'étaient qu'un cas particulier de ces dernières. Nous nous concentrerons notamment sur les exemples concrets spécifiques qui montrent les conséquences du manque de sous additivité de VaR comme l' ES qui apparaît comme généralisation de $CVaR$.

Le Chapitre 2 : Dans ce chapitre nous allons introduire des notions des mesures spectrales, nous allons présenter la fonction d'aversion au risque qui fournit alternativement une mesure spectrale subjective de l'investisseur, nous allons étudier sa représentation cohérente qui est obtenu comme fermeture convexe d' ES pour tous les niveaux possibles de confiance, dans la deuxième section plusieurs exemples concrets des mesures de risque financières réelles seront fournis. Dans la dernière section nous allons établir l'équivalence entre les mesures spectrales et celles de distorsion. Puis nous allons présenter le rapport entre la mesure spectrale de risque et la mesure de risque de distorsion avec une simple comparaison entre les mesures de risque alternatives.

Le Chapitre 3 : Dans la première section, nous allons présenter la Théorie des Valeurs Extrêmes (TVE) qui fournit le conseil sur le genre de distribution que nous devrions sélectionner afin que les risques extrêmes soient maniés d'une manière conservatrice. Nous allons rappeler quelques principes de base de cette théorie telle que les statistiques d'ordre, les distributions des valeurs extrêmes,... La deuxième section sera évidemment consacrée sur les modèles α -stables de Lévy dans les années 20 qui sont une classe riche des distributions de probabilité possèdent la propriété de stabilité par addition et caractérisées par quatre paramètres, ce qui facilite grandement les analyses et les estimations...

Le Chapitre 4 : Finalement, le dernier chapitre sera réservé pour l'étude empirique, il a un aspect estimatif ; la première section est une motivation sert à décrire la formule classique de l'estimateur de la mesure spectrale de risque financier qui est considérée comme L -statistiques. La deuxième section nous allons établir la formule finale de notre estimateur proposé et vérifie la pertinence de la méthode empirique, mettant en exergue les résultats de l'estimation obtenus par la théorie des valeurs extrêmes à l'aide des quantités de L -functionals, avec une brève explication sur le choix optimal des statistiques d'ordre et l'estimation des quantiles extrêmes. Nous achevons le présent mémoire en mentionnant légèrement aux étapes de construction d'un in-

tervalle de confiance. Nosres considérations sont basées sur les résultats récemment publiés par *Necir et Marghani (2009)*.

INTRODUCTION GENERALE

Chapitre 1

Risques Extrêmes en Finance

Le risque est un élément présent dans la plupart des décisions d'investissement prises par une entreprise ou par un épargnant, c'est est un concept asymétrique, relatif, heteroskedastic, multidimensionnel qui doit tenir compte du comportement asymptotique des rendements et de l'impact de plusieurs phénomènes économiques qui pourraient influencer les préférences d'un investisseur. Notons qu'en finance la mesure du risque est liée à sa volatilité et son écart-type, il existe toujours une incertitude concernant le risque ; c'est pour quoi les mesures de risques ont très souvent utilisées, par les praticiens aussi bien que par les académiciens.

Dans la suite du ce chapitre, nous donnerons tous les détails de la théorie de mesure de risque :

Dans la première section ; nous allons donner quelques explications de différents types des risques financiers dans un cadre plutôt informel. Le but étant ici de motiver la définition de la notion de risque et la nécessité d'intégrer des mesures de risque dans le domaine de la gestion de risque. Dans la deuxième section ; nous allons exposer les différentes définitions et notions fondamentaux concernant les mesures de risques financiers et leurs paramètres (Sélection de l'horizon, de seuil de confiance et du variable financière).

Dans la troisième section, nous sommes intéressés uniquement à traiter la mesure du VaR notamment sa définition, leur avantages et leur inconvénients. Pour pallier à ces déficiences, *Artzner et al. (1999)* ont présenté la notion des mesures cohérentes de risque et proposent les axiomes qu'une mesure de risque raisonnable doit satisfaire. Cet ensemble d'axiomes a été largement accepté et considéré comme une borne limite dans le domaine de la théorie de risque, c'est pour ça qu'on a consacré la quatrième section sur la cohérence et leur relation avec la propriété du convexité, ainsi nous allons aborder quelques mesures alternatives à la VaR telle que l'Expected Shortfall.

1.1 Les Risques Financiers

Le risque est un mot avec des implications diverses. Certaines personnes définissent le risque différemment des autres. Cet désaccord causes des graves confusions dans le domaine de l'évaluation des risques et de leur gestion.

1.1.1 Définitions

Le *Webster's Collegiate Dictionary, 5e édition*, définit le risque comme la possibilité de perte, le degré de probabilité de la perte, le montant de la perte éventuelle, le type de la perte qu'une société d'assurance couvre, et ainsi de suite. Des autres dictionnaires posent des définitions telles que celles-ci ne sont pas suffisamment précises pour l'évaluation des risques.

La littérature scientifique et professionnelle propose plusieurs définitions différentes, par exemple :

Définition 1.1. (*Risque en littérature*)

Le risque est la prise en compte par une personne de la possibilité de réalisation d'un évènement contraire à ses attentes ou à son intérêt, il est alors la probabilité objective que les résultats réels de l'évènement différeront de manière significative du revenu prévu c'est une perte potentielle, identifiée et quantifiable.

Par abus de langage, le risque peut aussi désigner à la fois l'évènement considéré et la probabilité de sa survenue. Il est alors la réunion d'ensembles de triplets comprenant : un scénario (c'est-à-dire un évènement), une probabilité et une conséquence de cet évènement.

Plus précisément ; le risque financier est un risque de perdre de l'argent suite à une opération financière (sur un actif financier) ou à une opération économique ayant une incidence financière (par exemple une vente à crédit ou en devises étrangères).

Définition 1.2. (*Risque en Mathématiques*)

Fixons un espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) . Un risque est une v.a définie sur (Ω, \mathcal{F}) désigné par X . Il représente la perte nette finale d'une position (éventualité) actuellement détenues. Lorsque $X > 0$, on dit qu'il y a une perte, la classe de ces v.a. sur (Ω, \mathcal{F}) est noté par ϕ .

1.1.2 Zoologie des Risques Financiers

Dans la littérature financière, on distingue quatre types de risques : le risque commercial, le risque stratégique, le risque opérationnel et le risque financier.

Le risque commercial concerne uniquement le risque de la présence d'un produit sur le marché. Le risque stratégique résulte des changements fondamentaux dans l'environnement politique économique (expropriation, nationalisation...etc.). Le risque opérationnel est dû à un mauvais système de gestion et de management. Le risque financier, causé par les mouvements dans les marchés financiers.

Tous ces risques sont importants ; cependant, dans cette étude nous sommes intéressés seulement au risque financier dont on distingue traditionnellement trois grands types :

1. **Risque de marché** : peut se définir comme le risque de perte qui découle de l'évolution anormale ou désavantageuse liée aux variations des conditions de marché et les fluctuations des prix des instruments financiers qui composent un portefeuille (des taux d'intérêt, des taux de change, le prix des actifs financiers, le cours des actions et les prix des produits dérivés, volatilités, etc...).
2. **Risque de crédit** : dû au non respect des engagements des partenaires contractant des crédits. Ce risque correspond à la possibilité de subir des pertes financières découlant de l'incompétence d'une entreprise, d'un émetteur ou d'une contrepartie d'honorer ses engagements financiers. Ce risque est particulièrement présent dans le portefeuille d'investissement à impact économique.
3. **Risque de liquidité** : concerne les placements financiers qui sont très difficiles à rendre liquide, c'est-à-dire à vendre rapidement en cas de besoin de liquidité.

1.1.3 Nécessité d'Intégrer des Mesures dans la Gestion de Risque

Le risque extrême d'événement est présent dans tous les secteurs de gestion des risques, il est très important de le mesurer, c'est-à-dire d'évaluer leur probabilité de survenance et la gravité de leurs lourdes conséquences sur le déroulement du projet et sur sa réussite. L'apparition du risque peut aussi conduire à la dégradation de l'environnement, à la perte de fonctions ou tout simplement à des événements rares et graves. C'est pour cela que les mesures de risque ont récemment reçu une attention considérable dans la littérature actuarielle et mathématiques financières. Elles ont été intensivement étudiées et sont généralement fondées sur des caractérisations imposant un ensemble d'axiomes, qui sont utilisés pour justifier une mesure de risque et de la critiquer.

Ces mesures de risque ne sont pas uniques. Dans certaines situations, il sera plus convenable d'utiliser une mesure de risque plutôt qu'une autre. Au niveau le plus simple, nous pourrions calculer la moyenne ou la variance d'un risque. Ceux-ci mesurent des aspects du risque mais ne fournissent pas beaucoup d'informations au sujet

du risque extrême. Il y a des mesures de risque qui essaient de décrire la queue d'une distribution de perte (VaR , ES , MSR ...), avec lesquels les difficultés financières et les risques majeures doivent être gérées par l'élaboration des différentes stratégies afin de couvrir les risques et garder une bonne santé financière pour un tel établissement.

Afin de raffiner l'importance des mesures de risque et leur rôle fatal dans la gestion financière, nous allons dans la suite rapprocher la notion des mesures de risque d'une manière plus détaillée.

1.2 Mesures des Risques Extrêmes en Finance

Nous sommes intéressés à trois mesures de risque, les deux premières (VaR et ES), ont principalement des fins de comparaison, et la troisième (Mesure spectrale MSR ou, plus correctement, la valeur extrême spectrale et cohérente du risque) pour illustrer son importance ce qui nous servira ultérieurement.

1.2.1 Définitions et Notions Fondamentales

Cette partie propose quelques détails techniques permettant de bien poser les bases concernant la suite. On s'attarde donc quelques instants sur les notions de fonctions de quantile, les distributions de probabilités. Notre problème s'intéresse d'une manière générale à des v.a.r. Ces v.a. représentent dans la pratique les actifs considérés ou le revenu d'un portefeuille dont on cherche à quantifier le risque.

On se place dans un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) . Une v.a.r. définie sur cet espace probabilisé est alors une fonction X , \mathcal{F} -mesurable, à valeurs dans \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} X : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longrightarrow X(\omega). \end{aligned}$$

Pour un scénario $\omega \in \Omega$, la position $X(\omega)$ s'interprète comme une perte (si $X(\omega) < 0$, alors $-X(\omega)$ s'interprète comme un gain), on considère sa fonction de répartition définie de la manière suivante :

$$F(x) = \Pr \{X(\omega) \leq x\},$$

on suppose que cette fonction de répartition est continue à droite. Cette définition est valable pour des distributions de probabilité aussi bien continues que discrètes.

La fonction de quantile de X s'interprète comme une fonction "pseudo-inverse" de sa fonction de répartition. On la définit de la manière suivante :

$$F_X^{-1}(p) = \inf \{x / F_X(x) \geq p\}.$$

Certes il existe bon nombre de définitions différentes concernant la fonction de quantile et même concernant la fonction de répartition selon qu'on adopte des inégalités strictes ou larges, mais nous choisirons cette définition dans toute la suite du travail.

On peut constater que la fonction de quantile d'une v.a X , considérant la propriété de continuité à droite de la fonction de répartition, est continue à gauche. La fonction de quantile est donc définie sur l'intervalle $[0, 1]$ mais ne vérifie pas la propriété $F_X(F_X^{-1}(p)) = p$, surtout lorsque la densité de la v.a X s'annule sur un ensemble d'intérieur non-vidé ! C'est typiquement le cas des distributions de probabilité discrètes.

Dans notre travail, nous sommes principalement intéressé a des pertes, i.e. a des basses valeurs de X . Fixons quelque niveau de la confiance $\alpha \in (0, 1)$. Nous ferons souvent usage de la fonction indicatrice :

$$1_A(\alpha) = 1_A = \begin{cases} 1, & \alpha \in \mathcal{F} \\ 0, & \alpha \notin \mathcal{F}. \end{cases}$$

1.2.2 Définition Formelle d'une Mesure de Risque

Une mesure de risque constitue un outil important, n'importe qu'elle établissement financière peut faire appel à diverses techniques pour mesurer et contrôler le risque qu'elle assume dans ses diverses activités. Pour chaque type d'activité, elle peut déterminer les mesures du risque les plus convenables. Une mesure de risque est définie comme suit :

Définition 1.3. (*Mesure de Risque*)

Une mesure de risque est une application :

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longrightarrow \rho(X) \end{aligned}$$

censée à quantifier le risque porté par la v.a. X définie sur (Ω, \mathcal{F}, P) .

Une mesure de risque définie en tant qu'une trace d'une classe des v.a définies sur un espace mesurable (représentant les risques actuels) aux nombres réelles. Un bon sens de la valeur numérique d'une mesure de risque est donné par la certitude équivalente pour une mesure de risque donnée et pour une v.a donnée, l'équivalent de certitude est le nombre réel qui est tout aussi risqué.

En termes économiques, nous interprétons $\rho(X)$ comme le montant de capital qui devrait être ajouté en tant qu'amortisseur pour un portefeuille avec une perte donnée

par X , de sorte que le portefeuille devient acceptable à un contrôleur externe ou interne de risque (elle doit saisir le risque sur les préférences du décideur).

1.2.3 Paramètres d'une Mesure de Risque

Pour chaque mesure de risque, il faut spécifier trois paramètres essentiels : l'horizon de modélisation, le seuil de confiance et la variable financière à modéliser.

1. **Sélection de l'horizon** : L'horizon est la durée de temps sur laquelle le modèle doit être projeté pour produire des informations adéquates. Un horizon relativement court a le désavantage que la plupart des stratégies ne peuvent pas avoir leurs effets complets à court terme. En revanche, un long horizon freine la modélisation en projetant la variable économique loin dans le futur, ce qui peut entraîner la dégradation de la capacité de modélisation à tirer des conclusions fiables. En effet, plus l'horizon est long, plus la sensibilité du modèle aux hypothèses sous-jacentes est élevée.
2. **Sélection du seuil de confiance** : Le choix du seuil de confiance est un paramètre capital de la mesure de risque. Il s'agit de spécifier la valeur critique de la mesure qui distingue entre le niveau acceptable et le niveau inacceptable de risque. Généralement, pour une mesure de risque donnée, on fixe un niveau de confiance (par exemple 99% pour le risque de marché) qui correspond à la probabilité que le montant des pertes ne dépasse pas cette mesure de risque en valeur absolue. Du point de vue réglementaire, l'objectif de l'utilisation de ce seuil est la minimisation du nombre de faillites.
3. **Sélection de la variable financière** : Le risque est défini en terme de changement de valeur entre deux dates. Plus exactement, entre la date de modélisation (où la valeur est connue) et une date future (l'horizon de modélisation). De ce fait, la variable à modéliser est tout simplement la valeur future dans tous les états du monde, due aux changements de marché ou plus généralement à des événements incertains. Cette variable aléatoire est interprétée en tant que valeurs futures d'une position ou d'un portefeuille actuellement détenu. De manière générale, la variable financière à modéliser peut représenter la perte d'un portefeuille donné, la perte globale d'une société,...

Outre le choix des paramètres de la mesure de risque, le choix de la mesure elle-même est également nécessaire. Ce choix, qui fait l'objet des paragraphes suivants, doit prendre en compte plusieurs critères, comme la cohérence, le risque de queue et la discontinuité de la fonction de répartition de la variable financière.

1.3 VaR comme Mesure de Risque

Depuis le milieu des années 90, le pivot du processus de mesure du risque de marché, est sans aucun doute, la Value-at-Risque (VaR). La VaR constitue un repère de mesure de risque notamment pour la mesure du capital économique et réglementaire. Certaines directives s'appuient par exemple sur cette mesure de risque, elle est adoptée par le Comité de Bâle¹ comme mesure de référence.

Il y a de vaste littérature consacrée aux méthodes d'évaluation et d'utilité de cette quantité dans les applications ; la littérature peut être également vaste est également consacrée aux critiques de VaR . Pour une vue d'ensemble générale et récente au sujet de VaR , le lecteur devrait consulter *Cotter et Dowd (2004)* et les références là-dedans.

1.3.1 Définition de la VaR

Certaines des questions les plus fréquentes au sujet de la gestion des risques dans les finances comportent l'évaluation extrême de quantile qui présentent un concept bien-compris et à fond étudié dans les statistiques. Ceci correspond à la détermination de la valeur qu'une variable donnée dépasse avec une probabilité donnée certain seuil, la VaR a hérité l'utilisation répandue en littérature de finance et d'assurance seulement après sa dénomination qui a été stabilisée après la publication du document technique de *RiskMetrics* en 1994, par *JPMorgan*. La VaR était la composante clé de ce modèle. Une définition qui est souvent utilisée pour VaR est la suivante :

Définition 1.4. (*La VaR*)

En termes mathématiques la mesure de VaR n'est rien autrement que $(1-\alpha)$ -niveau de quantile de la fonction de répartition F en effet pour un risque X sur une période donnée $[0, T]$ et $0 < \alpha < 1$, la VaR est :

$$\begin{aligned} VaR(X) &= \alpha \times 100\% \text{ quantile} \\ &= F^{\leftarrow}(1 - \alpha) \\ &= \sup\{x \in \mathbb{R} \mid \Pr(X \geq x) > 1 - \alpha\}. \end{aligned}$$

Analytiquement, la VaR associé à une position X est le plus petit montant de capital qui, s'il est ajouté à la position X et investi sans risque, rend la position acceptable.

¹Le comité de Bâle du contrôle bancaire est un comité des autorités de surveillance d'opérations bancaires qui a été établi par les gouverneurs des banques centrales du groupe de Dix pays en 1975. Il se compose des représentants aînés des autorités de surveillance de banque et des banques centrales de Belgique, Canada, France, Allemagne, Italie, Japon, Luxembourg, Pays-Bas, Espagne, Suède, Suisse, U.K, et l'Etats-Unis. Il se réunit habituellement à la banque pour des règlements internationaux à Bâle, où son secrétariat permanent est localisé.

De point de vue économique, elle permet de répondre à la question suivante :

Combien (on cherche le montant monétaire) l'établissement financier peut-elle perdre avec une probabilité $1 - \alpha$ pour une période de temps T fixé ?

VaR est la perte maximum c'est une estimation de la perte éventuelle supportée par un établissement sur son portefeuille de positions, dans l'hypothèse d'un scénario défavorable de marché que nous pourrions prévoir à l'intérieur d'un intervalle de confiance donné (par exemple, $\alpha = 0.05$) et sur un horizon déterminé.

L'horizon associé à la *VaR* est de quelques jours : 1 jour pour *RiskMetrics* ou 10 jours ouvrés, selon le *Comité de Bâle*. Le niveau de probabilité est typiquement de 95% ou 99%, il s'agit d'un quantile de la distribution projetée des gains et des pertes au cours de la cible horizon dans ce cas.

1.3.2 Formidable Avantages Présentées par la VaR

La *VaR* a été considérée la mesure standard du risques basée sur des fondements scientifiques solides, Depuis son apparition, la *VaR* s'est avéré être un instrument plus souple que les mesures traditionnelles de risque. Cependant, sa mesure est un vrais challenge de statistique c'est la variable la plus représentative pour caractériser les risques associés aux événements extrêmes.

La popularité de la *VaR* est essentiellement due à son concept assez claire et sa simplicité mathématique, en outre elle est facile a calculer pour une grande variété de risques grâce a sa globalité, car elle résume en un seul numéro tous les risques d'un portefeuille et saisir toute ses informations principales avec trois informations : horizon de probabilité, perte et de temps.

VaR a présenté un changement crucial de la direction de la mesure de risque pour les raisons suivantes :

1. La *VaR* est un repère pour la mesure des risques elle est probabiliste et prévoit une perte et une probabilité de l'événement (modélisation probabiliste des risques).
2. La *VaR* est universel elle peut être mesurée sur des portefeuilles de tout types.
3. La *VaR* est indépendante de l'instrument financier auquel elle est appliquée, elle est toujours exprimée comme l'argent a perdu. Elle précise combien on peut perdre pendant la période indiquée avec une probabilité donnée et combien de capital devrait être placé pour commander l'exposition de risque d'une société.

4. La *VaR* peut être évaluée comme le quantile des rendements futurs d'un portefeuille, conditionnellement à l'information présente, puisque la fonction de distribution des rendements de portefeuille change dans le temps, le challenge est de trouver le bon modèle dynamique, qui décrit ce changement. Toute variable statistique de la queue gauche peut être déterminée sans effort supplémentaire.
5. La *VaR* sert à la détermination des besoins de capitaux que les banques doivent accomplir afin de soutenir leurs activités marchandes. L'utilisation de la *VaR* à des fins de contrôle de risque interne par les banques, la *VaR* permet d'avoir une mesure synthétique de l'exposition de la banque. Cette notion est facilement compréhensible pour les actionnaires et les managers qui peuvent décider de la quantité de risque à prendre en rapport avec la perte encourue.

1.3.3 Limites de la VaR

VaR en dépit de son universalité, plusieurs auteurs ont précisé ses déficiences. *VaR* comme mesure de risque est fortement critiquée :

1. *VaR* est difficile à optimiser. En outre, il est inadéquat d'employer la *VaR* dans la pratique en raison de sa non convexité elle possède beaucoup de minimum locaux. Ce qui peut avoir beaucoup d'extrémités locales, qui mènent au rang instable de risque.
2. *VaR* est un modèle de mesure de risque dépendante parce que, par définition, elle dépend de la référence de probabilité initiale.
3. *VaR* n'est pas une mesure de risque cohérente, car elle n'obéit pas l'axiome de sous additivité proposée par Artzner *et al.* (1999) et Acerbi et Tasche (2002) ce qui cause des contradictions, par conséquent il peut avoir un plus gros risque surgissant de la diversification. Ce résultat implique que l'agrégation des portefeuilles peut mener à une augmentation de risque.
4. La *VaR* ne mesure pas les pertes excédant le seuil de confiance, elle ignore toutes les informations concernant la queue de la distribution, et les propriétés statistiques de la perte significative au delà du seuil, par exemple elle ne s'inquiète pas au risque de queue, ne nous indique rien au sujet de la taille potentielle de la perte qui l'excède, ne tient pas compte de la sévérité d'un événement encouru de dommages.
5. Pour les portefeuilles des titres, les modèles de *VaR* utilisés sont habituellement basés sur l'hypothèse (souvent implicite) que les rentabilités suivent une distribution normale. Or, la normalité ne peut pas capturer l'épaisseur de la queue

de distribution. Sous des fluctuations extrêmes des prix des actifs ou une structure extrême de la dépendance des actifs, la VaR peut sous-estimer de manière significative le risque. *Yamai et Yoshihara (2002)* prouvent que la VaR n'a pas de risque de queue quand les distributions sont de type elliptique. La VaR est sous additive seulement si la distribution de la variable financière est normale (ou de manière générale elliptique), ce qui n'est pas souvent le cas, même pour les rentabilités des actifs sur le marché.

1.4 Mesures Convexes et Cohérentes des Risques Financiers

C'est en réponse aux lacunes de VaR qu'en 1997, un groupe de chercheurs ont proposé un ensemble d'axiomes que devrait être satisfaire par une mesure de risque pour être conforme à l'intuition.

Il y a de littérature substantielle consacrée à la question ce qui est une mesure "raisonnable" de risque et quelles conditions elle devrait satisfaire. Comme discuté par *Albrecht (2004)*, un certain nombre de systèmes axiomatiques sont disponibles dans la littérature pour la caractérisation des mesures de risque (cependant la plupart d'entre elles ont un certain chevauchement). *Artzner* et ses collaborateurs ont proposé tout à fait influent (voir *Artzner et al. (1999)* et les citations là-dedans) qui préconisent l'utilisation des mesures cohérentes.

Proposition 1.1. (*Caractérisations des mesures du risque cohérentes*)

Si ρ est une mesure du risque cohérente, alors il existe un ensemble de mesures de probabilité Q tel que :

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \{\mathbb{E}_Q(X)\}.$$

Selon *Artzner et al. (1999)* une mesure de risque est cohérente si elle adhère aux axiomes que nous énumérons maintenant :

Définition 1.5. (*Mesure Cohérente*)

Une mesure du risque $\rho : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ est cohérente si elle vérifiée ($X, Y \in \mathcal{F}$) :

1. La sous additivité :

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y),$$

plus généralement

$$\rho(nX) = \rho(X + \dots + X) \leq n\rho(X), \quad n = 1, 2, \dots$$

2. *L'homogénéité positive :*

$$\rho(\lambda X) \leq \lambda \rho(X) \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

plus généralement

$$\rho(nX) = n\rho(X), \quad n = 1, 2, \dots$$

3. *La monotonie :*

$$\rho(X) \leq \rho(Y) \quad \text{pour } X \geq Y.$$

4. *L'invariance par translation :*

$$\rho(X + c) \leq \rho(X) - c \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{R}.$$

Spécialement, nous avons $\rho(X + \rho(X)) = \rho(X) - \rho(X) = 0$ c'est-à-dire, en ajoutant $\rho(X)$ à la position initiale X , nous obtenons une position "neutre". On notera en particulier que $\rho(\alpha) = -\alpha$ avec la convention que $\rho(0) = 0$.

1.4.1 Axiomes de Cohérence

Nous expliquerons maintenant chaque axiome à leur tour :

La sous additivité : C'est l'axiome le plus important elle peut être interprété comme la diversification pour ne pas accroître les risques, parce qu'elle assure qu'une mesure cohérente de risque prend dans la diversification de portefeuille. Elle a une interprétation facile ; La mesure de risque d'une somme de deux portefeuilles est inférieure à la somme des mesures de risque de ces deux portefeuilles. Ce résultat est dû à la corrélation qui peut exister entre ces derniers.

Dans le cas contraire, cela impliquerait, par exemple, que pour diminuer le risque, il pourrait être commode de fractionner une compagnie (ou un portefeuille) en deux parties distinctes.

L'homogénéité positive : Cet axiome est un cas limite de la propriété de sous additivité qui représente l'absence de diversification, elle s'assure que nous ne pouvons pas augmenter ou diminuer le risque en investissant des montants ; en d'autres termes ; le risque résulte des provisions elle-même et n'est pas une fonction de la quantité achetée (note : ceci suppose que nous n'avons aucun risque de liquidité mais en réalité ce n'est pas vrai).

