

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des Sciences et de la technologie  
Département : Génie Civil et Hydraulique  
Ref : .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم: الهندسة المدنية و الري  
المرجع: .....

Thèse présentée en vue de l'obtention  
Du diplôme de

## Doctorat LMD en Génie Civil

Option : Modélisation numérique en génie civil

---

# Contribution de l'approche en déformation pour la modélisation des structures courbes

---

Présentée par :

**KHIOUANI Houssam Eddine**

Soutenue publiquement le : 21/10/2020

**Devant le jury composé de :**

|                        |                           |            |                       |
|------------------------|---------------------------|------------|-----------------------|
| Pr. BENMEBAREK Sadok   | Professeur                | Président  | Université de Biskra  |
| Pr. BELOUNAR Lamine    | Professeur                | Rapporteur | Université de Biskra  |
| Pr. TATI Abdelouahab   | Professeur                | Examineur  | Université de Biskra  |
| Dr. GUERRAICHE Khelifa | Maitre de Conférences 'A' | Examineur  | Université de Batna 2 |

*Dédicace*

*Ma mère et mon père.*

*Ma sœur, mon frère et sa petite famille*

*Toute ma famille*

*Mes amis.*

## Remerciements

Grâce à DIEU le tout puissant ; j'ai réalisé ce modeste travail qui n'aurait pas connu le jour sans l'aide de plusieurs personnes qui nous ont guidées du début à la fin, et que nous tenons à remercier ;

Tout d'abord, J'exprime un remerciement particulier et sincère à mon directeur de thèse : Professeur **BELOUNAR Lamine**, Professeur à l'université de Biskra, qui m'a aidé à progresser dans ma réflexion grâce à ses bons conseils, son esprit critique, son soutien qu'il m'a apporté tout au long de la réalisation de ce travail. Je désire qu'il trouve en ces mots toute ma gratitude et mon profond respect.

Je tiens à remercier, Professeur **Mr BENMEBAREK Sadok**, professeur à l'université de Biskra d'avoir accepté de présider cette soutenance. Ainsi que les membres de jury **Pr. TATI Abdelouhab** et **Dr. GUERRAICHE Khelifa** de l'Université de Batna, qui ont accepté d'être examinateurs. Je les remercie très sincèrement.

Je remercie également **Dr. ZATAR Abdallah** pour son aide précieux, et je tiens à remercier profondément **Pr. BRIMA Abdelhafid**, pour sa grande disponibilité, son écoute, et surtout son soutien moral et ces conseils précieux et pour m'avoir encouragé pendant l'accomplissement de ce travail. Je leur en suis profondément reconnaissant.

Je tiens aussi à remercier en particulier mes collègues: **DRAM Abdelkader, FORTAS Lahcen. BELOUNAR Abderahim, MESSAI Abderraouf.**

## SOMMAIRE

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| RESUME.....                | i   |
| ABSTRACT .....             | ii  |
| ملخص.....                  | iii |
| NOTATIONS .....            | iv  |
| Liste des figures .....    | vi  |
| Liste des tableaux .....   | x   |
| INTRODUCTION GENERALE..... | 1   |

### Chapitre 1 : Etude bibliographique

|   |    |
|---|----|
| 1.1. Étude bibliographique sur les éléments finis courbes .....                       | 5  |
| 1.2. Historique sur les éléments à champ de déformation.....                          | 9  |
| 1.3. Etude bibliographique sur les éléments secteurs à champ de déformation .....     | 13 |
| 1.4. Différentes approches utilisées pour le développement des éléments secteurs..... | 14 |
| 1.4.1. Quelques éléments secteurs développés précédemment .....                       | 15 |
| 1.4.1.1. Raju and Rao Element [Raj.69] .....  | 15 |
| 1.4.1.2. Elément Sabir and Salhi [Sab.86] .....                                       | 15 |
| 1.4.1.3. Elément de Belarbi SBS4 [Bela.98].....                                       | 16 |
| 1.4.1.4. Elément de Bouzrira [Bou.05] .....   | 17 |
| 1.4.1.5. Elément de Bouzriba [Bou.15].....  | 17 |
| 1.4.1.6. Elément de Bourezane [Bour.17].....  | 17 |
| 1.5. Les équations fondamentales d'élasticité en coordonnées cartésiennes .....       | 17 |
| 1.5.1. Equations de base d'élasticité pour le cas général (tridimensionnel).....      | 19 |
| 1.5.1.1. Equations d'équilibre .....  | 19 |
| 1.5.1.2. Equations déformations-déplacements .....                                    | 20 |
| 1.5.1.3. Equations contraintes-déformations.....                                      | 20 |
| 1.5.1.4. Equation de compatibilité .....  | 21 |
| 1.5.2. Equations de base d'élasticité pour le cas (bidimensionnel).....               | 21 |
| 1.5.2.1. Equations d'équilibre .....  | 21 |
| 1.5.2.2. Equations déformations-déplacements .....                                    | 22 |

|   |    |
|---|----|
| 1.5.2.3. Equations contraintes-déformations.....                          | 22 |
| 1.5.2.4. Equation de compatibilité .....                                  | 23 |
| 1.6. Formulation variationnelle faible .....                              | 23 |
| 1.7. Equations fondamentales en coordonnées cylindriques.....             | 24 |
| 1.7.1. Les Équations d'équilibre en coordonnées cylindriques .....        | 24 |
| 1.7.2. Relation Déformation –déplacement en coordonnées cylindriques..... | 25 |
| 1.7.3. Equation de compatibilité.....                                     | 25 |
| 1.7.4. Relation contraintes-déformations (équations constitutives).....   | 26 |
| 1.8. Equation de base d'élasticité plane en coordonnées polaires.....     | 26 |
| 1.8.1. Les équations d'équilibre en coordonnées polaires .....            | 26 |
| 1.8.2. Relations de déformation-déplacement et loi de Hooke .....         | 27 |
| 1.8.3. Equation de compatibilité.....                                     | 28 |
| 1.9. Conclusion.....  | 28 |

## **Chapitre 2 : Développement d'un nouvel élément secteur 3D à 8 nœuds**

|   |    |
|---|----|
| 2.1. Introduction .....   | 29 |
| 2.2. Formulation de l'élément SBS3D .....                                     | 30 |
| 2.3. Validation numérique .....   | 34 |
| 2.3.1. Cylindre épais soumis à une pression interne .....                     | 34 |
| 2.3.2. Cylindre épais soumis à une pression externe.....                      | 40 |
| 2.3.3. Plaque annulaire soumise à une charge ponctuelle latérale .....        | 44 |
| 2.3.4. Cylindre à paroi épaisse soumis à une pression interne .....           | 46 |
| 2.3.5. Plaque annulaire soumise à une force de cisaillement .....             | 47 |
| 2.3.6. Cylindre en béton non armé sous une pression d'eau externe .....       | 50 |
| 2.3.7. Poutre console circulaire épaisse sous une force de cisaillement ..... | 51 |
| 2.4. Conclusion.....  | 53 |

## **Chapitre 3 : Formulation d'un élément secteur membranaire à 4 nœuds**

|   |    |
|---|----|
| 3.1. Introduction .....                             | 54 |
| 3.2. Formulation de l'élément développé SBST4 ..... | 55 |
| 3.3. Validation de l'élément SBST4.....             | 58 |

|   |    |
|---|----|
| 3.3.1. Cylindre épais soumis à différents cas de chargement.....              | 58 |
| 3.3.1.1. Cas1: Cylindre épais soumis à une pression interne .....             | 58 |
| 3.3.1.2. Cas 2 : cylindre épais soumis à une pression externe .....           | 61 |
| 3.3.2. Cylindre en béton non armé sous une pression d'eau externe .....       | 62 |
| 3.3.3. Poutre console circulaire épaisse sous une force latérale.....         | 64 |
| 3.3.4. Plaque annulaire semi-circulaire sous une charge de cisaillement ..... | 65 |
| 3.4. Conclusion.....  | 67 |

## **Chapitre 4 : Formulation et validation des éléments axisymétrique à champ de déformation**

|  |     |
|--|-----|
| 4.1. Introduction .....  | 68  |
| 4.2. Considérations théoriques .....                                     | 69  |
| 4.2.1. Forces nodales équivalentes pour un élément axisymétrique .....   | 70  |
| 4.2.1.1. Forces de volume .....  | 70  |
| 4.2.1.2. Forces surfaciques.....   | 72  |
| 4.3. Formulation des éléments axisymétrique à champ de déformation ..... | 73  |
| 4.3.1. Formulation de l'élément (SBTIEIR) [Sab.85a].....                 | 73  |
| 4.3.2. Formulation de l'élément R4BM [Bela.05] .....                     | 75  |
| 4.4. Validation numérique .....  | 76  |
| 4.4.1. Plaque circulaire soumise à une charge concentrée .....           | 76  |
| 4.4.2. Cylindre à parois épaisse sous une pression interne .....         | 81  |
| 4.4.3. Disque annulaire en rotation .....                                | 85  |
| 4.5. Conclusion.....   | 87  |
| Conclusion générale .....  | 88  |
| Bibliographie .....  | 90  |
| Annexe .....   | 102 |

## RESUME

L'objectif principal de ce travail en premier lieu, est de développer et d'évaluer deux éléments secteurs basés sur l'approche en déformation pour l'analyse des problèmes des structures à contour circulaire.

Le premier est un élément secteur tridimensionnel à huit nœuds nommé SBS3D (Strain Based Sector three-Dimensional), pour l'analyse linéaire des structures circulaires. Cet élément possède seulement trois degrés de liberté externes essentiels ( $U_r$ ,  $V_\theta$  et  $W$ ) à chacun des huit nœuds du coin. Le présent élément SBS3D a été formulé en utilisant le champ de déplacement de l'élément hexaédrique simple à huit nœuds SBH8.

Le deuxième est un élément secteur triangulaire à quatre nœuds nommé SBST4 (Strain Based Sector Triangulare 4-node), dont chaque nœud possède deux degrés de liberté externes essentiels ( $U_r$ ,  $V_\theta$ ). Cet élément est formulé en utilisant le champ de déplacement de l'élément rectangulaire SBRIE.

La formulation des éléments SBS3D et SBST4 est obtenue en transformant le champ de déplacement des éléments SBH8 et SBRIE en coordonnées cylindriques ( $r$ ,  $\theta$  et  $z$ ) et en coordonnées polaires ( $r$ ,  $\theta$ ), respectivement. En remplaçant  $x$  et  $y$  par  $r$  et  $\theta$ , respectivement ( $x = r$  et  $y = \theta$ ) pour obtenir les champs des déplacements des éléments développés, tout en vérifiant les équations de compatibilité. Les performances de ces éléments sont évaluées en analyse linéaire à travers une série de tests sévères relatifs à l'analyse linéaire des structures circulaires. Les résultats obtenus comparés aux résultats analytiques et aux autres éléments, ont montré la rapidité de convergence et la bonne performance de ces éléments.

La seconde partie de ce travail consiste à la formulation et la validation de trois éléments membranaires à champ de déformation SBRIE (élément membranaire rectangulaire à 4 nœuds et 2 ddl/nœud), SBTIEIR (élément membranaire triangulaire avec rotation dans le plan à 3 nœuds et 3 ddl/nœud) et R4BM (élément membranaire rectangulaire à 5 nœuds avec un nœuds interne et 2ddl/nœud) en axisymétrie. Les performances de ces éléments sont évaluées à travers une série de tests liée aux problèmes axisymétriques. Les résultats obtenus comparés aux résultats analytiques et aux résultats des autres éléments, ont montré la haute performance de ces éléments dans ce type de problème.

**Mots Clés:** Élément secteur, approche en déformation, élément fini membranaire, rotation dans le plan.

## ABSTRACT

The main objective of this work in the first is to developed and evaluates two strain based sector elements for the analysis of elasticity problems with circular contour.

The first is a three-dimensional sector element with eight nodes called SBS3D (Strain Based Sector three-Dimensional) for the linear analysis of circular structures. This element has only three essential external degrees of freedom (three translations) at each of the eight corner nodes ( $U_r$ ,  $V_\theta$  and  $W$ ). This element (SBS3D) has been formulated using the displacement field of the simple eight-node hexahedral element SBH8

The second is a triangular sector element with four nodes named SBST4 (triangular Strain Based sector4 -nodes), which has two essential external degrees of freedom ( $U_r$ ,  $V_\theta$ ) at each of the four nodes. This element is formulated using the same displacement field of the rectangular element SBRIE.

The formulation of SBS3D and SBST4 elements is obtained by transforming the displacement field of SBH8 and SBRIE elements into cylindrical coordinates ( $r$ ,  $\theta$  and  $z$ ) and polar coordinates ( $r$ ,  $\theta$ ), respectively. By replacing  $x$  and  $y$  by  $r$  and  $\theta$ , respectively ( $x = r$  and  $y = \theta$ ) to obtain the fields of displacements of the developed elements, while checking the compatibility equations. The performances of these elements are evaluated in linear analysis through a series of severe tests relating to the linear analysis of circular structures. The results obtained compared with the analytical results and with the other elements, showed the speed of convergence and the good performance of these elements.

The second part of this work deals with the formulation and the validation of three membrane elements with strain field SBRIE (rectangular membrane element with 4 nodes and 2 dof / node), SBTIEIR (triangular membrane element with rotation in the plane at 3 nodes and 3 dof / node) and R4BM (rectangular membrane element with 5 nodes with an internal nodes and 2oF / node) in axisymmetry. The performances of these elements are evaluated through a series of tests related to axisymmetric problems. The results obtained compared to the analytical results and to the results of the other elements, have shown the high performance of these elements in this type of problem.

**Keywords:** Sector Element, Strain approach, Membrane finite element, Drilling rotation.

## ملخص

الهدف الأساسي من هذا العمل يتضمن أولاً تطوير عنصرين قطاعيين قائمين على مبدأ التشوه من أجل تحليل المسائل في المجال المرن للهياكل ذات الشكل الدائري. الأول هو عنصر قطاعي ثلاثي الأبعاد مع ثمان عقد والمسمى SBS3D (Strain Based Sector three-Dimensional) والذي يحتوي على ثلاث درجات أساسية للحرية ( $U_r, V_\theta, W$ ) في كل من العقد الثمانية للحواف

أما الثاني فهو عنصر قطاعي مثلث مع أربع عقد يسمى (SBST4) (Strain based Sector Triangular 4-nodes) والذي يمتلك درجتين أساسيتين للحرية ( $U_r, V_\theta$ ) في كل من العقد الأربعة. تمت صياغة هذا العنصر باستخدام نفس حقل الإزاحة للعنصر المستطيل (SEBRIE). يتم تقييم أداء هذه العناصر من خلال سلسلة من الاختبارات المتعلقة بالتحليل الخطي للهياكل الدائرية. أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها مقارنة بالنتائج التحليلية ونتائج العناصر الأخرى سرعة التقارب و الأداء الجيد للعناصر المطورة.

الجزء الثاني من هذا العمل يعالج صياغة والتحقق من صحة ثلاثة عناصر غشائية تعتمد على مبدأ التشوه هي العناصر عنصر غشاء مثلث مع دوران في المستوى (SBTIEIR، عقدة) / dof (عنصر غشاء مستطيل مع 4 عقد و SBRIE2 (عنصر غشاء مستطيل مع 5 عقد مع عقد داخلية و 2 درجة / عقدة) في تناظر R4BM عقدة) و / dof في 3 عقد و 3 المحور. يتم تقييم أداء هذه العناصر من خلال سلسلة من الاختبارات المتعلقة بمسائل التناظر المحوري. أظهرت النتائج المتحصل عليها مقارنة بالنتائج التحليلية ونتائج العناصر الأخرى الأداء العالي لهذه العناصر في هذا النوع من المشاكل.

**الكلمات المفتاحية :** عنصر إقطاعي، مبدأ التشوه، عنصر محدود غشائي، درجة استدارة إضافية.

## NOTATIONS

|  |   |
|--|---|
| $[K^e]$  | Matrice de rigidité élémentaire   |
| $[K]$  | Matrice de rigidité globale   |
| $[Q]$  | Matrice de déformation  |
| $[K_0]$  | Matrice de rigidité   |
| Ddl  | Degrés de liberté   |
| $[J]$  | Matrice Jacobéenne  |
| $[N]$  | Matrice des fonctions de forme  |
| $[\rho]$   | Densité de masse du matériau  |
| $[D]$  | Matrice d'élasticité  |
| $[f]$  | Intégrale   |
| $[ ]$  | Matrice   |
| $[ ]^T$  | Matrice transposée  |
| $[ ]^{-1}$   | Matrice inverse   |
| x,y,z  | Coordonnées cartésiennes du repère global.                              |
| u,v,w  | Déplacements suivant les directions x, y et z respectivement.           |
| $\theta_z$   | Rotation dans le plan.  |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$      | Déformations directes suivant x et y et z respectivement.               |
| $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$            | Déformations tangentielle suivant x et y et z respectivement.           |
| $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$                  | Contraintes tangentielle.   |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$                     | Contraintes normales suivant les directions x et y et z respectivement. |
| $U_r, V_\theta, W$                                 | Déplacements suivant les directions r, $\theta$ et z respectivement     |
| $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ | Déformations directes suivant r et $\theta$ et z respectivement.        |
| $\gamma_{rz}, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}$ | Déformation tangentielle (déformation circonférentielles).              |

|                                     |  |
|-------------------------------------|--|
| $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ | Contraintes normales suivant les directions r et $\theta$ et z respectivement. |
| $\lambda$ et $\mu$                  | Les constantes de Lamé   |
| $\nu$                               | Coefficient de Poisson   |
| E                                   | Module de Young  |
| MCR                                 | Modes de corps rigides   |
| CT                                  | Cisaillement transverse  |

# Liste des figures

## Chapitre 1 : Etude bibliographique

|                     |  |    |
|---------------------|--|----|
| <b>Figure 1.1 :</b> | système de coordonnées et les déplacements de l'élément secteur.....                         | 16 |
| <b>Figure 1.2 :</b> | Disque en état plan des contraintes.....   | 18 |
| <b>Figure 1.3 :</b> | Exemples de structures en déformation plane : puits de mine (a) et tôle en laminage (b)..... | 19 |
| <b>Figure 1.4 :</b> | Composantes des contraintes.....   | 19 |
| <b>Figure 1.5 :</b> | Contraintes en coordonnées cylindriques.....   | 24 |
| <b>Figure 1.6 :</b> | Distribution des contraintes dans un élément secteur.....                                    | 27 |

## Chapitre 2 : Développement d'un nouvel élément secteur 3D à 8 nœuds

|                      |  |    |
|----------------------|--|----|
| <b>Figure 2.1 :</b>  | Élément secteur SBS3D avec trois translations $U_r$ , $V_\theta$ et $W$ par nœuds.....   | 31 |
| <b>Figure 2.2 :</b>  | Cylindre épais sous pression uniforme interne.....   | 34 |
| <b>Figure 2.3 :</b>  | Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) en E ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression interne.....                     | 35 |
| <b>Figure 2.4 :</b>  | Convergence de la contrainte radiale ( $\sigma_r$ ) en E ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression interne.....             | 36 |
| <b>Figure 2.5 :</b>  | Convergence de la contrainte transversal ( $\sigma_\theta$ ) en E ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression interne.....    | 37 |
| <b>Figure 2.6 :</b>  | Variation du déplacement radial le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous une pression interne.....                          | 38 |
| <b>Figure 2.7 :</b>  | Variation de la contrainte radiale $\sigma_r$ le long d'une section droite (m, n) pour un cylindre sous une pression interne.....          | 39 |
| <b>Figure 2.8 :</b>  | Variation de la contrainte taransversale $\sigma_\theta$ le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous une pression interne..... | 40 |
| <b>Figure 2.9 :</b>  | Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) en E ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous pression externe.....                         | 41 |
| <b>Figure 2.10 :</b> | Convergence de la contrainte radial ( $\sigma_r$ ) en E ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression externe.....              | 41 |
| <b>Figure 2.11 :</b> | Convergence de la contrainte transversal ( $\sigma_\theta$ ) en E ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression externe.....    | 42 |

|                      |   |    |
|----------------------|---|----|
| <b>Figure 2.12 :</b> | Variation du déplacement radial le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous une pression externe avec un maillage (10x10).....                        | 42 |
| <b>Figure 2.13 :</b> | Variation de la contrainte radiale $\sigma_r$ le long d'une section droite (m, n) pour un cylindre sous une pression externe avec un maillage (10x10).....        | 43 |
| <b>Figure 2.14 :</b> | Variation de la contrainte transversal $\sigma_\theta$ le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous une pression externe avec un maillage (10x10)..... | 43 |
| <b>Figure 2.15 :</b> | Plaque annulaire soumise à une charge ponctuelle latérale.....  | 45 |
| <b>Figure 2.16 :</b> | Courbe de convergence du déplacement W sous la charge ponctuelle pour une plaque annulaire en console.....  | 45 |
| <b>Figure 2.17 :</b> | Cylindre à paroi épaisse soumis à une pression interne.....   | 46 |
| <b>Figure 2.18:</b>  | Plaque annulaire soumise au cisaillement radial.....  | 47 |
| <b>Figure 2.19 :</b> | Convergence du déplacement radial au point A pour b/a=3.....  | 48 |
| <b>Figure 2.20 :</b> | Convergence du déplacement radial au point A pour b/a=2.....  | 49 |
| <b>Figure 2.21 :</b> | Convergence du déplacement radial au point A pour b/a=1,3.....  | 49 |
| <b>Figure 2.22 :</b> | Convergence de la contrainte radiale ( $\sigma_r$ ) au point F pour b/a=2.....  | 50 |
| <b>Figure 2.23 :</b> | Cylindre non renforcé sous pression d'eau externe.....  | 50 |
| <b>Figure 2.24 :</b> | Pression appliqué en fonction des déplacements radiaux à mi-longueur avec un maillage (2x2).....  | 51 |
| <b>Figure 2.25 :</b> | Poutre console circulaire épaisse modélisée avec (4x1) éléments.....  | 52 |
| <b>Figure 2.26 :</b> | Convergence du déplacement vertical au point A d'une poutre console circulaire épaisse.....   | 52 |

### **Chapitre 3 : Formulation d'un élément secteur membranaire à 4 nœuds**

|                     |  |    |
|---------------------|--|----|
| <b>Figure 3.1 :</b> | Géométrie de l'élément secteur SBST4.....  | 55 |
| <b>Figure 3.2 :</b> | Cylindre épais sous une pression uniforme interne.....   | 58 |
| <b>Figure 3.3 :</b> | Maillage 4x2 et forces nodales.....  | 59 |
| <b>Figure 3.4 :</b> | Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) en M ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une Pression interne.....                   | 59 |
| <b>Figure 3.5 :</b> | Convergence de la contrainte radiale ( $\sigma_r$ ) en M ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression interne.....           | 60 |
| <b>Figure 3.6 :</b> | Convergence de la contrainte transversale ( $\sigma_\theta$ ) en M ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression interne..... | 60 |
| <b>Figure 3.7 :</b> | Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) en M ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression externe.....                   | 61 |

|                      |   |    |
|----------------------|---|----|
| <b>Figure 3.8 :</b>  | Convergence de la contrainte radiale ( $\sigma_r$ ) en M ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression externe.....          | 61 |
| <b>Figure 3.9 :</b>  | Convergence de la contrainte transversal ( $\sigma_\theta$ ) en M ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression externe..... | 62 |
| <b>Figure 3.10 :</b> | Cylindre non renforcé sous pression d'eau externe.....  | 63 |
| <b>Figure 3.11 :</b> | Pression appliquée en fonction des déplacements radiaux à mi-longueur avec un maillage (2x4).....                                       | 63 |
| <b>Figure 3.12 :</b> | Poutre console circulaire épaisse modélisée avec (2x1) éléments.....  | 64 |
| <b>Figure 3.13 :</b> | Convergence du déplacement vertical au point A d'une poutre console circulaire épaisse.....   | 64 |
| <b>Figure 3.14 :</b> | Plaque annulaire soumise au cisaillement radial.....  | 65 |
| <b>Figure 3.15 :</b> | Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) au point A pour $b/a=3$ .....   | 66 |
| <b>Figure 3.16 :</b> | Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) au point A pour $b/a=2$ .....   | 66 |
| <b>Figure 3.17 :</b> | Convergence du déplacement radiale ( $U_r$ ) au point A pour $b/a=1,3$ .....  | 67 |

## **Chapitre 4 : Formulation et validation des éléments axisymétrique à champ de déformation**

|                      |   |    |
|----------------------|---|----|
| <b>Figure 4.1 :</b>  | Cylindre sous prssion axiale et radiale (a) . Système de coordonnées cylindriques(b).....   | 68 |
| <b>Figure 4.2 :</b>  | Section transversale (a) de élément axisymétrique (b).....  | 69 |
| <b>Figure 4.3 :</b>  | Déplacements et rotations des lignes de l'élément dans le plan r-z.....   | 69 |
| <b>Figure 4.4 :</b>  | Élément axisymétrique avec des forces volumiques.....   | 71 |
| <b>Figure 4.5 :</b>  | Force nodale équivalente pour un élément rectangulaire.....   | 73 |
| <b>Figure 4.6 :</b>  | Plaque circulaire en appui simple soumise à une charge ponctuelle.....  | 76 |
| <b>Figure 4.7:</b>   | Déplacement radial $U_r$ d'une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée (maillage 2x4).....  | 77 |
| <b>Figure 4.8:</b>   | Contrainte radiale $\sigma_r$ calculée au centre des éléments pour une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée (maillage 2x4)..           | 78 |
| <b>Figure 4.9 :</b>  | Contrainte tangentielle $\sigma_\theta$ calculée au centre des éléments pour une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée (maillage 2x4).. | 78 |
| <b>Figure 4.10 :</b> | Déplacement radial $U_r$ d'une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée (maillage 2x8).....  | 79 |
| <b>Figure 4.11 :</b> | Contrainte radiale $\sigma_r$ calculée au centre des éléments pour une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée (maillage 2x8).....        | 79 |

|                      |   |    |
|----------------------|---|----|
| <b>Figure 4.12 :</b> | Contrainte tangentielle $\sigma_\theta$ calculée au centre des éléments pour une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée (maillage 2x8).. | 80 |
| <b>Figure 4.13 :</b> | Cylindre épais soumis à une pression interne.....   | 81 |
| <b>Figure 4.14 :</b> | Déplacement radial d'un cylindre épais sous une pression interne (maillage 1x4).....  | 82 |
| <b>Figure 4.15 :</b> | Contrainte radiale calculée au centre des éléments d'un cylindre épais sous une pression interne (maillage 1x4).....  | 82 |
| <b>Figure 4.16 :</b> | Contrainte tangentielle calculée au centre des éléments d'un cylindre épais sous une pression interne (maillage 1x4).....   | 83 |
| <b>Figure 4.17 :</b> | Déplacement radial calculée au centre des éléments d'un cylindre épais sous une pression interne (maillage 1x8).....  | 83 |
| <b>Figure 4.18 :</b> | Contrainte radiale calculée au centre des éléments d'un cylindre épais sous une pression interne (maillage 1x8).....  | 84 |
| <b>Figure 4.19 :</b> | Contrainte tangentielle calculée au centre des éléments d'un cylindre épais sous une pression interne (maillage 1x8).....   | 84 |
| <b>Figure 4.20 :</b> | Géométrie et maillage d'un disque annulaire en rotation.....  | 85 |
| <b>Figure 4.21 :</b> | Disque en rotation; déplacement radial (maillage 1x4).....  | 86 |
| <b>Figure 4.22 :</b> | Disque en rotation; contrainte radiale calculée au centre des éléments (maillage 1x4).....  | 86 |
| <b>Figure 4.23 :</b> | Disque en rotation; contrainte tangentielle calculée au centre des éléments (Maillage 1x4).....   | 87 |

# Liste des tableaux

## Chapitre 2 : Développement d'un nouvel élément secteur 3D à 8 nœuds

|   |    |
|---|----|
| <b>Tableau 2.1 :</b> Les déplacements radiaux ( $U_r$ ) pour un cylindre épais sous une pression interne uniforme.....  | 35 |
| <b>Tableau 2.2 :</b> Les contraintes radiales ( $\sigma_r$ ) pour un cylindre épais sous une pression interne uniforme.....   | 36 |
| <b>Tableau 2.3 :</b> Les contraintes transversales ( $\sigma_\theta$ ) pour un cylindre épais sous une pression interne uniforme.....                                   | 36 |
| <b>Tableau 2.4 :</b> Variation de déplacement radial ( $U_r$ ) le long d'une section droite (m, n) avec un maillage (10x10).....  | 37 |
| <b>Tableau 2.5 :</b> Variation de la contrainte radiale $\sigma_r$ le long d'une section droite (m, n) avec un maillage (10x10).....                                    | 38 |
| <b>Tableau 2.6 :</b> Variation de la contrainte transversale $\sigma_\theta$ le long d'une section droite (m, n) avec un maillage (10x10).....                          | 37 |
| <b>Tableau 2.7 :</b> Le déplacement latéral W sous la charge ponctuelle.....  | 45 |
| <b>Tableau 2.8 :</b> Déplacement vertical normalisé d'un cylindre épais sous pression interne.....  | 47 |
| <b>Tableau 2.9 :</b> Les déplacements radiaux ( $U_r$ ) pour la plaque annulaire soumis au cisaillement radial pour les différents rapports $b/a = 3, 2$ et $1,3$ ..... | 48 |

## Chapitre 3 : Formulation d'un élément secteur à 4 nœuds

|   |    |
|---|----|
| <b>Tableau 3.1 :</b> Les déplacements radiaux ( $U_r$ ) pour une plaque annulaire soumise au cisaillement radial pour les différents rapports $b/a = 3; 2$ et $1,3$ ..... | 65 |
|---|----|

# **INTRODUCTION GENERALE**

## **INTRODUCTION GENERALE**

Les progrès technologiques modernes obligent les ingénieurs à réaliser des projets de plus en plus complexes, coûteux, soumis à de strictes contraintes de fiabilité et de sécurité. Pour mener à bien un projet technique, l'ingénieur doit concevoir et dimensionner l'ouvrage de manière à fournir à l'entreprise exécutante les plans nécessaires à sa réalisation. Très souvent, celui-ci utilisera un outil de calcul basé sur la méthode dite des éléments finis dont l'utilisation s'est généralisée dans l'industrie depuis une cinquantaine d'années.