Les critères de sous additivité et homogénéité positive sont intuitivement évident du point de vue économique. En effet, en se rappelant qu'une v.a. X représente la perte par rapport à l'investissement dans un actif sans risque, il est clair que si une variable

a une perte toujours moins grande qu'un autre investissement Y , alors ce dernier est nécessairement moins risqué.

La monotonie : L'axiome de monotonie nous indique que nous associons un plus gros risque à une perte plus élevée i.e. si le portefeuille X domine le portefeuille Y , la mesure de risque du portefeuille X est supérieure à celle de Y . Ainsi, si le risque d'un portefeuille est supérieur à celui d'un autre, le capital requis pour le premier portefeuille est supérieur à celui requis pour le deuxième. Toute mesure de risque monotone et invariante par translation est 1-Lipschitz pour la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$ ².

L'invariance par translation : L'axiome d'invariance par translation peut être expliquée par le fait que l'investissement dans un lien plus risqué ne soutient aucune perte avec la probabilité 1. Par conséquent nous devons toujours recevoir la quantité initiale investie. L'investissement initial est soustrait parce que le risque mesure la perte de mesure comme quantité positive, par conséquent un gain est négatif. La propriété d'invariance par translation signifie que l'addition (ou la soustraction) d'un montant initial sûr c au portefeuille initial et son investissement dans l'actif de référence décroît (accroît) simplement la mesure de risque ρ par c .

1.4.2 Importance de Sous Additivité

C'est l'épreuve clé pour vérifier si une mesure du risque d'un portefeuille est cohérente avec ceux de ses parties. L'axiome de sous additivité a beaucoup d'importance dans la théorie des mesures de risques financiers, on peut citer par exemple que :

1- La sous additivité (principe de diversification du risque) pourrait favoriser l'accumulation du capital. Les systèmes financiers qui facilitent la diversification peuvent accélérer les changements technologiques et tendent à induire des portefeuilles qui intègrent d'avantage les projets avec les plus grandes espérances de rendements.

La motivation principale est la crainte de l'augmentation du risque de l'activité par division en différentes entités, car dans une certaine mesure, on perd l'avantage des économies d'échelle pour les mesures qui violent cet axiome, la diversification peut produire une augmentation dans leur valeur même quand les risques partiels sont déclenchés par les événements mutuellement exclusifs. Contrairement l'axiome de sous additivité sert à réduire le risque à travers les marchés boursiers internationalement intégrés ce qui peut exercer une pression à la baisse sur les taux d'épargne.

2- Elle est nécessaire pour les exigences de l'adéquation des capitaux et aussi une propriété essentielle dans les problèmes de l'optimisation du portefeuille.

²1-Lipschitz i.e. $|\rho(X) - \rho(Y)| \leq \|X - Y\|_\infty$.

3- Les mesures sous additives peuvent ralentir la croissance et réduire le bien-être économique. La théorie des mesures cohérentes fournit des bases conceptuelles qui permettent de déduire qu'un marché boursier grand, liquide et efficient favorise la croissance économique.

4- Cette propriété est en rapport avec la convexité de la surface du risque minimisée dans l'espace de portefeuilles en fait. Seulement si les surfaces sont convexes ils seront toujours dotés d'un minimum absolument unique et aucun minima local faux, et le processus de la minimisation du risque ramasseront toujours une solution optimale unique, bien diversifiée. Pourtant on peut penser, aux définitions axiomatiques alternatives possibles de mesure du risque parfaitement par conséquent, nous croyons fortement qu'aucun ensemble sensible d'axiomes pourrait admettre des violations du sous additivité en tout cas.

1.4.3 Prolongation des Mesures Cohérentes aux Mesures Convexes

Historiquement les axiomes de cohérence ont été précédé les axiomes de convexité mais plus tard des mesures de risque cohérentes ont été prolongés aux mesures de risque convexes, elles sont également appelées "*mesures de risque faiblement cohérentes*".

En effet, dans la plupart des cas cohérents *Artzner et al. (1999)*, *Föllmer et Shied (2002)* suggèrent que, le risque puisse augmenter d'une manière non linéaire lorsque on augmente la grandeur de la position, car plus la position est grande, plus il peut être difficile de la vendre en entier. C'est ce que l'on appelle un risque lié à la liquidité. Par exemple, il est possible qu'un risque de liquidité soit créer quand une position est multipliée par un facteur suffisamment grand. Par conséquent, ils proposent de détendre les contraintes de la sous additivité et de l'homogénéité positive, et en exigeant à leurs place une condition plus faible c'est la condition de "convexité".

Définition 1.6. (*Cohérence Faible*)

Nous disons qu'une mesure de risque est faiblement cohérente si elle est convexe, invariable par translation et homogène.

Passons maintenant à rappeler la définition de la convexité (*Föllmer et Shied 2002*) :

Définition 1.7. (*Convexité*)

Une mesure de risque ρ s'appelle convexe si et seulement si :

$$\rho[\lambda X + (1 - \lambda)Y] \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y),$$

pour n'importe quel risque X dans (Ω, \mathcal{F}) et poids $\lambda \in [0, 1]$.

La convexité implique que la diversification n'augmente pas le risque, car la valeur de risque de la portefeuille diversifiée $\lambda X + (1 - \lambda)Y$ est inférieure ou égale à la moyenne re-pondérer des différentes valeurs de risque.

Définition 1.8. (*Mesure de Risque Convexe*)

Une application $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ s'appellera une mesure convexe de risque si elle satisfait la condition de la convexité, du monotonie, et de l'invariance par translation.

Sous l'hypothèse $\rho(0) = 0$, la convexité de ρ implique :

$$\begin{aligned} \rho(\lambda X) &\leq \lambda \rho(X), \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall X \in \mathcal{F}, \\ \rho(\lambda X) &\leq \lambda \rho(X), \quad \forall \lambda \geq 1, \quad \forall X \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

La deuxième inégalité suggère que quand λ devient grand, la position entière (λX) soit moins de liquide que la position singulière X . Le premier indique d'abord quand λ est petit, l'inégalité opposée doit se tenir pour certaines raisons les mesures de risque convexes tiennent compte des situations où le risque d'une position augmente d'une manière non linéaire avec la taille de la position. La multiplication de chaque risque d'un portefeuille par un scalaire augmente la mesure de risque par le même scalaire.

Remarques 1.1.

- ✓ Il est clair qu'une mesure cohérente est convexe. La réciproque est fausse. La cohérence est la notion qui se rapproche le plus de notre intuition. C'est pourquoi cette définition est apparue historiquement en premier. On s'est aperçu ensuite que les principaux résultats de la théorie des mesures cohérentes de risque pouvaient être étendus de manière similaire aux mesures convexes.
- ✓ Notons que la cohérence est stable par combinaison convexe i.e. toute combinaison convexe de mesures de risques cohérentes est une mesure de risque cohérente.
- ✓ Un lecteur avisé pourrait remarquer que la définition de mesure convexe de risque est analogue à celle d'une fonction d'utilité. C'est une des raisons pour laquelle le sujet s'est développé aussi rapidement, plusieurs énoncés étant duaux à ceux de la théorie de l'utilité ³.

³En économie, l'utilité est une mesure du bien-être ou de la satisfaction obtenue par la consommation, ou du moins l'obtention, d'un bien ou d'un service. Elle est liée à la notion de besoin. Au départ, la notion d'utilité était essentiellement liée à la prise de risque. La « Théorie sur la mesure du risque » de *Daniel Bernoulli (1700 - 1782)*, et dans celle-ci, le Paradoxe de Saint-Pétersbourg furent à la base des théories économique et financière de l'aversion au risque, de la prime de risque et de l'utilité.

1.4.4 Mesures Alternatives à la VaR

Comme alternatives à la VaR , il existe dans la littérature financière différentes mesures qui définissent le risque comme la moyenne de la queue de distribution des profits/pertes (TCE , ES , $CVaR$...). Ces différentes mesures fournissent le même niveau de risque dans le cas d'une distribution sous-jacente continue. Or, dans le secteur financier, il y a une nécessité croissante à considérer des v.a. dont la distribution est discontinue. Par exemple les portefeuilles des prêts non négociés (distributions purement discrètes) ou les portefeuilles contenant les dérivés (mélanges de distributions continues et discrètes).

Artzner et al. (1999) ont proposé comme mesure de risque la TCE (Tail Conditional Expectation) définie par :

$$TCE(X) = -\mathbb{E}[X/X \leq -VaR(X)],$$

la TCE est définie comme la moyenne de toutes les pertes inférieures ou égales à $-VaR(X)$. Dans le cas d'un saut en ($x = -VaR(X)$ positive), l'intervalle $(\infty, -VaR(X))$ a une probabilité de γ^+ qui est supérieure à la probabilité $(1 - \alpha)$ sélectionnée pour la mesure de risque.

Acerbi et Tasche (2001) montrent que la TCE ne satisfait pas généralement la propriété de sous additivité dans le cas d'une distribution discontinue. Ils proposent l' ES (Expected Shortfall) comme mesure cohérente définie par :

$$ES(X) = -\mathbb{E}[X/X \leq -VaR(X)],$$

toutefois, cette mesure est définie sur l'intervalle $(\infty, -VaR(X))$ qui a une probabilité égale à γ^- et qui est inférieure à $(1 - \alpha)$.

$CVaR$ (Conditional VaR) proposée par *Rockafellar et Uryasev (2001)* est définie en terme de la VaR et d' ES pour donner une mesure définie exactement sur l'intervalle $(1 - \alpha)$ et qui satisfait l'ensemble des propriétés de cohérence définies par *Artzner et al. (1999)* :

$$CVaR(X) = \lambda(x) VaR(x) + (1 - \lambda(x)) ES(x),$$

et

$$\lambda(x) = \frac{\gamma - \gamma^-}{1 - \alpha}.$$

Dans cette équation, la probabilité de saut $\Pr(X = -VaR(X)) = \gamma^+ - \gamma^-$ est divisée en deux parties $(\gamma^+ - \gamma)$ et $(\gamma - \gamma^-)$ dont seulement est attachée à l'intervalle $(\infty, -VaR(X))$ qui a lui même une probabilité de γ^- pour achever la probabilité

sélectionnée de $(1 - \alpha)$ soit $\gamma = 1 - \alpha = \gamma^- + [\gamma - \gamma^-]$. Dans le cas où, $\gamma = \gamma^-$ l'équation donne : $CVaR(X) = ES(X)$.

Il faut noter qu'en terme de VaR , le portefeuille X est plus risqué que Y , alors qu'en terme de la TCE , d' ES ou de $CVaR$ le portefeuille Y est plus risqué que X . Cela est dû au fait que la distribution de Y présente une queue plus épaisse que celle de X .

Dans le cas où $\gamma = \gamma^- = \gamma^+$ le saut disparaît et la fonction de distribution devient continue avec $\Pr(X \leq -VaR(X)) = \Pr(X < -VaR(X))$ avec :

$$CVaR(X) = ES(X) = TCE(X).$$

si en plus la distribution de profits/pertes est normale, la VaR et l' ES (ou TCE et $CVaR$) fournissent les mêmes informations sur la queue de distribution.

Le choix d'une mesure de risque donnée reste un élément essentiel pour la gestion des risques. La TCE , l' ES et la $CVaR$ sont des meilleures mesures de risque que la VaR en terme de risque de queue.

Les avantages des premières ne viennent pas sans certains inconvénients. *Yamai et Yoshida (2002)* montrent que dans le cas d'une distribution sous-jacente à queue épaisse, les erreurs de l'estimation d' ES sont beaucoup plus élevées que celles de la VaR . Pour réduire l'erreur d'estimation, la dimension de l'échantillon du simulation doit être suffisamment élevée.

Le problème peut se poser également concernant la mesure de risque à utiliser pour l'évaluation du capital global d'une société. Pour un conglomérat financier par exemple, les différents intervenants (actionnaires, obligataires, gérants et réglementation) peuvent avoir différents objectifs amenant à l'application des différentes mesures de risque.

La gestion des risques ne peut pas s'appuyer sur une seule mesure de risque. Chaque mesure de risque offre ses propres avantages et inconvénients. A l'instar de ce qui est acquis dans la réglementation, la VaR peut être combinée avec le stress testing et d'autres mesures de risques extrêmes. Une autre approche consiste à combiner la VaR avec l' ES (ou TCE et $CVaR$) pour avoir toutes les informations concernant la perte potentielle et la perte moyenne au-delà du niveau de confiance. En assurance par exemple, la VaR peut être utilisée pour les sinistres "courants" et l' ES pour les sinistres rares (queue de distribution épaisse). Récemment *Acerbi (2002, 2004)* a proposé la théorie des mesures spectrales de risque ($SRMs$) qui appartiennent à la famille des mesures de risque cohérentes, et possèdent autre bonnes caractéristiques dont le but du chapitre suivant est de les aborder.

Chapitre 2

Mesures Spectrales des Risques Financiers

La théorie des mesures spectrales de risque financières, récemment proposée par Acerbi (2002, 2004) est considérée comme un intéressant développement dans le secteur financier, elles possèdent la propriété de sous additivité car elles appartiennent à la famille des mesures cohérentes de risque proposées par Artzner *et al.* (1997, 1999).

Un des dispositifs gentils de *MSRs* est qu'elles relient la mesure de risque elle-même à l'aversion au risque subjective de l'utilisateur, en effet, la *MSR* est une moyenne pondérée des quantiles d'une distribution de perte, dont les poids dépendent de la fonction d'aversion au risque de l'utilisateur. Les *MSRs* nous permettent de lier la mesure de risque à l'attitude de l'utilisateur envers le risque. Ils sont également une classe importante des mesures de risque qui ont beaucoup d'applications, pas moins dans les situations où les facteurs de risque sont très non normaux, comme il est mentionné par Cotter *et Dowd* (2006).

Dans ce chapitre nous allons traiter les sections suivantes :

Dans la première section, on s'attache dans un premier temps à définir les notions de *MSRs*, leurs cohérences et leurs convexités. Pour cela, une base technique mathématique est nécessaire, et on trouve également dans ce chapitre des rappels concernant les fonctions d'aversion au risque d'utilisateur.

Dans la deuxième section nous allons donner quelques exemples des *MSRs* telle que l'Expected Shortfall, Transformée de Wang, La Proportional Hazard, L'Espérance Mathématique avec plus d'explication et d'illustrations. La troisième section nous allons la réserver pour illustrer la relation entre les *MSRs* et les mesures de distorsions. Nous allons achever notre chapitre par une comparaison entre les mesures de risques alternatives telles que la *VaR*, l'*ES* avec celle de *MSR*.

2.1 Concepts des Mesures Spectrales de Risque

Dans cette partie, nous traitons les *MSRs*, qui sont une classe des mesures basées sur des intégrales de la fonction de quantile et la fonction d'aversion d'utilisateur.

Les *MSRs* abordées par *Acerbi (2002)* sont une classe des mesures cohérente de risque, par lequel le risque soit donné comme la somme d'une moyenne pondérée de résultats. Les poids peuvent être choisis pour refléter des préférences de risque vers des résultats particuliers. Dans les paragraphes qui suivent, on s'intéresse à des v.a. correspondant à des distributions en pertes.

2.1.1 Définition des Mesures Spectrales de Risque

Premièrement, on va aborder la définition des mesures spectrales utilisées dans la théorie spectrale pour pas confondre entre le concept de ces mesures et celles des *MSRs* :

En mathématiques, plus précisément en analyse fonctionnelle, une mesure spectrale est une application définie sur une tribu à valeurs dans l'espace des projections orthogonales et vérifiant des axiomes semblables aux mesures numériques. Les mesures spectrales sont utilisées pour exprimer des résultats en théorie spectrale, tels que le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints. Les mesures spectrales ont des propriétés similaires aux mesures réelles positives.

Définition 2.1. (*Mesure Spectrale*)

Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable, c'est à dire un ensemble Ω muni d'une tribu \mathcal{F} . Une mesure spectrale, aussi appelée homomorphisme spectral, est une application ϕ définie sur l'algèbre M des fonctions complexes mesurables bornées sur Ω ayant les propriétés suivantes :

1. ϕ est un homomorphisme involutif de l'algèbre M dans l'algèbre involutive des opérateurs bornés dans un espace hilbertien H .
2. Si $\xi \in H$, alors la fonction d'ensemble $v(E) = \langle \phi(E)\xi/\xi \rangle$ est une mesure à valeurs complexes.

Maintenant nous allons nous lancer quelques détails un peu techniques afin de bien définir les outils dont nous allons nous servir par la suite :

On considère tout d'abord l'ensemble $\mathcal{L}^1([0, 1])$ classes de fonctions définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} qui sont sommables sur $[0, 1]$. On parle de "classes" de fonctions puisqu'on considère qu'une classe représente deux fonctions si et seulement si

ces deux fonctions ne diffèrent que sur un sous-ensemble de l'intervalle $[0, 1]$ de mesure de *Lebesgue*¹ nulle. La norme considérée sur l'espace est $\mathcal{L}^1([0, 1])$ est définie par $\|f\| = \int_0^1 |f(p)| dp$. Par la suite, ces fonctions porteront le nom de "spectres" ou de "pondérations de quantiles".

On va à présent s'intéresser aux propriétés suivantes :

Propriétés 2.1.

1. La positivité : Un élément $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ est dit "positif" si :

$$\forall I \subset [0, 1], \int_I \phi(p) dp \geq 0.$$

2. La décroissance : On dit que $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ est décroissante si pour tous $x \in]0, 1[$ et $h > 0$, on a :

$$\int_{x-h}^x \phi(p) dp \geq \int_x^{x+h} \phi(p) dp.$$

3. La normalisation : On dit que $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ est normalisée, si :

$$\int_0^1 \phi(p) dp = 1.$$

On peut tout de suite noter que ces propriétés ne sont que la "généralisation" sous une forme intégrale des propriétés "classiques" de positivité et de décroissance. En fait, si une fonction de $\mathcal{L}^1([0, 1])$ est positive (resp. décroissante) au sens où on l'entend classiquement, elle est bien sûr positive (resp. décroissante) au sens où nous venons de le définir. Il est vrai qu'on aurait pu se limiter aux propriétés classiques de positivité et de décroissance mais cette définition permet d'inclure des spectres un peu particuliers, comme ceux qui présentent un *Dirac* en un point par exemple, *Var* de niveau α correspondrait à un spectre qui est un *Dirac* en α .

Dans ces conditions on définit ce qu'on appelle un "spectre admissible". Cette définition va nous permettre ensuite de définir une *MSR*, l'outil de mesure de risque dont nous allons nous servir dans toute la suite du mémoire :

Définition 2.2. (*Spectre admissible*)

Une fonction $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ est appelée "spectre admissible" si elle est :

¹Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ l'espace mesurable \mathbb{R} muni de sa tribu borélienne. Il existe une unique mesure notée λ sur cet espace mesurable qui possède les deux propriétés suivantes :

1. $\forall a \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda(a + A) = \lambda(A)$ (invariance par translation).
2. $\lambda([0, 1]) = 1$.

Cette mesure est appelée mesure de *Lebesgue* sur \mathbb{R} . De plus, elle coïncide avec la notion de longueur sur les intervalles, i.e. que la mesure de *Lebesgue* d'un intervalle est égale à la longueur de cet intervalle.

1. Positive i.e. $\phi \geq 0$,
2. décroissante,
3. norme égale à 1 i.e. $\|\phi\| = \int_0^1 |\phi(t)| dt = 1$.

Les notions de positivité et de décroissance sont bien sûr prises au sens "intégral".

Le théorème suivant montre la relation entre une telle mesure de risque et l'admissibilité du spectre :

Théorème 2.1. (Relation entre la mesure de risque et l'admissibilité du spectre)

Soit $M_\phi(X)$ défini par :

$$M_\phi(X) = - \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p) \phi(p) dp,$$

avec $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$. Si ϕ est un spectre admissible de risque alors $M_\phi(X)$ est une mesure de risque.

On en vient alors immédiatement aux mesures spectrales :

Les *MSRs* représentent en quelque sorte une généralisation du concept de pondération de quantiles de la distribution des rendements, en utilisant une fonction non croissante de poids appelée le spectre, puisque cette fois on va pondérer de manière quasi-quelconque les quantiles de la distribution des pertes, ce qui crée une vaste classe de mesures de risque. Elle est définie comme suit :

Définition 2.3. (*MSRs*)

Soit, un spectre admissible $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$, la mesure de risque :

$$M_\phi(X) = - \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p) \phi(p) dp,$$

s'appelle la *MSR* produite par ϕ . $F_X^{\leftarrow}(p)$ est la fonction de quantile pour un niveau de probabilité p .

ϕ s'appelle la fonction d'aversion de risque (pondération de quantile) elle est également connu sous le nom de spectre de risque ou fonction poids. Pour obtenir une *MSR*, il nous reste à déterminer la fonction $\phi(p)$, elle assigne, en fait, les poids différent de p -niveau de confiance de la queue.

Remarque 2.1. La définition ci-dessus n'est valable que sur l'ensemble des v.a. pour lesquelles une telle intégrale existe, c'est-à-dire l'ensemble :

$$V_\phi = \{X/\phi F_X^{\leftarrow} \in \mathcal{L}^1([0, 1])\}.$$

Dans la pratique, cette condition ne sera bien sûr pas restrictive, puisqu'il suffit d'imposer que les quantités $\mathbb{E}(X^+) = \mathbb{E}(\max(X, 0))$ et $\mathbb{E}(X^-) = \mathbb{E}(-\min(X, 0))$

soient finies et que ϕ soit bornée par exemple, ce qui est toujours le cas. Notons que le spectre admissible $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ correspondant à une mesure spectrale donnée est aussi appelé "fonction d'aversion au risque" par analogie avec la théorie de l'utilité espérée de *Von-Neumann – Morgenstern*.

Les *MSRs* dans le cas discret peuvent être présentées selon la définition suivante :

Définition 2.4. (*MSR discrète*)

Soient X_1, \dots, X_n n réalisations d'une v.a. X . Pour n'importe quel poids $\phi_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}$ nous définissons la statistique :

$$M_n(\phi) = - \sum_{i=1}^n X_{i,n} \phi_i,$$

$M_n(\phi)$ est appelée "la MSR produite par ϕ_i ".

La version discrète "du spectre admissible de risque" retient à la définition :

Définition 2.5. (*Spectre admissible discret*)

Le poids $\phi_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{R}$ est un spectre "admissible" de risque si :

1. $\phi_i \geq 0$ (ϕ_i est positive),
2. $\phi_i \geq \phi_j$ si $i < j$ (ϕ_i est décroissante),
3. $\sum_i \phi_i = 1$.

Un certain soin doit être pris puisqu'en cet mémoire une acceptation tacite de la continuité des fonctions de distribution est faite, sous lesquelles l'identification d'*ES* est rendue légitime.

Théorème 2.2. (*Relation entre la MSR et le spectre admissible*)

La mesure spectrale de risque $M_n(\phi)$ de la définition (2.4) est une mesure de risque pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si le ϕ_i est un spectre admissible de risque.

Pour ceux qui veulent savoir plus en ce qui concerne la preuve de ce théorème, voir *Acerbi (2002)* p. 9.

Le théorème (2.2) a un éventail d'applicabilité, puisqu'il fournit une mesure de risque pour un échantillon de n réalisations d'une v.a. X . La cohérence de la mesure n'est pas liée à une certaine loi de grands nombres, parce que le théorème se tient pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$. Ce résultat est immédiatement applicable dans n'importe quel système basé de scénario de gestion des risques.

2.1.2 Fonction d'Aversion au Risque

L'aversion au risque est un paramètre mesurant la tendance à éviter la variabilité des rendements, c'est une disposition psychologique naturelle des investisseurs qui, sauf exception, préfèrent un flux futur certain à un flux futur risqué de même espérance. Les recherches en finance comportementale ont montré que cette notion doit être utilisée avec quelques précautions, les comportements des agents économiques vis-à-vis du risque et de l'espérance de gain étant en réalité très complexes et changeants.

La théorie d'aversion au risque² nous exige d'indiquer une fonction d'aversion au risque d'utilisateur, et ceci peut fournir des souplesses considérables mais peut également être controversée. Parmi les problèmes potentiels qu'elle pourrait rencontrer sont :

1. La notion de fonction d'aversion au risque peut être dure pour motiver quand l'utilisateur est une société, ou un employeur travaillant pour une société, plutôt que par exemple un investisseur individuel travaillant sur leur propre nom.
2. L'on a pourrait discuter avec le type de fonction d'aversion au risque choisi.
3. On pourrait avoir la difficulté indiquer la valeur que le paramètre d'aversion de risque devrait prendre.

Cependant, nous sommes intéressés ici dans la classe plus large des mesures cohérentes de risque. En particulier, nous voulons savoir quelles conditions le $\phi(p)$ doit satisfaire afin de rendre le M_ϕ cohérente. La réponse est la classe des *MSRs*, dans lesquelles le $\phi(p)$ prend les propriétés citées plus haut (voir propriétés 2.1).

N'importe quel investisseur raisonnable peut exprimer sa aversion subjective de risque, en dessinant un profil différent pour la fonction de poids ϕ , pour atteindre la cohérence qu'elle ajuste pour limiter le choix de cette fonction pour être positive, décroissante et normalisé sur l'intervalle $[0, 1]$. Cette décision est subjective, mais peut être guidée par la littérature économique sur la théorie d'aversion au risque.

Dans ces contraintes, cependant, n'importe quel choix pour ϕ représentera une attitude parfaitement légitime vers le risque. Le choix d'*ES*, par exemple, ne pourrait pas être satisfaisant pour aucun α à un certain investisseur qui veut distinguer les portefeuilles qui pourraient différer même juste à un niveau faible de confiance.

En général, dans l'espace des mesures engendrées par tous les spectres admissibles possibles de risque par l'intermédiaire du théorème (2.1), aucun choix normal n'est

²L'aversion au risque fait partie du projet Économie, qui a pour but d'enrichir le contenu. Elle est due à *Daniel Bernoulli*, il y a 300 ans. Elle a conduit au concept économique d'utilité et à la notion boursière de prime de risque, qui ont permis de mieux comprendre les équilibres de prix et de rendements, et d'aborder leur modélisation mathématique.

fourni par des arguments purement financiers et la fonction ϕ apparaît comme instrument par lequel un investisseur peut exprimer sa attitude subjective vers le risque. Nous donnerons donc la définition suivante :

Définition 2.6. (*Fonction d'aversion de risque et MSR*)

Un spectre ammissible de risque $\phi \in \mathcal{L}^1([0, 1])$ s'appellera "fonction d'aversion de risque" de la mesure :

$$M_\phi(X) = - \int_0^1 F_X^{\leftarrow}(p) \phi(p) dp,$$

alors, la mesure $M_\phi(X)$ de risque, à leur tour s'appellera la "mesure spectrale de risque" produite par ϕ .

La question suivante se pose maintenant :

L'admissibilité de ϕ est-elle également nécessaire pour la cohérence ?

Comme un exemple significatif, considérons le cas de la VaR , cependant, le théorème 2.1 n'est pas applicable puisque ϕ n'est pas une fonction décroissante dans p et donc ce n'est pas un spectre admissible de risque. En effet, il est bien connu que VaR ne soit pas une mesure de risque, en raison de sa manque de sous additivité. Cette interprétation de la non cohérence de VaR montre que, dans la classe des mesures que nous les explorons, VaR sont peut-être moins appropriées puisque son $\phi(p)$ est de façon ou d'autre exemple un peut imaginer du concept d'une fonction décroissante : c'est une fonction qui est zéro partout mais dans $p = \alpha$ où il souffle à l'infini. Sa fonction d'aversion de risque montre l'attitude d'un investisseur incohérent qui est seulement préoccupé par le niveau de seuil de ses plus mauvaises pertes d' $\alpha 100\%$ et la néglige à toutes les pertes elles-mêmes. Cet exemple impose notre croyance que si ϕ n'est pas un spectre admissible de risque, alors le $M_\phi(X)$ ne puisse pas être une mesure de risque.

Voici quelques exemples des fonctions d'aversion de risque :

1. Des $MSRs$ définies par une combinaison convexe générale de $CVaR$ elle est une MSR définies par la fonction d'aversion de risque suivante :

$$\phi(p) = \frac{1}{\alpha} 1_{\{0 \leq p \leq \alpha\}}.$$

2. Un autre exemple de la fonction d'aversion au risque est celui défini par *Cotter et Dowd (2006)* :

$$\phi(p) = \frac{R \exp \{-R(1-u)\}}{1 - \exp \{-R\}},$$

où R est le coefficient absolu d'aversion au risque d'utilisateur.

2.1.3 Cohérence des Mesures Spectrales de Risque

Nous venons d'introduire une nouvelle classe de mesures de risque (pour l'instant, mesures de risque au sens général) à l'aide de spectres admissibles. Mais d'une manière générale, on peut définir :

Théorème 2.3. (*Cohérence des MSR's*)

Toute MSR est une mesure de risque cohérente. Réciproquement, si la mesure M_ϕ définie par :

$$M_\phi(X) = - \int_0^1 \phi(p) F_X^-(p) dp \quad \text{pour } \phi \in \mathcal{L}^1([0, 1]),$$

est une mesure cohérente, alors ϕ est un spectre admissible.

La cohérence des MSR's vient des hypothèses faites sur le spectre ϕ . Si une hypothèse est détendue, la mesure n'est plus cohérente : notons par exemple que si ϕ est non décroissante, comme elle est dans le cas de VaR, la mesure n'est plus sous additive. L'utilité de chacune des hypothèses dessus on ϕ avec plus de précision est expliquée dans Acerbi (2002).

Remarques 2.2.

- ✓ En s'intéressant à la démonstration du théorème 2.3 on se rend bien compte du rôle de chacune des hypothèses intervenant dans la définition d'un spectre admissible. Par exemple, c'est la décroissance de ϕ qui intervient directement dans la sous additivité de la MRS.
- ✓ Si on reprend l'exemple de la VaR, le spectre présente un Dirac au milieu de $[0, 1]$, donc le spectre n'est pas décroissant. La VaR ne peut donc pas être considérée comme une MRS. Pourtant elle se met bien sous la forme d'une pondération de quantiles puisqu'elle charge entièrement le quantile d'ordre α .

2.1.4 Convexité des Mesures Spectrales de Risque

Quelques questions très naturelles doivent être se posées :

Y a-t-il d'autres mesures cohérentes ? L'ES est-elle "une exception isolé" ou appartient-elle à une grande classe des mesures cohérentes ? Est-il possible de créer des nouvelles mesures cohérentes à partir de certains autres connues ?

La réponse est simple ; est la nécessité de créer une "**CLASSE**" large des mesures cohérentes :

Etant donné n mesures cohérentes du risque $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ n'importe quelle combinaison linéaire convexe $\rho = \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 + \dots + \lambda_n \rho_n$ (avec $\sum_k \lambda_k = 1$ et $\lambda_k > 0$) est une autre mesure cohérente de risque, l'interprétation géométrique de cette écriture est réside en donnant n mesures cohérentes de risque, leur combinaison convexe la plus générale est un point parmi les points contenus dans "la fermeture convexe" produite par ces mesures.

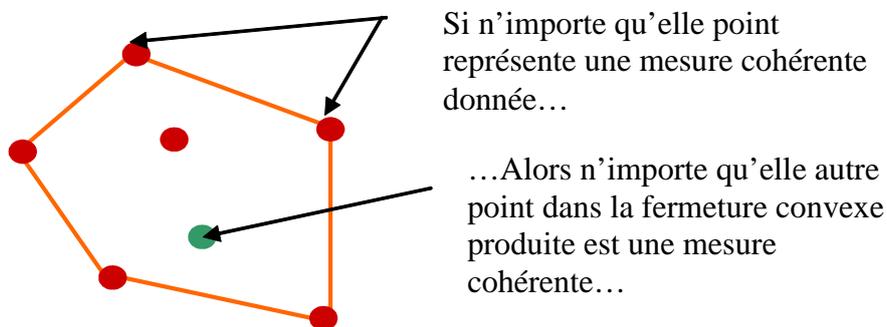


FIG. 2.1. Convexité des *MSRs*.

Nous savons déjà beaucoup de mesures cohérentes de risque, notamment tout le α -*ES* possible pour n'importe quelle valeur α entre 0 et 1. De cette façon nous pouvons produire une nouvelle classe des mesures cohérentes, cette classe est les *MSRs*.

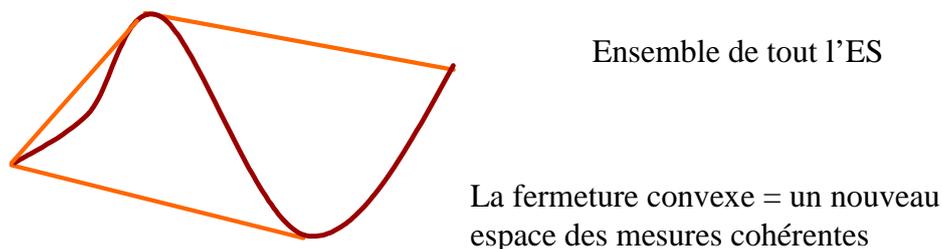


FIG. 2.2. La *MSR* est une fermeture convexe d'*ES*.

Une *MSR* peut être ainsi interprétée comme une pondération des quantiles d'une v.a. donnée. La forme du spectre permet ensuite de mettre davantage en évidence certains quantiles par rapport à d'autres et les valorise de différentes façons.

Mais est ce que on peut considérer que toutes mesures cohérentes de risque peuvent être écrites en tant que mesures spectrales de risque ?

La réponse est évidemment non ; car la classe des *MSRs* est la fermeture convexe comme on a dit (ou ensemble de toutes les combinaisons convexes) d'*ES* pour tout α appartient à $[0, 1]$. Il y a également un bon argument que les *MSRs* ainsi défini sont les seules mesures cohérentes vraiment intéressantes de risque, elles sont un sous ensemble de mesures cohérentes comme il est mentionné par *Acerbi (2002)*.

Spécifiquement, elles sont également étudiées avec une approche différente par *Kusuoka (2001)*, qui prouve qu'une *MSR* peut être associée aux mesures cohérentes de risque avec deux propriétés additionnelles ; l'additivité comonotone³ et l'invariance en loi. En d'autres termes, les *MSRs* sont toutes les mesures cohérentes de risque qui satisfont également l'invariance en loi et l'additivité comonotone.

Rappelons dans le passage la définition de l'invariance en loi :

Définition 2.7. (*Invariance en loi*)

Une mesure de risque ρ est invariable en loi si :

$$F_X(\cdot) = F_Y(\cdot) \implies \rho(x) = \rho(y).$$

L'invariance en loi est en particulier une propriété importante pour des applications ; c'est une propriété nécessaire pour qu'une mesure de risque soit estimable des données empiriques. Des mesures cohérentes de risque qui ne sont pas invariable en loi, ne peuvent pas être estimées à partir des données seulement. L'utilisation de telles mesures peut mener à différentes valeurs de risque pour deux portefeuilles avec des distributions identiques de perte.

2.2 Exemples des Mesures Spectrales de Risque

La classe des *MSRs* est assez large. On peut donc créer un grand nombre de mesures de risque associées à cet concept. Cependant, leur utilisation dans le monde financier reste pour l'instant assez réduit : on commence à utiliser l'*ES*, la transformée de Wang et la Proportional Hazard. Nous allons donner ici un rapide aperçu de chacune des *MSRs* :

³ X et Y sont comonotone s'il y a une v.a. Z et deux fonctions non décroissantes f et g tels que : $X = f(Z)$, $Y = g(Z)$.

Une mesure de risque ρ est additivement comonotone, s'il y a deux v.a comonotone (i.e., toujours fait un mouvement dans la même direction) données X et Y , nous avons : $\rho(X + Y) = \rho(x) + \rho(y)$. La comonotonicité additive est un aspect important de sous additivité, et représente le cas de limitation où la diversification n'a aucun effet.

2.2.1 L'Expected Shortfall

La *MSR* avec le spectre ϕ est la $\phi(p)$ -poids moyen dans tous les cas (p -quantiles $p \in [0, 1]$) de la portefeuille sous additive impose pour donner le plus grands poids à de plus mauvais cas. L'*ES* appartient à cette famille. Cependant, comme on impose à la pondération des quantiles de vérifier certaines conditions, on ne peut compter la *VaR* parmi ces mesures.

$$\begin{aligned} ES(X) &= \frac{1}{1-\alpha} \int_0^\alpha VaR_p dp \\ &= -\frac{1}{1-\alpha} \int_0^\alpha F_x^{\leftarrow}(p) dp \\ &= \text{La perte moyenne de } (1-\alpha) \text{ mauvais cas.} \end{aligned}$$

L'*ES* est la plus simple des *MSRs* dans son expression. Elle est déterminée par un seul paramètre qui est le quantile de la distribution au-delà duquel on effectue la moyenne des pertes.

Sous cette forme, on peut remarquer que l'*ES* correspond à un spectre constant sur une partie $[0, 1]$ et valant 0 partout ailleurs : la mesure correspond alors à une moyenne équi-pondérée des quantiles correspondant à une probabilité inférieure à un seuil. Dans ces conditions on peut étudier toute une classe de mesures, à condition que le spectre correspondant vérifie bien les 3 conditions du spectre admissible (nécessaires pour la cohérence de la mesure), en construisant des fonctions ϕ mettant pondérant les quantiles de différentes manières.

L'*ES* est une *MSR* avec $\phi(p) = \frac{1}{1-\alpha} 1_{[0, \alpha]}(p)$ et réciproquement, n'importe quelle *MSR* peut être exprimée comme moyenne pondérées d'*ES*.

Proposition 2.1. (*Relation entre la MSR et l'ES*)

N'importe quelle MSR peut être exprimée comme moyenne pondérée positive d'ES. En d'autres termes, donnons une MSR $M_\phi(X)$, il y a une mesure de probabilité p sur $[0, 1]$ telle que :

$$M_\phi(X) = \int_0^1 ES(X) dp(\alpha).$$

Le spectre d'*ES* est alors :

$$\phi_\alpha(p) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } p \leq \alpha \\ 0 & \text{si } p > \alpha \end{cases},$$

l'allure du spectre est donnée par le graphe suivant :

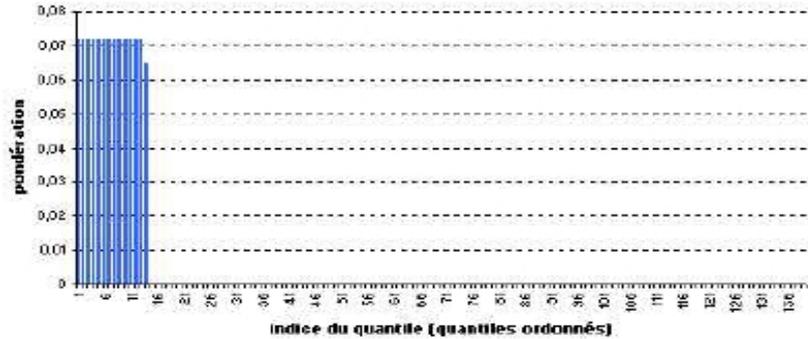


FIG. 2.3. L'allure du spectre d'ES.

2.2.2 La Transformée de Wang

Au départ, la transformée de Wang est une mesure de distorsion, qui transforme la fonction de répartition (ou la fonction de survie) d'une v.a. en utilisant la fonction de répartition d'une gaussienne. En effet, à une v.a. X de fonction de survie G_X elle associe une variable \bar{X} de fonction de survie $G_{\bar{X}} = \Phi(\Phi^{-1}(G_X) + \lambda)$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

La mesure associée calcule donc l'espérance de cette v.a. distordue. Ici encore la transformée de Wang est caractérisée par un seul paramètre λ qui doit être positif pour que la mesure soit bien cohérente.

C'est une *MSR* dans le cas où $\lambda \geq 0$. Cependant, il est difficile d'interpréter une telle mesure à partir de son expression. Néanmoins, dans le cas précis où X est une variable gaussienne, la mesure de Wang de X vaut exactement le quantile d'ordre $\Phi(\lambda)$.

La transformée de Wang est particulièrement adaptée dans le cas des distributions gaussiennes, log normale ou exponentielle, son spectre est de la forme :

$$\phi_\alpha(p) = \frac{\dot{\Phi}(\Phi^{-1}(p) + \lambda)}{\dot{\Phi}(\Phi^{-1}(p))} = \exp\{-\lambda^2/2\} \exp\{-\lambda\Phi^{-1}(p)\} \quad \text{avec } \lambda \geq 0 \quad \text{et}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\exp\{t^2/2\}}{\sqrt{2\pi}} dt,$$

l'allure du spectre est donc :

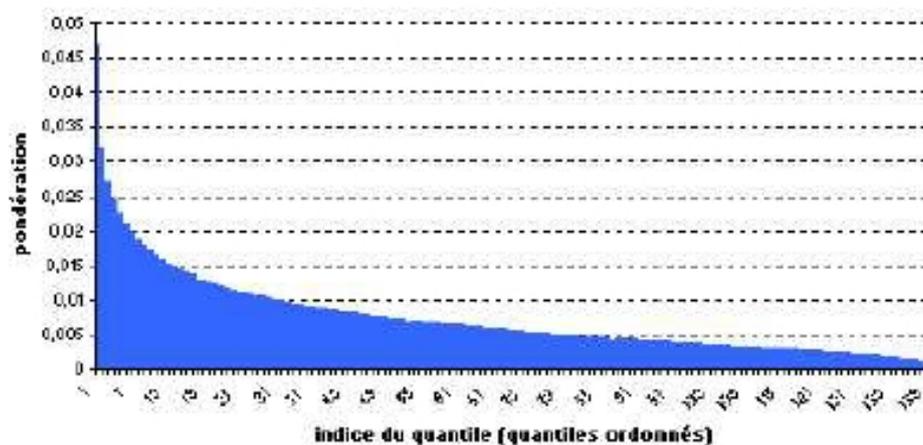


FIG. 2.4. L'allure de spectre pour la Transformé de Wang.

Plus le paramètre λ est grand, plus la pondération décroît rapidement : le spectre accentue alors fortement les petits quantiles et n'accorde presque plus d'importance aux forts quantiles.

2.2.3 La Proportional Hazard

La Proportional Hazard provient, comme la transformée de Wang, d'une distorsion de la fonction de survie. Pour une v.a. X , on considère sa fonction de survie $G_{\bar{X}} = (G_X)^\rho$. Pour que la mesure soit cohérente, on impose $0 < \rho \leq 1$. Son spectre est de la forme :

$$\phi_\alpha(p) = \rho p^{\rho-1} \quad \text{avec } 0 < \rho \leq 1.$$

l'allure du spectre :

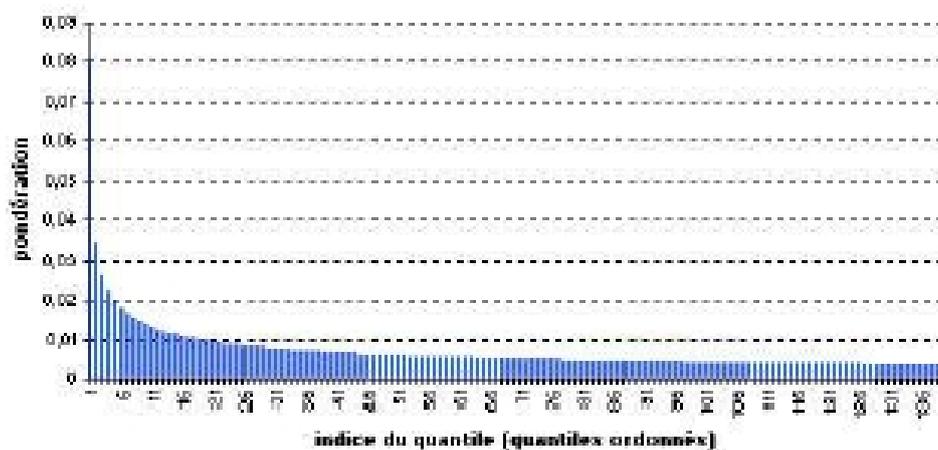


FIG. 2.5. L'allure de spectre pour la Proportional Hazard.

Là encore la mesure ne dépend que d'un seul paramètre. Plus ce paramètre est proche de zéro, plus le spectre est accentué pour les petits quantiles et atténué pour les grands quantiles. En revanche, plus ρ se rapproche de 1, plus les quantiles ont une tendance à être équipondérants.

2.2.4 L'Espérance Mathématique

L'Espérance est une *MSR*, correspond au cas où il n'y a pas de distorsion.

$$M(X) = - \int_{+\infty}^{-\infty} x dP_X(x) = -\mathbb{E}[X].$$

Distorsion de probabilités :

$$g \circ P_X(x) = P_X(x).$$

Pondération des quantiles :

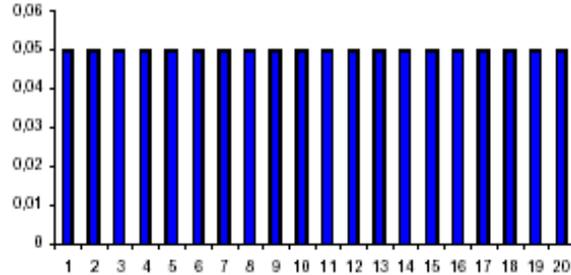


FIG. 2.6. Pondération des quantiles de l'esperance mathématiques.

Equi-pondération des quantiles :

$$M(X) = - \int_0^1 F_x^-(p) dp = -\mathbb{E}[X].$$

2.3 Relation entre les MSR et les Mesures de Distorsions

Dans cette section nous allons présenter une représentation alternative de mesure de risque originalement exprimée en utilisant des probabilités de distorsion. Cette représentation est commode en développant les estimateurs empiriques des mesures de risque.

2.3.1 Définition des Mesures de Distorsions

Comme on a vu, la *VaR* n'est pas une *MSR* par ce qu'elle n'est pas une mesure cohérente, et elle ne remplit pas la propriété de la comonotonie additive. D'autre part, *Wang (1996)* définit une famille de mesure de risque par le concept de la fonction de distorsion comme elle est introduite dans la théorie de dual de *Yaari*.

La mesures de distorsion de risque sont définis par une fonction de distorsion comme suit :

Définition 2.8. (*Fonction de distorsion*)

Nous dirons que $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction de distorsion si :

1. $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.
2. g est une fonction non décroissante.

Pour des applications au risque d'assurance, l'évaluation est commode pour penser aux responsabilités en tant que variables positives, nous se limitent à $X \in \mathcal{L}_+^2(P)$, i.e., aux v.a. positives avec la variance finie, que nous pensons environ comme pertes ou responsabilités. Si nous devons relier ceci à l'interprétation précédente, nous dirions que notre position est $(-X)$, le théorème suivant caractérisant la mesure de distorsion de risque induite par g :

Théorème 2.4. (*Mesure de Distorsion*)

La mesure de distorsion de risque $D_g(X)$ induite par g sur la classe $\mathcal{L}^2(P)$ est donnée par :

$$D_g(X) = \int_0^\infty g(S(x))dx + \int_{-\infty}^0 [g(S(x)) - 1]dx,$$

lorsque $S(x) = 1 - F_X(x)$.

Alors $D_g(X)$ a les propriétés suivantes :

1. $X \leq Y$ implique $D_g(X) \leq D_g(Y)$.
2. $D_g(\lambda X) = \lambda D_g(X)$ pour toute λ positive. $D_g(c) = c$ quelque soit c un risque constant.
3. Si les risques X et Y sont comonotones, alors $D_g(X + Y) = D_g(X) + D_g(Y)$.
4. Si g est concave alors $D_g(X + Y) \leq D_g(X) + D_g(Y)$.
5. Si g est convexe alors $D_g(X + Y) \leq D_g(X) + D_g(Y)$.

2.3.2 Mesures de Distorsions Concaves et Cohérentes

Wirch et Hardy (2001) ont prouvé qu'une mesure de risque basée sur une fonction de distorsion est cohérente si et seulement si la fonction de distorsion est concave. Il peut montrer que si g est concave la mesure produite de risque soit spectrale. Alors toutes les fonctions de distorsion produisent des mesures de risque de distorsion qui satisfont le premier et le troisième critère de la cohérence ci-dessus, les deux théorèmes suivants nous montrons des conditions suffisantes et nécessaires pour les critères de sous additivité :

Théorème 2.5. (*Sous additivité des mesures de distorsions*)

La mesure de risque de distorsion, $D_g(X) = \int_0^\infty g(S_X(x))dx$ est sous additive si et seulement si g est une fonction de distorsion concave.

Pour ceux qui ont intéressés au preuve de ce théorème voir *Wirch et Hardy (2001)* p. 6.

Une mesure de risque de distorsion est l'espérance d'une nouvelle variable, avec des probabilités changées, en re-pondérant la distribution initiale.

Exemple 2.1. *VaR* peut être défini par la fonction de distorsion suivante :

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

Exemple 2.2. *CVaR* est une fonction de distorsion avec le respect des fonctions de distorsions suivantes :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\alpha} & \text{si } x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$$

Donnons quelques fonctions de distorsion de risque utilisées pour l'évaluation de risque d'assurance :

1. Proportional Hazard : $g(u) = u^{1/\gamma}$ avec $\gamma \geq 1$.
2. Fonction de distorsion de Wang : $g_\alpha(u) = \Phi[\Phi^{-1}(u)+]$, $u \in (0, 1)$ où $\Phi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

La fonction de distorsion de Wang est souvent employée pour évaluer des risques financiers et d'assurance *Wang (2002)*. La transformé de Wang utilise la distribution entière de mesure de risque et cela explique des pertes de basse fréquence et sévérité extrêmes élevées.

2.3.3 Equivalence entre Les Mesures Spectrales et les Mesures de Distorsions

Dans cette section, nous allons montrer le rapport qui existe entre les *MSRs* et les mesures de distorsion.

Théorème 2.6. (*Equivalence entre les MSRs et les mesures de distorsions*)

Soit ϕ une fonction spectrale admissible continue, tels que la MSR $\rho(-X)$ est fini.

Alors :

$$D_g(X) \equiv \rho(-X)$$

est une mesure de risque de distorsion cohérente avec la fonction de distorsion concave satisfaisant $\hat{g}(u) = \phi(u)$.

Exemple 2.3. La mesure *CVaR* de risque est une *MSR*. Si nous nous appliquons le dernier théorème, nous trouvons que la *CVaR* est une mesure de risque de distorsion définie par :

$$g(u) = \int_0^u \phi(s) ds = \int_0^u \frac{1}{\alpha} 1_{\{0 \leq p \leq \alpha\}} = \begin{cases} \frac{u}{\alpha} & \text{si } u \leq \alpha \\ 1 & \text{si } u \geq \alpha \end{cases},$$

ce qui nous re-obtenons le résultat du l'exemple (2.2)

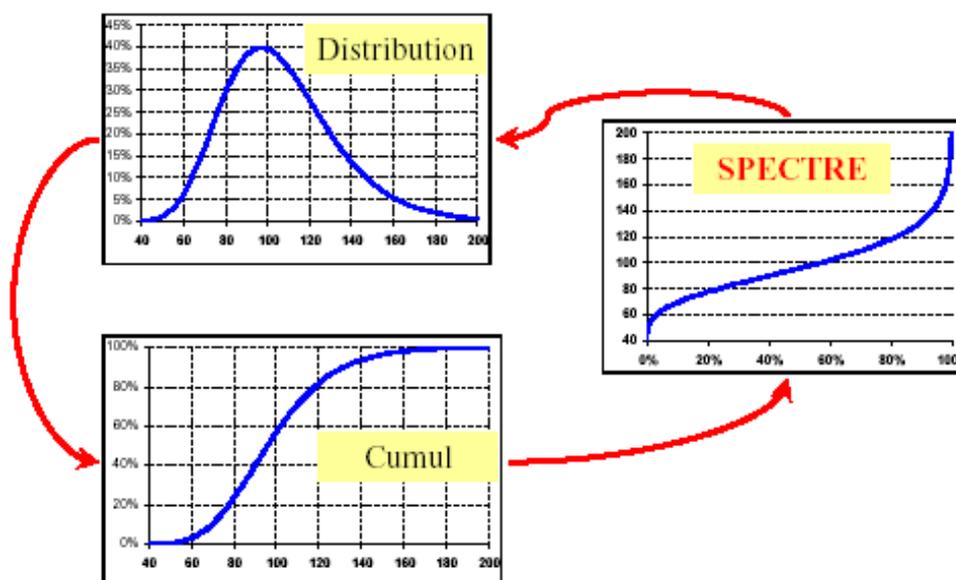


FIG. 2.7. Relation entre les MSR et les mesures de distorsions de risque.