Cette méthode, qui n'est pas uniquement dédiée aux problèmes de structures, lui permettra de résoudre un éventail très large de problèmes: structurels, thermiques, électromagnétiques, fluidiques, avec des aspects linéaires ou non linéaires, stationnaires ou transitoires.

La méthode des éléments finis est utilisée pour résoudre des problèmes physiques en analyse et en conception techniques. Le problème physique implique généralement une structure ou un composant structurel réel soumis à certaines charges. L'idéalisation du problème physique à un modèle mathématique nécessite certaines hypothèses qui conduisent ensemble à des équations différentielles régissant le modèle mathématique. L'analyse par éléments finis résout ce modèle mathématique. Étant donné que la technique de la solution par éléments finis est une procédure numérique, il est nécessaire d'évaluer la précision de la solution. Si les critères de précision ne sont pas remplis, la solution numérique (c'est-à-dire les éléments finis) doit être répétée avec des paramètres de solution raffinés (telles que des mailles plus fines) jusqu'à ce qu'une précision suffisante soit atteinte.

Les idées de base de la méthode des éléments finis, telles qu'elles sont connues aujourd'hui, ont été présentées dans Turner, Clough, Martin et Topp [Tur.56] et Argyris et Kelsey [Arg.60]. Le nom élément fini a été inventé par Clough [Clo.60]. La référence [Tur.56] présente l'application d'éléments finis simples (barre articulé et plaque triangulaire avec des charges planes) pour l'analyse de la structure des avions et elle a été considérée comme l'une des principales contributions au développement de la méthode des éléments finis. L'ordinateur numérique a fourni un moyen rapide pour effectuer de nombreux calculs impliqués dans l'analyse par éléments finis et a rendu la méthode pratiquement viable. Parallèlement au développement d'ordinateurs numériques à haute vitesse, l'application de la méthode des éléments finis a également progressé à un rythme très impressionnant. Le livre de Przemieniecki [Prz.68] présente la méthode des éléments finis appliquée à la résolution des problèmes d'analyse des contraintes. Zienkiewicz et Cheung [Zie.67] ont présenté

l'interprétation large de la méthode et son applicabilité à de nombreux types de problème. Avec cette interprétation large de la méthode des éléments finis, il a été constaté que les équations des éléments finis peuvent également être dérivées en utilisant une méthode résiduelle pondérée telle que la méthode de Galerkin ou l'approche des moindres carrés. Cela a conduit à un large intérêt chez les mathématiciens à appliquer la méthode des éléments finis pour la résolution d'équations différentielles linéaires et non linéaires. Au fil des années, plusieurs articles, actes de conférence et livres ont été publiés sur cette méthode.

L'analyse des structures tridimensionnelles complexes (3D) est devenue une tâche essentielle ces dernières années dans plusieurs domaines. La principale préoccupation des chercheurs du domaine industriel est d'établir un modèle d'élément fini simple, fiable et efficace, pour une bonne représentation du cisaillement transversal (CT) (éviter le comportement de verrouillage de cisaillement transversal).

L'approche en déformation a largement attiré l'attention des chercheurs pour le développement de nouveaux éléments tridimensionnels avec une grande précision. Contrairement au modèle de déplacement classique dont les éléments 3D d'ordre peu élevé rencontrent de nombreuses difficultés numériques. La principale caractéristique de cette approche est que les composantes résultantes du déplacement peuvent être enrichies par des termes d'ordre supérieur sans qu'il soit nécessaire d'introduire des degrés de liberté non essentiels. Cela peut mener à avoir des éléments avec une meilleure précision sur ces grandeurs et sur les contraintes et les déplacements. De plus, les résultats obtenus de ces éléments ont une convergence plus rapide par rapport aux éléments basés sur le modèle en déplacement correspondants ayant les mêmes degrés de liberté. Plusieurs travaux ont été orientés aux éléments tridimensionnels pour les plaques épaisses en flexion [Gal.76] et [Cha.90]. Cependant, ces éléments ont tendance à provoquer des phénomènes de blocage de cisaillement indésirables lorsqu'ils traitent le cas des plaques minces. Ce qui a attiré de nombreux chercheurs à développer des éléments tridimensionnels robustes [Ven.96], [Bas.00a], [Bas.00b], [Lem.00], [Lo.00], [Sze.01], [Ooi.04], [Che.04], [Fre.07], [Trin.09] et [Trin.11], qui permettent d'éviter le phénomène de verrouillage par cisaillement transverse pour les plaques minces.

L'utilisation de l'approche en déformation joue un rôle clé dans la construction d'éléments finis robustes et efficaces, elle permet également d'avoir une meilleure précision sur les déplacements, les déformations et les contraintes où le champ des déplacements est obtenu en

intégrant des déformations supposées, contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ des déplacements [Ash.71a], [Sab.83], [Sab.83a], [Sab.95], [Sab.97], [Bela.97], [Belo.08], [Belo.17].

La vogue de l'approche en la déformation appliquée aux problèmes de l'élasticité plane, a exhorté les chercheurs à étendre leur travail aux autres types de structures de formes arbitraires et aux structures à contours circulaires.

Dans la plupart des cas de modélisation de ces types de structures par éléments secteurs, les résultats sont directement comparés aux solutions analytiques. Dans la littérature de l'approche en déformation, ce domaine n'est pas suffisamment couvert. Ce qui a inspiré plusieurs chercheurs a formulé des éléments secteurs [Der.84] [Raj.73], et [Agh.07], [Khi.17].

Les avantages de la formulation d'éléments finis basée sur l'approche en déformation ont été rapportés par de nombreux chercheurs [Sab.72], [Belo.16], [Bul.84], [Bela.98], [Djo.03], [For.16], [Reb.13], [Belo.11], [Belo.A.17a]. Cette approche permet de découpler les différentes composantes de la déformation et d'enrichir le champ de déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction des nœuds intermédiaires; ce qui permet de résoudre les problèmes de verrouillage [Yua.88], [Kat.15], [Belo.A.17].

### **Objectifs de la thèse**

L'objectif de cette thèse est de développer d'une part un nouvel élément secteur 3D en coordonnées cylindriques à partir d'un élément hexaédrique [Bela.99] en coordonnées cartésiennes, basé sur l'approche en déformation pour la modélisation et l'analyse linéaire des structures à contours circulaires. L'élément proposé nommé SBS3D (Strain Based Sector three-Dimensional), possède huit nœuds et trois translations ( $U$ ,  $V$ ,  $W$ ) pour chaque nœud. D'autre part, l'évaluation de l'approche en déformation aux problèmes axisymétriques par un solide de révolution, appelé élément axisymétrique, sera aussi le but de notre travail.

Nous avons aussi présenté la formulation d'un élément secteur triangulaire à quatre nœuds basé sur l'approche en déformation nommé SBST4 (Strain Based Secteur Triangulaire 4-node). Cet élément est formulé en se basant sur l'élément rectangulaire SBRIE (Sabir et al. 1985) pour les problèmes d'élasticité plane

## **Plan de la thèse**

La thèse est composée de quatre chapitres:

**Le premier chapitre** est consacré à une synthèse bibliographique dans laquelle on donne un contexte historique sur les éléments finis-courbes formulés par les différentes approches et notamment sur les éléments finis basés sur l'approche en déformation ainsi que certaines équations de base utilisées.

**Le deuxième chapitre** expose la formulation d'un nouvel élément secteur tridimensionnel nommé SBS3D (Strain Based Sector three-Dimensional), basé sur l'approche en déformation. Cet élément est présenté pour l'analyse statique linéaire des structures circulaires.

**Le troisième chapitre** est dédié à la formulation et à la validation numérique d'un élément secteur membranaire à quatre nœuds basé sur le modèle en déformation. Cet élément sera examiné et comparé avec d'autres éléments à travers une série de tests, afin de confirmer la bonne performance de l'approche en déformation.

**Le quatrième chapitre** est réservé à la formulation et à la validation des éléments finis membranaires à champ de déformation (SBRIE, SBTIEIR, R4BM) en axisymétrie, les performances de ces éléments seront évaluées à travers des cas tests liés à ce type de problème.

# **Chapitre 1**

## **ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

# Chapitre 1

## Etude bibliographique

Dans ce chapitre, nous proposons, en premier lieu, un aperçu sur l'étude bibliographique des éléments finis courbes formulés par les différentes approches. En second lieu, nous présentons un rappel sur les éléments de membrane, de plaque en flexion et de coque qui sont formulés à la base de l'approche en déformation, ainsi que les équations de base nécessaires utilisées dans le présent travail, tel que les équations de mouvement, les lois de comportement et les relations de déformation-déplacement qui sont brièvement décrites.

### 1.1. Étude bibliographique sur les éléments finis courbes

La description des structures courbes peut être exprimée en coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques. Ces types de coordonnées peuvent être utilisés dans la formulation des éléments finis courbes. De tels éléments sont utilisés, dans certaines applications particulières où ils s'adaptent bien à la géométrie du problème ; comme les buses, les tunnels enterrés et les plaques circulaires trouées. Les plaques secteurs et annulaires sont largement utilisées dans divers domaines de conception structurelle tels que les tabliers des ponts incurvés, les structures océaniques et marines et les structures aéronautiques et spatiales. Leur conception nécessite une détermination précise de leurs fréquences naturelles et de leurs formes de mode. Puisqu'il n'existe aucune solution de forme fermée pour des plaques d'épaisseur non uniforme, il faut utiliser des méthodes d'approximation ainsi qu'une analyse numérique. De nombreuses études ont été faites sur les vibrations libres des plaques secteurs et annulaires par des méthodes analytiques [Ram.73] et [Ram.77] et par des méthodes numériques telles que la méthode Rayleigh-Ritz [Kam.74] et [Kim.89], la méthode de l'équation intégrale [Sri.85], la méthode des bandes finies [Cheun.71] et [Gea.90] et la méthode des éléments splines [Miz.91] et [Miz.92] basée sur la théorie des plaques minces.

En 1970, Olson et Lindberg [Ols.70] ont développé deux éléments finis en coordonnées polaires pour les problèmes de flexion des plaques. Ces éléments peuvent être assemblés dans diverses combinaisons avec des éléments rectangulaires pour s'adapter à un grand nombre de conditions aux limites, ces éléments sont basés sur le modèle en déplacement, le premier

élément se présente sous la forme d'une plaque circulaire, possédant neuf degrés de liberté, répartis sur chacun des trois nœuds. Tandis que le second se présente sous la forme d'une plaque annulaire avec douze degrés de liberté et quatre nœuds. Un peu plus tard, Sawko et Merriman [Saw.71] ont développé un élément secteur basé sur le modèle en déplacement, cet élément possède quatre degrés de liberté au niveau de chacun des quatre nœuds de coin. L'élément développé est adapté à l'analyse de la flexion des plaques annulaires.

Une année après, Kirkhope et Wilson [Kir.72] ont développé deux éléments pour la flexion des plaques de géométrie circulaire et annulaire, ces éléments conviennent particulièrement à l'analyse dynamique des plaques circulaires d'épaisseur variable dans le sens radial. L'élément annulaire a quatre degrés de liberté, tandis que l'élément circulaire n'en a que trois degrés de liberté.

Deux éléments finis de forme circulaire et annulaire basés sur la théorie des plaques épaisses de Reissner [Rei.45] ont été développés par Bapu rao et al [Bap.77] pour l'analyse de la flexion des plaques annulaires et secteurs. Le premier élément développé pour la flexion des plaques annulaires ne contient que trois degrés de liberté essentiels ( $w$ ,  $\phi_r$ , et  $\gamma_r$ ) à chaque nœud. Tandis que l'élément secteur possède vingt degrés de liberté, cinq ddl ( $w$ ,  $\phi_r$ ,  $\phi_\theta$ ,  $\gamma_r$ , et  $\gamma_\theta$ ) à chacun des quatre nœuds. Le champ de déplacement, qui est représenté par les rotations de déplacement latéral et de cisaillement, est exprimé en termes de fonctions polynomiales d'interpolation des coordonnées polaires  $r$ ,  $\theta$ .

Afin d'analyser les plaques circulaires modérément épaisses en flexion et en vibration, Guruswamy et Yang [Gur.79] ont proposé un élément secteur à vingt-quatre degrés de liberté basé sur la théorie des plaques épaisses de Reissner. La polyvalence de cet élément a été démontrée en effectuant une analyse de vibration libre d'un exemple d'une plaque secteur encastrée avec différentes épaisseurs et différents angles sectoriels

La méthode des éléments finis a été étendue pour l'analyse de vibration libre des plaques épaisses stratifiées avec des limites courbes. Deux éléments ont été présentés par Cheung et Kwok [Cheu.75], basés sur la théorie des plaques épaisses de Mindlin [Min.51] dans laquelle les effets de la déformation de cisaillement en épaisseur et d'inertie rotative sont inclus. Les deux éléments sont dérivés en coordonnées polaires et peuvent être assemblés pour traiter les problèmes de plaques anisotropes laminées annulaires et circulaires. Des éléments finis annulaires ont été utilisés par Srinivasa et Ramachandra [Sri.89] pour l'analyse linéaire des grands déplacements des plaques annulaires et circulaires soumises à une charge latérale axisymétrique.

Un certain nombre d'études ayant utilisé des coordonnées polaires [Buc.91], [Cook.88] et cylindriques [Mac.90],[Mac.92] pour le développement des éléments solides, [Cook.88] a montré que des prédictions précises pour l'analyse de structures de forme circulaire peuvent être obtenues avec un nombre réduit d'éléments, si la formulation utilise des coordonnées polaires au lieu de coordonnées cartésiennes. De sa part, MacGregor [90, 92] a développé un élément fini tridimensionnel à vingt nœuds en coordonnées cylindriques, pour les équations de Navier-Stokes incompressibles visqueuses et l'a appliqué à l'interaction stator / rotor dans un étage d'une turbomachine. L'utilisation des coordonnées cylindriques avait pour but de simplifier la description des conditions aux limites de l'élément. Des éléments solides, développés également en coordonnées cylindriques par [Kem.92], sont appliqués à l'électromagnétisme et à l'analyse des contraintes linéaires autour des trous circulaires [Tia.90]. Dans les refs [Vai.73] et [Kiri.73], des équations des éléments finis tridimensionnelles développées en coordonnées curvilignes sont présentées pour les problèmes de mécanique des solides linéaires et non linéaires et sont appliquées à l'analyse des structures coques cylindriques.

Les éléments finis développés en coordonnées curvilignes, utilisant des fonctions de forme polynomiales, n'incluent pas explicitement la représentation exacte de tous les modes des corps rigides [Jon.66]. Cependant, avec un raffinement suffisant du maillage, ces éléments peuvent représenter correctement les mouvements de corps rigides de sorte que l'intégralité soit assurée [Hai.67], [Meb.71]. Lorsque les modes de corps rigides sont significatifs par rapport aux modes de déformation, ils peuvent être explicitement incorporés par l'utilisation de degrés de liberté supplémentaires ou par des relations de transformation modifiant les matrices de rigidité élémentaire [Can.69], [Fon.73].

Dans une étude récente, Danielson et Noor [Dan.96] ont utilisé des éléments tridimensionnels développés en coordonnées cylindriques pour l'analyse non linéaire des pneumatiques. Cette étude a démontré l'efficacité de l'utilisation des systèmes de coordonnées curvilignes pour l'analyse des pneumatiques par la méthode des éléments finis. Les besoins de l'industrie exigent l'utilisation des modèles tridimensionnels, qui nécessitent généralement une grande quantité de ressources informatiques. Alors que la formulation de coordonnées cylindriques était motivée par le souhait de réaliser une analyse plus efficace des pneus, la procédure peut être appliquée efficacement à diverses structures communes.

Une formulation pour l'analyse non linéaire par des éléments finis tridimensionnels en coordonnées cylindriques a été présentée par Danielson et Noor [Dan.97]. Les éléments utilisés sont isoparamétriques avec les mêmes fonctions d'interpolation utilisées pour

représenter la géométrie et les composantes de déplacement physique. Ces éléments peuvent être utilisés pour une analyse tridimensionnelle générale, mais ils sont plus efficaces dans les cas où la géométrie est mieux décrite en coordonnées cylindriques. Contrairement aux formulations en coordonnées cartésiennes, la formulation précédente permet la représentation exacte d'une forme circulaire.

En 1990, Singh et Dey [Sin.90] ont appliqué la méthode des différences finies pour l'analyse de vibration libre des plaques secteurs orthotropes en coordonnées polaires avec différentes conditions aux limites. La méthode des différences finies a été introduite par Houbolt [Hou.58] pour l'analyse statique de poutres et de plaques. Plus tard, elle a été appliquée à différents types de structures par Bushnell [Bus.70], [Bus.73].

Un élément secteur solide hiérarchique à huit nœuds a été présenté par [Houm.04], cet élément a été appliqué à l'analyse tridimensionnelle de vibration libre des plaques secteurs et annulaire. Les déplacements de l'élément sont exprimés en termes d'un nombre fixe de fonctions de forme polynomiales linéaires. Les résultats obtenus pour les fréquences sont trouvés pour des plaques secteurs annulaires avec deux bords droits simplement appuyés et des comparaisons sont faites avec celles obtenues par la méthode des prismes finis.

Le développement des polynômes du champ de déplacement par l'utilisation de l'approche en déformation a été appliqué pour la première fois à des structures courbes. Il a été montré, pour obtenir des résultats satisfaisants et convergents par l'utilisation des éléments finis basés sur le modèle en déplacement à des structures courbes, que cela exige un grand nombre d'éléments. Ceci a motivé les chercheurs pour développer des éléments basés sur l'approche en déformation afin de pallier ce type de problèmes.

Ashwell, Sabir et Roberts [Ash.72] et [Ash.71] ont montré que pour une analyse par des éléments courbes sur des arcs circulaires simples avec différents rapports, lorsque les polynômes du champ de déplacement utilisés sont découplés, la structure doit être divisée en un grand nombre d'éléments afin d'obtenir des résultats convergents et satisfaisants.

Un peu plus tard, l'approche en déformation a été utilisée pour une étude concernant une comparaison d'élément fini type poutre courbe quand elle est utilisée dans les problèmes de vibration [Sab.71]. Les travaux antérieurs sur les fonctions de forme des éléments finis utilisés pour les structures courbes, comme les arcs, sont prolongés de la statique à des problèmes de vibrations. Dans cette étude, les vibrations libres d'un anneau sont prises en considération et quatre fonctions de forme sont utilisées. La convergence trouvée est plus rapide.

Un élément courbe a été également développé par Sabir et Lock [Sab.73] pour l'analyse de la non linéarité géométrique des arcs circulaires. La supériorité de cet élément a été démontrée. Le travail a été étendu par Sabir [Sab.75] pour développer un élément d'arc se déformant aussi bien hors plan de courbure que dans le plan.

Un autre élément fini courbe, basé sur l'approche en déformation et la théorie des coques peu profonde, été présenté par Sabir et Ramadanh [Sab.85], l'efficacité de cet élément a été testée en l'utilisant dans l'analyse des problèmes cylindriques [Sab.85a], sphériques [Sab.87] et pour des coques paraboliques où il a donné un degré de précision élevé. Plus tard, Sabir [Sab.88] avait développé un élément fini coque conique courbe pour l'analyse de la flexion des coques coniques. Cet élément est simple et possède 20 degrés de liberté et satisfait les besoins de déplacement du corps rigide.

L'approche en déformation a également été utilisée pour le développement de plusieurs éléments de coque élaborés par Mousa, A. [Mou.94] et [Mou.01]. Ces éléments comprennent des éléments coniques, cylindriques et sphériques. En outre, deux groupes d'éléments triangulaires à double courbure ont été développés, le premier groupe comprend deux éléments qui ont six degrés de liberté à chaque nœud, tandis que le second contient trois éléments avec cinq degrés de liberté à chaque nœud. Ces éléments présentent une grande précision en termes de déplacements et de contraintes pour l'analyse des structures complexes.

## **1.2. Historique sur les éléments à champ de déformation**

L'approche en déformation a été introduite dans une nouvelle famille des éléments finis pour les problèmes d'élasticité plane. Sabir [Sab.85a] a développé des éléments en coordonnées cartésiennes à deux degrés de liberté par nœud (un élément rectangulaire et un autre triangulaire) qui sont basés sur le modèle en déformation avec rotation dans le plan comme ddl additionnel.

Des éléments triangulaires et rectangulaires, basés sur le modèle en déformation, sont développés par Sabir et Sfindji [Sab.95] pour les problèmes d'élasticité plane. L'élément triangulaire possède les deux degrés de liberté essentiels à chacun des trois nœuds de coin et au nœud intermédiaire. L'élément rectangulaire a les mêmes degrés de liberté pour chacun des quatre nœuds de coin ainsi que pour le nœud interne, dont le nœud interne est éliminé par la condensation statique. Un nouvel élément fini membranaire rectangulaire avec un nœud interne a été formulé par Belarbi et Maalam [Bela.05] pour l'analyse des problèmes d'élasticité linéaire plane, cet élément possède deux degrés de liberté aux quatre nœuds du sommet ainsi qu'au nœud interne. Certaines variations dans le champ de déformation sont suggérées afin

d'améliorer l'élément de Sabir [Sab.85a]. Ces variations reposent sur l'évitement d'une telle liaison entre les déformations et sur un équilibre satisfaisant, ce qui conduit finalement à un élément triangulaire nommé SBT2V, avec trois degrés de liberté par nœuds (deux translations et une rotation) [Bela.05a].

Récemment, Rebiai et Belounar [Reb.13] ont formulé un élément rectangulaire possédant trois degrés de liberté au niveau de chacun des quatre nœuds de coin (les deux translations et la rotation dans le plan), cet élément était développé pour l'analyse linéaire et non linéaire des structures membranaires. RezaieePajand et Yaghoobi ont proposé un élément triangulaire à cinq nœuds avec un champ de déformation linéaire complet [Rez.14a]. Pour proposer un nouvel élément fini, ils ont utilisé le champ de déformation linéaire complet de l'étude précédente [Rez.14a], mais avec un élément de géométrie différente [Rez.14b]. Dans un autre travail de recherche, Rebiai et Belounar ont suggéré une variante de leur élément précédent [Reb.14]. Ils ont considéré le champ de déformation de leur étude précédente [Reb.13], mais en ajoutant un nouveau terme linéaire à la déformation de cisaillement et en changeant le terme dépendant des déformations normales. Afin de développer des éléments basés sur le modèle en déformations de second ordre, Rezaiee-Pajand et Yaghoobi ont proposé deux éléments quadrilatéraux à sept et neuf nœuds [Rez.15].

Belounar.A. [Belo.A.19] a présenté la formulation théorique et la validation numérique d'un nouvel élément fini quadrilatère membranaire avec rotation dans le plan, basé sur l'approche en déformation, destiné à l'analyse statique et en vibration libre des structures. Cet élément possède les quatre nœuds de coin et le nœud central, ce dernier contient seulement les deux translations (U et V) tandis que les autres nœuds de coin ont une rotation dans le plan (drilling) comme ddl additionnel (U, V et  $\theta_z$ ). La technique de condensation statique est utilisée pour l'élimination du cinquième nœud interne. Une solution numérique, en utilisant un élément fini quadrilatère, a été présentée par Bouzidi et al. [Bouz.19] pour l'analyse du comportement statique et dynamique des structures membranaires. Cet élément possède deux degrés de liberté (u et v) aux quatre nœuds d'angle ainsi qu'au nœud central. Les trois composantes des déformations ont une variation linéaire satisfaisant l'équation de compatibilité.

Plus récemment, un nouvel élément membranaire triangulaire, avec rotation dans le plan, a été développé par Fortas et al. [For.19] pour l'analyse statique et la vibration libre. L'élément proposé, ayant trois degrés de liberté à chacun des trois nœuds de coin, et basé sur des

fonctions de déformation supposées satisfaisant à la fois les équations de compatibilité et d'équilibre.

Une extension de l'approche en déformation pour l'analyse des plaques minces et épaisses à l'aide d'un élément fini rectangulaire à quatre nœuds basé sur le modèle en déformation a été présentée par Belounar et Guenfoud [Belo.05]. L'élément développé destiné à l'analyse linéaire de la flexion des plaques avec effet de cisaillement transverse, possédant les trois degrés de liberté essentiels ( $W$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$ ) en chacun des quatre nœuds de coin.

Belounar et al [Belo.A.20] et [Belo.A.20a] ont développé des éléments de plaque basés l'approche par déformation et en utilisant la théorie des plaques de Reissner / Mindlin. Le premier élément nommé SBTMP (Strain Based Triangular Mindlin Plate) possède trois degrés de liberté ( $W$ ,  $\beta_x$  et  $\beta_y$ ) aux trois nœuds d'angle, destiné pour l'analyse statique et en vibration libre de la flexion des plaques isotrope. Le deuxième est un quadrilatère à quatre nœuds appelé SBQMP (plaque Mindlin quadrilatère basée sur la déformation) est formulé pour surmonter le verrouillage par cisaillement des plaques très minces et pour améliorer la précision des plaques aux formes régulières et déformées. . L'élément SBQMP qui contient trois degrés de liberté ( $W$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ) par nœud est appliqué à l'analyse en vibration libre de diverses structures de la flexion des plaques.

Sabir et Ashwell [Ash.72] ont formulé le premier élément fini de coque cylindrique basé sur l'approche en déformation et la théorie des coques profondes en conditions statiques. La méthode propose de former des fonctions de forme d'élément fini courbe à partir des fonctions de déformations indépendantes simples appliquées à un élément coque rectangulaire. Cet élément a quatre nœuds ayant cinq degrés de liberté par nœud (trois déplacements et deux rotations) satisfaisant les conditions de déplacements de corps rigide et de déformation constante. La supériorité de cet élément est particulièrement marquée quand il est appliqué aux coques minces. De sa part Sabir [Sab.72] a développé un élément coque cylindrique courbe pour l'analyse linéaire. Cet élément est une forme simplifiée de l'élément coque de Cantin [Can.68], et il est présenté en réduisant la taille de sa matrice de rigidité de  $(24 \times 24)$  à  $(20 \times 20)$ . Les deux éléments sont comparés pour résoudre des problèmes complexes. Le nouvel élément a l'avantage sur celui de "Cantin et de Clough" et sur tous les autres éléments finis qui ont des fonctions de déplacement de degrés élevés.

Sabir et Charchafchi [Sab.82] ont utilisé l'approche en déformation pour développer un élément de coque quadrilatère, et Sabir a utilisé cet élément pour le problème de

concentration de contraintes dans des cylindres avec des trous circulaires et elliptiques [Sab.79], ainsi que le problème d'intersection droit des cylindres [Sab.83b].

Des éléments coques cylindriques peu profonds basés sur le modèle en déformation ont été développés par Djoudi et Bahai. Ces éléments de forme rectangulaire possèdent seulement les cinq degrés de liberté essentiels à chaque nœud d'angle. Le premier élément [Djo, 03] a été développé pour l'analyse linéaire et non linéaire géométrique des coques cylindriques et les différents problèmes d'ingénierie. Tandis que le deuxième élément [Djo.04] est destiné pour le calcul des fréquences naturelles des panneaux cylindriques ainsi que des cylindres complets. Le troisième élément [Djo.04a] a été utilisé pour étudier la vibration libre des panneaux cylindriques avec des ouvertures.