Théorème 2.7. (Equivalence entre les mesures de distorsions et les MSR)

Soit g une fonction de distorsion concave, et soit D_g la mesure de risque de distorsion associée. Alors $\phi(u) = \dot{g}(u)$ définit une mesure spectrale tels que

$$\rho(X) = D_g(-X).$$

Exemple 2.4. Nous calculons maintenant la fonction d'aversion de risque pour les fonctions de risque de distorsion énumérées dans l'exemple :

1. Mesure de Proportional Hazard : $\phi(u) = \frac{1}{\gamma} u^{1/\gamma-1}$ avec $\gamma \geq 1$.
2. Mesure de Wang : $\phi_\alpha(u) = \exp \left\{ \alpha \phi^{-1}(u) - \frac{\alpha^2}{2} \right\}$.

Il est également facile de vérifier que la dérivé de la mesure de risque de distorsion de CVaR rapporte la fonction d'aversion de risque qui définit la CVaR.

Pour ceux qui ont intéressés au preuve du théorème 2.6 et 2.7 voir *Henryk et Mayoral* (2006) p. 9.

Observons que pour les mesures Proportional Hazard et Wang, la fonction d'aversion de risque n'est pas bornée à zéro. D'ailleurs, la fonction d'aversion de risque de Wang décroît plus rapidement que celle du Proportional Hazard. Par conséquent, l'investisseur qui utilise les mesures du risque de Wang est plus averse de risque par rapport à un autre investisseur qui utilise la mesure de distorsion de Proportional Hazard ; parce que le premier investisseur donne plus d'importance pour plus haut pertes que le dernier.

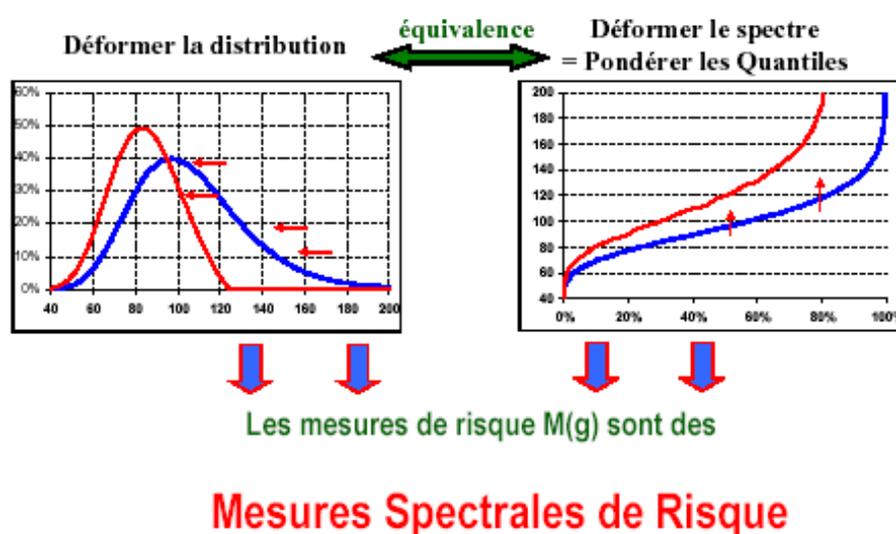


FIG. 2.8. Equivalence entre les $MSRs$ et les mesures de distorsions de risque.

Commentaire :

Ces correspondances fournissent également une preuve indirecte du fait que pour une fonction concave g de distorsion, la mesure de risque définie est une mesure cohérente de risque.

La particularité des mesures de distorsions réside dans l'écriture de la mesure sous la forme d'une intégrale de *Choquet*⁴. L'idée économique sous-jacente qui a causé l'apparition de ce type de mesures est la théorie duale de *Yaari*, le concept de théorie duale est de considérer non plus l'espérance d'une transformation (la fonction d'utilité)

⁴Soit (S, \mathcal{A}) un espace mesurable, l'intégrale de Choquet définie par :

$$\int X dv = \int_{-\infty}^0 v(X \geq t) - 1 dt + \int_0^{\infty} v(X \geq t) dt$$

telle que $v : S \rightarrow \mathbb{R}$ est la capacité de Choquet et $X : S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction \mathcal{A} -mesurable bornée.

des revenus possibles, mais une pondération des revenus possibles selon une mesure de probabilité de distorsion qui contient toute l'information sur l'aversion au risque de l'agent, dans le cas des *MSRs*, c'est le spectre qui illustre cette notion.

On dispose ainsi deux types de représentation des *MSRs* : au moyen des fonctions de distorsions de risque ou par des fonctions spectrales admissibles, sont équivalentes ; dans tous les deux, la mesure de risque peut être considérée en tant que repondération de la distribution initiale. D'ailleurs, la dérivé de la fonction de risque de distorsion indique la manière de cette repondération.

Dans le problème d'optimisation on utilise principalement celui d'*Acerbi*, c'est-à-dire celui qui s'écrit sous la forme d'une pondération de quantiles. Cependant, il peut être également intéressant d'examiner la représentation sous la forme d'une mesure de distorsion :

Deux optiques :

Choix de l'utilité du gestionnaire :	Détermination de la distorsion.
Choix de la mise en valeur des pires pertes :	Manipulation du spectre des pertes possibles (=quantiles).

$$\rho(X) = \begin{array}{l} \nearrow - \int_0^1 \phi(\mathbf{p}) F_X^{\leftarrow}(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \longrightarrow \text{Pondération des quantiles.} \\ \searrow - \int_0^1 \mathbf{x} d(g \circ P_X)(\mathbf{x}) \longrightarrow \text{Distorsion de la distribution de probabilité} \\ \text{du risque.} \end{array}$$

Dans la littérature concernant les *MSRs* et les mesures de distorsions, on reconnaît aux mesures de distorsions l'appellation de *MSRs*. Cependant le lien entre les deux concepts n'est pas une chose évidente, d'autant qu'il dépend beaucoup du fait qu'on considère des distributions des rendements en pertes ou en gains.

Un tableau récapitulatif est consacré à ce sujet afin de mettre en place une correspondance entre les deux concepts :

	Didtribution en gains	Didtribution en pertes
Mesure de Distorsion	$\bar{M}_g = \int_{-\infty}^0 [1 - g(1 - F_X(x))] dx$ $- \int_0^{+\infty} g(1 - F_X(x)) dx,$ <p>g croissante, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.</p> <p>Pour la cohérence g convexe.</p>	$\bar{M}_g = \int_{-\infty}^0 g[(1 - F_X(x)) - 1] dx$ $+ \int_0^{+\infty} g(1 - F_X(x)) dx,$ <p>g croissante, $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.</p> <p>Pour la cohérence g concave.</p>
Mesures Spectrales	$M_\phi(X) = - \int_0^1 \phi(s) F_X^-(s) ds,$ $\phi(s) = \dot{g}(1 - s),$ <p>ϕ décroissante, positive, $\int_0^1 \phi = 1$.</p>	$M_\psi(X) = \int_0^1 \psi(s) F_X^-(s) ds,$ $\psi(s) = \dot{g}(1 - s),$ <p>ψ décroissante, positive, $\int_0^1 \psi = 1$.</p>

TAB. 3.1. Comparaison entre les mesures de distorsions et les *MSRs*.

2.4 Comparaison Entre Les Mesures de Risque Alternatives

Nous allons clôturer ce chapitre en faisant une petite comparaison entre les mesures de risque de *VaR* et d'*ES* avec la *MSR* pour illustrer l'attitude de cette dernière ce qui nous encourage beaucoup mieux de chercher à trouver un estimateur asymptotiquement normale dans la suite de cette thèse :

Les critiques les plus sérieuses de la *VaR* -comme on a vue dans le premier chapitre- sont ; qu'elle ne satisfait pas la propriété du sous additivité et manque donc de la cohérence, et qu'elle peut donner une évaluation incertaine de l'exposition de risque parce qu'elle ne tient aucun compte des pertes au delà de la queue ou du seuil de *VaR*.

La mesure de risque d'*ES* évite ces deux problèmes : l'*ES* est sous additive et cohérente, elle tient compte des tailles des pertes dans la queue au delà du *VaR* elle même. Dans le cas d'une distribution continue de perte, L'*ES* donne les mêmes poids

à chacun du plus mauvais de pertes, et ne donne aucun poids à aucune autre observation. Cependant, comme la VaR , l' ES dépend d'un niveau arbitrairement choisi de confiance, et donne peu d'information pour nous indiquer a priori quelle valeur on va prendre.

Ni l'une ni l'autre de ces mesures de risque prises de n'importe quel compte explicite du degré d'aversion du risque d'un utilisateur. En fait, il s'avère que le choix du VaR implique que l'utilisateur a l'aversion négative au risque⁵, et le choix d' ES implique que l'utilisateur est risque-neutre⁶. Alors, ni l'une ni l'autre de ces mesures de risque est conformée à l'utilisateur étant risque-opposée.

Contrairement aux deux mesures alternatives populaires, les $MSRs$ sont conditionnées sur la fonction d'aversion de risque, et les deux derniers sont conditionnés au niveau de confiance. Les $MSRs$ sont les seules mesures de risque qui sont à la fois cohérentes et présentent explicitement le degré d'aversion du risque d'utilisateur. En d'autres termes, si deux utilisateurs sont confrontés à la même distribution des pertes possibles, une MSR indique que l'utilisateur plus opposé au risque fait face à un plus gros risque (la clé aux mesures spectrales de risque est donc la fonction d'aversion au risque).

⁵L'aversion négative de risque du VaR est illustrée par le fait que l'utilisateur ne place aucun poids sur des pertes excédant VaR .

⁶La risque-neutralité d' ES est illustrée par le fait que l'utilisateur place des poids égaux sur des pertes excédant VaR .

Chapitre 3

Valeurs Extrêmes en Finance et Modélisation Stable

La matière des extrémités est le sujet d'une énorme littérature dans les sciences économiques dont le rôle des statistiques est de répondre à la question du coeur dans la gestion de risque : *Comment modeler les queues et estimer les quantiles extrême d'une distribution risquée* ? Est par conséquent, La principale tâche d'un statisticien est d'être capable de maîtriser le risque dont l'utilité du théorie des valeurs extrêmes (TVE). Cette théorie statistique permet de quantifier le comportement des mouvements extrêmes ; comme la grande crise de 1929 et le lundi noir d'octobre 1987.

La recherche économétrique a montré, que les rendements logarithmiques des données financières ne suivent pas le modèle gaussien, parce que leurs distributions sont marginalement lourdes et probablement asymétrique. Cependant, on s'attendre à un modèle stable non gaussien à variance infinie, où il y a des bonnes raisons théoriques.

Notre chapitre se partage en deux sections principales :

Dans la première section nous avons une brève présentation de la TVE telle que ; la définition des statistiques d'ordre leurs rôle important qui peut jouer, les distributions des valeurs extrêmes (*Gumbel*, *Weibull* et *Fréchet*), le théorème de *Fisher Tippett*, le maximum domaine d'attraction, les estimateurs non paramétriques de l'indice de queue...

Dans la deuxième section nous allons parler sur la modélisation avec les lois α -stables dont on traite la stabilité au sens de Lévy (ou L -stabilité), puis nous allons donner l'interprétation des paramètres d'une variable stable, et on se termine par une simple discussion sur la convenance de ces modèles et leurs propriétés arithmétiques.

3.1 Présentation de La Théorie des Valeurs Extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes (TVE) est basée sur l'approximation asymptotique des lois des maxima convenablement normalisés de vecteurs aléatoires dont les composantes sont des variables supposées i.i.d. Les deux dernières décennies ont vu le développement de la modélisation statistique des valeurs extrêmes. En témoignent les nombreux ouvrages récents : *Embrechet et al. (1998)*, *Réiss et Thomas (2007)* et beaucoup de revues.

Les modèles des valeurs extrêmes sont appliquées à une grande variété de problèmes comme l'environnement (vitesse du vent, extrêmes pluviométriques et de températures,...), la finance et l'assurance (Mesure du risque, *VaR*, modèle de volatilité stochastique) et même internet.

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord les théorèmes de convergences avant d'établir le lien entre ces résultats et la TVE à travers le théorème de *Fisher-Tippet* un des fondements de cette théorie.

Dans tout la section entière; soient (X_1, X_2, \dots, X_n) sont illimitées, les v.a. sont i.i.d. avec la fonction de distribution F .

Considérons le comportement stochastique du maximum $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ des v.a. i.i.d. X_1, X_2, \dots, X_n avec la fonction de distribution $F(x)$ définie par :

$$F(x) = \Pr(X \leq x),$$

une manière simple d'étudier le "comportement" des évènements extrêmes est de considérer la v.a. :

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

M_n représente la plus grande perte observée sur les n pertes observées X_1, X_2, \dots, X_n . Nous adopterons la convention que la perte est un nombre positif. Comme les v.a. sont i.i.d., on obtient :

$$\begin{aligned} \Pr\{M_n \leq x\} &= \Pr\{X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x\} \\ &= \prod_{t=1}^n \Pr(X_t \leq x) \\ &= [F(x)]^n. \end{aligned}$$

La difficulté provient du fait que l'on ne connaît pas en général la fonction de répartition F . C'est la raison pour laquelle on s'intéresse au comportement asymptotique de la v.a. M_n . Ainsi en identifiant la famille de loi vers laquelle M_n va converger,

on pourra remplacer F par cette dernière pour des grandes valeurs de n . Pour caractériser cette loi de distribution des extrêmes, nous allons recourir au Théorème de *Fisher-Tippet*.

Ce résultat a une double conséquence : d'une part, dans le cas d'un échantillon i.i.d. la loi des maxima s'obtient facilement dès lors que $F(X)$ est connue, et d'autre part la loi des minima se déduit très simplement des résultats obtenus sur les maxima.

3.1.1 Définition des Statistiques d'Ordre

Les statistiques d'ordre sont très instrumentales dans la TVE ; parce qu'elles (plus avec précision la supérieure) fournissent des informations sur la queue (droite) de distribution. Le sujet des statistiques d'ordre traite les propriétés et les applications de ces v.a. commandées et des fonctions les impliquant.

Soient n v.a. i.i.d. X_1, \dots, X_n . Rangeons ces v.a. par "ordre croissant de grandeur". Pour cela, nous introduisons la notation $X_{i,n}$ avec :

$$X_{1,n} \leq X_{2,n} \leq \dots \leq X_{n-1,n} \leq X_{n,n},$$

$X_{i,n}$ est donc la $i^{\text{ème}}$ statistique d'ordre (ou statistique d'ordre i) dans un échantillon de taille n .

Définition 3.1. (*Statistiques d'ordre*)

Les statistiques d'ordre concernant un échantillon (X_1, \dots, X_n) sont le X_i disposé dans l'ordre croissant, elles sont dénotées par $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$. Et pour $k = 1, 2, \dots, n$ la v.a. $X_{n-k+1,n}$ s'appelle la statistique supérieure de $k^{\text{ème}}$ ordre.

Deux statistiques d'ordre sont particulièrement intéressantes pour l'étude des événements extrêmes. Ce sont les statistiques d'ordre extrême qui correspondent à la plus petite statistique d'ordre $X_{1,n}$ (ou statistique du minimum) :

$$X_{1,n} = \min(X_1, \dots, X_n),$$

et à la plus grande statistique d'ordre $X_{n,n}$ (ou statistique du maximum) :

$$X_{n,n} = \max(X_1, \dots, X_n).$$

Remarque 3.1. Même si les v.a. X_1, \dots, X_n sont indépendantes, les statistiques d'ordre ne sont pas indépendantes (par définition).

3.1.2 Distributions des Valeurs Extrêmes

Le résultat fondamental de la TVE est que, sous des conditions de régularité très générales, la loi des extrêmes ne peut appartenir qu'à trois lois de probabilités bien définies. C'est le théorème de *Gnedenko (1943)* qui affirme que :

Théorème 3.1. (*Maximum domaine d'attraction*)

Si (X_1, \dots, X_n) un échantillon de v.a. i.i.d., s'il existe deux suites réels $a_n > 0$, $d_n \in \mathbb{R}$, et une fonction de distribution G non dégénérée¹ tels que :

$$\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} G \quad \text{pour } n \rightarrow \infty,$$

alors G doit être une distribution standard des valeurs extrêmes. i.e.

$$F^n(c_n x + d_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(x).$$

Il s'avère que seulement quelques distributions G peuvent être considérées comme distribution asymptotique de limite du maximum normalisé M_n . Elles sont désignées sous le nom des distributions standard des valeurs extrêmes.

G est forcément d'une des trois formes suivantes :

Fréchet :	$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq 0 \\ \exp(-x^\alpha) & , x > 0 \end{cases}$
Weibull :	$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x^\alpha)\} & , x \leq 0 \\ 1 & , x > 0 \end{cases}$
Gumbel :	$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}.$

TAB. 3.1. Distributions des Valeurs Extrêmes.

La loi la plus courante retrouvée dans les données financière est la loi de *Fréchet*. La loi de *Weibull* étant écartée car les variations en finance sont rarement bornées, et la loi de *Gumbel* est extrêmement rare également puisqu'on peut démontrer qu'une loi des extrêmes de *Gumbel* correspond à des valeurs initiaux normalement distribués ;

¹C'est-à-dire qu'il n'existe aucune relation affine presque sûre entre les composantes du vecteur aléatoire.

Néanmoins, cette loi sert de référence, et permet ainsi de mesurer, notamment graphiquement, l'écart entre les distributions empiriques et la loi normale. La loi de *Gumbel* peut être considérée comme une loi de transition entre les lois de *Fréchet* et de *Weibull*.

La majorité des lois de probabilité usuelles appartiennent à l'un des trois MDA : *Gumbel*, *Fréchet* ou *Weibull*. Par exemple :

- Les distributions exponentielle, gamma et log-normale appartiennent au MDA de *Gumbel* regroupant la majorité des distributions à queue fine.

- Les distributions de pareto, log-gamma, et student appartiennent au MDA de *Fréchet* regroupant la majorité des distributions à queue lourde.

- La distribution uniforme appartient au MDA de *Weibull* regroupant la majorité des distributions sans queue.

Ces trois formes de lois caractérisent des comportements très différents des extrêmes. On les distingue à travers deux caractéristiques :

- ✓ La vitesse de décroissance de la probabilité des grandes valeurs : Si la décroissance est rapide, de type exponentiel, alors la loi des extrêmes est la loi de *Gumbel*. Si au contraire, elle est plus lente, de type puissance, on se réfère au second critère :
- ✓ L'étendue de variation des données. Si celle-ci est bornée, alors la loi des extrêmes est la loi de *Weibull*, si ce n'est pas le cas, c'est la loi de *Fréchet*.

En fait, nous pouvons caractériser les trois types de distribution précédents par une distribution unique :

Théorème 3.2. (*Unification des trois types*)

S'ils existent des suites $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ est une distribution limite non dégénérée G telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \Pr \left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right] = G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

alors G est de la forme :

$$G_{\mu, \sigma, \xi}(x) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)_+ \right]^{-1/\xi} \right\} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)_+ \right] \right\} & \text{si } \xi = 0 \end{cases} \quad \text{où } x_+ = \max(0, x),$$

les paramètres μ, σ, ξ étant resp. les paramètres de positions, de dispersion et de forme.

Cas particuliers :

1. Si $\xi > 0$ alors $G_{\mu, \sigma, \xi}(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)_+ \right]^{-1/\xi} \right\} = \Phi_{1/\xi}(x)$ (distribution de *Fréchet* de paramètre $1/\xi$).

2. Si $\xi = 0$ alors $H_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)_+\right]\right\} = \Lambda(x)$ (distribution de *Gumbel*).
3. Si $\xi < 0$ alors $H_{\mu,\sigma,\xi}(x) = \exp\left\{-\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)_+\right]^{-\alpha}\right\} = \Psi_{-1/\xi}$ (distribution négative de *Weibull* de paramètre $-1/\xi$).

En d'autres termes, une famille paramétrique $\{G_\xi, \xi \in \mathbb{R}\}$ fournit une représentation commode d'unification pour les trois types de distributions de limite. Par conséquent les trois distributions de valeur extrêmes peuvent se caractériser par le signe de l'index de queue ξ , conformément aux notations employées par *Embrechts et al. (1997)*, on a :

$$\begin{aligned} \text{Fréchet} & \quad \xi = \alpha^{-1} > 0, \\ \text{Weibull} & \quad \xi = -\alpha^{-1} < 0, \\ \text{Gumbel} & \quad \xi \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

La forme générale des densités de ces lois est présentée sur le graphique ci-dessous :

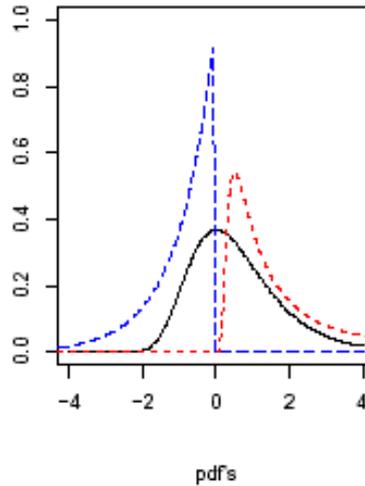


FIG. 3.1. Fonctions de distribution du Gumbel (en noir), de Frchet ($\xi = 1$ en rouge) et de Weibull ($\xi = 1$; en bleu).

Cette fonction de distribution correspond à la loi de probabilité des valeurs extrêmes généralisée (VEG). Nous remarquons que les paramètres μ et σ sont les limites de b_n et a_n . Le paramètre σ joue le rôle d'une variance, c'est pourquoi nous le considérons comme un paramètre de dispersion. Le paramètre μ est un paramètre de localisation.

Ainsi le paramètre de forme ξ donne, à travers ses différentes valeurs possibles, une grande flexibilité à la distribution des VEG, de sorte à prendre en compte les trois types de comportement asymptotiques représentés par les distributions extrêmes ci-dessus, il est lié au caractère leptokurtique de la fonction de distribution F , c'est pourquoi on lui donne généralement le nom "d'indice de queue" ou "d'indice de valeur extrême". Plus cet indice est élevé en valeur absolue, plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale est important (on parle alors de distribution à "queues épaisses").

3.1.3 Théorème de Fisher-Tippett

Avant d'énoncer le principal théorème de cette section, nous définissons des classes d'équivalences sur l'ensemble des fonctions de répartition (sur les distributions des probabilités).

Définition 3.2. (*Lois de même types*)

On dit que deux v.a. X et Y sont de même types ; s'ils existent des constantes réels $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que : $Y \stackrel{\mathcal{L}}{=} aX + b$ i.e. si F et G sont les distributions respectives des variables X et Y alors on a $F(ax + b) = G(x)$.

Suite de cette définition, on pose la question suivante :

Parallèlement au théorème limite central, peut-on trouver des suites de normalisation : $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$, et une loi de distribution non dégénérée G telles que : $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} G$?

Fisher et Tippett (1928) trouvent une solution à ce problème au moyen q'un théorème qui porte leur nom et qui est l'un des fondements de la TVE :

Théorème 3.3. (*Fisher-Tippett ou théorème des 3 types extrêmes*)

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha, \mu, \sigma, \xi}(x) &= \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \exp\left(-\left[1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}\right) & , x > 0 \end{cases} && \text{Distribution de Fréchet,} \\ \Psi_{\alpha}(x) &= \begin{cases} \exp\left\{-\left[-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{\alpha}\right\} & , x < \mu \\ 1 & , x \geq \mu \end{cases} && \text{Distribution de Weibull} \\ &&& \text{Négative,} \\ \Lambda(x) &= \exp\left(-\exp\left\{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}\right), \quad x \in \mathbb{R}. && \text{Distribution de Gumbel,} \end{aligned}$$

En posant $\mu = 0$ et $\sigma = 1$ on obtient les expressions sous forme standard citées plus haut. Le théorème de *Fisher-Tippett* montre que si l'ensemble des distributions est large alors celui des distributions des valeurs extrêmes est plutôt restreint.

Définition 3.3. (*Distributions des valeurs extrêmes*)

Les trois lois de probabilité ci-dessus sont appelées distributions de valeurs extrêmes. Une distribution des valeurs extrêmes du maximum est donc une distribution G pouvant s'obtenir comme limite d'une suite convenablement normalisée de maxima des v.a. i.i.d.

Remarque 3.2. Chacune des trois distributions de valeurs extrêmes peut s'obtenir par une transformation fonctionnelle de l'autre. Plus précisément, elles sont liées entre elle par les relations :

$$X \rightsquigarrow \Phi_\alpha \iff \ln X^{-\alpha} \rightsquigarrow \Lambda \iff \frac{-1}{X} \rightsquigarrow \Psi_\alpha^2.$$

Par conséquent on peut se limiter à une quelconque de ces lois extrêmes pour une caractérisation sans perdre de généralité.

3.1.4 Maximum Domaine d'Attraction

La recherche du domaine d'attraction peut être considérée comme l'étude réciproque de la recherche de la distribution des valeurs extrêmes associée éventuellement à une distribution. Dans le cas univarié, le problème consiste à répondre à la question suivante :

Etant donné une loi G de type extrême (donc appartenant à l'une des trois familles Fréchet, Gumbel et Weibull), quels sont les critères vérifiés par une distribution quelconque F pour que la loi du maximum de la suite de v.a. i.i.d. de loi F converge vers G ?

Dans le cas des distributions marginales sont identiques, la recherche du domaine d'attraction d'une distribution multivariée peut être comme une extension du cas univarié.

Définition 3.4. (*MDA*)

On dit qu'une distribution F appartient au MDA d'une distribution des valeurs extrêmes G , et on note $F \in MDA(G)$, si la distribution du maximum normalisé converge vers G i.e. si F est la distribution commune des v.a. X_1, X_2, \dots, X_n i.i.d. de maximum M_n , alors il existe des constantes $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right] = G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

la caractérisation du domaine d'attraction fait intervenir la notion de fonction à variation régulière.

Définition 3.5. (Fonction à variation régulière)

On dit que F est une fonction à variation régulière d'indice α si :

$$\forall x > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^\alpha,$$

si $\alpha = 0$ alors F est dite fonction à variation lente, si $\alpha = +\infty$ alors F est dite fonction à variation rapide.

La proposition suivante donne les propriétés principales des fonctions à variations régulières :

Proposition 3.1. (Propriétés des fonctions à variations régulières)

Si F est à variation régulière, alors il existe une fonction à variation lente $L(x)$ telle que : $F(x) = x^\alpha L(x)$. La notion de variation régulière est stable par intégration, différentiation, composition, somme et produit.

Maintenant pour déterminer le MDA des distributions extrêmes on pose la question suivante :

Sachant une distribution F , comment déterminer le MDA auquel elle appartient et trouver les constantes de normalisation associées ?

La réponse à cette question est relativement complexe et dépend de la forme de la fonction F . Les résultats suivants donnent les critères les plus utilisés :

On dit qu'une distribution F appartient au MDA de G , et on note $F \in MDA(G)$ si la distribution du maximum normalisée converge vers G . Voici quelques exemples :

- $MDA(\Lambda)$: Exponentielle, Gaussienne, Gamma, Log-normale, etc.
- $MDA(\Phi_\alpha)$: Cauchy, Pareto, α -Stable ($\alpha < 2$), etc.
- $MDA(\Psi_\alpha)$: Uniforme, Beta, etc.

Nous voyons que les trois distributions des valeurs extrêmes sont très différentes en terme de MDA :

- Dans le MDA de la distribution *Gumbel*, nous trouvons des distributions qui n'ont pas de queues épaisses (mais qui peuvent être leptokurtiques).
- Dans le MDA de la distribution *Fréchet*, nous trouvons des distributions qui ont des queues épaisses.

- Dans le MDA de la distribution *Weibull*, nous trouvons des distributions à support fini, ce qui implique que le support du maximum soit borné à droite. Cela a des implications d'un point de vue financier, puisque la problématique va être de choisir entre les distributions Φ_α et Ψ_α (et dans ce cas, quelle valeur pour α ?) pour modéliser le maximum. Sachant la distribution F , nous voudrions connaître à quel MDA elle appartient et quelles sont les constantes de normalisation. La réponse est relativement complexe et n'est pas unique.
- Le maximum convenablement normalisé de la loi exponentielle converge vers la loi de *Gumbel*. Aussi, les lois dans le MDA de la loi de *Gumbel* sont parfois appelées de type exponentiel. Pour la distribution de Pareto $F(x) = 1 - cx^{-\alpha}$ où $c > 0$, $\alpha > 0$.
- La distribution de Paréto appartient au MDA de *Fréchet*. Aussi, les lois dans le MDA de la loi de *Fréchet* sont parfois appelées de type Pareto.

3.1.5 Estimateurs Non Paramétriques de L'indice de Queue

On présente ici deux estimateurs différents, ces estimateurs sont, non seulement différents dans leur expression analytique, mais aussi dans leur domaine d'application. Tous basés sur la statistique d'ordre $X_{k,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$, obtenue à partir de la série initiale en considérant les k valeurs les plus grandes (ou les plus petites). k dépend a priori de n , même si on ne le mentionnera pas dans la notation : l'idée est d'avoir $k \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, mais sans prendre "trop" de valeurs de l'échantillon, ce qui conduit à imposer $k/n \rightarrow 0$.

Incidemment, cela implique que se posera la question du choix optimal de k . En effet, il est indispensable de calculer ces estimateurs sur les queues de distribution. Choisir un k trop élevé engendre le risque de prendre en compte des valeurs qui ne sont pas extrêmes, à l'inverse, un sous-échantillon trop petit ne permet pas aux estimateurs d'atteindre leur niveau de stabilité.

Enfin, on retiendra que l'approche non paramétrique n'est envisageable que si l'on dispose d'un nombre important d'observations : dans le cas où les échantillons sont de petite taille, on se tournera vers l'approche paramétrique.

L'estimateur de Pickands (1975) : il est défini par la statistique :

$$\hat{\xi}_{k,n}^p = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{X_{k,n} - X_{2k,n}}{X_{2k,n} - X_{4k,n}}.$$

Il présente l'intérêt d'être valable quelle que soit la distribution des extrêmes (*Gumbel*, *Weibull* ou *Fréchet*). La représentation graphique de cet estimateur en fonction du

nombre k d'observations considérées montre un comportement en général très volatil au départ, ce qui nuit à la lisibilité du graphique. De plus, cet estimateur est très sensible à la taille de l'échantillon sélectionné, ce qui le rend peu robuste. Il est donc d'un maniement délicat. On peut noter qu'il est asymptotiquement normal avec :

$$\sqrt{k} \frac{\hat{\xi}_{k,n}^p - \xi}{\sigma(\xi)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{lorsque } k \rightarrow +\infty,$$

la variance asymptotique étant donnée par :

$$\sigma(\xi) = \frac{\xi \sqrt{2^{2\xi+1} + 1}}{2(2^\xi - 1) \ln(2)}.$$

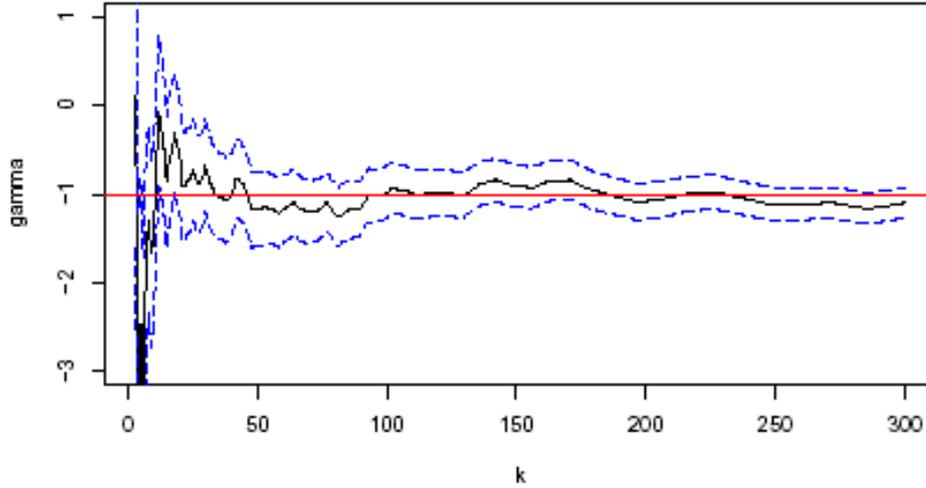


FIG. 3.2. L'estimateur de Pickands.

Estimateur de Hill (1975) : il n'est pas utilisable que pour les distributions de *Fréchet* (donc telles que $\xi > 0$) pour lesquelles il fournit un estimateur de l'indice de queue plus efficace que l'estimateur de Pickands. Il est défini de la façon suivante :

$$\hat{\xi}_{k,n}^H = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^{k-1} (\ln X_{j,n} - \ln X_{k,n}).$$

Si on choisit $k, n \rightarrow +\infty$, de sorte que $k/n \rightarrow n$ alors on peut montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{\xi}_{k,n}^H = \xi$ et l'estimateur de Hill est de plus asymptotiquement normal :

$$\sqrt{k} \frac{\hat{\xi}_{k,n}^H - \xi}{\xi} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1).$$

Cet estimateur est l'estimateur du maximum de vraisemblance dans le cas particulier du modèle $S(x) = 1 - F(x) = Cx^{-1/\xi}$; on reconnaît ici une distribution de Pareto d'indice $\alpha = 1/\xi$. Dans le cas général du domaine de *Fréchet*, la fonction de survie est de la forme $S(x) = 1 - F(x) = x^{-1/\xi}L(x)$ avec L une fonction à variation lente. Cela induit un biais important sur l'estimateur de Hill, qui est donc en pratique d'un maniement délicat.

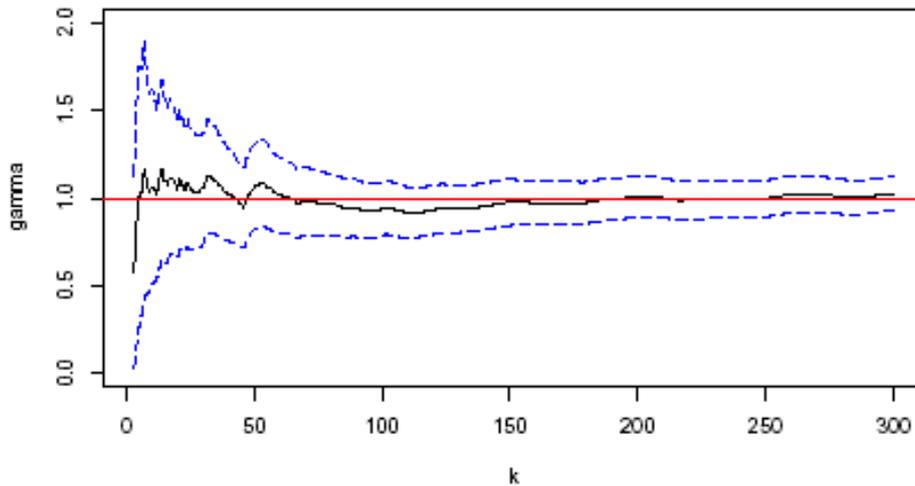


FIG. 3.3. L'estimateur de Hill.

3.2 Modélisation avec Les Lois Stables

Le premier modèle de *Benoît Mandelbrot* traite uniquement des discontinuités et fait l'hypothèse que les données sont indépendantes. Nous avons montré la présence non négligeable des grandes fluctuations des prix et l'existence d'une valeur de Kurtosis très supérieure à 3 (voir l'annexe B), il faut donc travailler avec une loi qui a des queues de distribution lourdes. De plus, la variance ne se stabilise pas. Etant donné que quel que soit la taille de l'échantillon la variance continue à varier considérablement, il est impossible d'estimer cette variance, pour ces raisons (et d'autres que nous verrons au fur et à mesure), *Benoît Mandelbrot* utilise les lois stables.

3.2.1 Stabilité au sens de Lévy ou L-stabilité

Les lois Pareto-stables, appelées aussi lois Lévy-stables ou tout simplement lois stables, ont été introduites par *Paul Lévy* en 1924. Les définitions et propriétés s'énoncent dans ce chapitre sont issues de *Samorodnitsky et Taqqu (1994)*. Selon le théorème

limite central généralisé, si la somme de v.a. i.i.d. a une fonction de distribution limite quand le nombre de variables sommées tend vers l'infini, alors la distribution limite est un membre de la famille des lois stables.

Propriété 3.1. (*Stabilité*)

Les v.a. X_1, \dots, X_n sont indépendantes et symétriquement stables avec le même exposant caractéristique α si et seulement si pour n'importe quelles constantes a_1, \dots, a_n la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^n a_i X_i$ est également une distribution stable.

Cette propriété de stabilité par addition a incité de nombreux chercheurs à utiliser les lois stables pour représenter la loi des rendements financiers. Il existe plusieurs définitions équivalentes d'une loi stable. Les lois stables sont intéressantes car elles ne sont pas trop compliquées. En effet, il suffit de quatre paramètres pour les connaître complètement. Il existe plusieurs définitions équivalentes d'une loi stable :

Définition 3.6. (*Loi stable*)

Soit une suite de v.a.r. $(Y_n)_{n>0}$ i.i.d. de loi L . La loi de probabilité L sur \mathbb{R} est dite stable s'il existe deux fonctions réelles A et B avec A fonction positive telles que :

$$\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{A(n)} + B(n),$$

ait la même distribution que chacun des Y_i .

Dans le cas où la loi L est la loi normale, cette définition correspond au théorème central limite. Cette propriété est très intéressante en finance, car elle suppose comme nous l'avons écrit au paragraphe précédent que la distribution des chroniques financières suit la même loi quelle que soit l'échelle considérée. Ceci signifie que l'on observe une invariance par changement d'échelle de la distribution étudiée.

Définition 3.7. (*Fonction caractéristique stable*)

La v.a.r Y est de loi stable de paramètres α , β , σ et μ , ce qu'on note $Y \equiv S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$, où $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, $\sigma \geq 0$, μ réel, si sa fonction caractéristique est de la forme :

$$\psi_X(t) = \begin{cases} \exp \left[-\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \sin(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \right) + i\mu t \right] & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \exp \left[-\sigma |t| \left(1 + \frac{2}{\pi} i\beta \sin(t) \ln |t| \right) + i\mu t \right] & \text{si } \alpha = 1 \end{cases},$$

où

$$\sin(t) = \begin{cases} 1 & \text{quand } t > 0 \\ 0 & \text{quand } t = 0 \\ -1 & \text{quand } t < 0 \end{cases}.$$

Le principal inconvénient est que les densités des lois stables sont inconnues sauf dans trois cas :

1. La distribution Gaussienne : $S_0(0, \sigma, \mu)$ où $f(x) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}\right)$.
2. La distribution de Cauchy : $S_1(0, \sigma, \mu)$ où $f(x) = \frac{2\sigma}{\pi\left((x-\mu)^2 + 4\sigma^2\right)}$.
3. La distribution de Lévy : $S_{1/2}(1, \sigma, \mu)$ où

$$f(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{1/2} (x-\mu)^{3/2} \exp\left(-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right) 1_{] \mu, \infty[}(x),$$

avec 1 la fonction indicatrice.

Mais, depuis l'implémentation de la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform), les densités stables sont faciles à calculer. Nous pouvons approcher par cette méthode la densité :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi_X(t) dt.$$

Les conditions suivantes sont des définitions équivalentes d'une v.a. stable X :

- a) Soient a, b deux nombres réels positifs et X_1, X_2 deux v.a. i.i.d. que X . Il existe $c \in \mathbb{R}^+$ et $d \in \mathbb{R}^+$ qui satisfont :

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{\mathcal{D}}{=} cX + d.$$

- b) Soit n un entier positif, $n \geq 2$, et X_1, X_2, \dots, X_n , n copies indépendantes de X . Alors il existe $c_n \in \mathbb{R}^+$ et $d_n \in \mathbb{R}^+$ tels que :

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} c_n X + d_n.$$

- c) X a un MDA i.e., il existe une suite des v.a. i.i.d. $\{Y_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, une suite des nombres réels positifs $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et une suite de nombres réels $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tels que :

$$\frac{1}{a_n} \left(\sum_{i=1}^n Y_i - b_n \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} X.$$

Définition 3.8. (MDA des lois α -stable).

On dit que F appartient au MDA d'une loi stable avec l'index de stabilité $0 < \alpha < 2$; notation : $F \in D(\alpha)$; s'ils existent deux suites réelles $A_n > 0$ et C_n tels que :

$$A_n^{-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i - C_n \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

où $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ est une distribution stable avec les paramètres $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq +1$, $\sigma > 0$ et $-\infty < \mu < +\infty$.

3.2.2 Interprétation des Paramètres d'une Variable Stable

Nous venons de voir qu'une v.a. stable est caractérisée par 4 paramètres :

1. Le paramètre α appelé exposant caractéristique ou indice de stabilité, il décrit la forme de la distribution ou le degré d'épaisseur de la queue de distribution ($0 < \alpha \leq 2$). Le cas $\alpha = 2$ correspond à la distribution gaussienne. Pour $\alpha < 2$, la variance d'une v.a. avec la fonction de distribution $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ n'existe pas. Quand $\alpha > 1$, le moyen de la distribution existe et est égal à μ , plus α est petit, plus nous constatons l'existence de très grandes fluctuations et la courbe de la densité est pointue et a des queues de distribution épaisses.
2. Le paramètre β donne une idée de l'asymétrie de la distribution. C'est le paramètre d'asymétrie. Si β est égal à -1 (resp. $+1$) la distribution est totalement asymétrique à gauche (resp. à droite). Lorsque β vaut zéro alors la distribution est symétrique. Lorsque β est positif (resp. négatif), la queue de distribution est plus épaisse à droite (resp. à gauche).
3. Le paramètre σ est appelé facteur d'échelle. Plus σ est grand, plus les données sont volatiles. Le paramètre σ permet de cintrer plus ou moins le corps de la distribution.
4. Le paramètre de localisation μ correspond, pour α supérieur à 1, à la moyenne de la loi de distribution. Si, $\mu = 0$ alors μ est la médiane. Dans les autres cas le paramètre μ ne peut pas être interprété.

3.2.3 Convenance des Modèles Stables et Propriétés Arithmétiques

La distribution stable a beaucoup des propriétés mathématiques importantes et pleines des raisons théoriques, nous poussent de croire quelle est appropriée pour décrire un système, nous présentons maintenant quelques propriétés principales de ces modèles qui sont prévenants comme distribution a queues lourdes :

Elle est considérée comme un bon candidat à tenir la série financière a queues lourdes ; parce qu'elle a certaines propriétés comme la variance infini, l'auto similarité et la longue mémoire. Elle préserve sous la convolution et permettre le skewness aussi bien que les queues et facilite le travaille avec les croissances non stationnaires ; elle facilitent la construction des modèles statistiques, et la production des mesures de risque basées sur les queues de distribution telles que la *VaR*.

Les distributions stables doivent leur importance dans la théorie et la pratique ; à la généralisation du théorème de la limite centrale sans les moments du deuxième

ordre qui déclare que les lois stables sont les seules distributions possibles de limite pour des sommes correctement normalisées et centrées des v.a. i.i.d.

Maintenant nous faisons un rappel de quelques propriétés importantes des v.a. stables de loi $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ que nous utiliserons dans la suite de ce mémoire.

Propriété 3.2. (*L'additivité*)

Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de loi stable $S_\alpha(\beta_1, \sigma_1, \mu_1)$ et $S_\alpha(\beta_2, \sigma_2, \mu_2)$ alors $X_1 + X_2$ suit une loi stable $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ avec :

$$\beta = \frac{\beta_1 \sigma_1^\alpha + \beta_2 \sigma_2^\alpha}{\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha}, \quad \sigma = (\sigma_1^\alpha + \sigma_2^\alpha)^{1/\alpha}, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2,$$

notons que si $\beta_1 = \beta_2$ alors $\beta = \beta_1 = \beta_2$.

Cette propriété d'additivité est très intéressante en finance, car deux titres ayant les mêmes valeurs des paramètres peuvent être considérés ensemble, et la loi qui résultera cette association conservera les mêmes valeurs du paramètre mais les autres paramètres seront modifiés.

Propriété 3.3. (*L'asymétrie*)

$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ est symétrique si et seulement si $\beta = 0$ et $\mu = 0$. Elle est symétrique environ μ si et seulement si $\beta = 0$.

Propriété 3.4. (*Les moments*)

Soit X une v.a. de loi $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ avec $\alpha \in]0, 2[$ alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|X|^p &< \infty & \text{si } p \in]0, \alpha[, \\ \mathbb{E}|X|^p &= \infty & \text{si } p \in]\alpha, \infty[, \end{aligned}$$

si $\alpha \in]1, 2[$ alors $\mathbb{E}(X) = \mu$.

$0 < \alpha \leq 1$	$1 < \alpha \leq 2$	$\alpha = 2$
$\mathbb{E}(X) = \infty$	$\mathbb{E}(X) = \mu$	$\mathbb{E}(X) = \mu$
$\text{Var}(X) = \infty$	$\text{Var}(X) = \infty$	$\text{Var}(X) = 2\sigma^2$

TAB. 3.2. Moments d'une v.a. suivant une loi α – stable.

Cette classe des distributions ont des propriétés gentilles des queues lourdes :

Propriété 3.5. (*Queues lourdes des données financières*)

Soit X une v.a. avec une fonction de distribution F qui appartient à la famille $S_\alpha(\beta, \sigma, \mu)$ alors :

$$G(x) := \Pr(|X| \leq x) = F(x) - F(-x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{pour } \alpha > 1.$$

Samorodnitsky et Taqqu (1994) par exemple lui a montré, on voit, que G change régulièrement avec l'index de queue α et satisfait une condition d'équilibre de queue sachant :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - G(tx)}{1 - G(t)} = x^{-\alpha} \quad \text{pour tout } x > 0,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(t)}{1 - G(t)} = p \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(-t)}{1 - G(t)} = 1 - p =: q.$$

avec $p := (\beta + 1)/2$.

Rappelons que nous disons que la variance est infinie pour signaler que la variance est instable. Comme nous ne pouvons pas lui attribuer une valeur pour une période donnée, nous préférons considérer que la variance n'existe pas.

La variance infinie ne représente pas un obstacle à la compréhension du phénomène dans lequel apparaissent des grands changements de prix, mais au contraire, elle permet d'expliquer ce phénomène. Supposons que X soit la somme des variables Lévy-stables X_i ; il est probable que la valeur x de X provienne en partie substantielle du plus grand des x_i . Les queues de distributions sont porteuses d'informations essentielles, il ne faut donc pas les négliger comme on le fait malheureusement en considérant la loi de Gauss. Nous allons voir dans ce mémoire que le problème des grands changements des variables financières semble pouvoir être résolu avec l'utilisation des lois stables à variance infinie pour trouver un estimateur plus robuste au mesures spectrale des risque financiers..

Chapitre 4

Estimation Empirique des Mesures Spectrales De Risque

Ce chapitre a un but estimatif, il est consacré pour proposer un estimateur empirique de la mesure spectrale des risques financiers, sur la base de la théorie des valeurs extrêmes. D'où l'utilisation des propriétés de maximum domaine d'attraction des lois α -stables, et l'utilisation des notions de L -statistiques ; qui sont considérées comme des estimateur classiques de la mesure spectrale des risques financiers...

C'est *Necir et Meraghni (2009)* qui ont développé un estimateur asymptotiquement normale des L -functionals qui admette une construction semblable a celle des mesures spectrale dont l'utilisation de ces résultats nous aide pour l'obtention de la formule finale de notre estimateur.

A ce fait, notre chapitre va traiter les points suivantes :

Dans la première section nous allons poser la formule classique de l'estimateur de la mesure spectrale, puis nous allons s'attacher a la nécessité de l'utilisation des L -functionals comme des quantités ont un grand intérêt pour faciliter le calcul, et de trouver un estimateur empirique plus robuste et efficace, avec l'ajout de quelques hypothèses de régularité sur la fonction J .

Dans la deuxième section, nous allons parler sur l'estimation des quantiles extrêmes, ainsi que le choix des statistiques d'ordre supérieurs. Nous allons terminer cette section par la formule finale de notre estimateur proposé et d'établir le théorème de son normalité asymptotique, dont l'usage de ce théorème réside dans la construction de l'intervalle de confiance, qui est l'objet de la dernière section dont l'explication des étapes nécessaires de leur construction.

4.1 Motivation

Le principal objectif de ce chapitre est d'explorer une estimation empirique de la mesure spectrale des risques financiers. En dépit de sa apparence, la mesure spectrale $M(\phi)$ est en fait un objet très simple à utilisée dans la pratique. L'intégrale est cependant calculable seulement quand une expression analytique explicite pour l'inverse de la fonction de distribution $F^{\leftarrow}(s)$ est disponible. Dans un vrai système de gestion des risques du monde c'est typiquement le cas seulement si l'approche choisie pour les distributions de probabilité est paramétrique.

Puisque la distribution F de perte est généralement inconnue. Ceci comporte souvent une distribution paramétrique de perte adaptée aux données. Cette distribution est alors employée pour estimer la valeur de la mesure de risque.

Une autre approche (quand il est possible et approprié) est de construire un estimateur empirique non paramétrique pour $M(\phi)$, évitant de ce fait la nécessité de choisir une distribution paramétrique. Une première vue, les différentes mesures de risque peuvent sembler exiger une attention séparée, particulièrement en considérant les grands échantillons des théories asymptotiques pour les estimateurs empiriques correspondants dessous comme prétentions minimales sur F que possible.

4.1.1 Estimation Classique Des Mesures Spectrales De Risque

L'estimateur naturel de $M(\phi)$ sont des combinaisons linéaires des statistiques d'ordre appelées L -statistiques qui permettrait à des directeurs de risque de faire des choix plus au courant à cet égard, Les L -statistiques calculent le quantile comme une moyenne pondérée des statistiques d'ordre multiples. Les dispositifs attrayants des L -statistiques incluent leur simplicité informatique et normalité asymptotique (qui facilite la construction des intervalles de confiance pour le quantile).

D'importance particulière pour la gestion des risques est le fait qu'employer des statistiques d'ordre multiples améliore la robustesse des sensibilités estimées de quantile, les L -statistiques basées sur une statistique d'ordre simple (par exemple, le quantile d'échantillon) sont souvent insatisfaisants, elles sont limités par le fait que l'évaluation de quantile ne peut pas se trouver en dehors de l'échantillon des statistiques d'ordre, qui peuvent être un souci en estimant des quantiles extrêmes basés sur des petits échantillons même pour les grands échantillons, puisque les pertes encourues par différents instruments peuvent être mal corrélées avec ceux de la portefeuille globale (pour plus de détails sur ce type de statistiques on se réfère à *Shorak et Wellner (1986)*).

En effet, soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon de taille $n \geq 1$ pour la v.a. X avec fonction de distribution F ; puis l'estimateur de l'échantillon $M(\phi)$ est :

$$\hat{M}_n(\phi) := - \int_0^1 F_n^{\leftarrow}(s) \phi(s) ds, \quad 0 < s \leq 1,$$

tel que $F_n^{\leftarrow}(s) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F_n(x) \geq s\}$, $0 < s \leq 1$; est la fonction empirique des quantiles correspondantes au fonction de distribution empirique définis par :

$$F_n(x) := n^{-1} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R},$$

relatives à l'échantillon (X_1, \dots, X_n) et $1(\cdot)$ représente la fonction indicatrice, il est claire que $\hat{M}_n(\phi)$ peut être réécrite comme :

$$\hat{M}_n(\phi) = - \sum_{i=1}^n \phi_{i,n} X_{i,n}, \quad (4.1)$$

tel que $\phi_{i,n} := \int_{(i-1)/n}^{i/n} \phi(s) ds$; $i = 1, \dots, n$ et $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ représente les statistiques d'ordre associées à l'échantillon (X_1, \dots, X_n) .

Cette formule présente de nombreux avantages, il est plus susceptible pour développer des estimateurs empiriques de la mesure de risque. L'utilité de cette représentation a été étudiée par un certain nombre d'auteurs comme *Denneberg (1990, 1994)*. Certaines quantités relatives peuvent être également exprimées sous la forme (4.1). En particulier, on lui montre en *Jones et Zitikis (2003)* que les mssures *right-tail*, *left-tail*, et *two-sided deviations* de *Wang (1998)*, sont de la forme (4.1) avec différent fonctions ϕ . Aussi *Necir et Meraghni (2009)* ont défini la quantité des *L-functionals* qui a la même construction.