D'autres contributions proposées par Mousa [Mou.15], dont lesquelles un élément fini triangulaire cylindrique n'a que cinq degrés de liberté essentiels dans chacun des trois nœuds de coin. Cet élément a été utilisé pour l'analyse d'une coque cylindrique soumise à une charge uniformément répartie sur sa longueur, en plus des charges de bord sinusoïdales symétriques présentes le long de ses limites longitudinales. En outre, deux éléments finis sont développés, le premier est un élément triangulaire sphérique basé sur la formation des coques peu profondes [Mou.15a], a été développé pour l'analyse linéaire et non linéaire des coques sphériques. L'élément développé ne possède que cinq degrés de liberté essentiels à chaque nœud de coin. Une solution par éléments finis est présentée au problème de vibration d'une coque cylindrique circulaire à extrémité oblique en utilisant un nouvel élément fini cylindrique triangulaire à champ de déformation [Mou.15b], l'élément proposé ne possède que cinq degrés de liberté essentiels à chaque nœud de coin.

Plus récemment, Un élément fini rectangulaire à quatre nœuds nommé SBRS basé sur l'approche par facettes planes a été présenté par Belounar.A [Belo.A.19] pour l'analyse statique des coques cylindriques isotropes. L'élément formulé est obtenu par la superposition de l'élément quadrilatère plaque Mindlin SBQP [Belo.A.19a] et l'élément membranaire SBRIE [Sab.83a]. Cet élément est simple à formuler et contient seulement les six degrés de liberté essentiels par nœud ( $U$ ,  $V$ ,  $W$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$ ). Les exemples numériques montrent que l'élément SBRS ne présente aucun blocage en CT et atteint une bonne précision par rapport aux quelques éléments de coque à facette plane existants.

Une extension de l'approche en déformation a été établie par Belarbi et Charif [Bela.99] pour les problèmes d'élasticité tridimensionnelle, afin d'éviter l'utilisation des éléments tridimensionnels d'ordre élevé basés sur le modèle en déplacement (hexaédrique et

prismatique), ils ont proposé un élément hexaédrique simple à huit nœuds et trois degrés de liberté par nœud nommé SBH8 (Strain Based Hexahedron 8-node). Dans l'ordre de la représentation exacte du comportement réel des plaques en flexion (minces et épaisses), la loi de comportement a été modifiée par l'introduction des constantes de contraintes planes et un coefficient correctif du cisaillement transversal. Plus tard, un autre élément fini a été développé par Hamadi et Maalem [Ham.10] pour la flexion des plaques minces et épaisses, c'est un élément parallélépipédique formulé par l'utilisation de la condensation statique.

Récemment, deux nouveaux éléments brique tridimensionnels basés sur l'approche en déformation ont été formulés par Belouar et Guerrache [Belo.14] et [Guer.18] pour l'analyse linéaire des plaques minces et épaisses. Le premier élément développé est un élément fini tridimensionnel avec une matrice d'élasticité modifiée nommée SBB (Strain Based Brick) et qui possède huit nœuds de coin ainsi que le nœud central avec les trois degrés de liberté essentiels (U, V et W) à chaque nœud. En développant cet élément, la technique de condensation statique a été utilisée. Le deuxième élément formulé SBBEE (Strain Based Brick Equilibrium Element) contient seulement les 3 degrés de liberté essentiels (u, v et w) dans chacun des nœuds de coin. En imposant un champ de déformations qui satisfait les équations d'équilibre comme condition supplémentaire [Belo.06].

Ensuite, Messai et al [Mes.19] ont proposé un nouvel élément tridimensionnel basé sur l'approche en déformation. Cet élément possède neuf nœuds et trois degrés de liberté (U, V et W) par nœud. L'élément formulé est implémenté dans le code de calcul ABAQUS; et il est validé à travers une série de tests de la flexion des poutres, plaques minces et épaisses en statique et en vibration libre.

### **1.3. Etude bibliographique sur les éléments secteurs à champ de déformation**

Le succès de l'approche en déformation aux problèmes d'élasticité plane a encouragé les chercheurs à l'application de cette approche pour le développement des éléments secteurs en coordonnées polaires. Sabir et Salhi [Sab.86] ont utilisé la méthode de transformation des coordonnées pour le développement d'un élément secteur à deux degrés de liberté par nœud. La mise en œuvre réussie de l'approche en déformation pour le développement des éléments secteurs membranaires [Sab.86] a motivé la formulation des éléments secteurs en coordonnées polaires avec une rotation dans le plan  $\theta z$  comme degré de liberté additionnel. Ces éléments peuvent être utilisés dans des applications spécifiques où ils s'adaptent bien à la géométrie de certains problèmes et à des structures complexes (telles que des buses ou des tunnels souterrains).

En 1987 Bouzerira [Bou.87] a développé un élément secteur basé sur le modèle en déformation avec une rotation dans le plan comme degré de liberté supplémentaire. Cependant les résultats obtenus en analysant quelques problèmes d'élasticité plane (cas de flexion pure) étaient non concluants à cause du choix inapproprié du champ de déformations. Djoudi [Djo.90] a présenté après deux éléments secteurs qui améliorent la qualité des résultats mais ils restent sensibles au rapport d'aspect.

Ensuite, Belarbi et Charif [Bela.98] ont présenté un élément secteur membranaire à quatre nœuds et trois degrés de liberté par nœud, y compris la rotation dans le plan comme degré de liberté additionnel. Cet élément est destiné à la résolution des problèmes d'élasticité plane ayant un contour circulaire. Bouzrira et al. [Bou.05] ont utilisé l'approche en déformation pour le développement d'un élément secteur à trois degrés de liberté par nœud, qui admet une rotation dans le plan comme degré de liberté additionnel (deux translations et une rotation dans le plan autour de l'axe  $z$ ). Hamadi [Ham.06] a développé un nouvel élément secteur avec quatre nœuds d'angle et un nœud central, chaque nœud a deux degrés de liberté, en utilisant la technique de condensation statique. Les résultats obtenus sont en accord avec la solution analytique et avec les résultats donnés par d'autres éléments.

Bouzriba et Bouzrira [Bou.15] ont développé récemment un élément secteur à quatre nœuds et trois degrés de liberté, qui contient la rotation dans le plan comme ddl additionnel ( $U$ ,  $V$  et  $\theta_z$ ). Les performances de cet élément ont été testées par l'analyse de cylindres épais exposés à la pression interne et au changement de température. L'efficacité de l'élément a été établie et la convergence des résultats pour les contraintes et les déplacements de cet élément s'est avérée plus rapide que d'autres éléments. L'approche en déformation a été également utilisée par Bourezane [Bour.17] pour le développement d'un élément secteur avec quatre nœuds de coin et un nœud central, chaque nœud possède deux degrés de liberté, cet élément a été testé en l'appliquant à une variété de problèmes d'élasticité bidimensionnelle des plaques circulaires. Les résultats numériques démontrent clairement l'efficacité du modèle en déformation en utilisant les coordonnées polaires.

#### **1.4. Différentes approches utilisées pour le développement des éléments secteurs**

Le développement des éléments secteurs basés sur le modèle en déformation peut être réalisé en utilisant trois approches distinctes:

La première méthode «approche directe ou approche de Raju» consiste à utiliser les champs de déplacement obtenus en coordonnées cartésiennes et en remplaçant  $x$  et  $y$  par  $r$  et  $\theta$  (coordonnées polaires).

La deuxième méthode «intégration directe» consiste à dériver les éléments basés sur l'approche en déformation en coordonnées polaires, c'est-à-dire les relations déformation-déplacement exprimées en coordonnées polaires, en intégrant le champ des déformations pour obtenir les fonctions de déplacement. Cette méthode a été utilisée par Sabir et Bouzerira [Bou.87].

La troisième méthode «transformation de coordonnées» consiste à utiliser le champ de déplacement obtenu en coordonnées cartésiennes (x,y), puis le convertir en système de coordonnées polaires. Cette méthode a été utilisée par Sabir et Slahi [Sab.86].

#### 1.4.1. Quelques éléments secteurs développés précédemment

Les éléments secteurs suivants sont développés en utilisant les différentes approches

##### 1.4.1.1. Raju and Rao Element [Raj.69]

L'un des éléments finis les plus utilisés pour les problèmes d'élasticité plane en coordonnées cartésiennes est l'élément quadratique bilinéaire, où les fonctions de déplacement sont données par :

$$U = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (1.1)$$

$$V = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy$$

Raju et al ont développé un élément secteur basé sur les fonctions ci-dessus en remplaçant x et y par r et  $\theta$ ; d'où le champ de déplacement serait

$$U = a_1 + a_2r + a_3\theta + a_4r\theta \quad (1.2)$$

$$V = a_5 + a_6r + a_7\theta + a_8r\theta$$

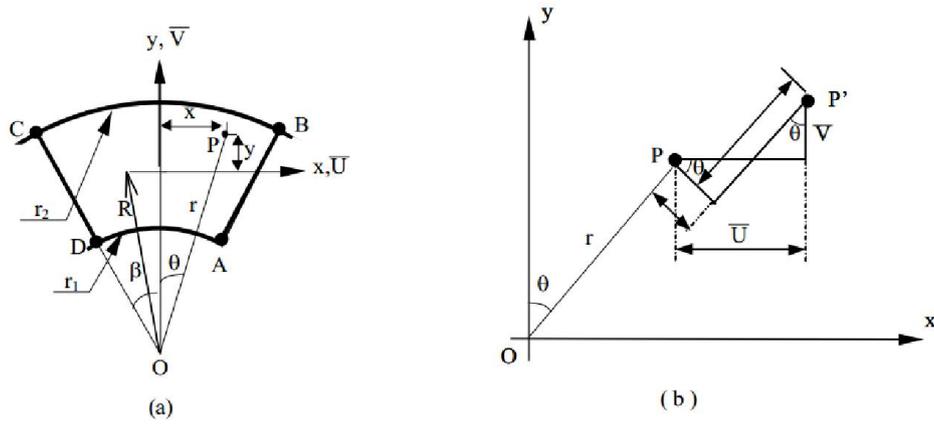
##### 1.4.1.2. Élément Sabir and Salhi [Sab.86]

Sabir et Salhi ont utilisé la troisième approche et ont développé un élément secteur basé sur l'approche en déformations qui contient deux degrés de liberté pour chaque nœud. Les systèmes des coordonnées et les déplacements sont indiqués sur la Fig.1.1.

Les fonctions de déplacement sont données par les équations suivantes :

$$\bar{U} = a_1 - a_3y + a_4x + a_5xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} \quad (1.3)$$

$$\bar{V} = a_2 + a_3x - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6y + a_7xy + a_8 \frac{x}{2}$$



**Figure 1.1** : système de coordonnées et les déplacements de l'élément secteur.

Pour convertir les deux équations ci-dessus en termes de système de coordonnées polaires, on utilise les expressions suivantes :

$$x = r \sin\theta \tag{1.4}$$

$$y = r \cos\theta - R$$

Où R est le rayon de courbure de la ligne circonférentielle centrale de l'élément et les coordonnées polaires r et  $\theta$  sont représentées sur la figure 1.1 (a).

U et V sont les déplacements en translation donnés par : "Fig.1.1 (b)"

$$U = \bar{U} \sin\theta + \bar{V} \cos\theta \tag{1.5}$$

$$V = \bar{U} \cos\theta - \bar{V} \sin\theta$$

Les fonctions de déplacement final sont données en coordonnées polaires comme suit:

$$U = a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta + a_3 R \sin\theta + a_4 r \sin^2\theta + a_5 r \sin^2\theta (r \cos\theta / 2 - R) + a_6 \cos\theta (r \cos\theta - R) + a_7 \sin\theta (r^2 \cos^2\theta - R^2) / 2 + a_8 \sin\theta (r \cos\theta - R / 2) \tag{1.6}$$

$$V = a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta + a_3 (R \cos\theta - r) + a_4 r \sin\theta \cos\theta + a_5 r \sin\theta (r \cos^2\theta + r \sin^2\theta / 2) + a_6 \sin\theta (R - r \cos\theta) - a_7 (r^2 \cos^3\theta - R^2 \cos\theta + 2r^2 \sin^2\theta \cos\theta - 2rR) / 2 + a_8 (\cos 2\theta - R \cos\theta) / 2$$

### 1.4.1.3. Élément de Belarbi SBS4 [Bela.98]

Soit le champ de déplacement en coordonnées cartésiennes proposé par [Bela.98] :

$$U = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 y + a_6 xy + a_8 \frac{y^2}{2} + a_9 y^2 + a_{10} xy^2 + a_{11} x^2 y^3$$

$$V = a_2 + a_3 x + a_5 x + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 y + a_8 xy - a_{10} x^2 y - a_{11} y^2 x^3 + a_{12} x^2$$

$$\theta_z = a_3 - a_9 y - 2a_{10} xy - 3a_{11} x^2 y^2 + a_{12} x \tag{1.7}$$

En remplaçant  $x$  et  $y$  par  $r$  et  $\theta$ ; le champ de déplacement serait:

$$\begin{aligned}
 U_r &= a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5\theta + a_6r\theta + a_8\frac{\theta^2}{2} + a_9\theta^2 + a_{10}r\theta^2 + a_{11}r^2\theta^3 \\
 V_\theta &= a_2 + a_3r + a_5r + a_6\frac{r^2}{2} + a_7\theta + a_8r\theta - a_{10}r^2\theta - a_{11}\theta^2r^3 + a_{12}r^2 \\
 \theta_z &= a_3 - a_9\theta - 2a_{10}r\theta - 3a_{11}r^2\theta^2 + a_{12}r
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

#### 1.4.1.4. Élément de Bouzrira [Bou.05]

Bouzerira et al [Bou.05] ont développé un élément secteur à douze degrés de liberté basé sur l'approche en déformation, le champ de déformation proposé est:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= a_4 + a_5\theta + a_6r \\
 \varepsilon_\theta &= a_7 + a_8\theta + a_9/r + a_6r \\
 \gamma_{r\theta} &= a_{10} + a_{11}\frac{\theta}{r} + a_{12}r + a_6\frac{r\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

#### 1.4.1.5. Élément de Bouzriba [Bou.15]

Bouzriba et bouzrira ont utilisé la méthode de l'intégration directe pour développer un élément secteur basé sur l'approche en déformation. Il possède trois degrés de liberté dans chaque nœud. Le champ des déformations en coordonnées polaires proposé est le suivant:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= a_4 + 2ra_5 + \theta a_{10} + 3r^2 a_{11} \\
 \varepsilon_\theta &= a_5 + ra_6 - \frac{\theta r^3}{3} a_8 + \theta a_9 + r^2 a_{11} \\
 \gamma_{r\theta} &= a_7 + \frac{\theta}{r} a_6 - \frac{r^3 \theta^2}{2} a_8 + \frac{\theta}{r} a_{10} - 2ra_{12}
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

#### 1.4.1.6. Élément de Bourezane [Bour.17]

Soit le champ de déformation proposé par [Bour.17]

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= a_4 + a_5\theta + a_6r \\
 \varepsilon_\theta &= a_7 + a_8/r + \theta a_9 + a_6\frac{r}{2} \\
 \gamma_{r\theta} &= a_{10}
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

### 1.5. Les équations fondamentales d'élasticité en coordonnées cartésiennes

La théorie d'élasticité permet d'étudier le comportement des solides sous l'effet de différentes forces appliquées, soit la force de volume ou de surface.

Les équations de la théorie de l'élasticité qui définissent les relations entre contraintes et déformations se simplifient considérablement dans le cas particulier fréquent où tous les vecteurs contraintes sont parallèles à un même plan. Ce cas se rencontre dans deux types de problèmes nettement distincts, que nous allons présenter :

➤ **Etat plan des contraintes**

Considérons (figure 1.2) un disque mince d'épaisseur constante, sollicité par des forces appliquées sur son contour. La condition de contrainte plane est caractérisée par le fait que la dimension suivant la direction  $z$  est très petite par rapport aux deux autres dimensions, ainsi que les contraintes  $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  sont nulles sur les deux faces du disque.

Il est certain que les trois composantes non nulles  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  ne dépendent pas de  $z$ , c'est-à-dire qu'elles restent constantes sur toute l'épaisseur du disque

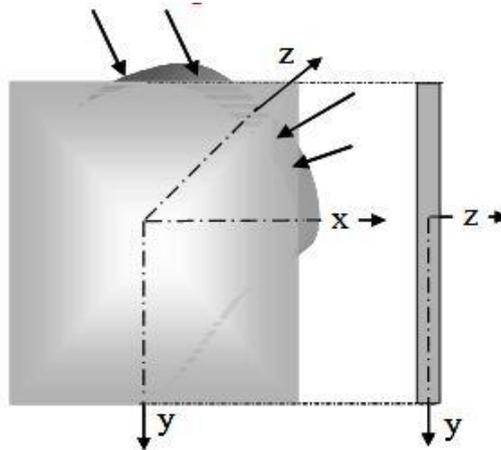
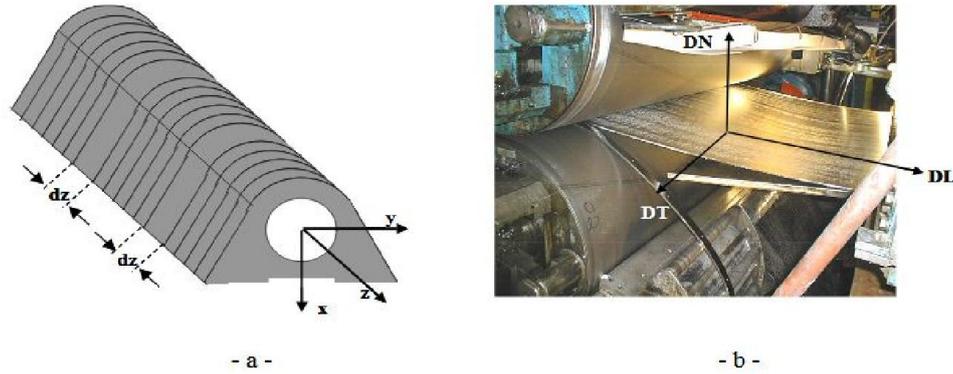


Figure 1.2 : Disque en état plan des contraintes

➤ **Etat plan de déformation**

Considérons un tunnel ou un puits de mine (figure 1.3-a-) de très grande étendue selon la direction  $z$  ayant des composantes nulles suivant  $z$  (hypothèse  $\varepsilon_z = 0$ ). Si les sections perpendiculaires à l'axe  $z$  sont toutes identiques, deux sections distantes de  $dz$  se déforment de façon identique. Sur la figure b est représentée une tôle en sortie de laminoir. Dans la direction transversale (DT), il n'y a pas de déformation à cause du frottement entre les cylindres du laminoir et la tôle. Les deux exemples de la figure 1.3 rentrent dans le cadre des déformations planes.

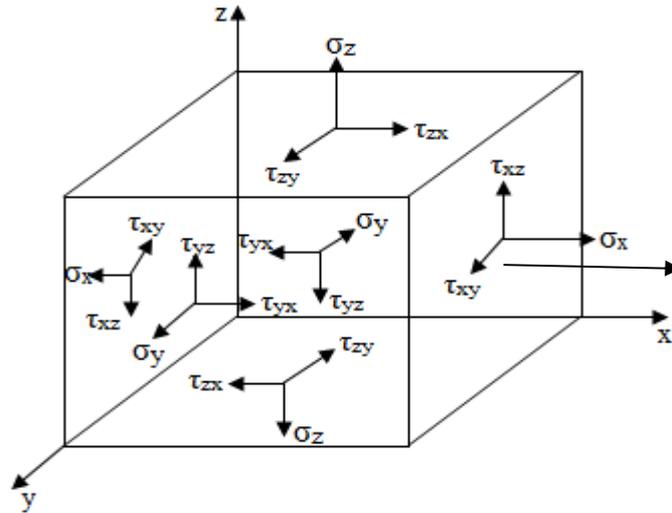


**Figure 1.3 :** Exemples de structures en déformation plane : puits de mine (a) et tôle en laminage (b)

### 1.5.1. Equations de base d'élasticité pour le cas général (tridimensionnel)

#### 1.5.1.1. Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre décrivent la relation entre la contrainte et une force externe et peuvent être dérivées en considérant l'équilibre d'un petit élément solide, comme indiqué sur la Fig. 1.4.



**Figure 1.4 :** Composantes des contraintes.

Les équations d'équilibre pour le cas général tridimensionnel sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Où  $F_x$ ,  $F_y$  et  $F_z$  sont les forces de volume respectivement dans les directions X, Y et Z.

### 1.5.1.2. Equations déformations-déplacements

Les déformations pour le cas tridimensionnel sont :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Où  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$  sont les déformations directes suivant les directions x et y et z respectivement, et  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{xz}$  sont les déformations de cisaillement.

### 1.5.1.3. Equations contraintes-déformations

La première équation constitutive (loi constitutive) a été développée par Robert Hooke et est connue sous le nom de loi de Hooke. Il traite du cas des matériaux élastiques linéaires. Suite à cette découverte, ce type d'équation, souvent appelé "relation contraintes-déformations" comme dans cet exemple, on a les relations d'élasticité (loi de Hooke) suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}
 \end{aligned} \tag{1.14}$$

En considérant toujours ces mêmes équations généralisées, on peut exprimer les contraintes,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  en fonction des déformations, on obtient alors la relation sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2.G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2.G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{1.15}$$

$\lambda$  et  $G$  sont les constantes de Lamé.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} ; \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

#### 1.5.1.4. Equation de compatibilité

Pour une analyse linéaire tridimensionnelle les six équations de compatibilité sont données par:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}\end{aligned}\tag{1.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial x} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial z} &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}\end{aligned}$$

#### 1.5.2. Equations de base d'élasticité pour le cas (bidimensionnel)

Après avoir traité le problème en trois dimensions, maintenant on va le ramener à un problème dans le plan.

##### 1.5.2.1. Equations d'équilibre

Pour le cas d'élasticité plane, en tenant compte du fait que les composantes de contraintes sont indépendantes de  $z$ , donc d'après l'équation (1.12), les équations d'équilibre pour le cas bidimensionnel deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0\end{aligned}\tag{1.17}$$

Où  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\tau_{xy}$  sont les seules composantes de contraintes non nulles et  $F_x$ ,  $F_y$  sont les forces de volume respectivement dans les directions X et Y.

### 1.5.2.2. Equations déformations-déplacements

Les déformations en un point quelconque dans le domaine de l'élément 2D sont exprimées en termes de déplacements nodaux comme suit:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

### 1.5.2.3. Equations contraintes-déformations

Dans ce cas on considère les deux types de problèmes de l'élasticité plane.

Pour le cas contrainte plane où la dimension suivant Z est négligeable,  $\sigma_z = 0$ ,  $\tau_{yz} = 0$ ,  $\tau_{xz} = 0$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x) \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy}$$

L'équation 1.18 peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.20)$$

Pour le cas en déformation plane la relation contraintes-déformations est comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

### 1.5.2.4. Equation de compatibilité

En élasticité 2D, les six équations de compatibilités en élasticité 3D se réduisent en une seule équation :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.22)$$

### 1.6. Formulation variationnelle faible

Le champ de déplacement peut être exprimé sous forme matricielle comme suit :

$$\{U\} = [P]\{A\} \quad (1.23)$$

Les déformations  $\{\varepsilon\}$  peuvent être données sous forme matricielle comme suit :

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{A\} \quad (1.24)$$

Considérons le vecteur suivant  $\{q_e\}$  des déplacements nodaux total en un domaine élémentaire générique  $\Omega_e$  d'un élément brique à huit nœuds:

$$\{q_e\}^T = \{U_1, V_1, W_1, \dots, U_8, V_8, W_8\} \quad (1.25)$$

Le vecteur  $\{q_e\}$  est exprimé en fonction des paramètres constants  $\{A\}$  comme suit :

$$\{q_e\} = [C]\{A\} \quad (1.26)$$

D'où la matrice de transformation  $[C]$  de dimension 24x24 reliant les déplacements nodaux élémentaires aux vingt-quatre constantes  $\{a\}^T = \{a_1, a_2, \dots, a_{24}\}$

Les fonctions de déplacement et le vecteur de déformation  $\{\varepsilon\}$  sont exprimés à partir du vecteur des degrés de liberté  $\{q_e\}^T$  comme suit :

$$\{U\} = [P][C]^{-1} \{q_e\} \quad (1.27)$$

$$\{\varepsilon\} = [Q][C]^{-1} \{q_e\} \quad (1.28)$$

Sachant que :

$$\{\sigma\} = [D][\varepsilon] \quad (1.29)$$

La forme standard faible pour le cas statique peut être exprimée comme suit:

$$\int_V \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_V \delta \{U\}^T \{f_v\} dV \quad (1.30)$$

En substituant les équations (1.27), (1.28) et (1.29) dans l'équation (1.30) nous obtenons :

$$\int_V \{\delta q_e\}^T [C]^{-T} [Q]^T [D][Q][C]^{-1} \{q_e\} dV = \int_{\partial V_F} \{\delta q_e\}^T [C]^{-T} [P]^T \{f\} dV \quad (1.31)$$

D'où la matrice de rigidité élémentaire ( $[K_e]$ ) est :

$$[K_e] \{q\} = [F] \quad (1.32)$$

$$[K_e] = [C]^T \left( \int_{\Omega_e} [Q]^T [D] [Q] dV \right) [C]^{-1} = [C]^T [K_0] [C]^{-1} \quad (1.33)$$

Le vecteur forces nodales dû à la force volumique  $\{f_v\}$  est :

$$\{F_e\} = [C]^T \int_{V_e} [P]^T \{f_v\} dV \quad (1.34)$$

## 1.7. Equations fondamentales en coordonnées cylindriques

Les relations cartésiennes à trois dimensions sont refondues en coordonnées cylindrique.

### 1.7.1. Les Équations d'équilibre en coordonnées cylindriques

Les contraintes agissant sur un petit élément de matériau dans le système de coordonnées cylindriques sont représentées comme indiqué sur la figure 1.5 (Les contraintes normales et les contraintes de cisaillement).

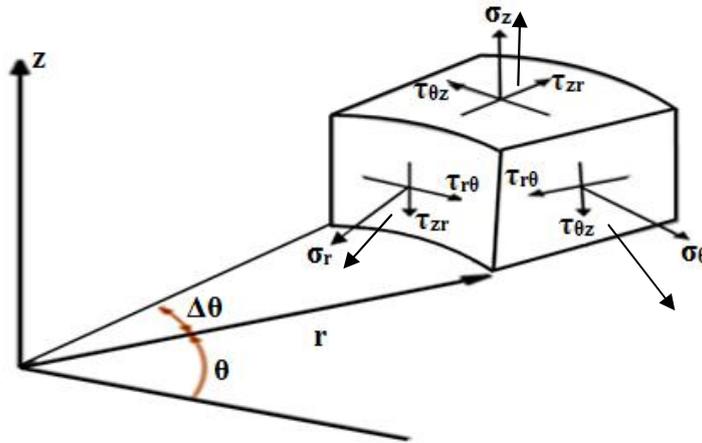


Figure 1.5 : Contraintes en coordonnées cylindriques

Les équations d'équilibre en coordonnées cylindriques sont comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + X_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta} + Y_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + Z_b &= 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

### 1.7.2. Relation Déformation –déplacement en coordonnées cylindriques

Pour une analyse linéaire tridimensionnelle les six composantes de la déformation sont données par:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\tag{1.36}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial w}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

### 1.7.3. Equation de compatibilité

Les équations de compatibilité sont données comme suit:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r \partial z} \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \theta} + \gamma_{rz} \right] \\ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} \right] - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} \\ \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial z^2} - r \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left[ \frac{\gamma_{\theta z}}{r} \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial \theta \partial z} &= -2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left[ \frac{\varepsilon_z}{r} \right]\end{aligned}\tag{1.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r \gamma_{\theta z})}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 (r^2 \gamma_{r\theta})}{\partial r \partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{\gamma_{rz}}{r} \right) = -\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 (r \gamma_{\theta z})}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial^2 (r \gamma_{r\theta})}{\partial \theta \partial z} = 2r \frac{\partial}{\partial z} \left[ \varepsilon_r - \frac{\partial (r \varepsilon_\theta)}{\partial r} \right]$$

Où  $U_r$ ,  $V_\theta$  et  $W$  sont les déplacements dans les directions  $r$ ,  $\theta$  et  $z$ , respectivement, alors que  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  et  $\varepsilon_z$  sont les déformations directes et  $\gamma_{r\theta}$ ,  $\gamma_{\theta z}$  et  $\gamma_{rz}$  sont les déformations de cisaillement.