Le premier théorème général sur la normalité asymptotique de $\hat{M}_n(\phi)$ est établie par *Chernoff et al. (1967)*. Donc, nous avons :

$$\sqrt{n} \left(\hat{M}_n(\phi) - M(\phi) \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\phi)) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

sachant que :

$$\sigma^2(\phi) := \int_0^1 \int_0^1 (\min(s, t) - st) \phi(s) \phi(t) dF^{\leftarrow}(s) dF^{\leftarrow}(t) < \infty. \quad (4.3)$$

En d'autres termes, pour une fonction donnée ϕ ; la condition (4.3) exclut la classe des distributions F pour lesquelles $\sigma^2(\phi)$ est infini. Par exemple, si on prend $\phi = 1$; $M(\phi)$ est égal à la valeur de l'espérance mathématique $\mathbb{E}[X]$ et, par conséquent, l'estimateur de $M_n(\phi)$ est l'estimateur de la moyenne de l'échantillon qui est \bar{X}_n . Dans ce cas, le résultat (4.2) correspond au théorème classique de la limite centrale qui est valable uniquement lorsque la variance de F est fini.

Jones et Zitikis (2003) ont travaillé sur la théorie des L -statistiques dans l'obtention des résultats asymptotique souhaités tel que son uniformité et sa normalité asymptotique, ils emploient la théorie asymptotique de L -statistiques, ils prouvent que, pour les distributions sous-jacentes d'un nombre suffisant de moments finis et sous certaines conditions de régularité sur la fonction ϕ , l'estimateur empirique $\hat{M}_n(\phi)$ d'une mesure de risque $M(\phi)$ est fortement asymptotiquement normal et cohérent avec la moyenne $M(\phi)$ et la variance $\sigma^2(\phi)$. *Jones et Zitikis (2003)* considèrent également l'évaluation des index de risque qui sont des rapports des L -statistiques.

Comme il est mentionné ; la condition (4.3) n'est plus applicable pour la classe des distributions F ayant des variances infini, dans ce cas une question est posée :

Comment on va donc construire les bornes de l'intervalle de confiance pour la moyenne de F lorsque sa variance est infini ?

Dans cet chapitre, nous allons répondre à ce problème par le biais de la théorie des valeurs extrêmes, lorsque nous suggérons, des estimateurs asymptotiquement normaux de $M(\phi)$ pour ce genre des distributions à queues lourdes pour lesquelles $\sigma^2(\phi) = \infty$ et spécialement quand F appartient au domaine d'attraction des lois α -stables avec l'exposant caractéristique $\alpha \in (1, 2)$.

Pour obtenir l'estimateur empirique de la mesure spectrale de risque financier on va utiliser certainement les concepts d'estimation empirique des L -functionals traités par *Nécir et Meraghni (2009)*.

4.1.2 Utilisation des L-functionals

Les L -functionals résument de nombreux paramètres statistiques et actuarielles du risque, ses échantillons d'estimateurs sont des combinaisons linéaires des statistiques d'ordre (L -statistiques). Il existe une classe des distributions à queues lourdes pour lesquelles la normalité asymptotique de ces estimateurs ne peuvent pas être obtenues par des résultats classiques comme on a vu dans le cas des distributions α -stables.

Définition 4.1. (*L-functionals*)

Soit X une v.a. réelle avec la fonction de distribution F ; Les L -functionals correspondant sont définis par :

$$L(J) := \int_0^1 F^{\leftarrow}(s) J(s) ds,$$

où $F^{\leftarrow}(s) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq s\}$, $0 < s \leq 1$; est la fonction de quantile associée à F , et J une fonction mesurable définie sur $[0, 1]$.

Plusieurs auteurs ont utilisé la quantité $L(J)$ pour résoudre quelques problèmes statistiques. Par exemple :

1. *Chernoff et al. (1967)* a illustré le raccordement des L -functionals avec les estimateurs optimaux de localisation et les paramètres scalaires dans les familles des distributions paramétriques.
2. *Hosking (1990)* a présenté les L -moments comme nouvelle approche d'inférence statistique de localisation, dispersion, skewness, kurtosis et d'autres aspects de forme des échantillons de distributions ou des données de probabilité ayant des moyens finis.
3. *Elamir et Scheult (2003)* ont défini les L -moments tronqués pour répondre à quelques questions liées aux distributions à queues lourdes pour lesquelles les moyens n'existent pas et donc la méthode de L -moment ne peuvent pas être appliquée.
4. L -functionals ont également beaucoup d'applications dans des mesures actuarielles de risque. Par exemple : *Wang (1998)* et *Jones et Zitikis (2003)* ont défini la mesure de "two sided déviation" de risque par :

$$\Delta_r(X) := \int_0^1 J_r(1-s) F^{\leftarrow}(s) ds, \quad 0 < r < 1,$$

avec

$$J_r(s) := \frac{r s^{1-r} - (1-s)^{1-r}}{2 s^{1-r} (1-s)^{1-r}}, \quad 0 < s < 1.$$

Après avoir lancé la définition des L -functionals, on peut remarquer aisément après une petite comparaison entre leur définition et celle des mesures spectrales des risques financiers (Voir définition 2.3) que cette dernière admet la même construction que les L -functionals. Donc on peut exploiter les résultats obtenus lors de l'estimation empirique des L -functionals traités par *Nécir et Meraghni (2009)* pour trouver la formule finale de l'estimateur empirique de notre mesure.

4.1.3 Quelques hypothèses sur la régularité de J

Pour les besoins d'application, les hypothèses de régularité sur la fonction J sont nécessaires :

- (H_1) J est différentiable sur $(0, 1)$.
- (H_2) $\lambda := \lim_{s \downarrow 0} J(1-s)/J(s) < \infty$.
- (H_3) Les deux fonctions $J(s)$ et $J(1-s)$ sont à variations régulières au voisinage de zéro avec un indice commun $\beta \in \mathbb{R}$.

(H₄) Il existe une fonction $a(\cdot)$ ne change pas de signe proche de zéro tel que :

$$\lim_{t \downarrow 0} \left(J(xt) / J(t) - x^\beta \right) / a(t) = x^\beta \frac{x^\omega - 1}{\omega}, \quad \text{pour tout } x > 0,$$

où $\omega \leq 0$ est le paramètre de seconde ordre.

Pour la mesure spectrale des risques financiers, la fonction ϕ satisfait les conditions de régularité motionnées dans le chapitre 2 (voir les propriétés (2.1) et la définition (2.2))

4.2 Estimation Empirique Des Mesures Spectrales De Risque

4.2.1 Estimation Des Quantiles Extrêmes

Les études empiriques ont montré que les séries financières et actuarielles ne suivent pas la loi gaussienne et typiquement caractérisées par leurs queues lourdes (voir annexe B). Assumons que F soit distribution a queues lourdes, cela veut dire :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} (1 - F(x)) = \infty, \quad \text{pour tout } \lambda > 0.$$

Dans le reste de cet chapitre nous nous concentrons dans la classe de fonctions de distributions a variation régulière (voir la définition (3.5)), son prévenant comme bon exemple pour les modèles a queues lourdes parce qu'il inclut des distributions populaires comme le Lévy-Stable et également pour sa convenance dans d'ajustage de précision des données financières comme elle est mentionnée en De *Haan et Ferreira (2006)*.

La fonction $(1 - F)$ est a variation régulière à l'infini avec l'index $(-1/\alpha)$, si :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1 - F(sx)}{1 - F(s)} = x^{-1/\alpha}, \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Le quantile élevé de fonction de distribution F de petit niveau s sont deux quantités définies par $F^{\leftarrow}(1 - s)$ et $F^{\leftarrow}(s)$ pour les quantiles extrêmes de droite et de gauche respectivement. L'estimation des quantiles élevés pour des distributions a queues lourdes a beaucoup d'intérêt, on peut citer par exemple *Weissman (1978)*, *Dekkers et De Haan (1989)*, *Matthys et Beirlant (2003)* et *Gomes et al. (2005)*. Dans notre étude, nous présentons les estimateurs de Weissman qui sont un des estimateurs de quantile les plus populaires.

Soit $k = k_n$ et $\ell = \ell_n$ des suites des nombres entiers satisfaisant :

$$1 < k < n, \quad 1 < \ell < n, \quad k \rightarrow \infty, \quad \ell \rightarrow \infty, \quad k/n \rightarrow 0, \quad \ell/n \rightarrow 0.$$

Les estimateurs de Weissman pour $F^{\leftarrow}(1-s)$ et $F^{\leftarrow}(s)$ sont $\hat{F}_L^{\leftarrow}(s)$ et $\hat{F}_R^{\leftarrow}(1-s)$ respectivement définis, par :

$$\hat{F}_L^{\leftarrow}(s) := (k/n)^{1/\hat{\alpha}_L} X_{k,n} s^{-1/\hat{\alpha}_L}, \quad \text{quand } s \downarrow 0,$$

et

$$\hat{F}_R^{\leftarrow}(1-s) := (\ell/n)^{1/\hat{\alpha}_R} X_{n-\ell,n} s^{-1/\hat{\alpha}_R}, \quad \text{quand } s \downarrow 0,$$

où

$$\hat{\alpha}_L = \hat{\alpha}_L(k) := \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log^+(-X_{i,n}) - \log^+(-X_{k,n}) \right)^{-1}, \quad (4.4)$$

et

$$\hat{\alpha}_R = \hat{\alpha}_R(\ell) := \left(\frac{1}{\ell} \sum_{i=1}^{\ell} \log^+(-X_{n-i+1,n}) - \log^+(-X_{n-\ell,n}) \right)^{-1}, \quad (4.5)$$

sont deux formes de l'estimateur de Hill (1975) pour l'index de stabilité α qui pourrait également être estimé, en utilisant les statistiques $Z_{1,n}, \dots, Z_{n,n}$ associées à un échantillon (Z_1, \dots, Z_n) provenant de Z ; comme suit :

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(m) := \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log^+(-Z_{n-i+1,n}) - \log^+(-Z_{n-m,n}) \right)^{-1}, \quad (4.6)$$

avec $\log^+ u := \log(u \vee 1)$ et $m = m_n$ une suite intermédiaire remplissant les mêmes conditions que k et ℓ .

L'estimateur de Hill a été complètement étudié, amélioré, égalisé et généralisé à n'importe quel index à valeurs réelles de queue. Sa convergence faible a été établie par Mason (1982) supposant seulement que la distribution fondamentale change régulièrement à l'infini. La convergence presque sûre a été prouvée par Deheuvels et al. (1988) et plus récemment par Nécir (2006). La normalité asymptotique a été étudiée, dans de diverses conditions sur la queue de distribution, par de nombreux ouvriers comme, par exemple, Csörgö et Mason (1985), Beirlant et Teugels (1987) et Dekkers et al. (1989).

4.2.2 Choix optimal du Nombre des Statistiques d'ordre Supérieures

Les estimateurs basés sur les valeurs extrêmes se fondent essentiellement sur les nombres k et ℓ des statistiques d'ordre inférieures et supérieures utilisées dans le calcul d'estimation. Les estimateurs $\hat{\alpha}_L$ et $\hat{\alpha}_R$ ont, en général, des variances substantiels pour

des valeurs petites de k et ℓ et un bias considérables pour des grandes valeurs de k et ℓ .

Par conséquent, on doit chercher des valeurs optimales pour k et ℓ ; pour donner un équilibre entre les deux cas. Numériquement, il existe plusieurs procédures pour le choix le plus approprié de k et ℓ pour obtenir de bonnes estimations de l'index de stabilité α ; voir par exemple, *Dekkers et De Haan (1993)*, *Drees et Kaufmann (1998)*, *Danielsson et al. (2001)*, *Cheng et Peng (2001)* et *Neves et Fraga Alves (2004)*.

4.2.3 Définition de l'Estimateur Empirique

La méthode la plus simple pour estimer $M(\phi)$ est non par son définition intégrale, mais plutôt par l'estimateur $M_n(\phi)$, en remplaçant F dans la définition de $M(\phi)$ par F_n la fonction de distribution empirique basée sur un échantillon de n réalisations i.i.d. (X_1, \dots, X_n) ayant la même fonction de distribution F .

En effet, soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon de taille $n \geq 1$ de la v.a. X avec la fonction de distribution F appartenant au domaine d'attraction des lois α -stables et $X_{1,n} \leq \dots \leq X_{n,n}$ représente la statistique d'ordre basée sur cet échantillon.

Considérons aussi $F \in D(\alpha)$ ($\sigma^2(\phi)$ est infinie) et $0 < \alpha < 2$ et soient $k = k_n$ et $\ell = \ell_n$ des suites des nombres entiers satisfaisants :

$$1 < k < n, 1 < \ell < n, k \rightarrow \infty, \ell \rightarrow \infty, k/n \rightarrow 0, \ell/n \rightarrow 0,$$

avec la condition additionnelle :

$$\ell/k \rightarrow \theta < \infty \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

D'abord, nous devons noter lorsque $1 + \beta - 1/\alpha > 0$ et lorsque tous les deux $\hat{\alpha}_L$ et $\hat{\alpha}_R$ sont des estimateurs consistants de α , nous prenons pour tout n grand :

$$\begin{aligned} \Pr(1 + \beta - 1/\hat{\alpha}_L > 0) &= \Pr(1 + 1 + \beta - 1/\hat{\alpha}_R > 0) \\ &= 1 + o(1). \end{aligned}$$

Rappelons la formule de $M(\phi)$:

$$M(\phi) = - \int_0^1 F_\phi^{\leftarrow}(s) \phi(s) ds,$$

afin de faciliter les calculs, posons : $\dot{\phi}(s) = -\phi(s)$. la formule précédente devienne :

$$M(\dot{\phi}) = \int_0^1 F_{\dot{\phi}}^{\leftarrow}(s) \dot{\phi}(s) ds,$$

observons maintenant que $M(\dot{\phi})$ peut être divisé en trois intégrales comme suit :

$$M(\dot{\phi}) = \left[\int_0^{k/n} F_{\dot{\phi}}^{-1}(s) \dot{\phi}(s) ds + \int_{k/n}^{1+\ell/n} F_{\dot{\phi}}^{-1}(s) \dot{\phi}(s) ds + \int_{1+\ell/n}^1 F_{\dot{\phi}}^{-1}(s) \dot{\phi}(s) ds \right]$$

$$: = [M_{L,n} + M_{M,n} + M_{R,n}].$$

En substituant $\hat{F}_L^{\leftarrow}(s)$ et $\hat{F}_R^{\leftarrow}(1-s)$ pour $F^{\leftarrow}(s)$ et $F^{\leftarrow}(1-s)$ dans $M_{L,n}$ et $M_{R,n}$ respectivement, et l'utilisation de la prise en charge de l'hypothèse (H_3) , on donne pour tous n grands :

$$\begin{aligned} M_{L,n} &= \int_0^{k/n} \hat{F}_L^{\leftarrow}(s) \dot{\phi}(s) ds \\ &= (k/n)^{1/\hat{\alpha}_L} X_{k,n} \int_0^{k/n} s^{-1/\hat{\alpha}_L} \dot{\phi}(s) ds \\ &= (1 + o(1)) \frac{(k/n) \dot{\phi}(k/n)}{1 + \beta - 1/\hat{\alpha}_L} X_{k,n}, \end{aligned}$$

et de même pour $M_{R,n}$, telle que :

$$\begin{aligned} M_{R,n} &= \int_0^{\ell/n} \hat{F}_R^{\leftarrow}(1-s) \dot{\phi}(s) ds \\ &= (\ell/n)^{1/\hat{\alpha}_R} X_{n-\ell,n} \int_0^{\ell/n} s^{-1/\hat{\alpha}_R} \dot{\phi}(1-s) ds \\ &= (1 + o(1)) \frac{(\ell/n) \dot{\phi}(1-\ell/n)}{1 + \beta - 1/\hat{\alpha}_R} X_{n-\ell,n}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons estimer $M_{L,n}$ et $M_{R,n}$ par :

$$\hat{M}_{L,n} := \frac{(k/n) \dot{\phi}(k/n)}{1 + \beta - 1/\hat{\alpha}_L} X_{k,n} \quad \text{et} \quad \hat{M}_{R,n} := \frac{(\ell/n) \dot{\phi}(1-\ell/n)}{1 + \beta - 1/\hat{\alpha}_R} X_{n-\ell,n}, \quad (4.7)$$

respectivement. Comme un estimateur pour $M_{M,n}$ nous prenons l'estimateur naturel de l'échantillon, c'est :

$$\begin{aligned} \hat{M}_{M,n} &: = \int_{k/n}^{1+\ell/n} \dot{\phi}(s) F^{\leftarrow}(s) dt \\ &= \sum_{i=k+1}^{n-\ell} \dot{\phi}_i X_{i,n}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Alors, la formule définitive de notre estimateur est :

$$\hat{M}_{k,\ell}(\dot{\phi}) = \left[\frac{(k/n)\dot{\phi}(k/n)}{1+\beta-1/\hat{\alpha}_L} X_{k,n} + \sum_{i=k+1}^{n-\ell} \dot{\phi}_{i,n} X_{i,n} + \frac{(\ell/n)\dot{\phi}(1-\ell/n)}{1+\beta-1/\hat{\alpha}_R} X_{n-\ell,n} \right]. \quad (4.9)$$

Un estimateur universel de $M(\phi)$ peut se résumer par :

$$\hat{M}_n^*(\dot{\phi}) = \hat{M}_{k,\ell}(\dot{\phi}) 1_{\{\sigma^2(\dot{\phi})=\infty\}} + \hat{M}_n(\dot{\phi}) 1_{\{\sigma^2(\dot{\phi})<\infty\}}.$$

Où $\hat{M}_n(\dot{\phi})$ est comme dans (4.1). Plus précisément

$$\hat{M}_n^*(\dot{\phi}) = \hat{M}_{k,\ell}(\dot{\phi}) 1_{(A(\alpha,\beta))} + \hat{M}_n(\dot{\phi}) 1_{(\bar{A}(\alpha,\beta))},$$

et $\bar{A}(\alpha, \beta)$ est ca complémentaire dans $(0, 2) \times \mathbb{R}$.

Notons que pour un cas particulier lorsque $\ell = k$ et $\dot{\phi} = 1$; la normalité asymptotique du moyen équilibré $\hat{M}_{M,n}(\dot{\phi})$ a été établie dans le théorème de *Csörgö et al. (1986c)*. Le théorème suivant donne la normalité asymptotique de $\hat{M}_{M,n}(\dot{\phi})$ pour des suites plus généraux de k et ℓ et la fonction poids $\dot{\phi}$. Pour la convenance, nous plaçons pour n'importe quel $0 < x < 1/2$ et $0 < y < 1/2$,

$$\sigma^2(x, y; \dot{\phi}) := \int_x^{1-y} \int_x^{1-y} (\min(s, t) - st) \dot{\phi}(s) \dot{\phi}(t) dF^{\leftarrow}(s) dF^{\leftarrow}(t),$$

et soit $\sigma_n^2(\dot{\phi}) := \sigma^2(k/n, \ell/n; \dot{\phi})$.

Théorème 4.1. (*La normalité asymptotique de $\hat{M}_{M,n}(\dot{\phi})$*)

Supposons que $F \in D(\alpha)$ avec $0 < \alpha < 2$. Pour toute fonction mesurable $\dot{\phi}$ satisfaisant l'hypothèse (H_3) avec l'index $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $1/\alpha - \beta < 1$, et pour toutes suites d'entiers k et ℓ tel que : $1 < k < n$, $1 < \ell < n$, $k \rightarrow \infty$, $\ell \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow 0$, $\ell/n \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$, il existe un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) porter la suite X_1, X_2, \dots ; et une suite des ponts browniens $\{B_n(s); 0 \leq s < 1; n = 1, 2, \dots\}$; tels que nous prenons pour tout n grand

$$\sqrt{n} \left(\hat{M}_{M,n}(\dot{\phi}) - M_{M,n}(\dot{\phi}) \right) / \sigma_n(\dot{\phi}) = \int_{k/n}^{1-\ell/n} \dot{\phi}(s) B_n(s) ds / \sigma_n(\dot{\phi}) + o_p(1),$$

et donc

$$\sqrt{n} \left(\hat{M}_{M,n}(\dot{\phi}) - M_{M,n}(\dot{\phi}) \right) / \sigma_n(\dot{\phi}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

La normalité asymptotique de notre estimateur est établi dans ce théorème :

Théorème 4.2. (*La normalité asymptotique*)

Supposons que $F \in D(\alpha)$ avec $0 < \alpha < 2$. Pour toute fonction mesurable $\dot{\phi}$ satisfaisant les hypothèses $(H_1) - (H_4)$ avec l'index $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $1/2 < 1/\alpha - \beta < 1$, et pour toutes suites d'entiers k et ℓ tel que : $1 < k < n$, $1 < \ell < n$, $k \rightarrow \infty$, $\ell \rightarrow \infty$, $k/n \rightarrow 0$, $\ell/n \rightarrow 0$, $\ell/k \rightarrow \theta < \infty$ et $\sqrt{ka}(k/n)A(k/n) \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$, nous avons :

$$\sqrt{n} \left(\hat{M}_{k,\ell}(\dot{\phi}) - M(\dot{\phi}) \right) / \sigma_n(\dot{\phi}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \sigma_0^2), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty,$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \sigma_0^2(\alpha, \beta) := (\alpha\beta + 1)(2\alpha\beta + 2 - \alpha) \\ &\quad \times \left(\frac{2\alpha^2 + (\beta\alpha - 1)^2 + 2\alpha(\beta\alpha - 1)}{2((1 + \beta)\alpha - 1)^4} + \frac{1}{(1 + \beta)\alpha - 1} \right) + 1. \end{aligned}$$

Le corollaire suivant est plus pratique que ce théorème, il fournit directement des bornes de confiance pour $M(\phi)$

Corollaire 4.1. *Selon les hypothèses du théorème de normalité, nous avons :*

$$\frac{\sqrt{n} \left(\hat{M}_{k,\ell}(\dot{\phi}) - M(\dot{\phi}) \right)}{(\ell/n)^{1/2} \dot{\phi}(1 - \ell/n) X_{n-\ell,n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, V^2), \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

Lorsque

$$\begin{aligned} V^2 &= V^2(\alpha, \beta, \lambda, \theta, p) := \left(1 + \lambda^{-2} (q/p)^{-2/\alpha} \theta^{-2\beta+2/\alpha-1} \right) \\ &\quad \times \left(\frac{2\alpha^2 + (\beta\alpha - 1)^2 + 2\alpha(\beta\alpha - 1)}{2((1 + \beta)\alpha - 1)^4} + \frac{1}{(1 + \beta)\alpha - 1} \right) + 1, \end{aligned} \quad (4.10)$$

Avec (λ, β) comme dans les hypothèses $(H_2) - (H_3)$ et (p, q) vérifient :

$$p = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x)}{1 - G(x)} \quad \text{et} \quad q = 1 - p = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(-x)}{1 - G(x)},$$

et la fonction $1 - G$ est une fonction à variation régulière d'index $(-\alpha)$.

Pour un aperçu sur la preuve du théorème (4.2) voir l'annexe A, et pour ceux qui ont intéressés au preuve du théorème (4.1) et le corollaire (4.1) voir *Necir et Meraghni (2009)* p. 28.

La distribution asymptotique de $\hat{M}(\dot{\phi})$ peut être utilisé pour obtenir des intervalles de confiance pour $M(\dot{\phi})$. Toutefois, la convergence de la distribution asymptotique peut être lent, en particulier pour les plus grandes distorsions et pour F avec des queues lourdes. Par conséquent, dans certains cas, l'estimation paramétrique peut être préférable, si les résultats sont sensibles au ignorance des conditions du modèle. Dans notre cas, la normalité asymptotique des $\hat{M}(\dot{\phi})$ est liée à celle de l'estimateur de Hill, qui est équivalente à la condition de second ordre.

Les mesures de risque sont devenues ubiquistes dans le domaine de la gestion des risques. Mais tout statisticien sait qu'une estimation ne constitue qu'une partie de ce que l'on a besoin de savoir, l'autre étant une mesure de confiance sur cette estimation. Dans la section suivante, on fournit un moyen facile d'estimer ces intervalles de confiance en utilisant la théorie des statistiques d'ordre. La procédure est simple, presque instantané à exécuter, et peut être utilisée avec n'importe quel distribution paramétrique ou non paramétrique de rendement.

4.3 Construction Des Bornes de L'intervalle de Confiance

La forme de la variance asymptotique V^2 dans (4.1) suggère que, afin de construire des intervalles de confiance pour $M(\dot{\phi})$; une estimation de p est aussi bien nécessaire. En utilisant la statistique d'ordre intermédiaire $Z_{n-m,n}$. *De Haan et Pereira (1999)* ont proposé l'estimateur consistant suivant pour p :

$$\hat{p}_n = \hat{p}_n(m) := \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n 1\{X_t > Z_{n-m,n}\}, \quad (4.11)$$

où $m = m_n$ est une suite des nombres entiers satisfaisant $1 < m < n$; $m \rightarrow 1$ et $m/n \rightarrow 0$; quand $n \rightarrow \infty$ (les mêmes que celle utilisé dans (4.6))

Soit $\dot{\phi}$ une fonction de poids donnée satisfaisant $(H_1) - (H_4)$ avec des constantes fixes β et λ . Supposons que, pour n assez grand, nous prenons une réalisation (x_1, \dots, x_n) d'un échantillon (X_1, \dots, X_n) provenant d'une v.a. X avec un fonction de distribution F vérifie toutes les hypothèses du théorème (4.1). Le $(1 - \varsigma)$ -intervalle de confiance pour $M(\dot{\phi})$ est obtenus par l'intermédiaire des étapes suivantes :

Etape 1 : Selectioner les nombres optimales k^* , ℓ^* et m^* des statistiques d'ordre inférieures et supérieures utilisées en (4.4); (4.5) et (4.6).

Etape 2 : Determiner $X_{k^*,n}$, $X_{n-\ell^*,n}$, $\dot{\phi}(k^*/n)$, $\dot{\phi}(1 - \ell^*/n)$ et $\theta^* := \ell^*/k^*$.