**1.7.4. Relation contraintes-déformations (équations constitutives)**

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \nu \cdot (\sigma_\theta + \sigma_z)) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_\theta - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_z)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_r + \sigma_\theta))\end{aligned}\tag{1.38}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{r\theta}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{rz}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{\theta z}$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \cdot [(1 - \nu)\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z)] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \cdot [(1 - \nu)\varepsilon_\theta + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_z)] \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \cdot [(1 - \nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)]\end{aligned}\tag{1.39}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \cdot \gamma_{r\theta}$$

$$\tau_{rz} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \cdot \gamma_{rz}$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \cdot \gamma_{\theta z}$$

**1.8. Equation de base d'élasticité plane en coordonnées polaire****1.8.1. Les équations d'équilibre en coordonnées polaires**

Une manière d'exprimer les équations d'équilibre en coordonnées polaires consiste à appliquer un changement de coordonnées directement à la version cartésienne 2D, en considérant un élément de matériau soumis à des contraintes  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_r$ , et  $\tau_{r\theta}$ , comme le montre la Figure 1.6.

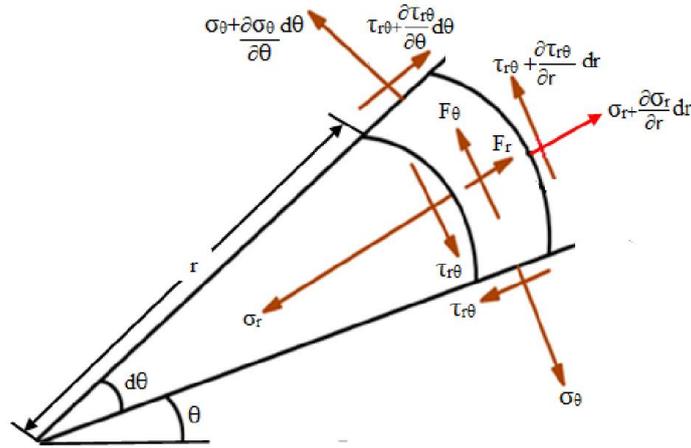


Figure 1.6 : Distribution des contraintes dans un élément secteur.

Les équations d'équilibre en coordonnées polaires sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) + F_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0 \end{aligned} \tag{1.40}$$

### 1.8.2. Relations de déformation-déplacement et loi de Hooke

Les relations déformation-déplacement en coordonnées polaires sont définies par:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{aligned} \tag{1.41}$$

Les équations de HOOKE sont comme suit :

Contrainte plane :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \nu \cdot \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_\theta - \nu \cdot \sigma_r) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_r + \sigma_\theta) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{r\theta} \end{aligned} \tag{1.42}$$

Déformation plane :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1+\nu}{E} \cdot ((1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1+\nu}{E} \cdot (-\nu\sigma_r + (1-\nu)\sigma_\theta) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2 \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \tau_{r\theta}\end{aligned}\tag{1.43}$$

### 1.8.3. Equation de compatibilité

L'équation de compatibilité en coordonnées polaires est donnée comme suit :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r,\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - 2 \cdot \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \gamma_{r,\theta}}{\partial \theta} = 0\tag{1.44}$$

## 1.9. Conclusion

En conclusion, Ce chapitre est constitué d'une synthèse bibliographique sur les éléments finis courbes formulés par les différentes approches, notamment les techniques de formulation des modèles d'éléments finis secteur. Plusieurs éléments finis courbes ont été proposés pour faciliter l'analyse des nouveaux phénomènes et d'améliorer les méthodes existantes.

Cette partie est écrite aussi pour fournir les équations de base nécessaires utilisées dans le présent travail, où ces équations facilitent la formulation des éléments et la conception du programme. Pendant les quatre dernières décennies, des progrès considérables ont été réalisés dans le développement d'éléments secteurs basé sur le modèle en déformation pour résoudre les problèmes de la mécanique des milieux continus et pour la modélisation des structures courbe, mais ne cache pas le fait qu'aucune extension de cette approche aux développement des éléments secteurs tridimensionnel à été entamé.

## **Chapitre 2**

# **DEVELOPPEMENT D'UN NOUVEL ELEMENT SECTEUR 3D A 8 NŒUDS**

# Chapitre 2

## Développement d'un nouvel élément secteur 3D à 8 nœuds

### 2.1. Introduction

En pratique, les ingénieurs préfèrent modéliser leurs structures avec des éléments finis simples, tels que des quadrilatères à quatre nœuds, des triangles à trois nœuds et des briques 3D à huit nœuds. Ces dernières années, l'analyse des structures tridimensionnelles a fait des progrès considérables dans plusieurs domaines. De nombreux travaux de recherche ont été orientés vers des éléments tridimensionnels en utilisant différentes approches. Pour le modèle de déplacement classique, les éléments 3D de faible ordre souffrent de nombreuses difficultés numériques, tandis que l'utilisation d'éléments quadratiques 3D améliore considérablement la précision des résultats mais le temps de calcul devient beaucoup plus élevé. Pour ces raisons, de nombreux chercheurs ont été motivés pour formuler des éléments simples et robustes tel que l'élément solide à vingt nœuds pour l'analyse de coque développé par Kim et al. [Kim.90]. Il existe également d'autres travaux de recherches consacrés aux éléments tridimensionnels pour les plaques épaisses en flexion [Cha.90] et [Trin.09]. Ayad et al. [Aya.13] ont proposé un élément fini hexaédrique 3D nommé SFR8 basé sur le concept SFR (Space Fiber Rotation) où le temps de calcul est réduit par rapport à l'élément hexaédrique quadratique classique à 20 nœuds. D'autre part, de nombreux éléments solides 3D, en coordonnées cartésiennes, basés sur l'approche en déformation ont été développés [Belo.14a], [Bela.99], [Bouz.17], [Guer.18], pour l'analyse de la flexion de plaque. Ces éléments qui contiennent trois degrés de liberté ( $U$ ,  $V$  et  $W$ ) par nœud ont été utilisés avec une matrice d'élasticité modifiée en introduisant des constantes de contraintes planes et un coefficient correcteur de cisaillement transversal. L'élément basé sur le modèle déformation développé par Messai et al. [Mes.19] a été étendu pour une analyse de vibration libre.

La modélisation des structures circulaires planes en coordonnées polaires dont le comportement est membrane et basé sur l'approche en déformation a fait l'objet de plusieurs travaux de recherche [Bela.98], [Sab.86] et [Bou.15]. Le premier élément secteur développé par Sabir et Salhi [Sab.86] contient deux translations ( $U_r$  et  $V_\theta$ ) par nœud, tandis que les

éléments secteur formulés par Belarbi et Charif [Bela.98] et Bouzriba et Bouzrira [Bou.15] possèdent deux translations et une rotation dans le plan (drilling) par nœud. Aucune étude n'a été trouvée dans la littérature, à ce jour, sur les éléments secteurs 3D basés sur l'approche en déformation. Cela a incité les auteurs à formuler un nouvel élément secteur brique basé sur le modèle en déformation.

Dans cette étude, la formulation d'un nouvel élément secteur tridimensionnel basé sur l'approche en déformation est présentée pour l'analyse statique linéaire des structures circulaires. Cet élément appelé SBS3D (Strain Based Sector three-Dimensional), possède les trois degrés de liberté essentiels ( $U_r$ ,  $V_\theta$  et  $W$ ) à chacun des huit nœuds de coin. Le champ de déplacement de ce présent élément est basé sur des fonctions assumées pour les différentes composantes de déformations satisfaisant les équations de compatibilité. L'efficacité du présent élément est évaluée à travers une série de tests relatifs à l'analyse linéaire des structures circulaires. Les résultats de l'élément sont comparés aux solutions analytiques et à d'autres éléments finis donnés dans la littérature. Les résultats obtenus pour l'élément SBS3D montrent que l'élément proposé est caractérisé par une très bonne performance. Il s'est avéré que le nouvel élément secteur tridimensionnel est plus précis et efficace que l'élément classique tridimensionnel basé sur le modèle en déplacement B8.

## 2.2. Formulation de l'élément SBS3D

Le présent élément SBS3D [Khi.20] a été formulé en utilisant le champ de déplacement de l'élément hexaédrique 3D à huit nœuds basé sur l'approche en déformation développé par Belarbi et Charif [Bela.99]. Les fonctions de déplacement de cet élément en termes de coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  sont données comme suit [Bela.99]:

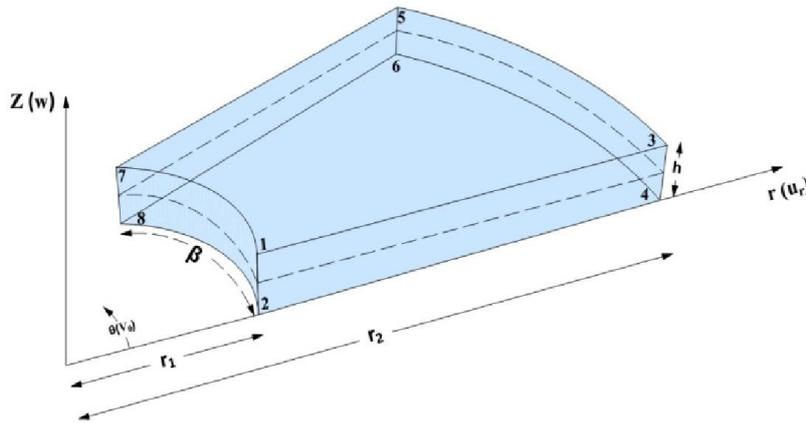
$$\begin{aligned}
 U &= a_1 + a_4 y + a_6 z + a_7 x + a_8 xy + a_9 xz + a_{10} xyz - 0.5a_{12} y^2 + 0.5a_{14} y^2 z - 0.5a_{16} z^2 \\
 &\quad - 0.5a_{18} yz^2 + 0.5a_{19} y + 0.5a_{20} yz - 0.5a_{22} yz + 0.5a_{23} z + 0.5a_{24} yz \\
 V &= a_2 - a_4 x - a_5 z - 0.5a_8 x^2 + 0.5a_{10} x^2 z + a_{11} y + a_{12} xy + a_{13} yz + a_{14} xyz - 0.5a_{17} z^2 \\
 &\quad - 0.5a_{18} yz^2 + 0.5a_{19} x + 0.5a_{20} xz + 0.5a_{21} z + 0.5a_{22} xz - 0.5a_{24} xz \\
 W &= a_3 + a_5 y - a_6 x - 0.5a_9 x^2 - 0.5a_{10} x^2 y - 0.5a_{13} y^2 - 0.5a_{14} xy^2 + a_{15} z + a_{16} xz \\
 &\quad + a_{17} yz + a_{18} xyz - 0.5a_{20} xy + 0.5a_{21} y + 0.5a_{22} xy + 0.5a_{23} x + 0.5a_{24} xy
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

La formulation de l'élément SBS3D représenté sur la figure (2.1) est obtenue en transformant le champ de déplacement de l'équation (2.1) en coordonnées cylindriques ( $r$ ,  $\theta$  et  $z$ ). En remplaçant  $x$  et  $y$  par  $r$  et  $\theta$ , respectivement ( $x = r$  et  $y = \theta$ ) pour obtenir le champ des déplacements  $U_r$ ,  $V_\theta$  et  $W$ , respectivement, dans les directions radiale, circonférentielle et axiale :

$$\begin{aligned}
 U_r &= a_1 + a_4\theta + a_6z + a_7r + a_8r\theta + a_9rz + a_{10}r\theta z - 0.5a_{12}\theta^2 + 0.5a_{14}\theta^2z - 0.5a_{16}z^2 \\
 &\quad - 0.5a_{18}\theta z^2 + 0.5a_{19}\theta + 0.5a_{20}\theta z - 0.5a_{22}\theta z + 0.5a_{23}z + 0.5a_{24}\theta z \\
 V_\theta &= a_2 - a_4r - a_5z - 0.5a_8r^2 + 0.5a_{10}r^2z + a_{11}\theta + a_{12}r\theta + a_{13}\theta z + a_{14}r\theta z \\
 &\quad - 0.5a_{17}z^2 - 0.5a_{18}\theta z^2 + 0.5a_{19}r + 0.5a_{20}rz + 0.5a_{21}z + 0.5a_{22}rz - 0.5a_{24}rz \\
 W &= a_3 + a_5\theta - a_6r - 0.5a_9r^2 - 0.5a_{10}r^2\theta - 0.5a_{13}\theta^2 - 0.5a_{14}r\theta^2 + a_{15}z + a_{16}rz \\
 &\quad + a_{17}\theta z + a_{18}r\theta z - 0.5a_{20}r\theta + 0.5a_{21}\theta + 0.5a_{22}r\theta + 0.5a_{23}r + 0.5a_{24}r\theta
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Cette procédure de transformation, des coordonnées cartésiennes ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) aux coordonnées cylindriques ( $r$ ,  $\theta$ ,  $z$ ), a été utilisée par Raju et Rao [Raj.69] et Belarbi et Charif [Bela.98].

L'élément SBS3D avec trois degrés de liberté ( $U_r$ ,  $V_\theta$  et  $W$ ) au niveau de chacun des huit nœuds de coin est montré sur la figure (2.1), où  $r_1$  et  $r_2$  correspondent respectivement aux rayons interne et externe.



**Figure 2.1 :** Élément secteur SBS3D avec trois translations  $U_r$ ,  $V_\theta$  et  $W$  par nœuds.

En coordonnées cylindriques  $r$ ,  $\theta$  et  $z$ , les relations contraintes-déplacements et les équations de compatibilité sont respectivement données par les équations (1.36), (1.37) (chapitre1) :

Le champ de déformation peut être obtenu en substituant l'équation (2.2) dans l'équation (1.36) (chapitre1) :

$$\varepsilon_r = a_7 + a_8\theta + a_9z + a_{10}z\theta$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta = & \frac{1}{r}a_1 + \frac{\theta}{r}a_4 + \frac{z}{r}a_5 + a_7 + a_8\theta + a_9z + a_{10}z\theta + \frac{1}{r}a_{11} + \left(1 - \frac{\theta^2}{2r}\right)a_{12} + \frac{z}{r}a_{13} \\ & + \left(z + \frac{z\theta^2}{2r}\right)a_{14} - \frac{1}{2r}z^2a_{16} - \frac{1}{2r}z^2\theta a_{18} + \frac{\theta}{2r}a_{19} + \frac{z\theta}{2r}a_{20} - \frac{z\theta}{2r}a_{22} + \frac{z}{2r}a_{23} + \frac{z\theta}{2r}a_{24} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_z = a_{15} + a_{16}\theta + a_{17}z + a_{18}z\theta \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{r\theta} = & -\frac{1}{r}a_1 + \frac{1}{r}a_4 + \frac{z}{r}a_5 + \left(1 - \frac{1}{2}r\right)a_8 + \left(z + \frac{zr}{2}\right)a_{10} - \frac{\theta}{r}a_{11} - \frac{\theta}{r}a_{12} - \frac{z\theta}{r}a_{13} \\ & + \frac{z\theta}{r}a_{14} + \frac{z^2}{2r}a_{17} - \frac{z^2}{2r}a_{18} + \frac{1}{2r}a_{19} + \frac{z}{2r}a_{20} - \frac{z}{2r}a_{21} - \frac{z}{2r}a_{22} + \frac{z}{2r}a_{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\theta z} = & \left(\frac{1}{r} - 1\right)a_5 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2r}\right)a_{10} + \left(\theta - \frac{\theta}{r}\right)a_{13} + (r\theta - \theta)a_{14} + \left(\frac{z}{r} - z\right)a_{17} \\ & + (z - zr)a_{18} + \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2}\right)a_{20} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2r}\right)a_{21} + \left(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2}\right)a_{22} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}r\right)a_{24} \end{aligned}$$

$$\gamma_{rz} = a_{23} + a_{24}\theta$$

Les fonctions de déformation obtenues données par l'équation (2.3) pour l'élément SBS3D satisfont les équations de compatibilité (équation (1.37)).

Les déplacements et les fonctions de déformation donnés dans les équations (2.2) et (2.3) sont respectivement donnés sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix} U_r \\ V_\theta \\ W \end{Bmatrix} = [P]\{A\} \quad (2.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{r\theta} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = [Q]\{A\} \quad (2.5)$$

Où:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \theta & 0 & z & r & r\theta & rz & r\theta z & 0 & -\frac{1}{2}\theta^2 & 0 & \frac{1}{2}\theta^2 z & 0 & -\frac{1}{2}z^2 & 0 & -\frac{\theta z^2}{2} & \frac{\theta}{2} & \frac{\theta z}{2} & 0 & -\frac{\theta z}{2} & \frac{z}{2} & \frac{\theta z}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -r & -z & 0 & 0 & -\frac{1}{2}r^2 & 0 & -\frac{1}{2}r^2 z & \theta & r\theta & \theta z & r\theta z & 0 & 0 & -\frac{1}{2}z^2 & -\frac{1}{2}r^2 z & -\frac{1}{2}r & \frac{1}{2}z & \frac{1}{2}z & \frac{1}{2}z & 0 & -\frac{1}{2}z^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \theta & -r & 0 & 0 & -\frac{r}{2} & -\frac{r}{2} & \frac{\theta}{2} & 0 & 0 & -\frac{\theta}{2} & -\frac{r\theta}{2} & z & rz & \theta z & r\theta z & 0 & -\frac{r\theta}{2} & \frac{\theta}{2} & \frac{r}{2} & \frac{r}{2} & \frac{r\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \theta & z & z\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 & \frac{\theta}{r} & 0 & \frac{z}{r} & 1 & \theta & z & z\theta & \frac{1}{r} & (1-\theta^2) & \frac{z}{r} & (z+z\theta^2) & 0 & \frac{z^2}{2r} & 0 & \frac{z^2\theta}{2r} & \frac{\theta}{2r} & \frac{z\theta}{2r} & 0 & \frac{z\theta}{2r} & \frac{z}{2r} & \frac{z\theta}{2r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & \theta & r\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & \frac{1}{r} & \frac{z}{r} & 0 & 0 & 1-r & 0 & \frac{1}{2}z(r+2) & \frac{\theta}{r} & \frac{\theta}{r} & \frac{z\theta}{r} & \frac{z\theta}{r} & 0 & 0 & \frac{z^2}{2r} & \frac{z^2}{2r} & \frac{1}{2r} & \frac{z}{2r} & \frac{z}{2r} & \frac{z}{2r} & 0 & \frac{z}{2r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{r}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r}{2}(r-1) & 0 & 0 & \frac{\theta}{r}(r-1) & \theta(r-1) & 0 & 0 & \frac{z}{r}(r-1) & -z(r-1) & 0 & \frac{r}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}(r+1) & \frac{r}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \theta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

et  $\{A\} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots, a_{24}]^T$

La matrice de rigidité pour l'élément de secteur 3D est obtenue par l'expression habituelle de la méthode des éléments finis :

$$[K^e] = \int [B]^T [D][B] dV \quad (2.8)$$

$$[K^e] = [C^{-1}]^T \left[ \iiint [Q(r, \theta, z)]^T [D][Q(r, \theta, z)] r dr d\theta dz \right] [C^{-1}] \quad (2.9)$$

$$= [C^{-1}]^T [K_0][C^{-1}]$$

Où:

$$[B] = [Q][C^{-1}] \quad (2.10)$$

Avec :

$$[K_0] = [C^{-1}]^T \left[ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r [Q]^T [D][Q] \det[J] d\zeta d\eta d\zeta \right] [C^{-1}] \quad (2.11)$$

Où [Q], [D] et [J] sont respectivement les matrices de déformation, d'élasticité et le Jacobien. La matrice [K<sub>0</sub>] donnée par l'équation (2.11) est numériquement évaluée [Smi.04]. Les matrices [C] et [K<sub>0</sub>] sont données en annexe.

Pour un matériau isotrope la matrice  $[D]$  s'écrit [Smi.04]:

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

### 2.3. Validation numérique

Le but de cette partie est de montrer l'intérêt du modèle en déformation pour le calcul de structures à contours circulaires. Pour évaluer les performances du présent élément SBS3D, plusieurs exemples numériques seront traités. .

#### 2.3.1. Cylindre épais soumis à une pression interne

Le premier problème considéré est celui d'un cylindre épais soumis à une pression interne uniforme, dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure (2.2) et vu les conditions de symétrie, seul un quart du cylindre est modélisé. Les résultats obtenus pour le déplacement radial au point E ( $r = 30$  mm) sont montrés sur le tableau (2.1) et sur la figure (2.3), ce qui confirme la haute précision obtenue par l'élément secteur 3D SBS3D. Par exemple, pour un maillage 2x2 éléments, l'erreur est égale à 1,63 % de la solution analytique.

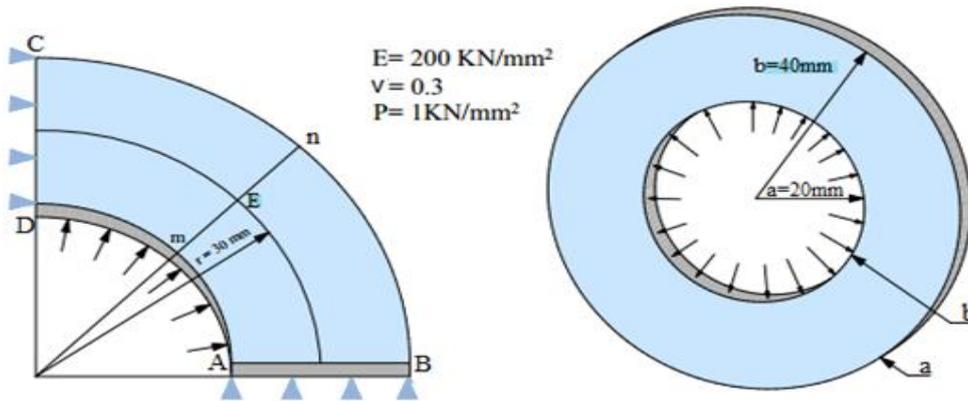


Figure 2.2 : Cylindre épais sous pression uniforme interne.

La solution analytique proposée par Timoshenko [Tim.51] pour un cylindre épais soumis à une pression interne est donnée par :

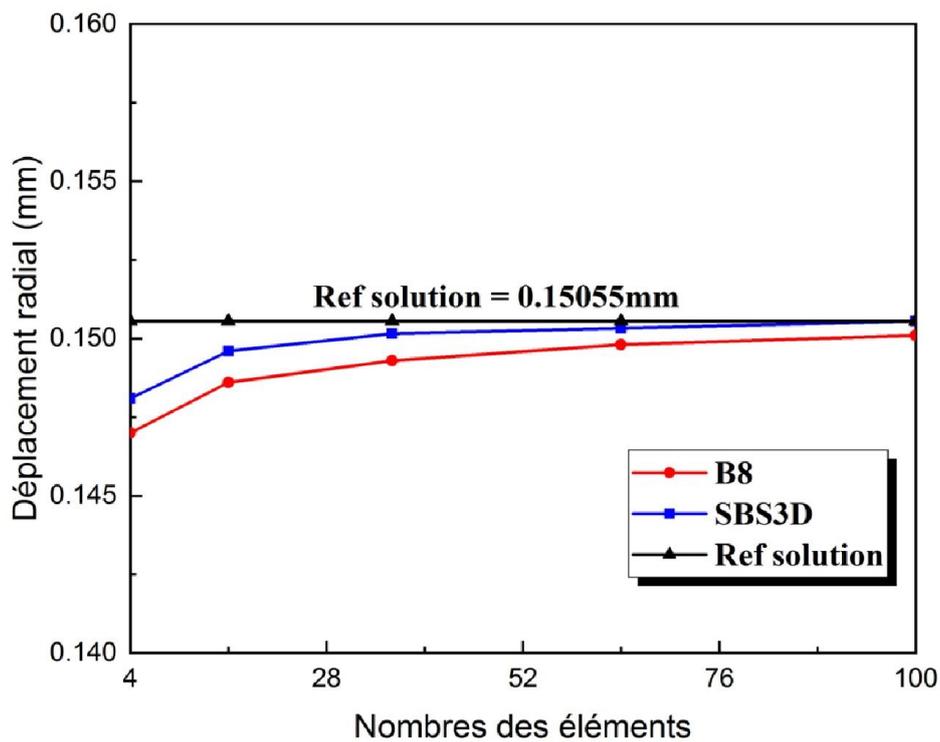
$$u_r = \frac{p_i}{E} r \left( \frac{a^2}{b^2 - a^2} (1 - \nu) + \frac{1}{r^2} \frac{a^2 b^2}{(b^2 - a^2)} (1 + \nu) \right) \quad (2.13)$$

$$\sigma_r = \frac{p_i a^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_i a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} \quad (2.14)$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_i a^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_i a^2 b^2}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} \quad (2.15)$$

**Tableau 2.1:** Les déplacements radiaux pour un cylindre épais sous une pression interne uniforme

| maillage            | SBS3D   | B8     |
|---------------------|---------|--------|
| 2x2                 | 0.1481  | 0.1470 |
| 4x4                 | 0.14960 | 0.1486 |
| 6x6                 | 0.15015 | 0.1493 |
| 8x8                 | 0.15032 | 0.1498 |
| 10x10               | 0.15055 | 0.1501 |
| Solution analytique | 0.15055 |        |

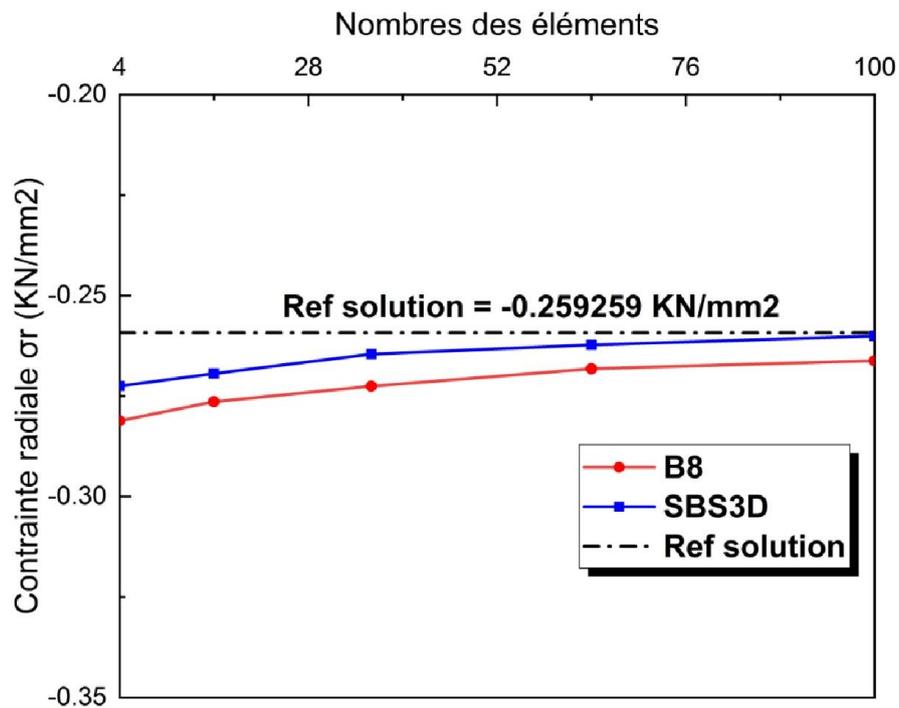


**Figure 2.3 :** Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) en E ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression interne

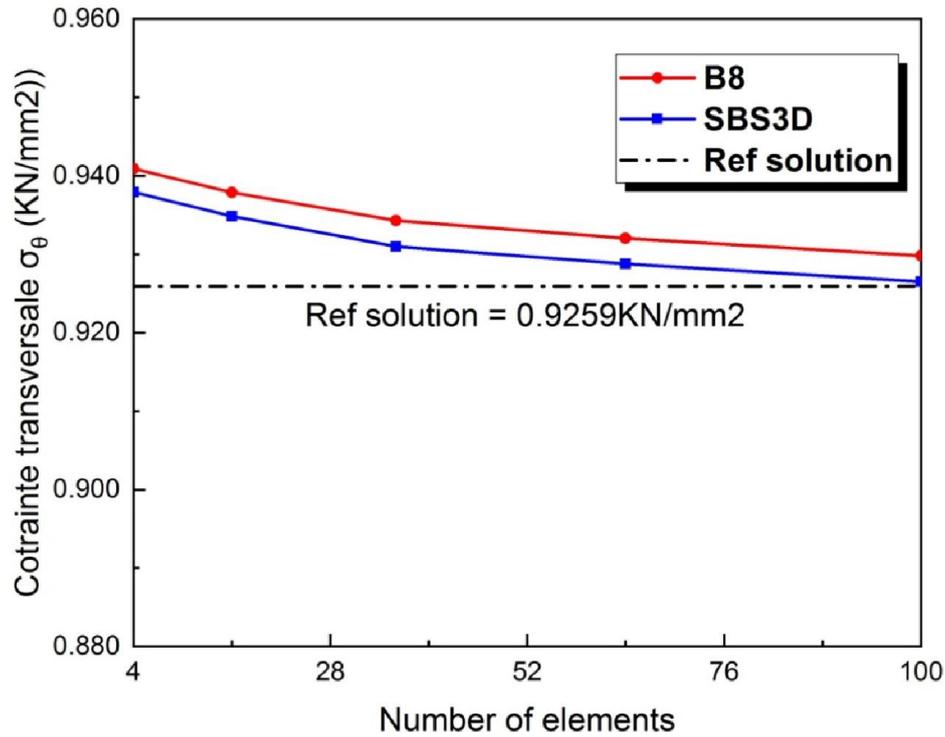
En outre, les résultats obtenus pour les contraintes radiales et transversales au point E ( $r = 30\text{ mm}$ ) présentés sur le tableau (2.2) et (2.3) et sur les figures (2.4) et (2.5), sont satisfaisants et convergent vers la solution théorique à mesure que le nombre d'éléments augmente.