Etape 3 : Calculer, en utilisant (4.4) et (4.5) ; $\hat{\alpha}_L^* := \hat{\alpha}_L(k^*)$ et $\hat{\alpha}_R^* := \hat{\alpha}_R(\ell^*)$. Puis déduire, par (4.9), l'estimation $M_{k^*, \ell^*}(\dot{\phi})$.

Etape 4 : Utiliser (4.6) et (4.11) pour calculer $\hat{\alpha}^* := \hat{\alpha}(m^*)$ et $\hat{p}_n^* = \hat{p}_n(m^*)$. Puis déduire, par (4.1), l'écart type asymptotique :

$$V^* := \sqrt{V^2(\hat{\alpha}^*, \beta, \lambda, \theta^*, \hat{p}_n^*)}.$$

Finalement, la borne inférieure et supérieure de $(1 - \varsigma)$ -intervalle de confiance de $M(\phi)$ seront respectivement :

$$\hat{M}_{k^*, \ell^*}(\dot{\phi}) - z_{\varsigma/2} \frac{\sqrt{\ell^*} V^* X_{n-\ell^*, n} \phi(1 - \ell^*/n)}{n},$$

et

$$\hat{M}_{k^*, \ell^*}(\dot{\phi}) + z_{\varsigma/2} \frac{\sqrt{\ell^*} V^* X_{n-\ell^*, n} \phi(1 - \ell^*/n)}{n},$$

là où $z_{\varsigma/2}$ est $(1 - \varsigma/2)$ -quantile de la distribution normale standard $\mathcal{N}(0, 1)$ avec $0 < \varsigma < 1$.

Conclusion Générale et Perspectives

La prise de décision nécessite la connaissance de l'ensemble des choix possibles, ainsi que la probabilité d'occurrence de chaque état extrême, en développant ou en mettant en application des systèmes sophistiqués de mesure de risque, le choix de la mesure fautive de risque ; comme la *VaR* a pu sérieusement limiter son efficacité, nous avons présenté une étude de la caractérisation des risques, elle est commencée par une simple hypothèse d'illustration et terminée par une formulation fonctionnelle intégrante de l'estimateur.

Ce mémoire est organisé autour d'une idée directrice, qui est l'estimation des *MSRs* par la méthode empirique, et en particulier à l'aide des quantiles des *L*-functionals en se basant sur la TVE. On précise en particulier les conditions assurant certaines propriétés asymptotiques utiles dans les étapes d'estimation et d'identification de l'estimateur. Nous avons rappelé les notions d'estimation des quantiles extrêmes, et le choix des statistiques d'ordre supérieurs, et nous avons mis en évidence un certain nombre de conditions assurant la consistance et la normalité asymptotique de notre estimateur empirique. Ces résultats permettent alors de construire d'une manière efficace un intervalle de confiance permettant à des directeurs de risque d'évaluer mieux la qualité de l'analytique rapporté de risque.

Ainsi, dans ce mémoire, nous avons intéressé à montrer la praticabilité des *MSRs* qui possèdent des propriétés théoriquement intéressantes et utiles pour mesurer le risque :

1. Les *MSRs* sont cohérentes.
2. Les *MSRs* ne sont pas basées sur l'intervalle de confiance, elles sont basées sur la fonction d'aversion au risque.
3. La non négativité des poids des *MSRs* et leur normalisation.

4. Augmentation faible : Les poids attachés à des pertes élevés au plus moins poids ont attaché aux pertes inférieures. Pour les poids élevés associés aux pertes élevées, elles s'attendent à des plus gros pertes d'aversion de risque, associées à ces plus poids élevés.
5. Les poids devraient monter plus rapidement pendant que la probabilité monte plus loin.

Cependant, les *MSRs* ont des avantages par rapport les mesures de risque traditionnelles, citons par exemple :

- L'information entière de domaine de distribution de perte est utilisée, qui fait de nouveau mesure supérieure pour la conclusion robuste (en ce qui concerne les deux côtés d'une distribution).
- Stables (avec respect de l'erreur d'estimation) décisions d'investissement ; en choisissant convenablement la perte aléatoire.
- Elle est facile pour que cette nouvelle mesure reflète l'attitude du risque de l'investisseur, consoler l'asymétrie et les queues épaisses de la distribution de perte.
- D'une manière primordiale, elle est facile de calculer la nouvelle valeur de la mesure et de l'appliquer pour trouver la portefeuille optimale.

L'intérêt pour ces mesures est également venu des développements plus récents, et du développement d'un certain nombre de plus nouvelles mesures de risque connus comme les mesures cohérentes et de distorsion de risque. L'intérêt accru pour la mesure de risque résulte également des développements plus profonds de fond, comme : L'impact de la technologie financière dans l'assurance, le plus en particulier dans le secteur naissant du transfert alternatif de risque, l'utilisation croissante des mesures de risque dans des conditions de normalisation de capital et de solvabilité, les opérations bancaires, les marchés de valeurs mobilières, et la croissance de la gestion des risques...etc.

Les solutions trouvées de mesure le risque financier nous permettront :

- D'évaluer rapidement la solvabilité d'un client, d'un prospect ou d'un fournisseur ;
- De minimiser nos risque face à des engagements financiers considérables ou des relations à long terme ;
- De gérer la marge brute d'autofinancement ;
- D'obtenir de l'information approfondie, notamment les états financiers et les données sur les habitudes de paiement ;
- De recevoir une évaluation de crédit instantanée et à peu de frais ;

- D'évaluer de nouveaux clients afin d'établir des conditions de crédit et estimer le risque possible ;
- De garder une longueur d'avance et savoir à quel moment d'autres entreprises ont consulté nos données.

Ainsi, dans ce travail nous avons montré l'intérêt de la théorie des extrêmes qui est beaucoup plus en amont. Elle permet de comprendre quelles sont les implications du choix d'une modélisation sur une mesure de risques extrêmes. Elle indique quels sont les facteurs susceptibles de faire varier cette mesure de façon significative. En échantillon fini, la TVE correspond aux statistiques du maximum et du minimum. Ces statistiques d'ordre peuvent être utilisées dans la gestion des risques pour estimer certains paramètres, etc. Nous avons utilisé par conséquent le domaine d'attraction des lois stables qui décrivent mieux les séries financières avec des queues épaisses, telle que l'utilisation de l'estimateur de *Hill (1975)* pour le paramètre α d'index de queues...

Des études perspectives on été proposer pour pouvoir manager le changement liés au domaine de la mesure de risque dont l'adoption des stratégies alternatives peut être prise ; étant donner le niveau actuel de capital dont dispose la société, les exigences en capital réglementaire, les objectifs de la notation et de maximisation de la valeur des actionnaires, et sachant la mesure de risque utilisée et les scénarios de stress plausibles, la décision concernant la prise des risques additionnels, la couverture des risques... Dans ce cas, la question reste à savoir :

S'il est nécessaire d'utiliser une mesure de risque commune à travers les différentes entités ou types de risque d'un conglomérat financier ? La même question peut se poser concernant la définition d'un seuil de confiance et d'un horizon de modélisations communes ?

La réponse à ces questions peut dépendre de l'objectif de management, de profil de risque du conglomérat et du besoin de l'allocation optimale du capital et du bénéfice de la diversification. La gestion des risques ne peut pas s'appuyer sur une seule mesure de risque ; la combinaison des différentes mesures de risques sont souvent nécessaires pour comprendre l'exposition d'une société aux risques réels dont l'estimation oblige un traitement statistique spécifique et spécifier. Toutefois, le choix d'une mesure de risque donnée reste un élément essentiel pour l'évaluation du capital économique. Ces thèmes peuvent être l'objet des prochains travaux sur la modélisation et l'agrégation des différents types de risque....

Bibliographie

Bibliographie

- [1] Acerbi, C., 2004. Coherent representations of subjective risk-aversion, Wiley, New York.
- [2] Acerbi, C., 2001. Risk Aversion and Coherent Risk Measures : a Spectral Representation Theorem, Milano, Italy.
- [3] Acerbi, C., 2002. Spectral measures of risk : A coherent representation of subjective risk aversion, Journal of Banking and Finance.
- [4] Acerbi, C., Tasche, D., 2001. Expected Shortfall : A natural coherent alternative to Value at Risk, Milano, Italy.
- [5] Acerbi, C., Tasche, D., 2001. On the coherence of Expected Shortfall, Milano, Italy.
- [6] Acerbi, C., Simonetti, P., 2002. Portfolio Optimization with Spectral Measures of Risk, Abaxbank, available in www.gloriamundi.com.
- [7] Acerbi, C., Nordio, C., Sirtori, C., 2008. Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management, Abaxbank, Milano, Italy.
- [8] Adam, E., 2001. L'analyse fractales des marchés financiers, Finama Asset Management.
- [9] Albrecht, P., 2004. Risk Measures. Institute for Insurance Science, Yniversity of Mannheim, Germany.
- [10] Argaud, J.P., 2007. Des mathématiques pour la finance, Séminaire CERFACS.
- [11] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M. Heath, D., 1999. Coherent Measures of Risk, Mathematical Finance.
- [12] Balbás, A., Garrido, J., Mayora, S., 2008. Properties of Distortion Risk Measures, Springer Science and Business Media.
- [13] Baradaran Ghahfarokhi, M.A., Baradaran Ghahfarokhi, P., 2009. Applications of Stable Distributions in Time series analysis, Proceedings of world Academy of Science, Engineering and Technology.

-
- [14] Beirlant, J., Matthys, G., 2000. Quantile Estimation for Heavy-Tailed Data, Centrum voor Statistiek University.
- [15] Beirlant, J., Matthys, G., 2003. Estimating the extreme value index and high quantiles with exponential regression models. *Statistica Sinica* 13, 853-880.
- [16] Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J., Teugels, J., 2004. *Statistics of Extremes : Theory and Applications*. John Wiley & Sons, Ltd ISBN : 0-471-97647-4.
- [17] Beirlant, J., Teugels, J., 1987. Asymptotic normality of Hill's estimator. *Extreme value theory (Oberwolfach, 1987)*, 148-155, *Lecture Notes in Statistics*, 51, Springer, New York, 1989.
- [18] Belzile, S., 2008. L'utilisation des mesures cohérentes de risque en gestion de portefeuille, Université de Québec à Montréal, Canada.
- [19] Benlagha, N., Grun-Réhomme, M., (2006). *Application de la théorie des valeurs extrêmes en assurance automobile*, Université de Paris.
- [20] Bensafta, M.K., (2000). *La gestion du Risque de Marché : Application de la Valeur-à-Risque*, Université de chlef, Algerie.
- [21] Blake, L., Ritirupa, S., 2004. *Extreme Value Theory and Fat Tails in Equity Markets*.
- [22] Breymann, W., 2005. *Quantifying Risk*, Zurich University of Applied Science Winterthur, Switzerland.
- [23] Castillo, J.N., Balakrishnan, E., Sarabia, M., 2006. *Advances in Distribution theory, order statistics, and Inference*, Editors United States Of America.
- [24] Chabaane, A., Laurent, J.P., Malevergne, Y., Turpin, F., (2003). *Alternative Risk Measures for Alternative Investments*, ISFA Actuarial School, University of Lyon.
- [25] Charpentier, A., 2008. *Mesurer les grands risques*, Université Rennes 1, France.
- [26] Charpentier, A., 2008. *Mesures de risques extrêmes*, Formation Carita, Université Rennes 1, France.
- [27] Charpentier, A., 2007. *Estimating quantiles and related risk measures*, Seminaire du GREMAQ, Université Rennes 1, France.
- [28] Charpentier, A., 2009. *Econométrie de la finance Partie 2 Modéliser les rendements boursiers*, Université Rennes 1, France.
- [29] Chavas J.P., 2004. *Risk analysis in theory and practice*, Elsevier.
- [30] Cheng, S., Yanhui, L., Wang, S., 2004. *Progress in Risk Measurement Advanced Modelling and Optimization*.

- [31] Cheng, S., Peng, L., 2001. Confidence intervals for the tail index. *Bernoulli* 7, 751-760.
- [32] Chernoff, H., Gastwirth, J. L., Johns, M. V., 1967. Asymptotic distribution of linear combinations of functions of order statistics with applications to estimation. *Annals of Mathematical Statistics* 38, 52-72.
- [33] Christoffersen, P., Gonçalves, S., 2004. Estimation Risk in Financial Risk Management. CIRANO, Séries scientifiques, Montréal, Canada.
- [34] Cizek, P., Härdle, W., Weron, R., 2005. *Statistical Tools for Finance and Insurance*, Springer.
- [35] Cox, D., Cox, M., 2006. *The Mathematics of Banking and Finance*, John Wiley & Sons, England.
- [36] Conti, R., Deguest, R., Scandlo, G., 2007. Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures, Financial Engineering Report No. 2007-06, Center for Financial Engineering, Columbia University.
- [37] Dacorogna, M.M., 2006. Multivariate Extremes, Aggregation and Risk Estimation By Risk Measures & Risk Management for High Frequency Data, Workshop Eindhoven.
- [38] Daya, G.M., Sadiq, S., 2008. Risk Assessment and Estimation Model, International Conference on Computer Science and Information Technology, IEEE.
- [39] De Haan, L., Ferreira, A., 2006. *Extreme Value Theory An Introduction*, Springer.
- [40] De Haan, L., Stadtmuller, U., 1996. Generalized regular variation of second order. *Australian Mathematical Society, (Series A)* 61 (1996), 381-395.
- [41] De Haan, L., Einmahl, J.H.J., Piterbarg, V.I., 2001. Non parametric estimation of the spectral measure of extreme value distribution. *The Annals of Statistics*, Vol. 29, No. 5, 1401-1423.
- [42] Denuit, M., Delwarde, A., (2000). *Mathématiques de l'assurance non vie, tome 1 : Principes fondamentaux de théorie du risque*, Institut des Sciences Actuarielles.
- [43] Delbaen, F., 2003. *Coherent measures of risk on general probability spaces*, Springer Verlag, Berlin.
- [44] Delbaen, F., Össische, E., 2000. *Coherent risk measures : risk measures on general probability spaces*, Technische Hochschule, Zürich.
- [45] Deheuvels, P., Haeusler, E., Mason, D. M., 1988. Almost sure convergence of the Hill estimator. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophy Society* 104, 371-381.

-
- [46] Csörgö, M., Mason, D. M., 1985. Central limit theorems for sums of extreme values. *Mathematical Proceedings Cambridge Philosophy Society* 98, 547-558.
- [47] Dekkers, A. L. M., de Haan, L., 1989. On the estimation of the extremevalue index and large quantile estimation. *Annals of Statistics* 17, 1795- 1832.
- [48] Dekkers, A. L. M., de Haan, L., 1993. Optimal choice of sample fraction in extreme-value estimation. *Journal of Multivariate Analysis* 47, 173- 195.
- [49] Dekkers, A. L. M., de Haan, L., 1989. On the estimation of the extremevalue index and large quantile estimation. *Annals of Statistics* 17, 1795- 1832.
- [50] Drees, H., Kaufmann, E., 1998. Selection of the optimal sample fraction in univariate extreme value estimation. *Stochastic Processes and Applications* 75, 149-195.
- [51] Danielsson, J., de Haan, L., Peng, L., de Vries, C. G., 2001. Using a bootstrap method to choose the sample fraction in tail estimation. *Journal of Multivariate Analysis* 76, 226-248.
- [52] Elmsiyah, C., 2006. Mesures de risque et gestion du capital dans le secteur financier, Laboratoire d'Economie d'Orléans Université d'Orléans.
- [53] Elamir, E.A.H., Seheult, A.H., 2003. Trimmed L-moments. *Computational Statistics and Data Analysis* 43, 299-314.
- [54] Embrechts, P., 1998. *Extremes in Economics and the Economics of Extremes*, Department of Mathematics ETHZ CH-8092 Zürich Switzerland.
- [55] Embrechts, P., 1999. *Extreme value theory : Potential and Limitations as an integrad risk management tool*, Departement de mathematiques, ETH Zürich, Allemagne.
- [56] Fama, E.F., 1965. The Behavior of stock market prices. *Journal of Business* 38, 34-105.
- [57] Ferrari, D., Yuhong, Y., (2007). Estimation of Tail Probability via the Maximum Lq-Likelihood method. School of Statistics, University of Minnesota, USA.
- [58] Franke, J., Härdle, W., Hafner, C., 2005. *Statistics of Financial Markets*, Springer.
- [59] Finkenstädt, B., Rootzén, H., 2004. *Extreme Values in Finance, Telecommunications, and the Environment*. CRC Press, LLC.
- [60] Föllmer, H., (2005). *Incertitude financière, mesures de risque et préférences robustes*, Université de Berlin, Allemagne.
- [61] Föllmer, H., Scheid, A., 2008. *Convex and coherent risk measures*.
- [62] Gauthier, C.P., (2000). *Evénement extrêmes sur les spreads de crédit*, ENSAE.

-
- [63] Gilli, M., K ellezi, E., 2006. An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk. Computational Economics, Springer.
- [64] Gomes, M. I., Figueiredo, F., Mendonça, S., 2005. Asymptotically best linear unbiased tail estimators under a second-order regular variation condition. Journal of Statistical Planning and Inference 134, 409-433.
- [65] Goovaerts, M., Kaas, R., Roger J.A.L., 2005. Decision Principles Derived from Risk Measure. University of Amsterdam, Dept.of Quantitative Economics.
- [66] Goovaerts, M., Kaas, R., Dhaene, J., 2002. Economic capital allocation derived from risk measures.
- [67] Goovaerts, M., Kaas, R., Dhaene, J., Roger L., Denuit, M., 2006. Risk measurement with equivalent utility principles.
- [68] Guillaou, A., Willems, P., 2006. Application de la théorie des valeurs extrêmes en hydrology. Universit  Paris VI, France.
- [69] Hervé, F.D., 2004. La VaR comme instrument de mesure des risques de marché ?. Crédit Local.
- [70] Head, G.L., 1967. An alternative to defining risk as uncertainty. The Journal of Risk and Insurance.
- [71] Helmut, M., 2001. Calculating Quantile-based Risk Analytics with L-estimators. Algo research quarterly.
- [72] Henryk, G., Mayoral, S., 2006. On a relationship between distorted and spectral risk measures. Munich Personal Archive.
- [73] Herlemont, D., 2008. Value at Risk - Etude de cas.
- [74] Hill, B.M., 1975. A Simple General Approach to Inference About the Tail of a Distribution. Annals of Statistics.
- [75] Houkari, M., 2006. Mesures spectrales et Optimisation de portefeuille, Mesures de risque dynamiques. Ecole polytechnique.
- [76] Houkari, M., Adam, A., Laurent, J.P., 2006. New Frontiers of Asset Management. Universit  de Lyon, France.
- [77] Houkari M., Adam, A., Laurent, J.P., 2007. Spectral risk measures and portfolio selection.
- [78] Hosking, J.R.M., 1990. L-moments : analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. Journal of the Royal Statistical Society serie B 52, 105-124.
- [79] Jack, C.W., Kelton, D., 2001. Quantile and histogram simulation. Proceedings of the 2001 Winter Simulation Conference.

-
- [80] Jacquier, A., 2008. Spectral Risk Measures with applications to credit risk. Department of Mathematics, Evry University, Birkbeck College, University of London, Zeliade Systems.
- [81] Jones, B.L., Zitikis, R., 2003. Empirical estimation of risk measures and related quantities. North American Actuarial Journal, Series in Statistics, Springer.
- [82] Jones, B.L., Zitikis, R., 2005. Testing for the order of risk measures : an application of L-statistics in actuarial science. International Journal of Statistics, vol. LXIII, n. 2, pp. 193-211.
- [83] Jones, B.L., (2003). Empirical estimation of risk measure values and parameters, Departement of Statistical and Actuarial Sciences, University of Western Ontario.
- [84] Kaiser, T., Brazauskas, V., (2006). Interval estimation of actuarial risk measures. North American Actuarial Journal, Volume 10, Number 4.
- [85] Kevin, D., Cotter, J., 1998. Beyond value at risk the new science or risk management. New York : Wikey.
- [86] Kevin, D. Cotter, J., 2006. Extreme spectral risk measures : An application to futures clearinghouse margin requirements. Journal of Banking & Finance, Elsevier, available online at : <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/3505/>
- [87] Kevin, D. Cotter, J., 2007. Spectral Risk Measures and the Choice of Risk Aversion Function.
- [88] Kevin, D., Cotter, J., 2007. Exponential Spectral Risk Measures. University College Dublin, online at : <http://mpra.ub.uni-muenchen.de/3499/>
- [89] Kevin, D., Cotter, J., Ghulam, S., 2008. Spectral Risk Measures : Properties and Limitations. Springer Science & Business Media.
- [90] Kevin, D., Blake, D., 2006. After VaR : The Theory, Estimation and Insurance Applications of Quantile- Based Risk Measures. The Pensions Institute Cass Business School City University, London.
- [91] Kurtz, D., Pignard, T.B., (2003). Modélisation du risque de crédit. Université Paris 7 et Paris 1, France.
- [92] Laurent, J.P., (2000). De la mesure à l'analyse des risques. Séminaire ISFA, Université Claude Bernard Lyon 1, France.
- [93] Lévy, P., 1925. Calcul des probabilités. Paris, Gauthier-Villars.
- [94] Longin, F., 1998. Value at Risk : Une nouvelle approche fondée sur les valeurs extrêmes. Annales d'économie et de Statistique.

- [95] Mathlouthi, I., Zenaidi, A., 2005. Théorie des valeurs extrêmes vs méthodes classiques de calcul de la VaR. Institut des Hautes Etudes Commerciales, Carthage, Tunisie.
- [96] Mason, D. M., 1982. Laws of the large numbers for sums of extreme values. *Annals of Probability* 10, 754-764.
- [97] McNeil, A.J., 1999. *Extreme Value Theory for Risk Managers*. Zürich.
- [98] McNeil, A.J., (1996). Estimating the Tails of Loss Severity Distributions using Extreme Value Theory. *ASTIN Bulletin*, Vol. 27 no 1, pp 117-137. on line at : <http://www.casact.org/library/astin/vol27no1/117.pdf>.
- [99] McNeil, A.J., 2002. *VaR and Expected Shortfall in Portfolios of Dependent Credit Risks : Conceptual and Practical Insights*, Rüdiger Frey.
- [100] Melnikov, A., 2004. *Risk analysis in finance and insurance*. CRC Press, LLC.
- [101] Meraghni, D., 2008. *Modelling distribution tails*. A Thesis Presented For The Degree of Doctor of Sciences, University of Mohamed Kheider, Biskra, Algeria.
- [102] Mitra, S., 2009. *Risk Measures in Quantitative Finance*. Elsevier.
- [103] Nagaraja, H.N., David, H.A., 2003. *Order Statistics*. Third Edition, Wiley Series In Probability And Statistics.
- [104] Necir, A., Meraghni, D., 2009. *Estimating L-functionals for Heavy-Tailed Distributions and Applications*. Laboratory of Applied Mathematics, Mohamed Khider University, Biskra, Algeria.
- [105] Necir. A., Meraghni, D., 2008. *Empirical Estimation of Risk Premiums for Heavy-tailed Claim Amounts*. Laboratory of Applied Mathematics, Mohamed Khider University, Biskra, Algeria.
- [106] Necir. A., Meraghni, D., 2009. *Empirical Estimation of the Proportional Hazard Premium for Heavy-tailed Claim Amounts*. *Insurance : Mathematics and Economics*.
- [107] Necir, A., 2006. *A Nonparametric Sequential Test with Power 1 for the Mean of Lévy-stable Laws with Infinite Variance*. Springer Science & Business Media, LLC.
- [108] Necir, A., Rassoul, A., Zitikis, R., 2009. *A Note on the Empirical Estimation of the Conditional Tail Expectation*. Working Paper, Laboratory of Applied Mathematics, Mohamed Khider University, Biskra, Algeria.
- [109] Nelson, B.L., Lesnevski, V., Staum, J., 2004. *Simulation of coherent risk measures*. Dept. of Industrial Engineering & Management Sciences, Northwestern University Evanston, IL 60208-3119, U.S.A.

-
- [110] Nivoix, S., (2005). Mesure de l'aversion au risque et paradoxe d'allais. Faculté de Droit et Sciences Sociales.
- [111] Nolan, J.P., 2008, Stable Distributions Models for Heavy Tailed Data. Math/Stat Department, American University.
- [112] Nolan, J.P., Fofack, H., 2008, Tail Behavior, Modes and Other Characteristics of Stable Distributions. American University.
- [113] Neves, C., Fraga Alves, M. I., 2004. Reiss and Thomas' automatic selection of the number of extremes. *Computational Statistics and Data Analysis* 47, 689-704.
- [114] Ouarda, T., El-Adlouni, S., Bernard, B., 2007. Caractérisation des distributions à queue lourde pour l'analyse des crues.
- [115] Pacini, B., Raggi, M., 2000. Extreme Events and Risk Measures : a Comparison among Alternative Approaches. Dipartimento di Scienze Statistiche, Università di Bologna.
- [116] Paddy, P., 2001. A Short Introduction to Extreme Value Theory. GIRO/CAS Convention.
- [117] Patrick, N., Laurent, C., Louisot J.P., 2008. Risk Quantification, Management, Diagnosis and Hedging, Wiley.
- Planchet, F., 2008. Modélisations avancées en assurance. Support de cours : Utilisation de la théorie des valeurs extrêmes dans le contexte solvabilité.
- [118] Pratabjai, N.O., 2008. Value-at-Risk and Expected Shortfall under Extreme Value Theory. Framework, An Empirical Study on Asian Markets. Faculty of Commerce and Accountancy Thammasat University, Bangkok, Thailand.
- [119] Ralland, A., 2007. L'analyse des risques financiers par simulation : Utilité, Méthodes, Limites. Rencontres AMRAE Toulouse, France.
- [120] Rau-Bredow, H., 2002. Value at Risk, Expected Shortfall, and Marginal Risk Contribution.
- [121] Reiss, R.D., Thomas, M., 2007. Statistical Analysis of Extreme Values with applications to Insurance, Hydrology and Other Fields, Birkhauser, third edition.
- [122] Rockafellar, R., Tyrrell, I., Uryasev, S., 1999. Optimization of Conditional Value-at-Risk. Portfolio Safeguard by www.AOrDa.com.
- [123] Samorodnitsky, G., Taqqu, M.S., 1994. Stable non-Gaussian random processes : stochastic models with infinite variance, Chapman & Hall, New York.
- [124] Shorack, G.R., Wellner, J. A., 1986. Empirical processes with applications to statistics. New York : John Wiley & Sons.

-
- [125] Sodjahin, W.R., 2003. Impact du developpement des marchés boursiers sur la croissance économique au CANADA. Université de Montreale rapport de maîtrise de science économiques.
- [126] Sordo, M.A., 2008. Characterizations of classes of risk measures by dispersive orders. Elsevier, Insurance : Mathematics and Economics 42 1028–1034.
- [127] Sordo, M.A., Hdctor, M., 2007. Characterization of stochastic orders by L-functionals. Springer Verlag.
- [128] Strepparava, R., 2009. Implementation of portfolio optimization with spectral measures of risk. UBI Pramerica SGR.
- [129] Studer, G., 1997. Maximum Loss for Measurement of Market Risk. A dissertation submitted to the Swiss Federal institue of Technology ZURICH (Allemagne) for the degree of Doctor of Mathematics.
- [130] Suluck, P., Mokkhavesa, S., Pratabjai N., 2008. Value-at-Risk and Expected Shortfall under Extreme Value Theory.
- [131] Tasche, D., 2002. Expected Shortfall and Beyond. Journal of Banking and Finance.
- [132] Wang, S.S., 2000. A Class of Distortion Operators for Pricing Financial and Insurance Risks. Journal of Risk and Insurance 167(1), 15–36.
- [133] Wang. S., (2001). A risk measure that goes beyond coherence. SCOR Reinsurance, Itasca, IL USA 20143.
- [134] Wang, S.S., 1998. An Actuarial Index of the Right-Tail Risk. North American Actuarial Journal 2(2) : 88–101.
- [135] Wang, Y., Chen, Z., 2008. Two sided coherent risk measures and their application in realistic portfolio optimization. Departement of Scientific Computing and Applied Softwares, Faculty of Science.
- [136] Weissman, I., 1978. Estimation of parameters and large quantiles based on the k largest observations. Journal of American Statistical Association 73, 812-815.
- [137] Wirch, J. L., Hardy, M. R., (2000). Ordering of Risk Measures for Capital Adequacy.
- [138] Wirch, J.L., Hardy, M.R., 2001. Distortion risk measures : coherence and stochastic dominance. Paper available in www.gloriamundi.com.
- [139] Wirch, J.L., (1999). Raising Value at Risk. Department of Statistics and Actuarial Science. Ontario, Canada.
- [140] Yamai, Y., Yoshiba, T., 2002. Comparative analyses of Expected Shortfall and Value-at-Risk : their validity under market Stress, Monetary and Economic Studies (Bank of Japan), 20 (3), 181–23.

- [141] Yannick, M., Didier, S., 2006. Extreme Financial Risks From Dependence to Risk Management. Springer Verlag, Berlin.

Quelques Sites web intéressants :

- [143] <http://definition.actufinance.fr>
- [144] <http://www.riskdynamics.com>
- [145] <http://fr.answers.yahoo.com>
- [146] <http://www.wikipedia.com>
- [147] <http://www.gigapedia.com>
- [148] http://www.trader-workstation.com/bourse/aversion_au_risque.php
- [149] http://fr.mimi.hu/economie/aversion_au_risque.html
- [150] http://findarticles.com/p/articles/mi_hb6645/is_2_73/ai_n29273902/
- [151] <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.38.7624>
- [152] <http://scholar.lib.vt.edu/theses/>
- [153] <http://mathworld.wolfram.com>
- [154] <http://planetmath.org/>
- [155] http://www.xpmath.com/ebooks/math_ebooks.php
- [156] <http://rfs.oxfordjournals.org/cgi/content/abstract/6/3/527>
- [157] www.riskglossary.com
- [158] www.gloriamundi.com

Annexe A

Pour montrer la théorème principale de notre thèse ; rapellons (4.7) , (4.8) et (4.9) et on écrit

$$\hat{M}_{k,\ell}(\dot{\phi}) - M_{k,\ell}(\dot{\phi}) = (\hat{M}_{L,n} - M_{L,n}) + (\hat{M}_{M,n} - T_{M,n}) + (\hat{M}_{R,n} - M_{R,n}).$$

Il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} \hat{M}_{R,n} - M_{R,n} &= \frac{(k/n) \dot{\phi}(k/n) X_{k,n} \hat{\alpha}_L}{(1+\beta) \hat{\alpha}_L - 1} - \int_0^{k/n} \dot{\phi}(s) F^{\leftarrow}(t) dt \\ &= S_{n1}^L + S_{n2}^L + S_{n3}^L, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} S_{n1}^L &:= (k/n) \dot{\phi}(k/n) X_{k,n} \left\{ \frac{\hat{\alpha}_L}{(1+\beta) \hat{\alpha}_L - 1} - \frac{\alpha}{(1+\beta) \alpha - 1} \right\}, \\ S_{n2}^L &:= \frac{\alpha (k/n) F^{\leftarrow}(k/n) \dot{\phi}(k/n)}{(1+\beta) \alpha - 1} \{X_{k,n}/F^{\leftarrow}(k/n) - 1\}, \end{aligned}$$

et

$$S_{n3}^L := \frac{\alpha (k/n) \dot{\phi}(k/n) F^{\leftarrow}(k/n)}{(1+\beta) \alpha - 1} - \int_0^{k/n} \dot{\phi}(s) F^{\leftarrow}(t) dt.$$

de même nous avons

$$\begin{aligned} \hat{M}_{R,n} - M_{R,n} &= \frac{(\ell/n) \dot{\phi}(1-\ell/n) X_{n-\ell,n} \hat{\alpha}_R}{(1+\beta) \hat{\alpha}_R - 1} - \int_0^{\ell/n} \dot{\phi}(s) F^{\leftarrow}(1-t) dt. \\ &= S_{n1}^R + S_{n2}^R + S_{n3}^R, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} S_{n1}^R &:= (k/n) \dot{\phi}(k/n) X_{k,n} \left\{ \frac{\hat{\alpha}_L}{(1+\beta) \hat{\alpha}_L - 1} - \frac{\alpha}{(1+\beta) \alpha - 1} \right\}, \\ S_{n2}^R &:= \frac{\alpha (\ell/n) F^{\leftarrow}(1-\ell/n) \dot{\phi}(1-\ell/n)}{(1+\beta) \alpha - 1} \{X_{n-\ell,n}/F^{\leftarrow}(1-\ell/n) - 1\}, \end{aligned}$$

et

$$S_{n3}^R := \frac{\alpha (\ell/n) \dot{\phi}(1-\ell/n) F^{\leftarrow}(1-\ell/n)}{(1+\beta) \alpha - 1} - \int_0^{\ell/n} \dot{\phi}(s) F^{\leftarrow}(1-t) dt.$$

On peut vérifier aisément que peut être récrit comme

$$S_{n1}^L = \frac{\hat{\alpha}_L \alpha (k/n) \dot{\phi}(k/n) X_{k,n}}{((1+\beta) \hat{\alpha}_L - 1) ((1+\beta) \alpha - 1)} (1/\hat{\alpha}_L - 1/\alpha).$$

en raison des théorèmes (2,3) et (2,4) de *Csörgö* et de *Mason (1985)*, *Peng (2001)* et *Necir et al. (2007)*; ils ont prouvé que sous la condition de second ordre et pour tout n grand

$$\begin{aligned}\sqrt{k}\alpha(1/\hat{\alpha}_L - 1/\alpha) &= -\sqrt{n/k}B_n(k/n) + \sqrt{n/k} \int_0^{k/n} \frac{B_n(s)}{s} ds + o_p(1), \\ \sqrt{k}(X_{k,n}/F^{\leftarrow}(k/n) - 1) &= -\alpha^{-1}\sqrt{n/k}B_n(k/n) + o_p(1),\end{aligned}$$

et

$$X_{k,n}/F^{\leftarrow}(k/n) = 1 + o_p(1),$$

avec $\{B_n(s), 0 \leq s \leq 1, n = 1, 2, \dots\}$ est une suite des ponts brownien (voit théorème 4.1). Après le calculs (nous évitons les détails), nous montrons que pour tout n grand

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(S_{n1}^L + S_{n2}^L)/\sigma_n(\dot{\phi}) &= -\frac{\alpha\varpi}{((1+\beta)\alpha-1)^2} \tag{A.1} \\ &\times \left\{ -\sqrt{n/k}B_n(n/k) + \sqrt{n/k} \int_0^{k/n} \frac{B_n(s)}{s} ds \right\} \\ &- \frac{\varpi}{(1+\beta)\alpha-1} \sqrt{n/k}B_n(k/n) + o_p(1).\end{aligned}$$

Par les mêmes arguments, nous avons

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(S_{n1}^R + S_{n2}^R)/\sigma_n(\dot{\phi}) &= -\frac{\alpha\varpi_R}{((1+\beta)\alpha-1)^2} \tag{A.2} \\ &\times \left\{ -\sqrt{n/\ell}B_n(1-\ell/n) - \sqrt{n/\ell} \int_{1-\ell/n}^1 \frac{B_n(s)}{1-s} ds \right\} \\ &+ \frac{\varpi_R}{(1+\beta)\alpha-1} \left\{ -\sqrt{n/\ell}B_n(1-\ell/n) \right\} + o_p(1),\end{aligned}$$

où $\varpi_R := |\lambda|(q/p)^{1/\alpha} \theta^{\beta-1/\alpha+1/2} \varpi$. Ces des arguments semblables a ceux utilisés dans la preuve du théorème 1 dans *Necir et al. (2007)*, telle que

$$\sqrt{n}S_{n3}^R/\sigma_n(\dot{\phi}) = \sqrt{n}S_{n3}^R/\sigma_n(\dot{\phi}) = o(1) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty. \tag{A.3}$$

A l'aide des formules (A.1), (A.2) et (A.3) on obtient

$$\begin{aligned}
\sqrt{n} \left(\hat{M}_{k,\ell}(\dot{\phi}) - M_{k,\ell}(\dot{\phi}) \right) / \sigma_n(\dot{\phi}) &= \frac{\alpha \varpi}{((1+\beta)\alpha - 1)^2} \\
&\times \left\{ -\sqrt{n/k} B_n(n/k) + \sqrt{n/k} \int_0^{k/n} \frac{B_n(s)}{s} ds \right\} \\
&- \frac{\varpi}{(1+\beta)\alpha - 1} \sqrt{n/k} B_n(k/n) + o_p(1) \\
&- \int_{k/n}^{1-\ell/n} \dot{\phi}(s) B_n(s) ds / \sigma_n(\dot{\phi}) \\
&+ \frac{\alpha \varpi_R}{((1+\beta)\alpha - 1)^2} \\
&\times \left\{ -\sqrt{n/\ell} B_n(1-\ell/n) - \sqrt{n/\ell} \int_{1-\ell/n}^1 \frac{B_n(s)}{1-s} ds \right\} \\
&+ \frac{\varpi_R}{(1+\beta)\alpha - 1} \left\{ -\sqrt{n/\ell} B_n(1-\ell/n) \right\} + o_p(1).
\end{aligned}$$

Après un long calcul, nous obtenons la variance asymptotique du $\sqrt{n} \left(\hat{L}_{k,\ell}(\dot{\phi}) - L_{k,\ell}(\dot{\phi}) \right) / \sigma_n(\dot{\phi})$ qu'elle sera calculé par

$$\sigma_0^2 = (\varpi^2 + \varpi_R^2) \left[\frac{2\alpha^2 + (\beta\alpha - 1)^2 + 2\alpha(\beta\alpha - 1)}{((1+\beta)\alpha - 1)^4} + \frac{2}{(1+\beta)\alpha - 1} \right] + 1.$$

Finalement, il est facile de vérifier

$$\varpi^2 + \varpi_R^2 = (\alpha\beta + 1)(2\alpha\beta + 2 - \alpha) / 2$$

ce qui termine la preuve de notre théorème principal.

Annexe B

Notre données représentent des rendements journalières pour des indices boursiers, nous avons prendre par exemple le *Nasdaq*, *Nikkei225* et *S&P500*. Les données ont été obtenues à partir le site web : www.finance.yahoo.fr. Afin d'illustrer le comportement de la série financière, nous faisons un aperçu entier à l'aide du logiciel de R obtenu à travers le site web : <http://cran.r-project.org>. D'abord nous montrons selon la (FIG. B.1) la série des prix de nos données.

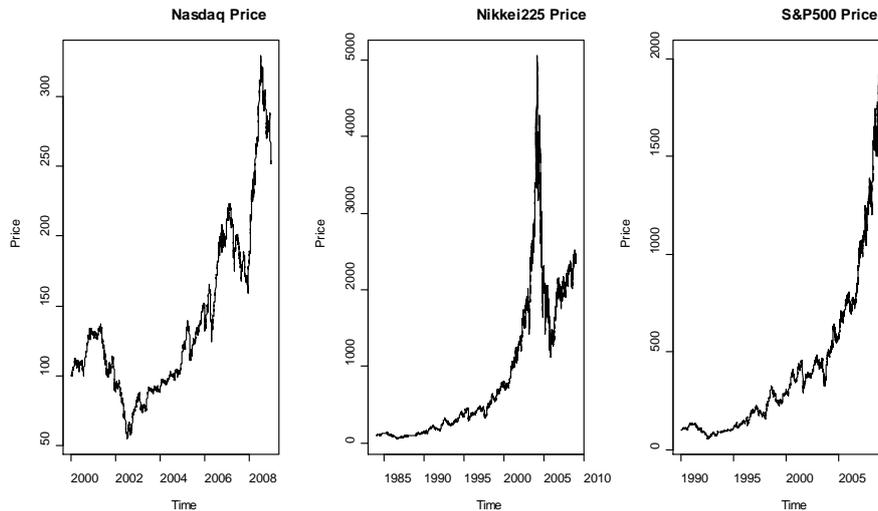


FIG. B.1. Prix des sries financières : Nasdaq, Nikkei225 et S&P500.

Le rendement des capitaux présente les croissances quotidiennes du logarithme du prix, c'est le gain relatif (ou la perte). il est donc le plus intéressant pour l'investisseur qui le prix il même, parce qu'il lui permet de déterminer les bénéfices qu'il peut réaliser. Il est définit comme suit :

Définition B.1. (*Rendement d'un actif financier*)

Le rendement journalière (hebdomadaire, mensuel...) d'un actif financier est défini comme suit :

$$R_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}, \quad t > 0$$

là où P_t indique le cours financier à l'instant t .

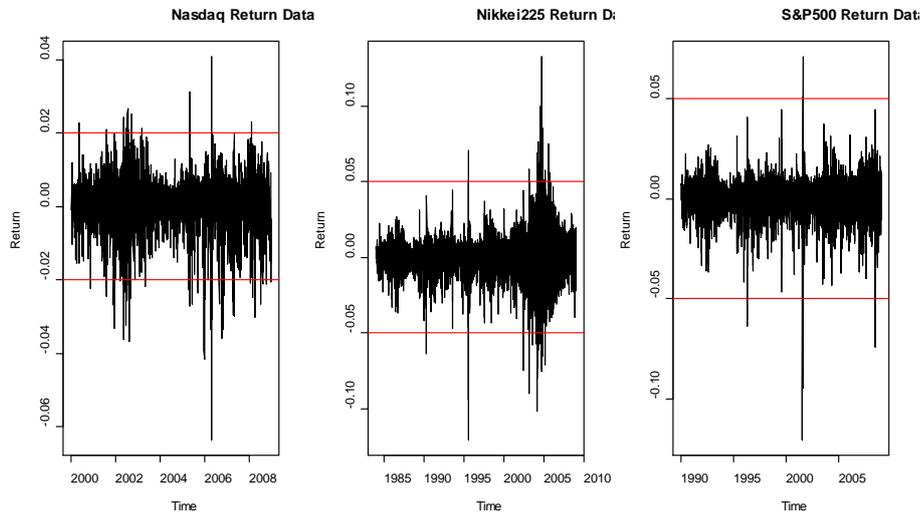


FIG. B.2. Sries des rendements de Nasdaq, Nikkei225 et S&P500.

Pour mesurer les variations d'amplitude d'une action d'un marché nous employons la volatilité comme mesure d'instabilité au-dessus d'un actif financier. Ce paramètre mesurant le risque d'exécution et de prix. La volatilité est également employée pour optimiser les calculs pour les portefeuilles diversifiés des actifs financiers. Ce phénomène, que nous appelons le "heteroskedastique conditionnel" est particulièrement commun dans des données de la bourse, des cours du change ou d'autres prix déterminés sur les marchés des capitaux :

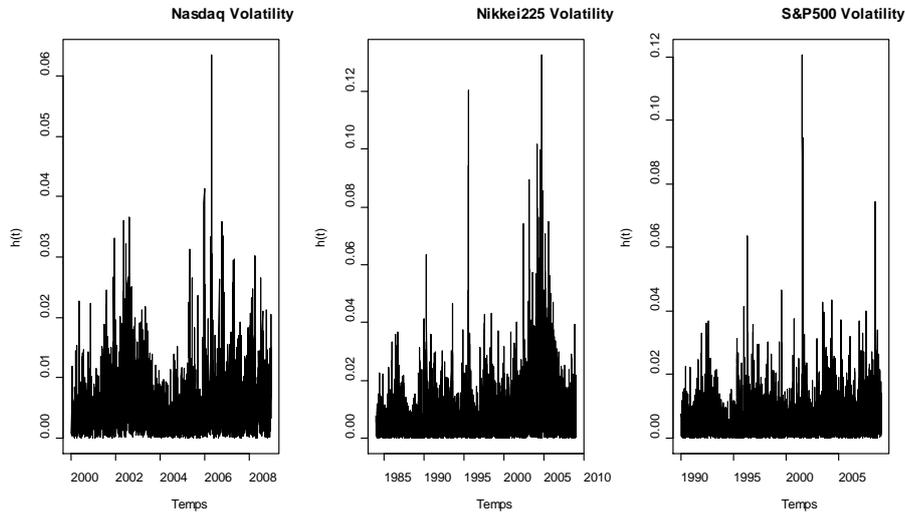


FIG. B.3. La Volatilité des rendements.

	Nasdaq	Nikkei225	S&P500
Moyenne	0.0003	0.0004	0.0005
Ecart-type	0.008	0.012	0.009
Skewness	-0.8230	-0.3116143	-1.335855
Kurtosis	6.73	13.77	17.97
n	3285	9125	6935
Minimum	-0.064	-0.1204	-0.1204
Maximum	0.048	0.132	0.070

TAB. B.1. Statistiques des séries des rendements.

Dans cette table et selon la figure (FIG. B.2) qui représente le graphique des rendements du futur index, nous notons que le skewness est inférieure à 0, signifie que la distribution de densité des rendements s'est écartée vers la gauche. Cette observation est confirmée par l'aspect du graphique. Ainsi, nous pouvons dire que la distribution des rendements du futur index a une asymétrie négative. De la même manière, nous constatons que le kurtosis, qui est dans notre cas intensivement supérieur à 3. Nous sommes donc confrontés avec le cas d'une distribution sensiblement leptokurtic, il a des queues épaisses comparées à celle du distribution normale. Beaucoup de techniques dans les finances modernes se fondent fortement sur l'hypothèse que les v.a. financières suivent une distribution gaussienne. Cependant, les séries chronologiques observées

dans les finances -mais également dans d'autres applications- dévier souvent du modèle gaussien, du fait leurs distributions marginales sont a queues lourdes et, probablement tout asymétrique comme il est semblé dans le graphique suivant :

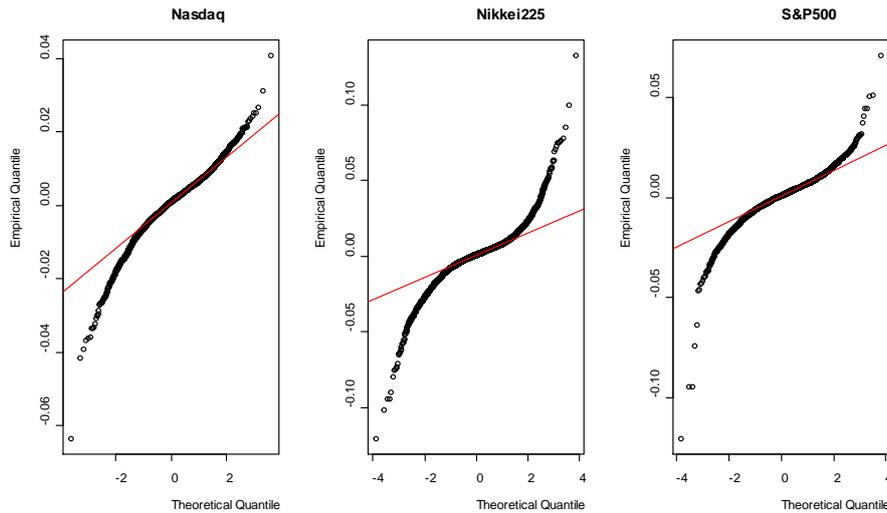


FIG. B.3. Test graphique de la normalité des sries des rendements.

Maintenant, par le test de normalité sur les rendements nous avons vu qu'ils sont rudement au centre de la distribution gaussienne (autour de la moyenne), et divergeons là-bas, avec des queues épaisses ce qui confirme la propriété de la non normalité des rendements des séries financières. *Alors qu'elle est la meilleure distribution qui ajuste mieux les queues?* Pour répondre a cette question, nous faisons une comparaison représentée sur la figure (FIG. B.5) entre la distribution α -stable et la gaussienne à travers le graphique d'histogrammes qui montre que les queues soient bien distribuées avec la distribution -stable.

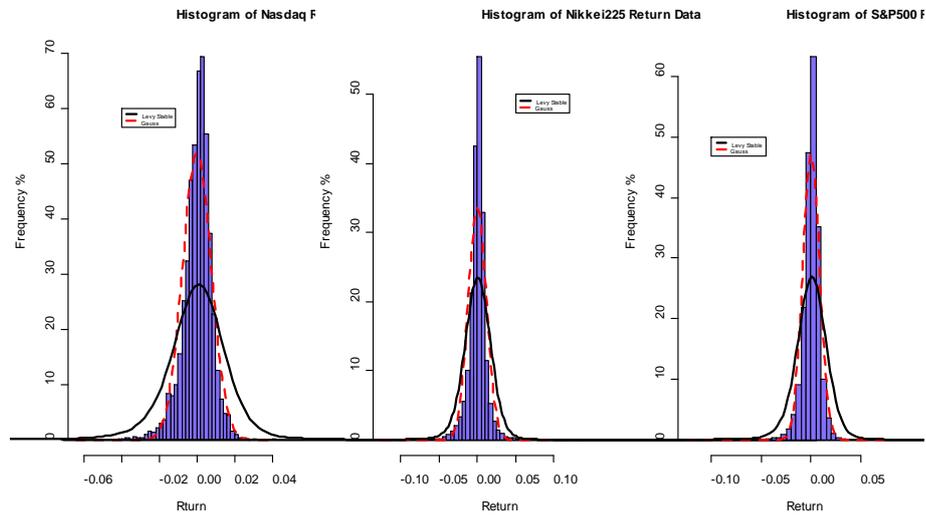


FIG. B.5. Histogrammes des sries de rendements.

Résumer

Ce mémoire est consacré à l'étude de la mesure de risque. Nous avons commencé par leur définition avec plus de concentration sur la MSR; puis nous avons estimé cette mesure de risque par la manière empirique. Nous avons montré que la méthode classique d'estimation basée sur les L-satistiques sous estime la valeur réelle de la mesure de risque pour les distributions a queues lourdes.

Ce résultat n'est pas étonnant dans la théorie d'estimation ; car pour ce genre de distribution la variance étant infini ce qui rendre le théorème de la limite centrale n'est plus applicable, Dans notre travail, nous avons répondu à ce problème par le biais de la TVE, lorsque nous avons proposé, un estimateur asymptotiquement normal des MSRs pour cette classe des distributions pour lesquelles la variance est infini et spécialement quand la fonction de distribution appartient au domaine d'attraction des lois stables.

Mots Clés: L-functionals, L-satistiques, Mesure Spectrale des risques financiers, Estimation empirique, Queues épaisses, Valeurs extrêmes, Domaine d'attraction, Lois stables, Mesures de risque financiers.

Abstract

This memory is devoted to the study of the risk measurement. We started with their definition with more concentration on the SRMs; then we estimated this risk measures by an empirical way. We showed that the estimation by the traditional method based on the L-statistics; miss estimate the real value of the risk measure in the case of heavy tails distributions.

This result is not surprising in the estimation theory; because for this kind of distributions the variance being infinite which make the central limit theorem not applicable any more. In our work, we have to answer on this problem by the means of the EVT, when we suggested, an asymptotically normal estimator of the SRMs for this distributions type especially when the distribution function belongs to the maximum domain of attraction of the stable laws.

Key Words: L-functionals, L-statistics, Spectral Risk Measures, Empirical estimate, Heavy tails, Extreme Values Theory, Maximum Domain of Attraction, -Stable laws, Financial risk measures.

ملخص

هذه المذكرة مكرسة لدراسة مقاييس الخطر فقد بدأنا بتحديد ماهيتها بمزيد من التركيز على المقياس الطيفي للمخاطر المالية ثم قمنا بتقدير هذا المقياس تجريبيا حيث أظهرنا أن الأسلوب الكلاسيكي يقلل من القيمة الحقيقية لمقاييس الخطر بالنسبة للتوزيعات ذات الذيل الثقيلة.

هذه النتيجة ليست مفاجئة في نظرية التقدير لان هذا النوع من توزيعات يمتلك قيمة لانهاية بالنسبة لمؤشر التغير مما يجعل نظرية النهاية المركزية غير قابلة للتطبيق. في هذه المذكرة قمنا بمعالجة هذه المشكلة في ظل نظرية القيم القصوى حيث اقترحنا مقدر طبيعي مقارب للمقياس الطيفي للمخاطر المالية لهذا النوع من التوزيعات وخاصة عندما تكون دالة التوزيع تنتمي إلى المجال الجذب للقوانين مستقرة.

المصطلحات: لمقياس الطيفي للمخاطر المالية، التقدير التجريبي ، الذيل السمكة ، نظرية القيم القصوى ، منطقة

الجذب، القوانين المستقرة، قياس المخاطر المالية، L-functionals ، L-satistiques