**Tableau 2.2:** Les contraintes radiales pour un cylindre épais sous une pression interne uniforme

| Maillage               | SBS3D             | B8        |
|------------------------|-------------------|-----------|
| 2x2                    | - 0.27250         | - 0.28115 |
| 4x4                    | - 0.27140         | - 0.2764  |
| 6x6                    | - 0.26455         | - 0.27253 |
| 8x8                    | - 0.26225         | - 0.2682  |
| 10x10                  | - 0.26005         | - 0.2662  |
| <b>Solution exacte</b> | <b>- 0.259259</b> |           |

**Figure 2.4 :** Convergence de la contrainte radiale ( $\sigma_r$ ) en E ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression interne**Tableau 2.3:** Les contraintes transversales pour un cylindre épais sous une pression interne uniforme

| Maillage               | SBS3D          | B8      |
|------------------------|----------------|---------|
| 2x2                    | 0.93792        | 0.94092 |
| 4x4                    | 0.93785        | 0.93785 |
| 6x6                    | 0.93100        | 0.9343  |
| 8x8                    | 0.92875        | 0.93205 |
| 10x10                  | 0.92650        | 0.9298  |
| <b>Solution exacte</b> | <b>0.92590</b> |         |

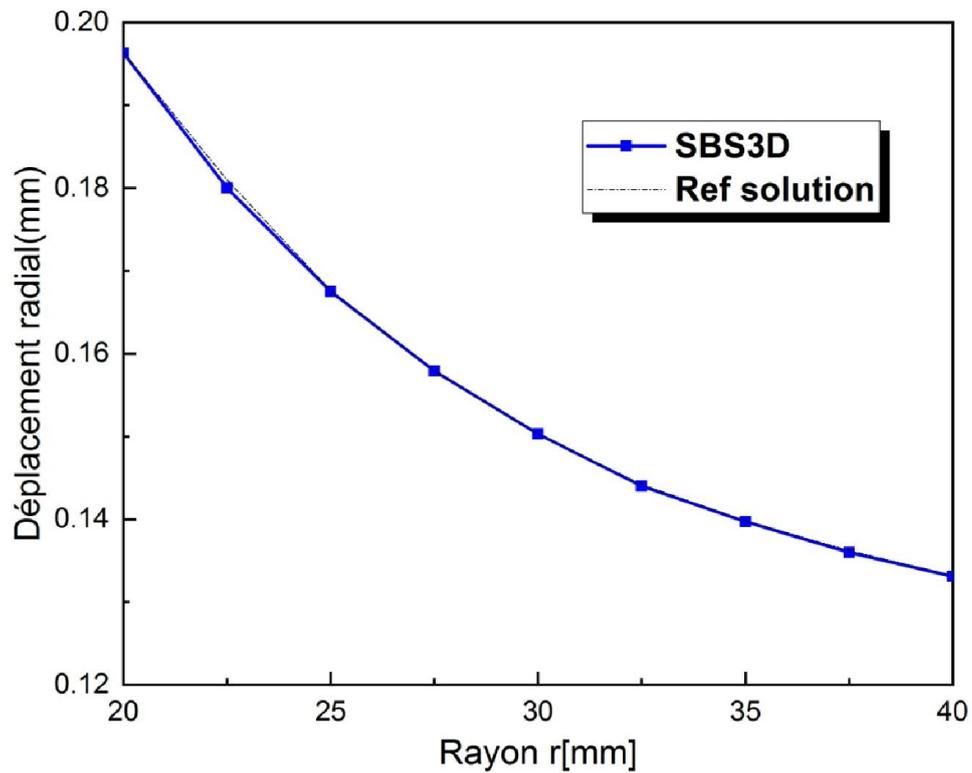


**Figure 2.5 :** Convergence de la contrainte transversale ( $\sigma_\theta$ ) en E ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression interne

Les variations du déplacement radial ( $U_r$ ), des contraintes radiale ( $\sigma_r$ ) et transversale ( $\sigma_\theta$ ) sur une section ( $m, n$ ) sont montrées sur les tableaux (2.4), (2.5) et (2.6) et sur les figures (2.6), (2.7) et (2.8). Les valeurs obtenues par l'élément développé SBS3D sont comparées à la solution analytique.

**Tableau 2.4:** déplacement radial  $U_r$  le long d'une section droite ( $m, n$ ) avec un maillage (10x10)

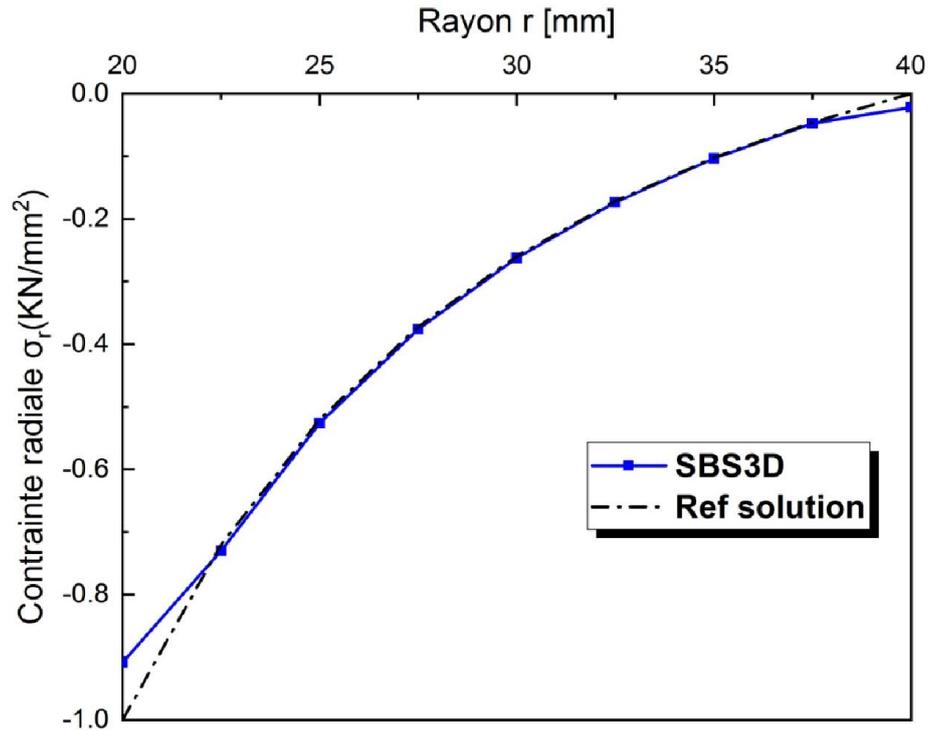
| Rayon (mm) | SBS3D  | Solution exacte |
|------------|--------|-----------------|
| 20         | 0.1953 | 0.1966          |
| 22.5       | 0.1788 | 0.18032         |
| 25         | 0.1660 | 0.1678          |
| 27.5       | 0.1570 | 0.1581          |
| 30         | 0.1505 | 0.15055         |
| 32.5       | 0.1436 | 0.1446          |
| 35         | 0.1388 | 0.1399          |
| 37.5       | 0.1355 | 0.1362          |
| 40         | 0.1330 | 0.1333          |



**Figure 2.6 :** Variation du déplacement radial le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous une pression interne

**Tableau 2.5:** Variation de la contrainte radiale  $\sigma_r$  le long d'une section droite (m, n) avec un maillage (10x10)

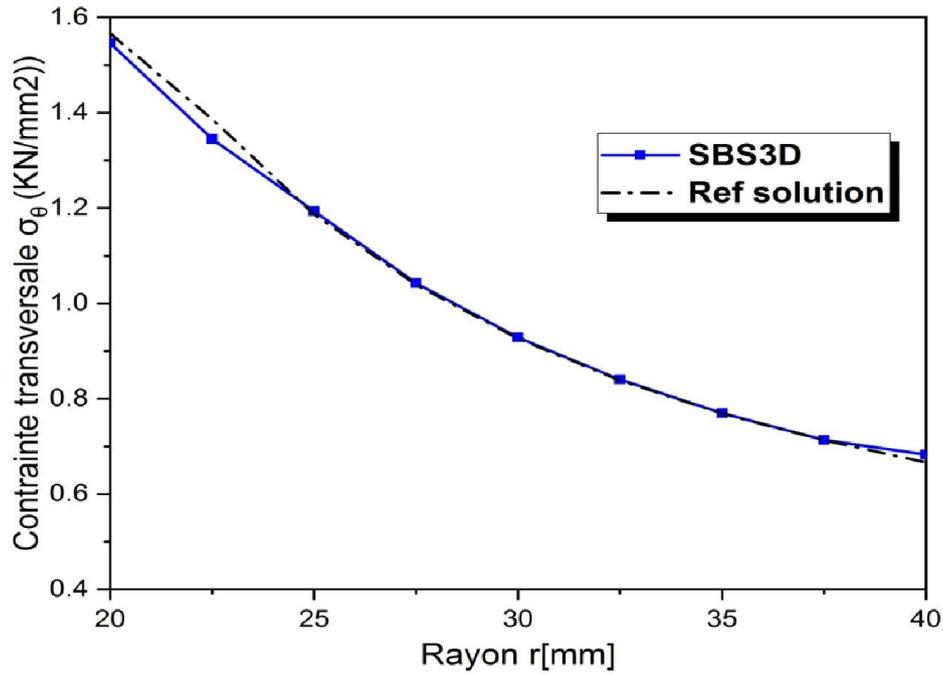
| Rayon(mm) | SBS3D     | Solution exacte |
|-----------|-----------|-----------------|
| 20        | -0.9079   | -1              |
| 22.5      | -0.73     | -0.7202         |
| 25        | -0.5263   | -0.52           |
| 27.5      | -0.37615  | -0.3719         |
| 30        | -0.26225  | -0.25925        |
| 32.5      | -0.17375  | -0.1716         |
| 35        | -0.10365  | -0.10204        |
| 37.5      | -0.047175 | -0.045926       |
| 40        | -0.02185  | 0               |



**Figure 2.7 :** Variation de la contrainte radiale  $\sigma_r$  le long d'une section droite (m, n) pour un cylindre sous une pression interne.

**Tableau 2.6:** Variation de la contrainte transversale  $\sigma_\theta$  le long d'une section droite (m, n) avec un maillage (10x10)

| Rayon (mm) | SBS3D   | Solution exacte |
|------------|---------|-----------------|
| 20         | 1.576   | 1.667           |
| 22.5       | 1.345   | 1.3868          |
| 25         | 1.1935  | 1.18667         |
| 27.5       | 1.0427  | 1.03857         |
| 30         | 0.92875 | 0.925925        |
| 32.5       | 0.8401  | 0.838264        |
| 35         | 0.76985 | 0.768707        |
| 37.5       | 0.71325 | 0.7126          |
| 40         | 0.6879  | 0.6667          |



**Figure 2.8:** Variation de la contrainte transversale  $\sigma_\theta$  le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous une pression interne

### 2.3.2. Cylindre épais soumis à une pression externe

Les propriétés mécaniques sont les mêmes que celles qui ont été prises pour l'élément SBS3D au (chapitre 2). La solution analytique pour un cylindre épais soumis à une pression externe est donnée comme suit [Tim.51] :

$$u_r = \frac{r}{E} \left( (1-\nu)A + (1+\nu)\frac{B}{r^2} \right) \quad (2.15)$$

Avec :

$$A = -\frac{p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}, \quad B = A R_i^2 \quad (2.16)$$

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \quad (2.17)$$

$$\sigma_\theta = A + \frac{B}{r^2} \quad (2.18)$$

Les convergences du déplacement radial ( $U_r$ ), des contraintes radiales ( $\sigma_r$ ) et transversales ( $\sigma_\theta$ ) au point E ( $r = 30$  mm), sont présentées sur les figures (2.9), (2.10) et (2.11) pour différents maillages.

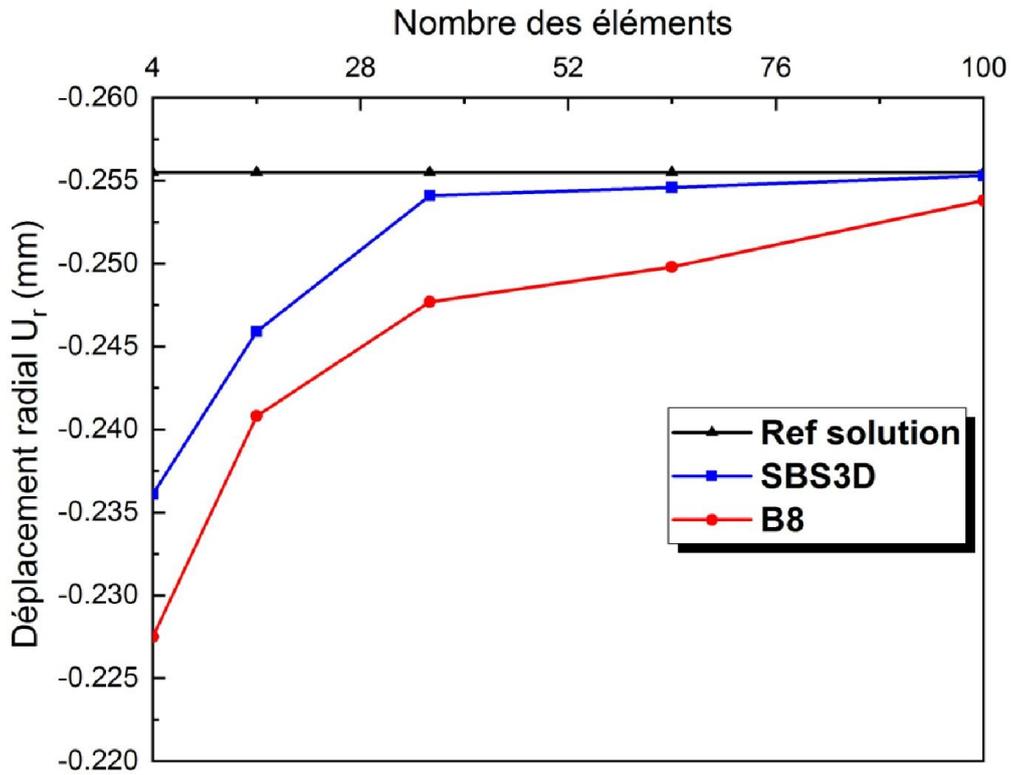


Figure 2.9 : Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) en E ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression externe

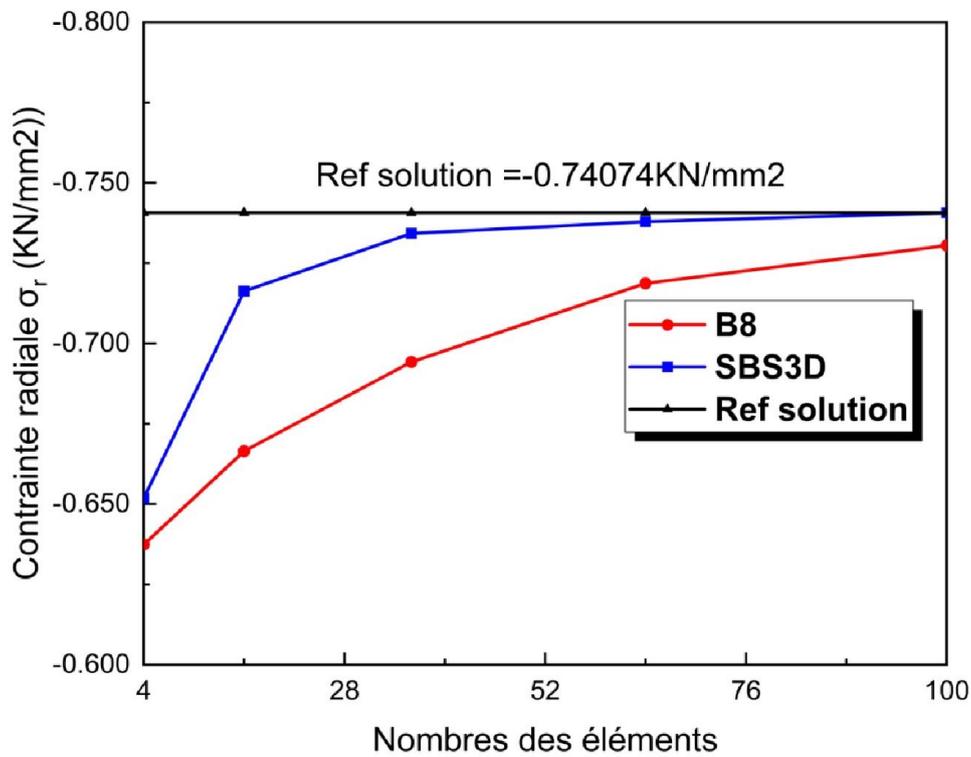


Figure 2.10 : Convergence de la contrainte radiale ( $\sigma_r$ ) en E ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression externe

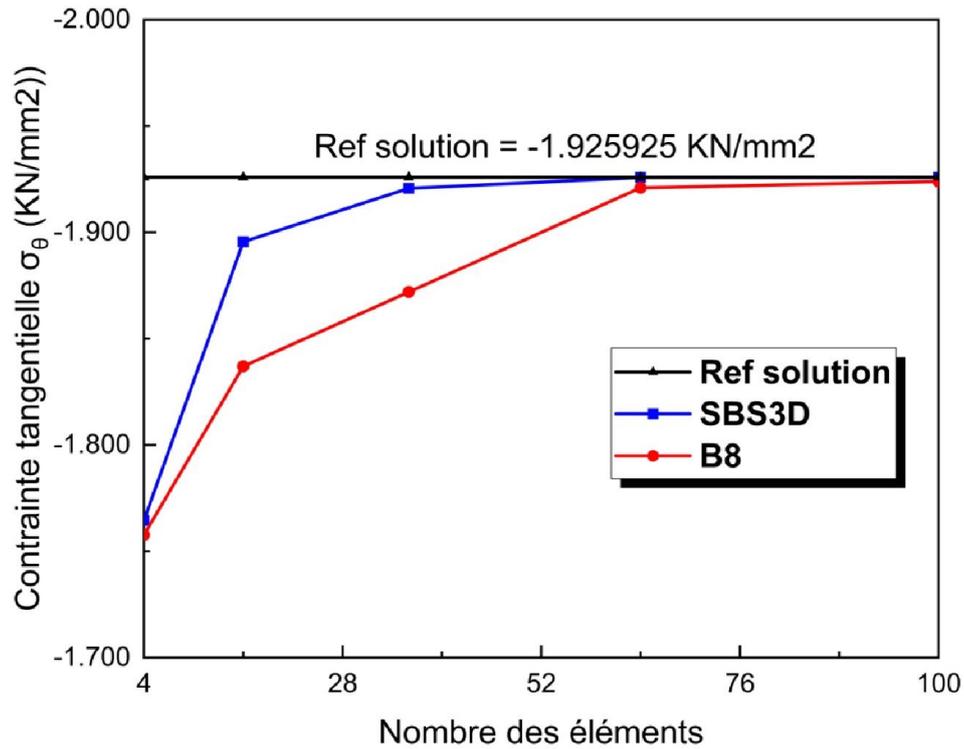


Figure 2.11 : Convergence de la contrainte transversale ( $\sigma_\theta$ ) en E ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression externe

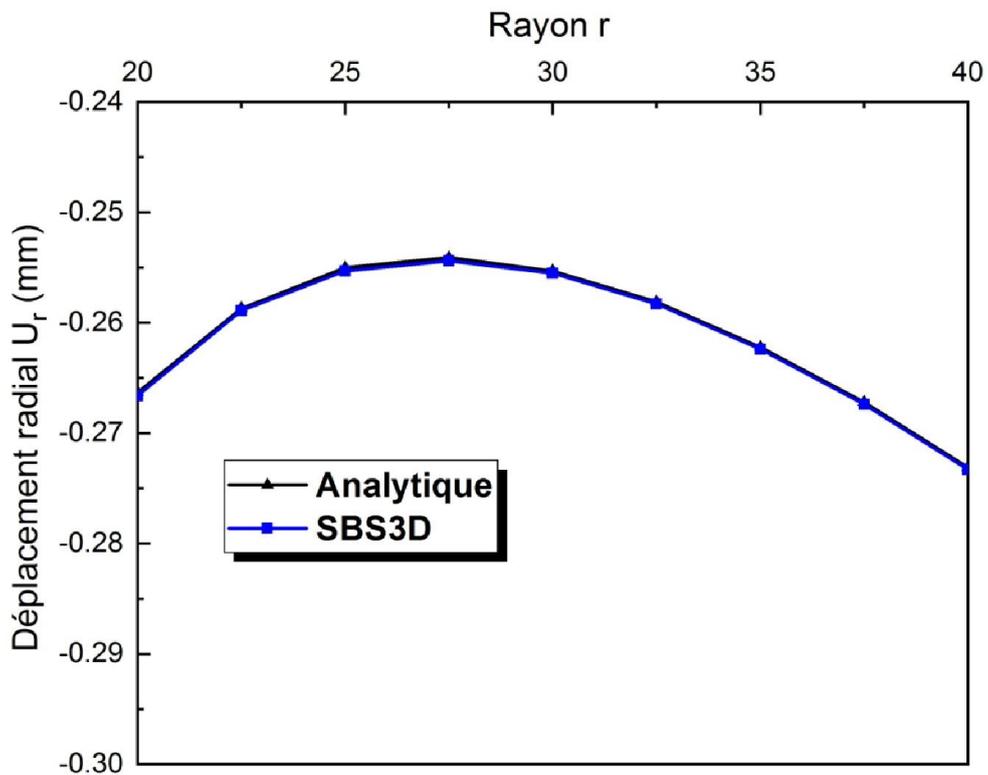
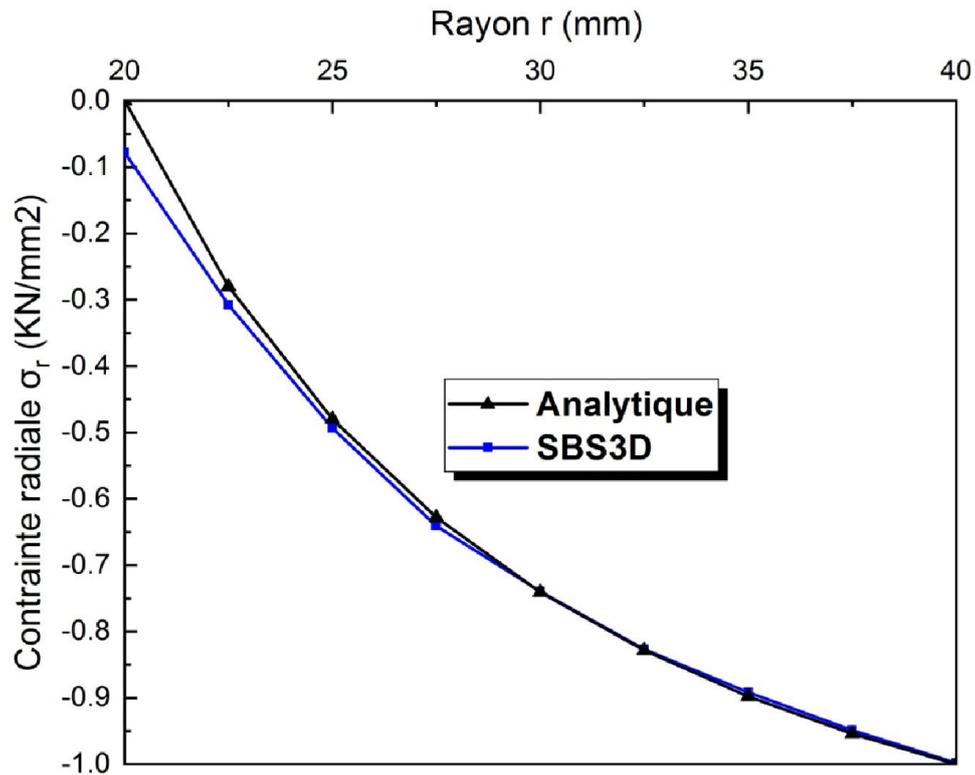
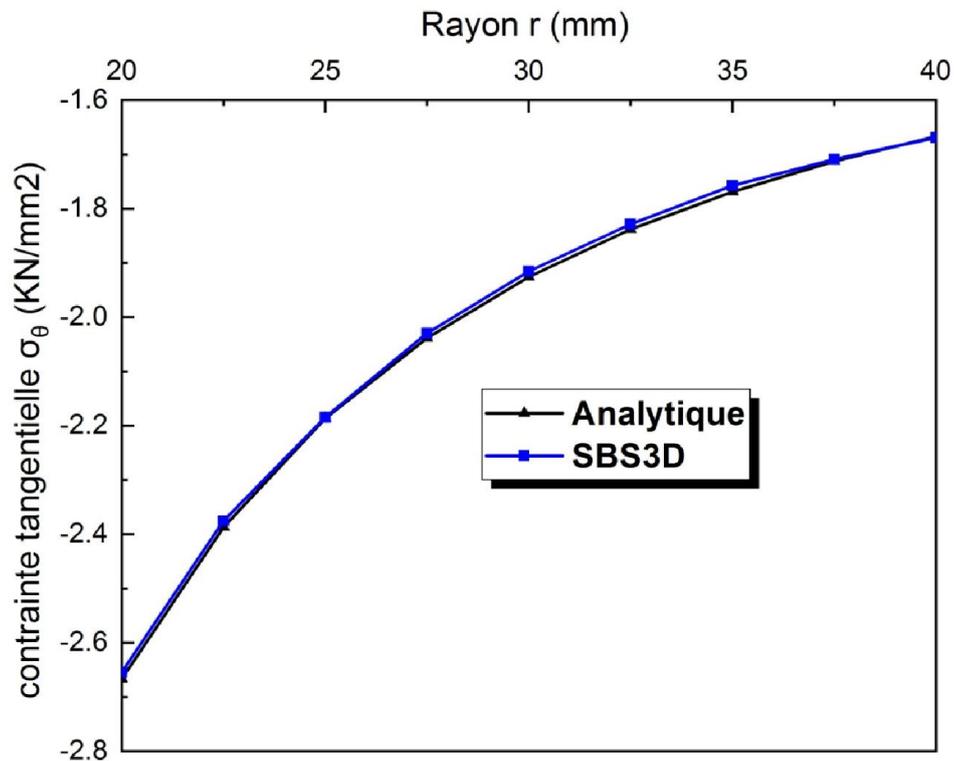


Figure 2.12 : Variation du déplacement radial le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous une pression externe avec un maillage (10x10)



**Figure 2.13 :** Variation de la contrainte radiale  $\sigma_r$  le long d'une section droite (m, n) pour un cylindre sous une pression externe avec un maillage (10x10)



**Figure 2.14:** Variation de la contrainte transversale  $\sigma_\theta$  le long d'une section droite 'mn' pour un cylindre sous une pression externe avec un maillage (10x10)

Le problème du cylindre épais soumis à des différents cas de chargements est l'un des problèmes les plus instructifs pour les structures à contour circulaire, les résultats obtenus pour les déplacements radiaux au point E ( $r = 30$  mm) sont présentés sur le tableau (2.1) et sur la figure (2.3), ils montrent :

La bonne convergence vers la solution théorique du problème considéré et confirment la bonne performance de l'élément secteur SBS3D par rapport à l'élément classique basé sur l'approche en déplacement B8 qui donne des résultats acceptables et s'améliore avec un maillage raffiné, la variation du déplacement radial est très proche avec la solution analytique, par exemple pour un maillage  $2 \times 2$  éléments, l'erreur est égale à 1,63 % de la solution analytique.

Pour les contraintes radiales et transversales, les résultats obtenus sont montrés sur les tableaux (2.2) et (2.3) et sur les figures (2.4) et (2.5), l'élément SBS3D donne des valeurs presque identiques à la solution théorique, contrairement à l'élément B8 qui donne des résultats moins satisfaisants mais qui peuvent être améliorés si on raffine le maillage.

On a étudié aussi les variations des contraintes radiales et transversales le long d'une section ( $m, n$ ) pour l'élément SBS3D où les résultats sont comparés avec la solution exacte, ces résultats montrent un accord assez proche avec la solution analytique pour les différentes composantes de contraintes.

### 2.3.3. Plaque annulaire soumise à une charge ponctuelle latérale

Le problème considéré ici est celui d'une plaque annulaire encadrée le long du bord intérieur ( $r_1 = b$ ) [Ols.70], soumise à une force latérale (direction  $z$ ) au niveau du bord extérieur ( $r_2 = a$ ) (voir Figure 2.15), par raison de la symétrie, seule la moitié de la plaque sera analysée. La solution analytique pour ce cas est donnée par Timoshenko et Woinowsky-Kieger [Tim.59] avec les propriétés géométriques et mécaniques suivantes :  $a = 1,0$  ;  $b = 1,5$  et  $\nu = 0,3$ . Les résultats obtenus pour le déplacement latéral ( $w$ ) sous la charge concentrée, sont donnés dans le tableau (2.7) et la courbe de convergence est présentée sur la figure (2.16).

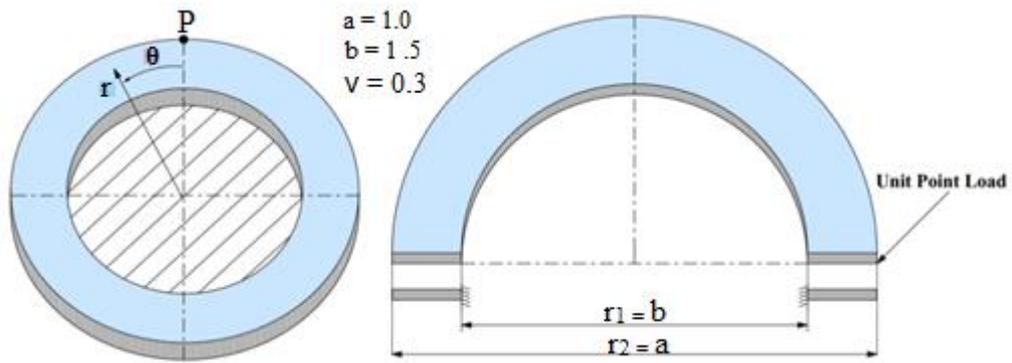


Figure 2.15 : Plaque annulaire soumise à une charge ponctuelle latérale.

Tableau 2.7: Le déplacement latéral W sous la charge ponctuelle.

| Maillage                   | Olson's élément [Ols.70] | SBS3D   |
|----------------------------|--------------------------|---------|
| 1x6                        | 0.050896                 | 0.02707 |
| 2x8                        | 0.051456                 | 0.04204 |
| 2x12                       | 0.051372                 | 0.04562 |
| 3x12                       | 0.051372                 | 0.04823 |
| 3x18                       | 0.051027                 | 0.05067 |
| <b>Solution analytique</b> | 0.0507180                |         |

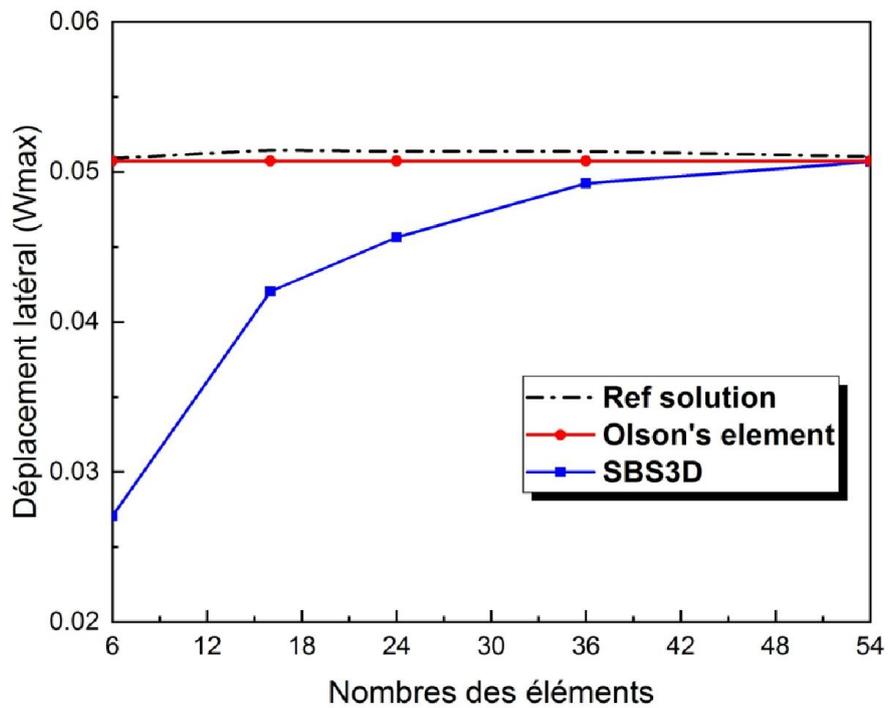


Figure 2.16 : Courbe de convergence du déplacement W sous la charge ponctuelle pour la plaque annulaire en console

D'après les résultats obtenus (voir le tableau 2.7), il convient de noter que lors de l'analyse de ce problème avec un maillage (3x12) pour les deux éléments, l'erreur est environ de 1,29 % pour l'élément d'Olson et de 4,81 % pour le présent élément (**SBS3D**). Cependant, pour un maillage (3x18), le présent élément (**SBS3D**) présente une très bonne performance, l'erreur étant réduite à 0,095 % et l'élément d'Olson, à 0,61%. La figure (2.16) montre que l'élément d'Olson converge rapidement vers la solution analytique même pour un maillage grossier, contrairement à l'élément présenté, mais lorsqu'on raffine le maillage le présent élément donne un bon résultat, à titre d'exemple pour un maillage de 54 éléments, l'erreur est moins de 0,095%.

### 2.3.4. Cylindre à paroi épaisse soumis à une pression interne

Pour étudier le comportement de l'élément présenté pour l'analyse des matériaux presque incompressibles, un cylindre à paroi épaisse soumis à une pression interne, traité par Choi [Cho.06] et Cheung [Cheu.00], sera examiné. Ce test permet également d'étudier le phénomène de verrouillage des éléments. Les caractéristiques mécaniques et géométriques sont présentées dans la figure (2.17). En raison de la symétrie, seul un quart du cylindre sera analysé en considérant le problème en déformation plane. La valeur du coefficient de Poisson est prise égale à 0,3; 0,49 ; 0,499 et 0,4999. Les résultats obtenus pour le déplacement radial de la paroi interne présentée dans le tableau (2.8) montrent que l'élément développé est libre de tous verrouillages de Poisson, contrairement aux autres éléments (B8 et Q4) qui souffrent de ce type de blocage.

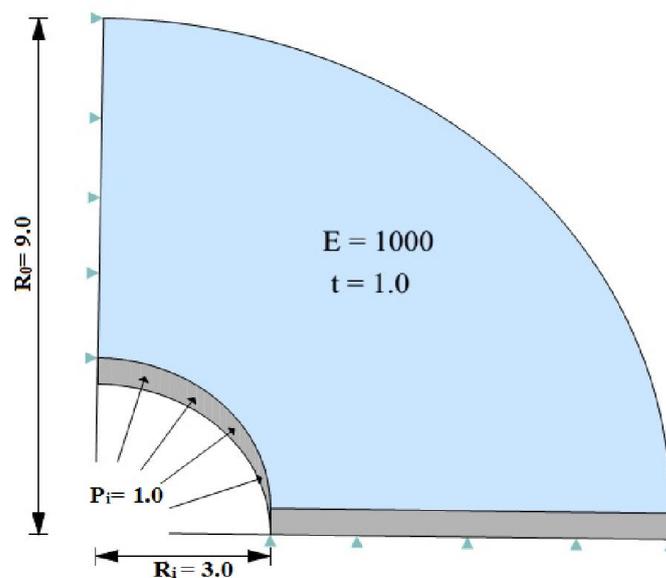


Figure 2.17 : Cylindre à paroi épaisse soumis à une pression interne.

**Tableau 2.8:** Déplacement vertical normalisé d'un cylindre épais sous pression interne.

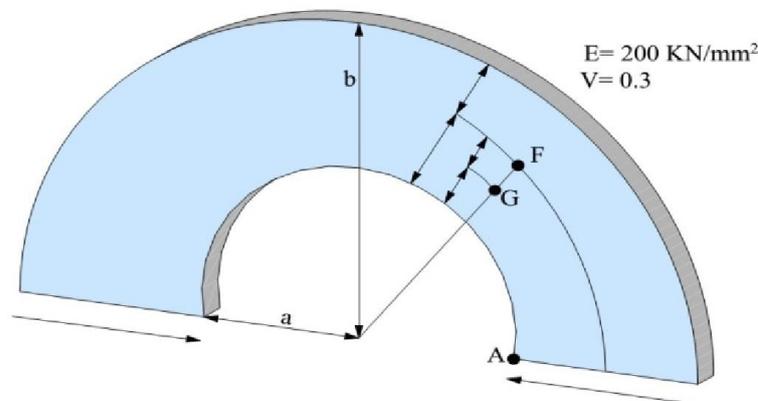
| Coefficient de Poisson | B8    | Q4    | SBS3D  | Exact( $10^{-3}$ ) |
|------------------------|-------|-------|--------|--------------------|
| 0.3                    | 0.987 | 0.978 | 0.9909 | 4.5825             |
| 0.49                   | 0.877 | 0.738 | 0.996  | 5.0399             |
| 0.499                  | 0.796 | 0.224 | 0.997  | 5.0602             |
| 0.4999                 | 0.532 | 0.028 | 0.997  | 5.0623             |

### 2.3.5. Plaque annulaire soumise à une force de cisaillement

Soit une plaque annulaire semi-circulaire, de module de Young  $E=200$  et de coefficient de Poisson  $\nu=0.3$ , représentée sur la figure (2.18) soumise à deux forces de cisaillement appliquées à l'extrémité libre dans la direction radiale. Les forces sont supposées uniformément réparties le long des deux lignes radiales horizontales. Les résultats du déplacement radial obtenus sont présentés pour un nombre différent de rapports  $b/a = 3 ; 2$  et  $1,3$ . En raison de la symétrie, seule la moitié de la plaque est analysée. Les résultats du déplacement radial, ainsi que les contraintes, peuvent être comparés à la solution analytique d'élasticité donnée par Timoshenko et Goodier [Tim.51] et à l'élément classique basé sur le modèle en déplacement B8.

La solution analytique donnant le déplacement radial est donnée par Timoshenko et al [Tim.51] :

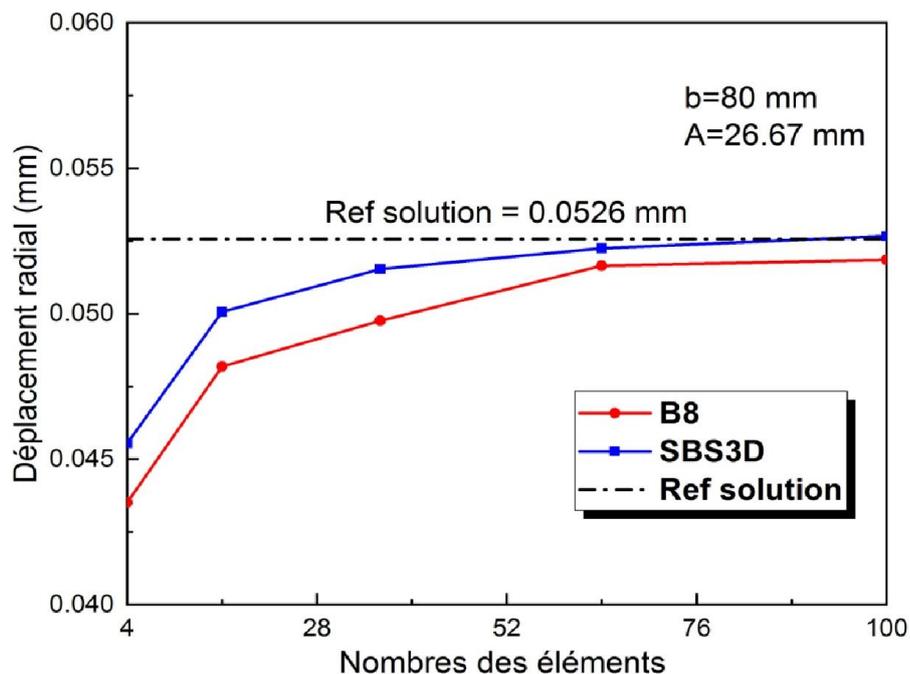
$$u_r = \frac{P\pi(a^2 + b^2)}{E \left[ (a^2 - b^2) + (a^2 + b^2) \log \frac{b}{a} \right]} \quad (2.19)$$

**Figure 2.18 :** Plaque annulaire soumise au cisaillement radial.

Les figures (2.19), (2.20) et (2.21) montrent la convergence pour le déplacement radial au point «A» pour  $b/a = 3$ ; 2 et 1,3, respectivement. Ces courbes sont obtenues lorsque le même nombre d'éléments est utilisé dans la direction radiale et circonférentielle. À partir des résultats obtenus, on peut noter que les résultats donnés par le présent élément (SBS3D) convergent rapidement vers la solution analytique à partir d'un maillage de 16 éléments et reste stable jusqu'à un maillage de 100 éléments (en pourcentage 1.001). La figure (2.22) montre la convergence des contraintes radiales au point "F" (voir la Fig. 1.18) dans le cas où  $b/a = 2$ . On a constaté que cet élément donnait de meilleurs résultats pour les contraintes radiales même lorsqu'un maillage grossier est utilisé.

**Tableau 2.9:** Les déplacements radiaux ( $U_r$ ) pour la plaque annulaire soumise au cisaillement radial pour les différents rapports  $b/a = 3, 2$  et 1,3.

| Maillage               | $b/a = 3$      |         | $b/a = 2$     |        | $b/a = 1.3$  |       |
|------------------------|----------------|---------|---------------|--------|--------------|-------|
|                        | SBS3D          | B8      | SBS3D         | B8     | SBS3D        | B8    |
| 2x2                    | 0.04555        | 0.04351 | 0.1456        | 0.1363 | 2.314        | 2.125 |
| 4x4                    | 0.05006        | 0.04819 | 0.1603        | 0.1538 | 2.432        | 2.333 |
| 6x6                    | 0.05154        | 0.04976 | 0.1633        | 0.1570 | 2.548        | 2.426 |
| 8x8                    | 0.05225        | 0.05165 | 0.1668        | 0.1623 | 2.591        | 2.519 |
| 10x10                  | 0.05258        | 0.05185 | 0.1679        | 0.1637 | 2.632        | 2.592 |
| <b>Solution exacte</b> | <b>0.05260</b> |         | <b>0.1686</b> |        | <b>2.681</b> |       |



**Figure 2.19 :** Convergence du déplacement radial au point A pour  $b/a=3$ .

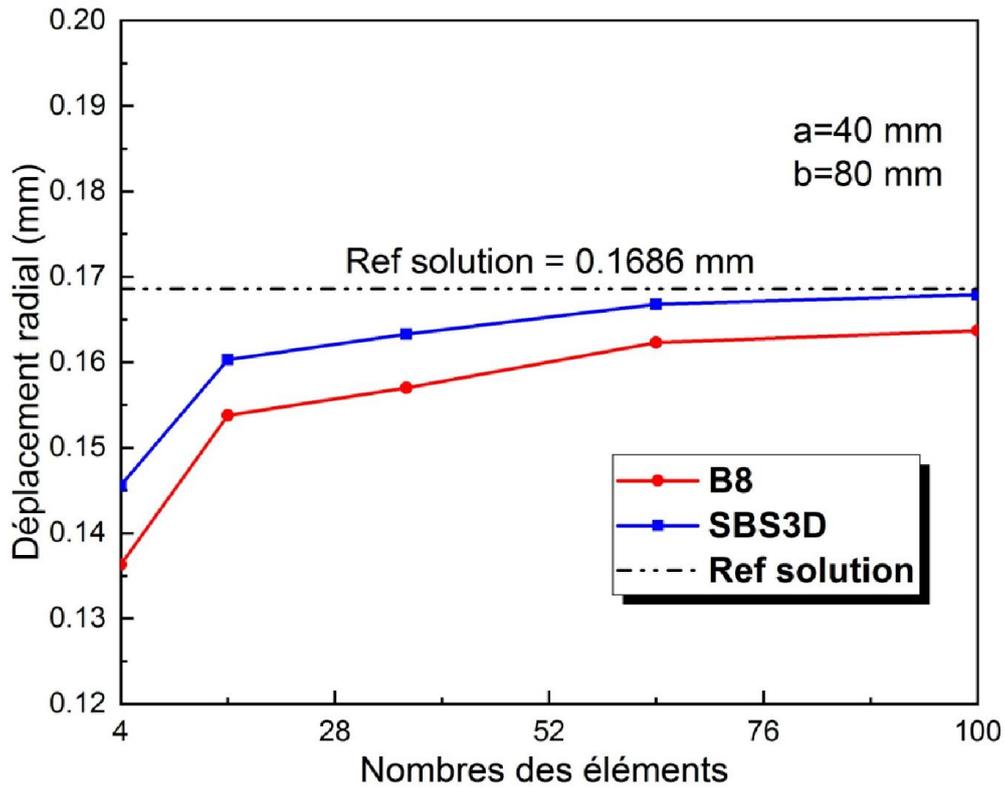


Figure 2.20 : Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) au point A pour  $b/a = 2$ .

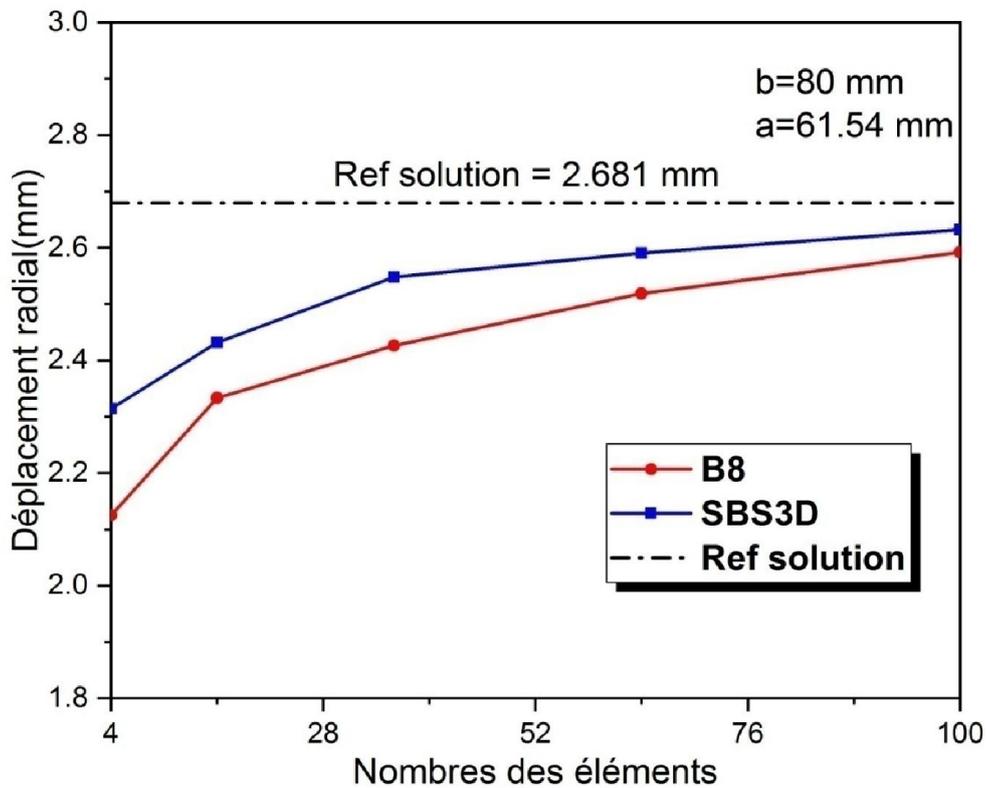


Figure 2.21 : Convergence du déplacement radial au point A pour  $b/a = 1,3$ .

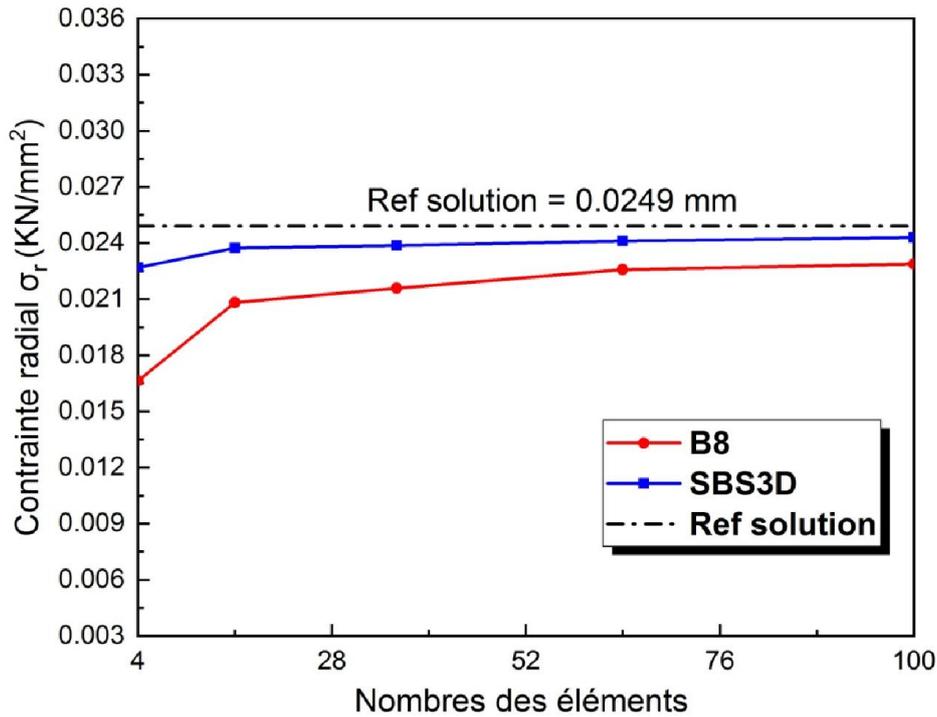


Figure 2.22 : Convergence de la contrainte radiale ( $\sigma_r$ ) au point F pour  $b/a=2$ .

### 2.3.6. Cylindre en béton non armé sous une pression d'eau externe

Le présent élément est également testé dans un cylindre en béton non armé soumis à une pression d'eau externe (figure 2.23). Le cylindre analysé faisait partie d'un programme d'essais expérimental mené au laboratoire de génie civil naval, Californie, où 15 cylindres en béton non armé ont été placés dans un navire sous pression externe jusqu'à explosion. Les résultats expérimentaux ont été rapportés par Runge et Haynes [Run.78]. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées à la figure (2.23).

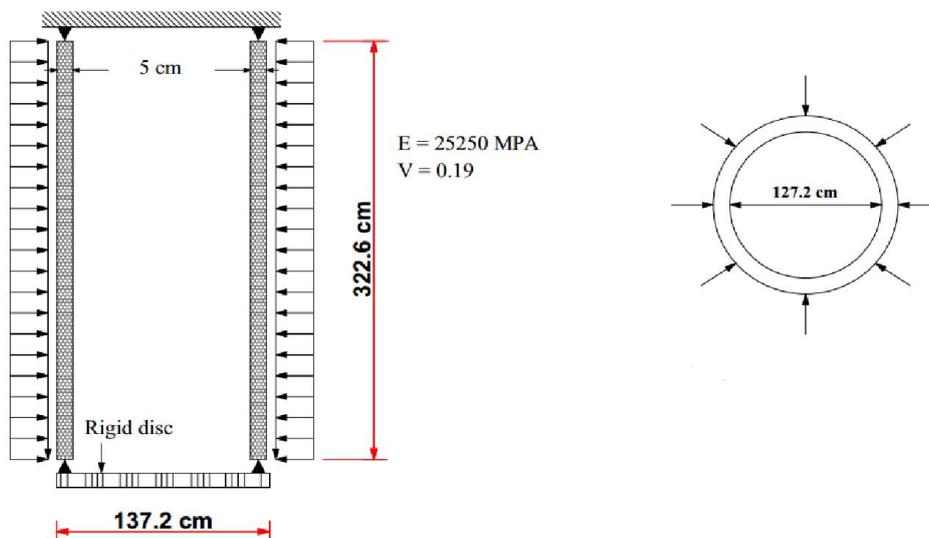
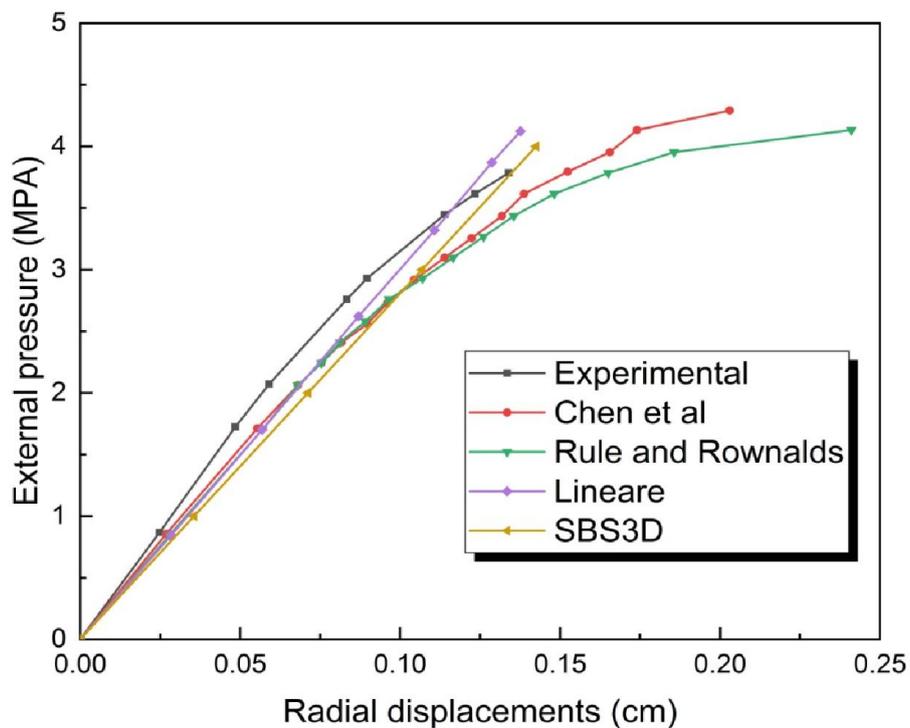


Figure 2.23: Cylindre non renforcé sous pression d'eau externe.

Les résultats pour le déplacement radial à mi-longueur du cylindre sont présentés sur la figure (2.24). Des incréments de charge de pression externe de 0,172 MPa ont été utilisés dans l'analyse. La figure (2.24) montre les résultats obtenus par Chen et al. [Chen.80], Rule et Rowlands [Rul.86], [Rul.89], les valeurs expérimentales publiées par Runge et Haynes [Run.78] et celles obtenues dans cette étude. La pression d'implosion moyenne de l'échantillon, déterminée expérimentalement, était de 3,79 MPa. La plus grande charge que le cylindre pourrait supporter comme prévu par le programme des éléments finis est de 4,14 MPa. Cette valeur est à moins de dix pour cent de la moyenne mesurée. C'est une précision acceptable à des fins d'ingénierie. L'élément SBS3D produit des valeurs acceptables vis-à-vis les valeurs expérimentales et d'autres valeurs utilisé par les ingénieurs.



**Figure 2.24 :** Pression appliquée en fonction des déplacements radiaux à mi-longueur avec un maillage (2x2).

### 2.3.7. Poutre console circulaire épaisse sous une force de cisaillement

Ce test concerne une poutre circulaire épaisse soumise à une force de cisaillement  $F$  à son extrémité libre (figure 2.25) et modélisée avec différents types de maillage [Zou.16]. Les résultats du déplacement vertical au point A sont illustrés sur la figure (2.26) et comparés avec l'élément B8 à champ de déplacement. Pour un maillage grossier les deux éléments sont loin de la solution analytique, mais, lorsqu'on raffine le maillage leurs résultats s'améliorent mais l'élément proposé donne des résultats meilleurs que l'élément B8

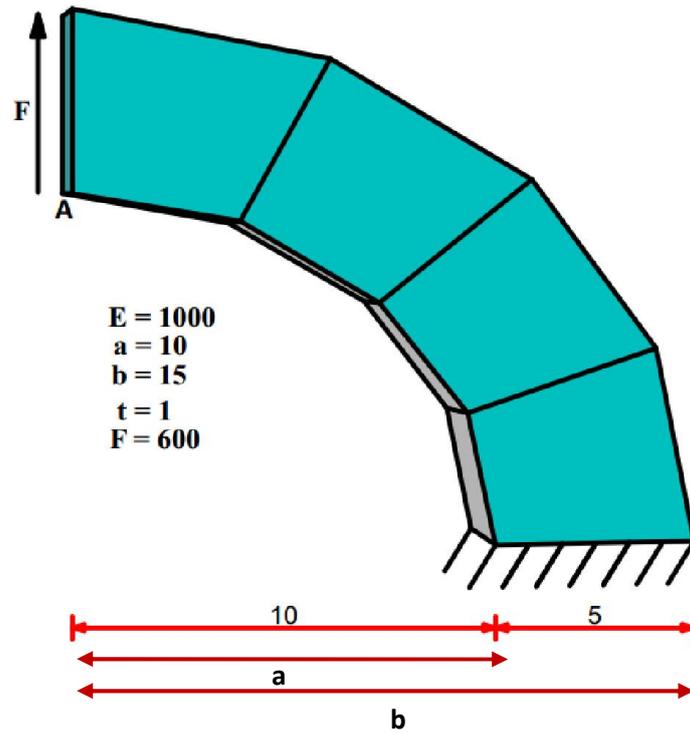


Figure 2.25: Poutre console circulaire épaisse modélisée avec (4x1) éléments.

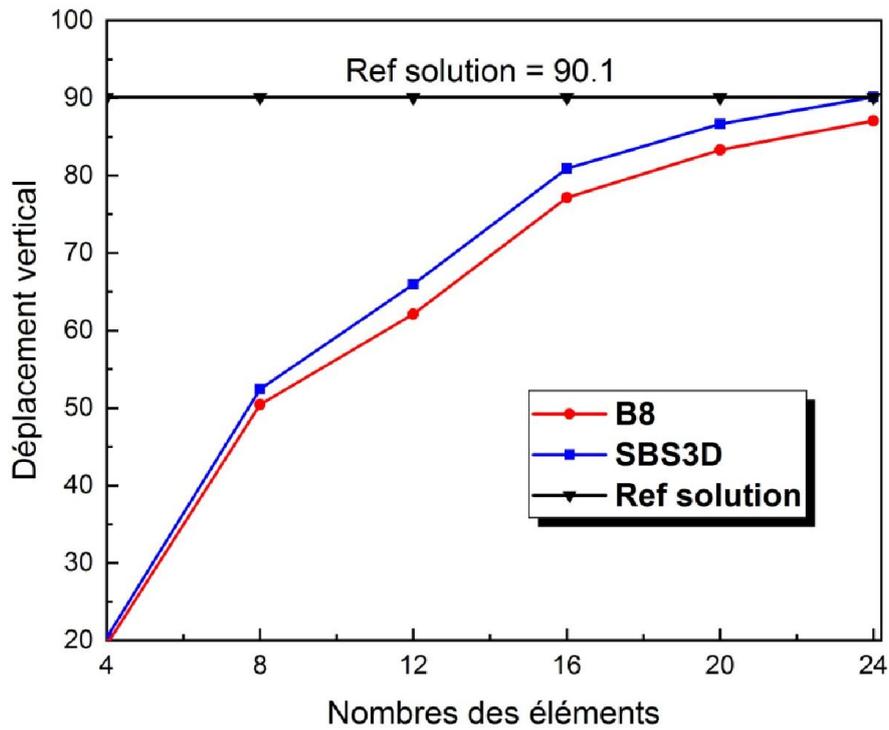


Figure 2.26: Convergence du déplacement vertical au point A d'une poutre console circulaire épaisse.

## 2.4. Conclusions

Dans ce chapitre, un nouvel élément secteur tridimensionnel (SBS3D), basé sur l'approche en déformation avec huit nœuds et trois degrés de liberté par nœud ( $U_r, V_\theta, W$ ), est proposé pour l'analyse linéaire des structures circulaires, la matrice de rigidité a été obtenue numériquement. Une série d'exemples numériques a été étudiée pour évaluer l'efficacité de l'élément proposé. Les résultats numériques de cet élément sont comparés à des solutions théoriques et à d'autres solutions numériques. Le présent élément (SBS3D) a montré de bonnes performances et une convergence rapide vers les solutions théoriques pour tous les tests proposés. De plus, on peut constater que le présent élément est libre de tous verrouillages par Poisson contrairement à l'élément classique B8 basé sur le modèle en déplacement qui souffre de ce type de blocage.

## **Chapitre 3**

# **FORMULATION D'UN ELEMENT SECTEUR MEMBRANAIRE A 4 NOEUDS**

# Chapitre 3

## Formulation d'un élément secteur membranaire à 4 nœuds

### 3.1. INTRODUCTION

En 1972 Ashwell et Sabir [Ash.72] ont appliqué l'approche en déformation pour le développement de champ de déplacement pour une nouvelle classe d'éléments finis pour les problèmes d'élasticité plane. Plusieurs de ces éléments rectangulaires ont été développés, notamment l'élément rectangulaire basé sur la variation linéaire des déformations directes et une déformation à cisaillement constant [Sab.83a]. Cet élément possède uniquement les deux degrés de liberté essentiels à chacun des quatre nœuds de coin (U, V), et il a été démontré qu'il produisait des résultats convergents lorsqu'il était appliqué à plusieurs problèmes sans faire appel à un grand nombre d'éléments. Cet élément est appelé SBRIE (Strain Based Rectangular In-plane Element).

Il a été démontré que la deuxième version du dernier élément, appelée SBRIEE (Strain Based Rectangular In-plane Element with Equilibrium), satisfaisant l'équilibre au niveau des éléments, s'est avéré produire une convergence encore plus rapide. Plusieurs variantes du SBRIE suggérées également par Sabir et Sfindji [Sab.95] ont été utilisées sous les noms (SBRIE1) et (SBRIE2) pour apporter des solutions aux problèmes généraux d'élasticité plane. Ces variations sont basées sur la satisfaction de l'équilibre au niveau des éléments et l'utilisation de la condensation statique.

Le succès de l'application de l'approche en déformation pour les problèmes d'élasticité plane dans les coordonnées cartésiennes a incité l'extension des travaux au développement des éléments secteurs basés sur le modèle en déformation dans un système de coordonnées polaires ; Sabir et Salhi [Sab.86] ont développé un élément secteur utilisant l'approche directe.

Dans cette partie, un élément secteur triangulaire à quatre nœuds basé sur l'approche en déformation nommé SBST4 (Strain Based Secteur Triangulaire 4-node) est formulé en se basant sur l'élément rectangulaire SBRIE [Sab.83a], en utilisant le même champ de

déplacement. Cet élément sera examiné et comparé avec d'autres éléments à travers des séries de tests, afin de confirmer la bonne performance de l'approche en déformation.

### 3.2. Formulation de l'élément développé SBST4

Pour les problèmes d'élasticité plane dans un système de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , lorsque les déplacements de translation sont  $U$  et  $V$ , les trois déformations planes  $(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$  et  $\gamma_{r\theta})$  qui correspondent aux premières dérivées des déplacements, sont données par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\end{aligned}\quad (3.1)$$

Où  $\varepsilon_r$  et  $\varepsilon_\theta$  sont les déformations directes suivant  $r, \theta$  respectivement et  $\gamma_{r\theta}$  est la déformation transversale.

Le présent élément SBST4 a été formulé en utilisant le champ de déplacement de l'élément SBRIE à quatre nœuds basé sur l'approche en déformation développé par Sabir et Salhi [Sab.86]. Les fonctions de déplacement de cet élément en termes de coordonnées cartésiennes  $x, y$  sont données comme suit [Sab.86]:

$$\begin{aligned}U &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} \\ V &= a_2 + a_3 x - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2}\end{aligned}\quad (3.2)$$

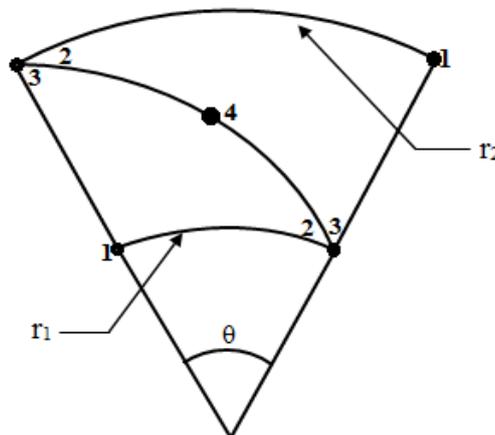


Figure 3.1: Géométrie de l'élément secteur SBST4.

La figure (3.1) présente un élément secteur membranaire à quatre nœuds possédant deux degrés de liberté ( $U_r$  et  $V_\theta$ ) par nœud suivant les deux directions  $r$  et  $\theta$  respectivement.

La formulation de SBST4 représenté sur la figure (3.1) est obtenu en utilisant la même approche appliquée dans le développement de l'élément SBS3D (l'approche directe), en transformant le champ de déplacement de l'équation (3.2) en coordonnées polaires ( $r, \theta$ ) pour obtenir le champ de déplacement  $U_r, V_\theta$ , respectivement, dans les directions radiale et circonférentielle:

$$U_r = a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5r\theta - a_7\frac{\theta^2}{2} + a_8\frac{\theta}{2} \quad (3.3)$$

$$V_\theta = a_2 + a_3r - a_5\frac{r^2}{2} + a_6\theta + a_7r\theta + a_8\frac{r}{2}$$

Pour convertir le champ de déplacement donné par l'équation (3.2) en coordonnées polaires on fait des interpolations similaires sur les variables  $r$  et  $\theta$  comme l'a effectué Raju et Rao [RAJ.69]. Cette procédure est justifiée car elle ne viole pas la vérification de l'équation de compatibilité (équation (3.4)):

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r,\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - 2 \cdot \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \gamma_{r,\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (3.4)$$

Le champ de déformation peut être obtenu en substituant l'équation (3.3) dans l'équation (3.1), on obtient :

$$\varepsilon_r = a_4 + a_5\theta$$

$$\varepsilon_\theta = a_1 \frac{1}{r} - a_3 \frac{\theta}{r} + a_4 + a_5\theta + \frac{1}{r} a_6 + \left(1 - \frac{\theta^2}{2r}\right) a_7 + \frac{\theta}{2r} a_8 \quad (3.5)$$

$$\gamma_{r\theta} = -\frac{1}{r} a_2 - \frac{1}{r} a_3 + \left(1 - \frac{r}{2}\right) a_5 - \frac{\theta}{r} a_6 - \frac{\theta}{r} a_7 + \frac{1}{2r} a_8$$

Sous forme matricielle les fonctions de déplacement et le champ de déformation de l'élément (SBRIE), donnés dans les équations (3.3) et (3.5), sont respectivement comme suit :

$$\begin{Bmatrix} U_r \\ V_\theta \end{Bmatrix} = [P] \{A\} \quad (3.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = [Q] \{A\} \quad (3.7)$$

Où:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\theta & r & r\theta & 0 & -\frac{\theta^2}{2} & \frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 & r & 0 & -\frac{r^2}{2} & \theta & r\theta & \frac{r}{2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \theta & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{\theta}{r} & 1 & \theta & \frac{1}{r} & \left(1 - \frac{\theta^2}{2r}\right) & \frac{\theta}{2r} \\ 0 & -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & 1 - \frac{r}{2} & -\frac{\theta}{r} & -\frac{\theta}{r} & \frac{1}{2r} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

La matrice de rigidité élémentaire de SBST4 est donnée par l'expression suivante [Zie.89] :

$$\begin{aligned} [K^e] &= \int [B]^T [D][B] d\Omega \\ [K^e] &= [C^{-1}]^T \left[ \iint [Q(r,\theta)]^T [D][Q(r,\theta)] r dr d\theta \right] [C^{-1}] \\ &= [C^{-1}]^T [K_0] [C^{-1}] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Où:

$$[B] = [Q][C^{-1}] \quad (3.11)$$

Et :

$$[K_0] = \iint [Q(r,\theta)]^T [D][Q(r,\theta)] r dr d\theta \quad (3.12)$$

Où [C] et [D] sont respectivement les matrices de transformation et d'élasticité.

$$\iint dr d\theta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \det[J] d\xi d\eta \quad (3.13)$$

On utilise la quadrature de Gauss afin d'évaluer, d'une manière numérique, l'équation (3.13) [Smi.04].

Avec :

$$[K^e] = [C^{-1}]^T \left[ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r [Q]^T [D][Q] \det[J] d\xi d\eta \right] [C^{-1}] \quad (3.14)$$

Pour le cas de problèmes de contrainte plane la matrice d'élasticité s'écrit :

$$[D] = \frac{E \cdot t}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

La matrice [C] est détaillée en annexe.

### 3.3. Validation de l'élément SBST4

#### 3.3.1. Cylindre épais soumis à des différents cas de chargement

Considérons dans ce problème, un cylindre soumis à différents cas de chargement et dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées sur la figure (3.2). Les différentes conditions aux limites et les solutions de référence sont les mêmes que celles qui ont été prises pour l'élément SBS3D [Khi.20] (présenté au chapitre 2).

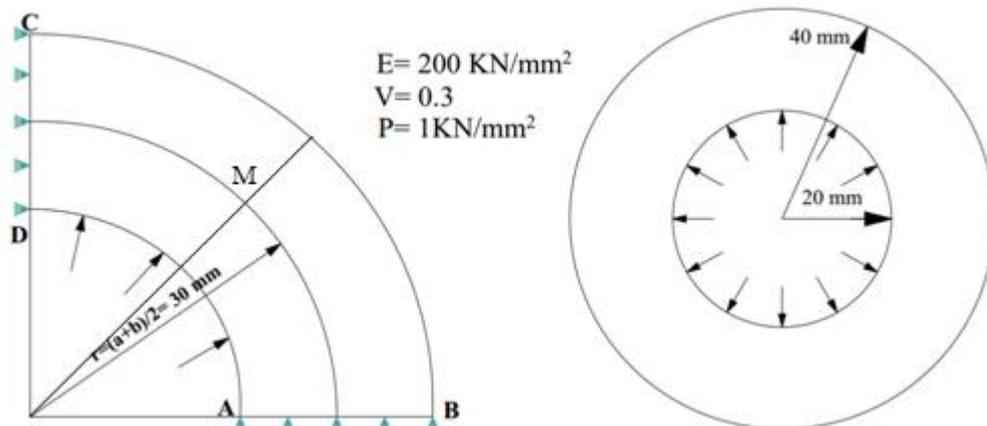


Figure 3.2 : Cylindre épais sous une pression uniforme interne.

##### 3.3.1.1. Cas1: Cylindre épais soumis à une pression interne

Les convergences du déplacement radial ( $U_r$ ), du contrainte radiale ( $\sigma_r$ ) et transversale ( $\sigma_\theta$ ) au point M ( $r = 30$  mm) sont montrées sur les figures (3.4), (3.5) et (3.6) pour différents maillages (figure 3.3). Ces résultats montrent la bonne convergence de l'élément SBST4 vers les solutions de référence pour le cylindre épais soumis à une pression interne.

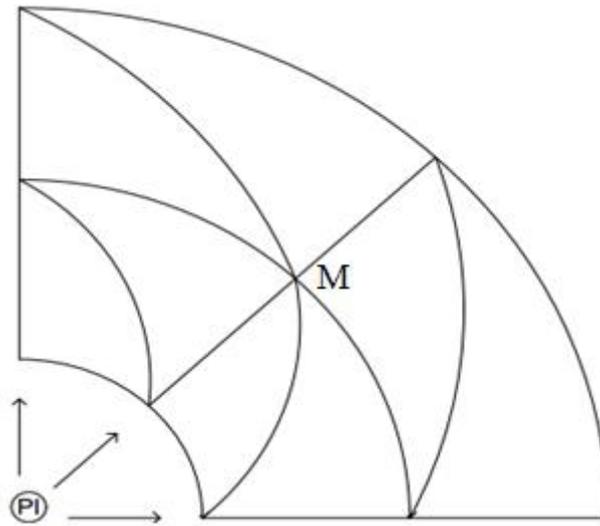


Figure 3.3 : Maillage 4x2 et forces nodales

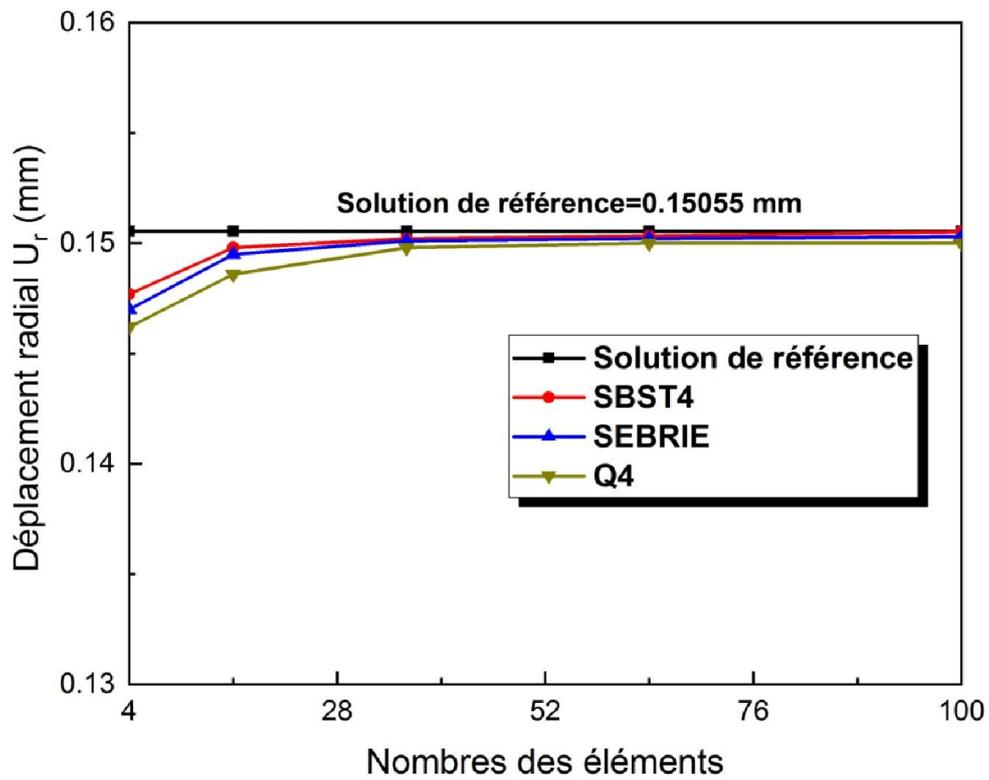


Figure 3.4 : Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) en M ( $r = 30\text{mm}$ ) pour un cylindre sous une pression interne

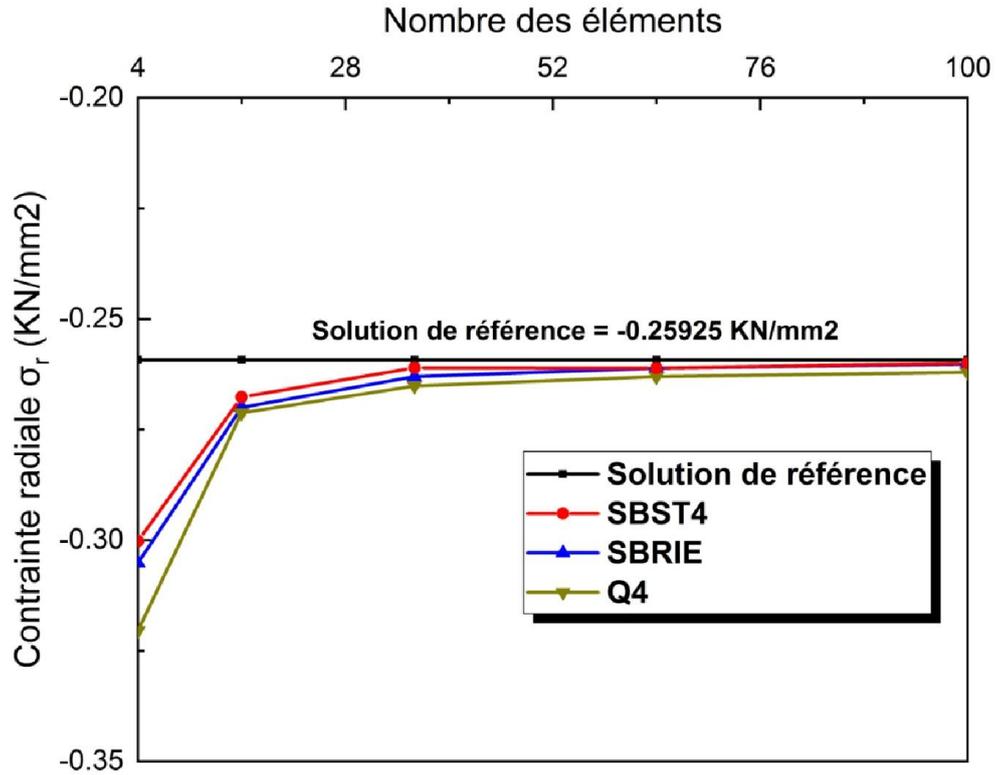


Figure 3.5 : Convergence de la contrainte radiale ( $\sigma_r$ ) en M ( $r = 30$  mm) pour un cylindre sous une pression interne

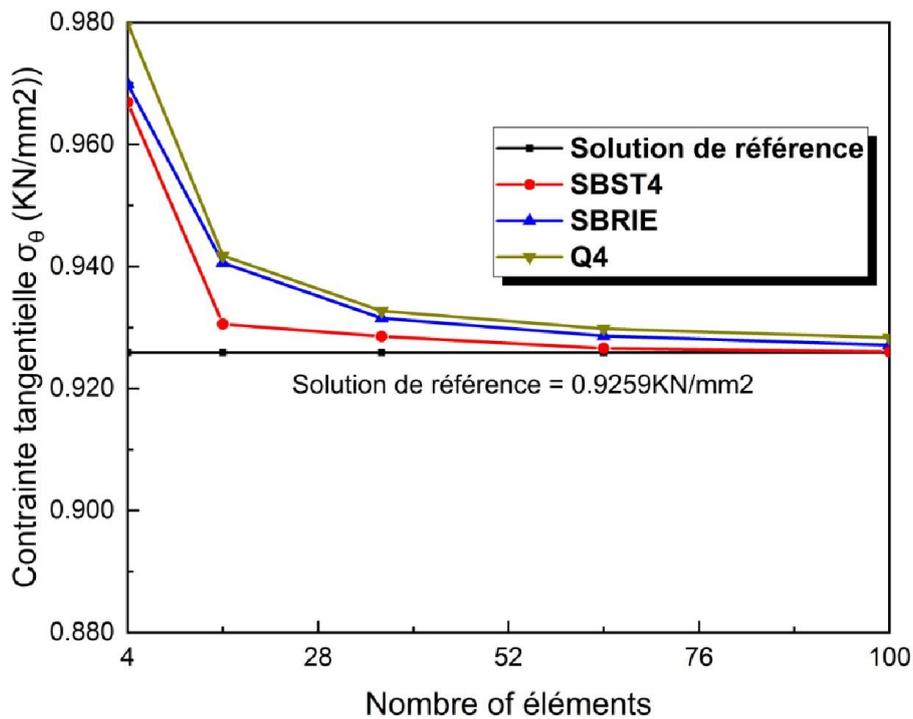
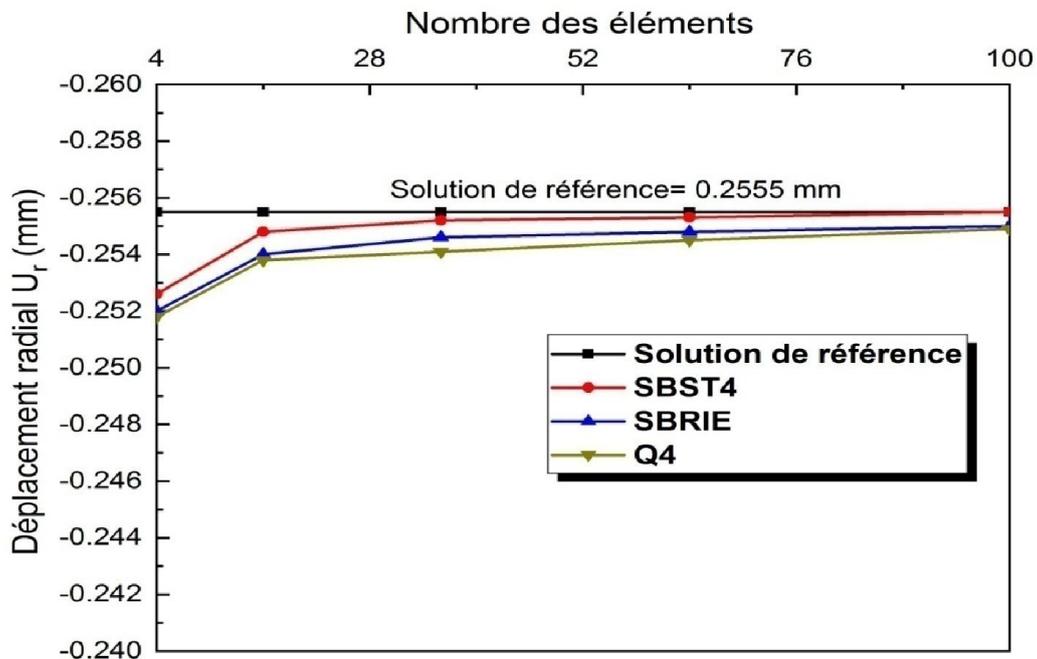


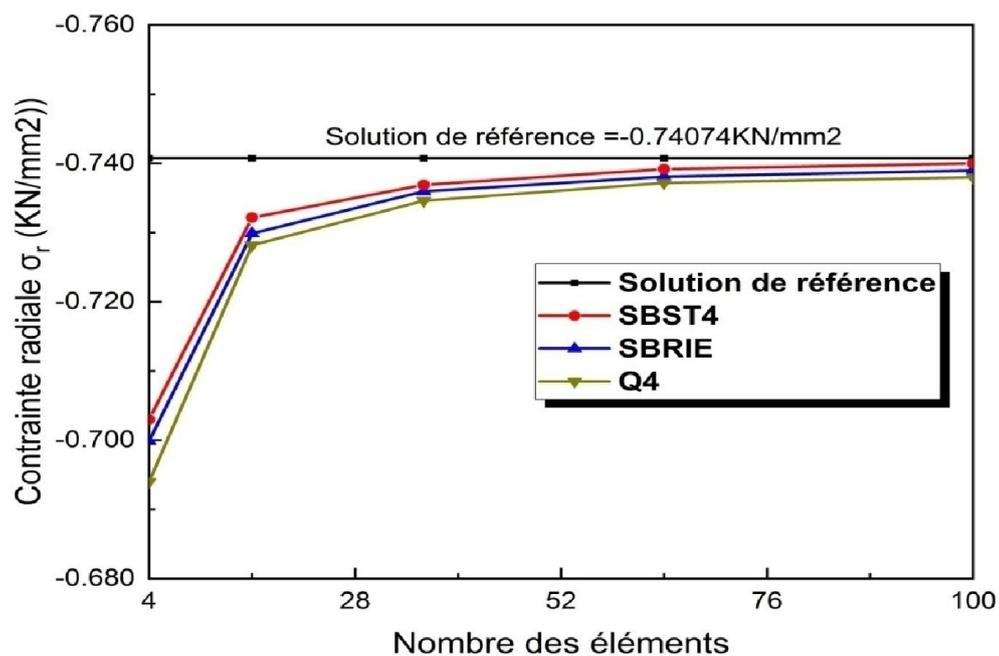
Figure 3.6 : Convergence de la contrainte transversale ( $\sigma_\theta$ ) en M ( $r = 30$ mm) pour un cylindre sous une pression interne

### 3.3.1.2. Cas 2 : cylindre épais soumis à une pression externe

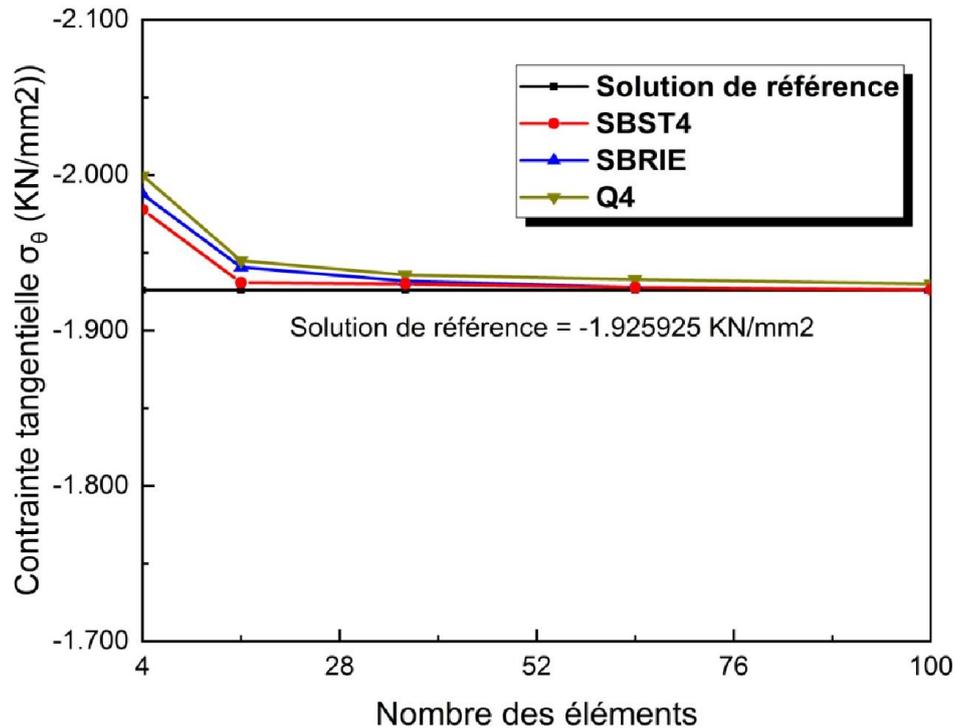
Les convergences du déplacement radial ( $U_r$ ), des contraintes radiales ( $\sigma_r$ ) et transversale ( $\sigma_\theta$ ) au point M, sont présentées sur les figures (3.7) à (3.9) pour différents maillages. La solution de référence est la même que celle qui a été prise pour l'élément SBS3D au (chapitre 2).



**Figure 3.7 :** Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) en M ( $r = 30$  mm) pour un cylindre sous une pression externe



**Figure 3.8 :** Convergence de la contrainte radiale ( $\sigma_r$ ) en M ( $r = 30$  mm) pour un cylindre sous une pression externe



**Figure 3.9 :** Convergence de la contrainte transversale ( $\sigma_\theta$ ) en M ( $r = 30$  mm) pour un cylindre sous une pression externe

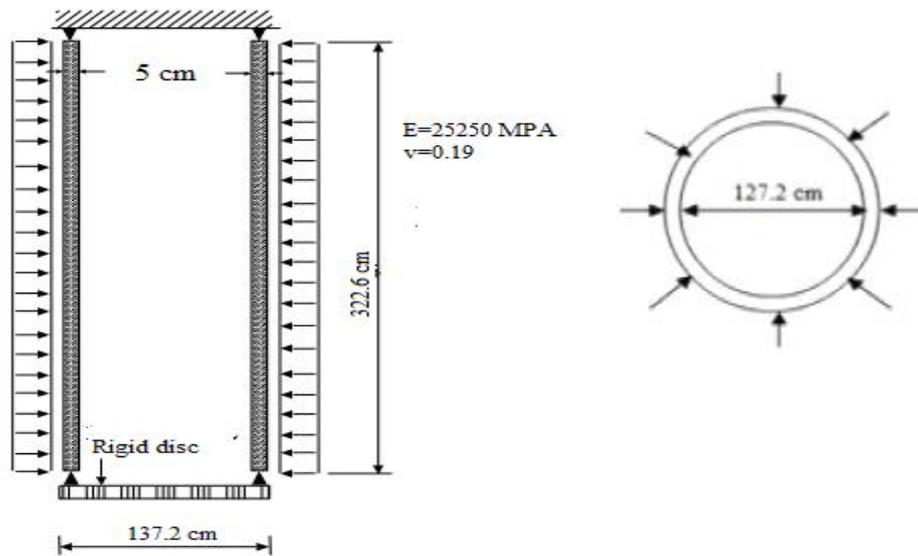
L'analyse des résultats montrés sur les figures (3.4) et (3.7) pour le déplacement radial au point M ( $r = 30$  mm) au milieu de la section radiale, illustre la haute performance de l'élément secteur SBST4.

Les résultats sont très satisfaisants, à titre d'exemple, dans le cas de la sous pression interne et pour une maille 10x10 éléments, l'erreur est de 0,07 % pour SBST4.

Les résultats obtenus pour les contraintes radiales et transversale au milieu de la section droite ( $r = 30$  mm), présentés sur les figures (3.5), (3.6) pour le cas d'un cylindre sous une pression interne, et sur les figures (3.8), (3.9) pour le cas d'un cylindre sous une pression externe, montrent la bonne convergence des résultats vers la solution de référence, par exemple pour une maille de 10x10 éléments, l'erreur est de 0,04 % pour la contrainte radiale et pour la contrainte transversale elle est de 0,09 % dans le cas du cylindre sous une pression interne.

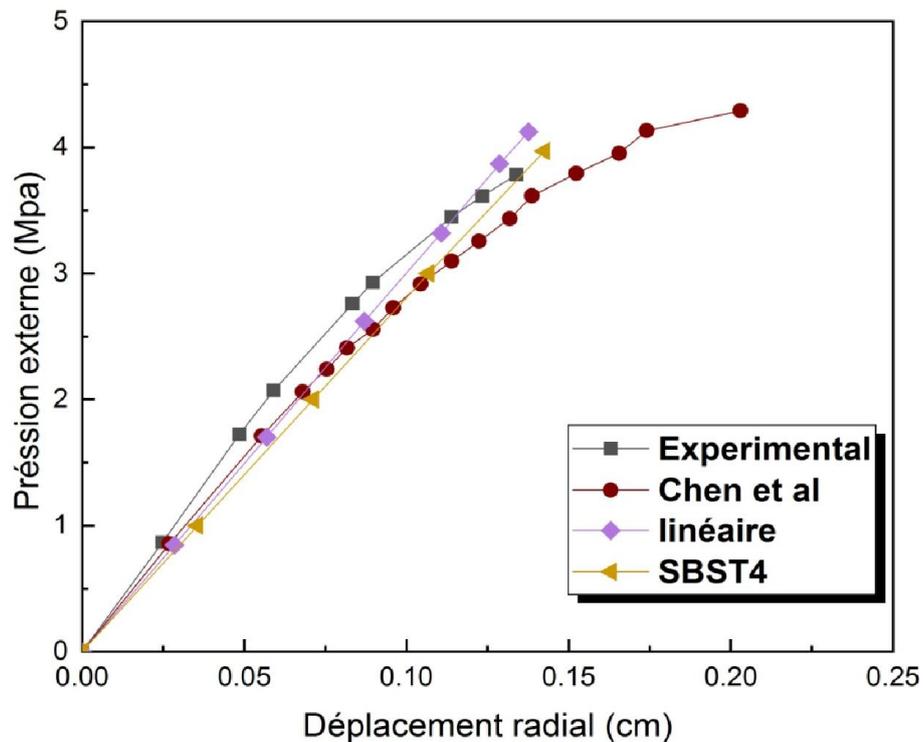
### 3.3.2. Cylindre en béton non armé sous une pression d'eau externe

Ce test de cylindre en béton non armé sous une pression d'eau externe figure (3.10), déjà traité pour l'élément SBS3D (présenté au chapitre 2), est proposé pour évaluer l'élément SBST4.



**Figure 3.10:** Cylindre non renforcé sous une pression d'eau externe.

Les résultats pour le déplacement radial à mi-longueur du cylindre sont représentés sur la figure (3.11), celle-ci montre les résultats obtenus par Chen et al. [Chen.80], les valeurs expérimentales publiées par Runge et Haynes [Run.78] et celles obtenues par le présent élément. La pression d'implosion moyenne de l'échantillon déterminée de manière expérimentale, était de 3,97 MPa avec un écart type de 0.17 MPa.



**Figure 3.11 :** Pression appliquée en fonction des déplacements radiaux à mi-longueur avec un maillage (2x4).

### 3.3.3. Poutre console circulaire épaisse sous une force latérale

Ce test concerne une poutre circulaire épaisse soumise à une force de cisaillement  $P$  à son extrémité libre (figure 3.12) et modélisée avec différent type de maillages [Zou.16]. Les résultats du déplacement vertical au point A sont montrés sur la figure (3.13) et comparés avec d'autres solutions numériques. L'élément proposé est plus précis que les éléments SEBRIE et Q4.

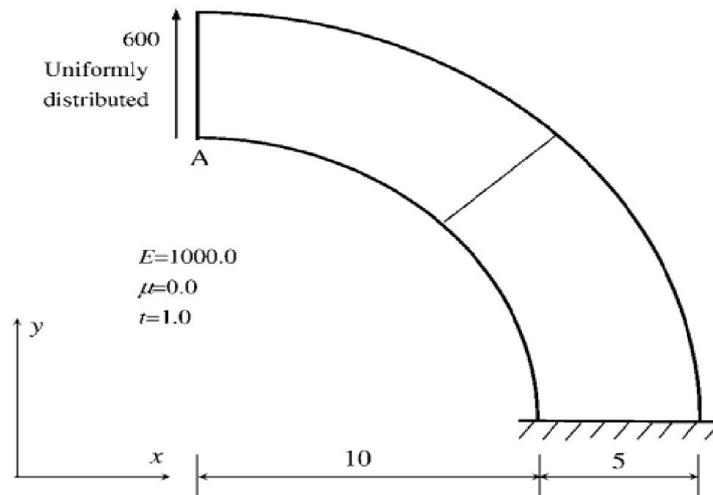


Figure 3.12: Poutre console circulaire épaisse modélisée avec (2x1) éléments.

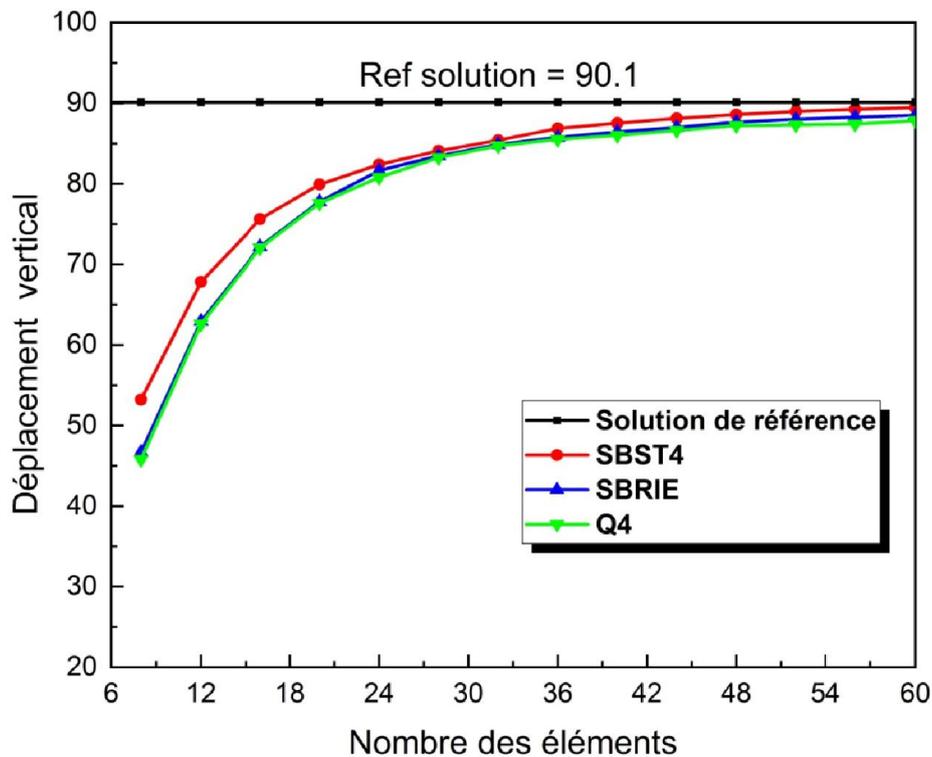


Figure 3.13: Convergence du déplacement vertical au point A d'une poutre console circulaire épaisse.

### 3.3.4. Plaque annulaire semi-circulaire sous une charge de cisaillement

Ce test a été traité par plusieurs auteurs pour l'étude d'une plaque annulaire soumise à deux forces de cisaillement radial. Pour obtenir un ensemble de résultats complets, une gamme considérable de valeurs de  $b/a = 3 ; 2$  et  $1,3$  est considérée. Les résultats obtenus sont comparés aux solutions analytiques d'élasticité bidimensionnelle données par Timoshenko et Goodier [Tim.59], l'équation (2.21) du (chapitre 2).

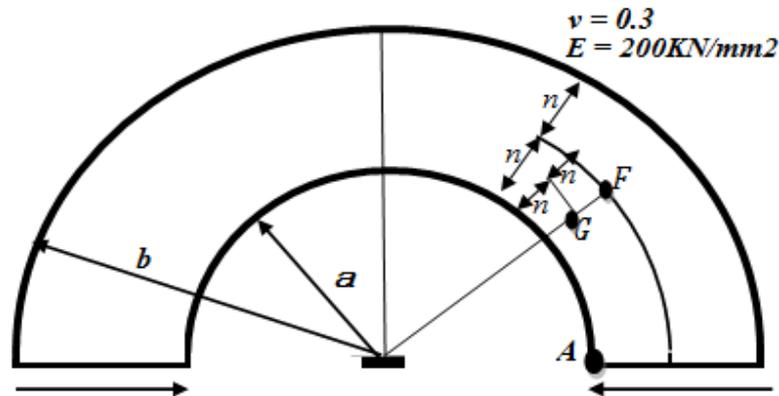


Figure 3.14 : Plaque annulaire soumise au cisaillement radial.

Les figures (3.15), (3.16) et (3.17) montrent la convergence pour le déplacement radial au point «A» pour  $b/a = 3 ; 2$  et  $1,3$  respectivement. Ces courbes sont obtenues lorsque le même nombre d'éléments est utilisé dans la direction radiale et circonférentielle. A partir des résultats obtenus, on peut noter que les résultats donnés par le présent élément (SBST4) convergent rapidement vers la solution analytique à partir d'un maillage de 16 éléments et reste stable jusqu'à un maillage de 100 éléments.

Tableau 3.1: Les déplacements radiaux ( $U_r$ ) pour une plaque annulaire soumise au cisaillement radial pour les différents rapports  $b/a = 3 ; 2$  et  $1,3$ .

| Maillage        | b/a=3   |         | b/a=2  |        | b/a=1.3 |       |
|-----------------|---------|---------|--------|--------|---------|-------|
|                 | SBST4   | SBRIE   | SBST4  | SBRIE  | SBST4   | SBRIE |
| 2x2             | 0.04635 | 0.04529 | 0.1454 | 0.1436 | 2.291   | 2.23  |
| 4x4             | 0.05026 | 0.04951 | 0.1599 | 0.1585 | 2.379   | 2.362 |
| 6x6             | 0.05079 | 0.05045 | 0.1649 | 0.1635 | 2.508   | 2.482 |
| 8x8             | 0.05139 | 0.05112 | 0.1668 | 0.1657 | 2.566   | 2.541 |
| 10x10           | 0.05172 | 0.05152 | 0.1675 | 0.1668 | 2.627   | 2.595 |
| 12x12           | 0.05247 | 0.0521  | 0.1680 | 0.1674 | 2.664   | 2.626 |
| Solution exacte | 0.05260 |         | 0.1686 |        | 2.681   |       |

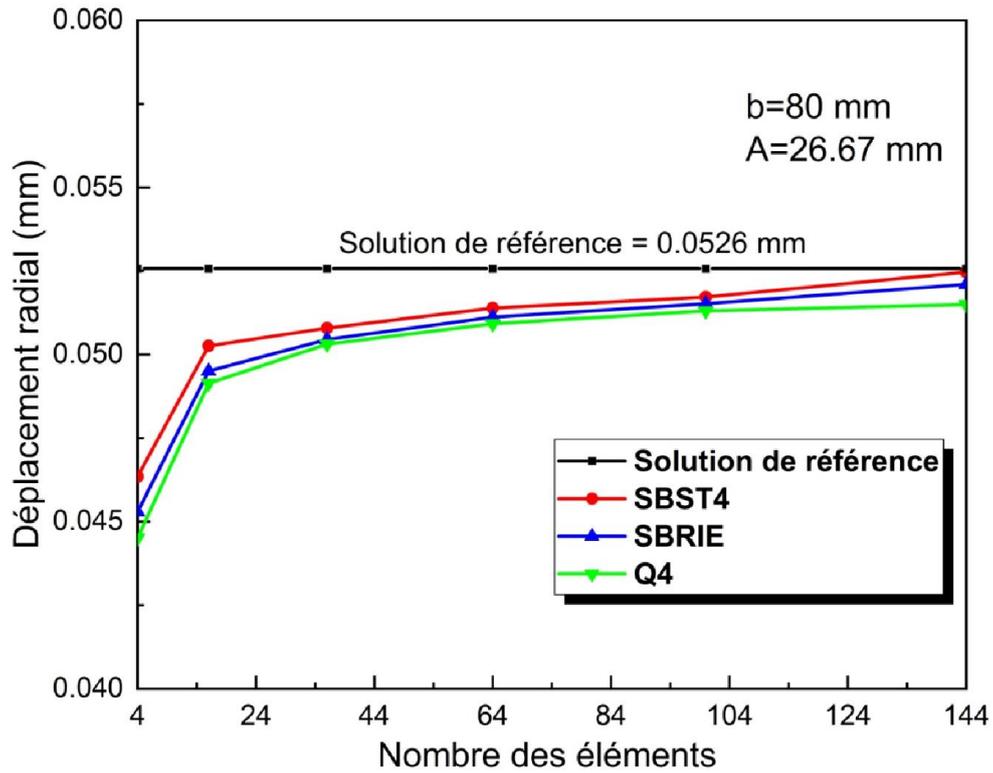


Figure 3.15 : Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) au point A pour  $b/a=3$

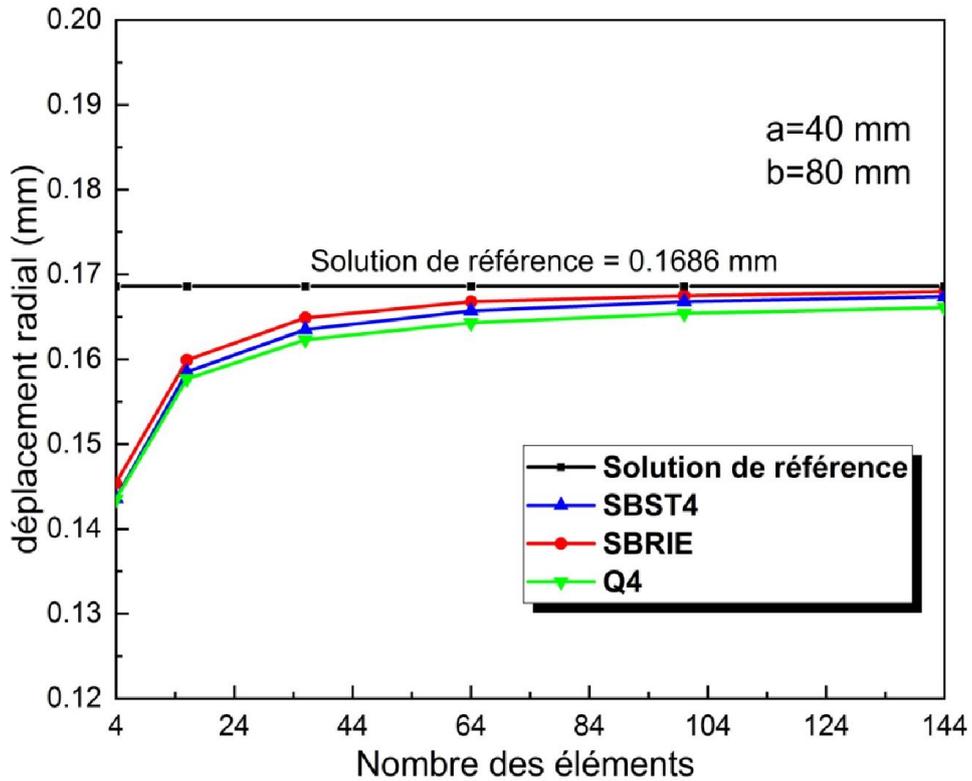
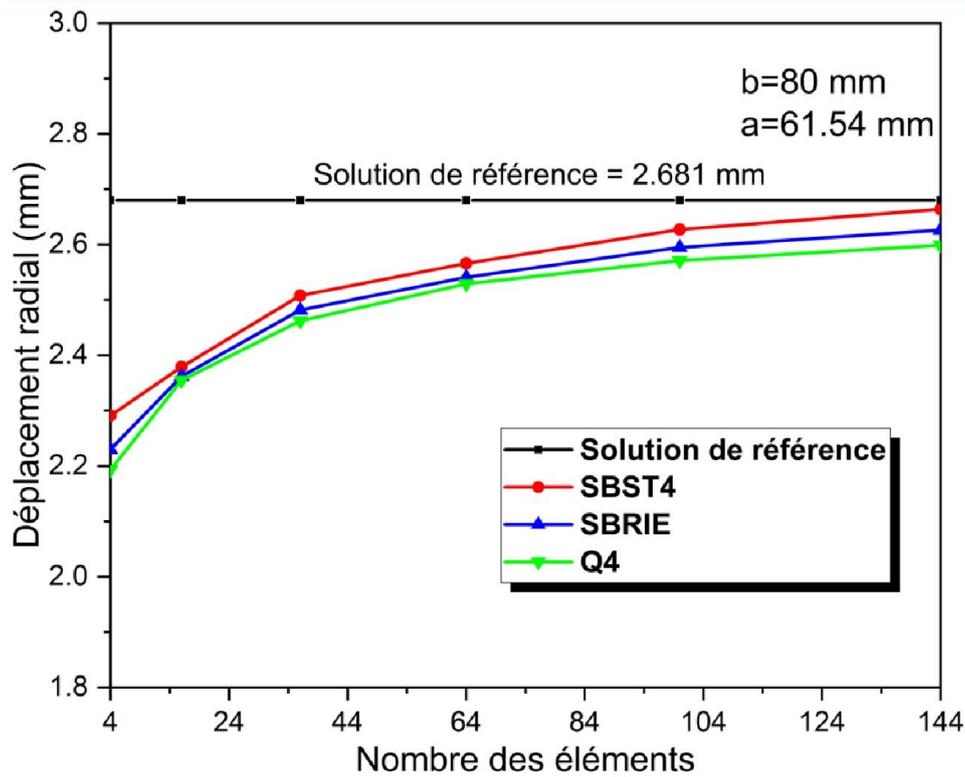


Figure 3.16 : Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) au point A pour  $b/a=2$ .



**Figure 3.17** : Convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) au point A pour  $b/a=1,3$ .

### 3.4. Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un élément secteur (SBST4) pour l'analyse linéaire des structures membranaires. L'élément formulé basé sur l'approche en déformation possède deux degrés de liberté  $U_r$  et  $V_\theta$  à chaque nœud. La performance de l'élément formulé a été testée à travers une série d'exemples numériques prise de la littérature. Les résultats numériques obtenus en utilisant le présent élément (SBST4) montrent qu'il est très performant en termes de précision et de convergence, les résultats correspondants sont globalement plus précis que les autres éléments pour les types de problèmes étudiés.

## **Chapitre 4**

# **FORMULATION ET VALIDATION DES ELEMENTS AXISYMETRIQUES A CHAMP DE DEFORMATION**

# Chapitre 4

## Formulation et validation des éléments axisymétriques à champ de déformation.

### 4.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous considérons un élément spécial à deux dimensions appelé élément axisymétrique. Un solide axisymétrique de révolution est défini comme un corps 3D qui est généré par la rotation d'un plan et décrit plus facilement en coordonnées cylindriques, où  $Z$  est l'axe de symétrie. Cet élément est très utile lorsque la géométrie, les charges et les propriétés du matériau sont toutes axisymétriques (toutes sont indépendantes de  $\theta$ ), alors le problème peut être modélisé en un modèle bidimensionnel. En réduisant un modèle 3D à un modèle 2D, le temps de calcul ainsi que la taille du problème peuvent être considérablement réduits. Seule une section transversale radiale typique doit être analysée et subdivisée en éléments plans et le système de coordonnées cylindriques est adopté (Figure 4.1).

Dans ce chapitre, trois éléments à champ de déformation (SBRIE) [Sab.83a], (SBTIEIR) [Sab.85a] et (R4BM) [Bela.05] seront formulés et évalués en axisymétrie, à travers trois tests liés à ce type de problème.

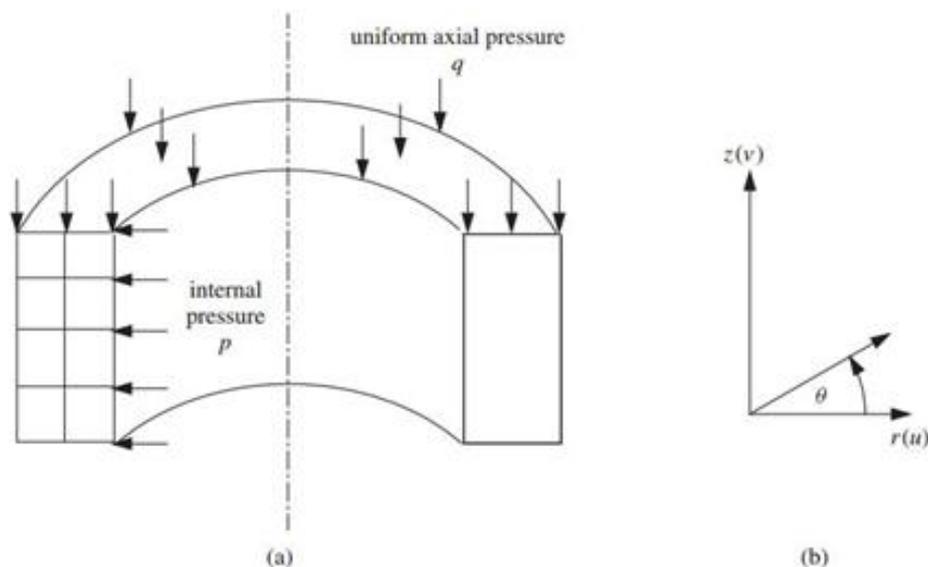


Figure 4.1 : (a)Cylindre sous une pression axiale et radiale. (b) Système de coordonnées cylindriques.

### 4.2. Considérations théoriques

Dans les problèmes axisymétriques en raison de la symétrie autour de l'axe z, les contraintes sont indépendantes de la coordonnée  $\theta$ . Par conséquent, toutes les dérivées par rapport à  $\theta$  disparaissent, et la composante de déplacement  $v$  (tangente à la direction  $\theta$ ), ainsi que les déformations de cisaillement  $\gamma_{r\theta}$  et  $\gamma_{\theta z}$ , et les contraintes de cisaillement  $\tau_{r\theta}$  et  $\tau_{\theta z}$  sont tous nulles. Les figures (4.2) et (4.3) montrent un élément axisymétrique et sa section transversale représentant l'état général de déformation pour un problème axisymétrique ainsi que les déplacements des lignes de l'élément dans le plan r-z, respectivement.

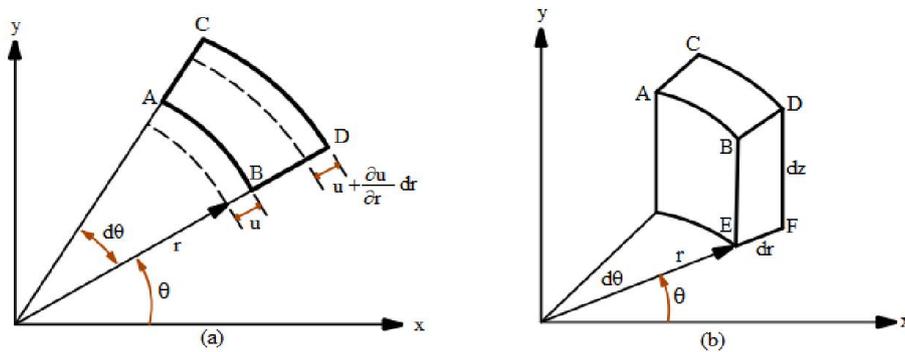


Figure 4.2 : (a) Section transversale de (b) élément axisymétrique [Dar.07]

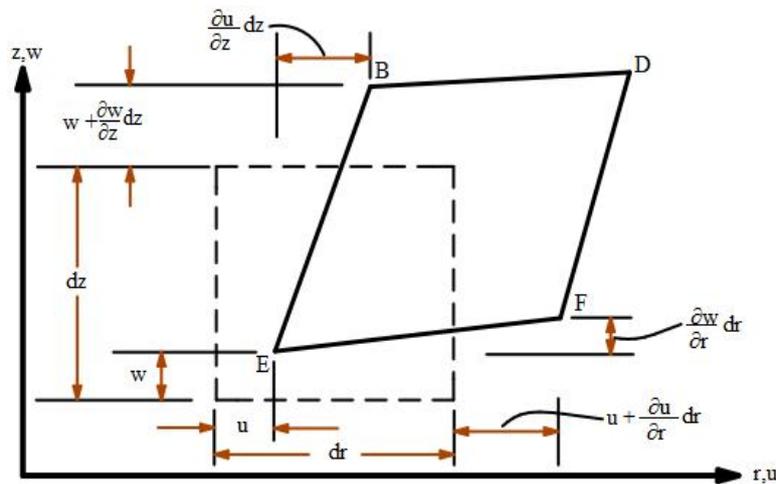


Figure 4.3 : Déplacements et rotations des lignes de l'élément dans le plan r-z [Dar.07]

Les déformations non nulles

$$\{\varepsilon_x\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Où :

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta z} = 0 \quad (4.2)$$

La relation déformations – déplacements s'écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

La relation contraintes-déformations pour les problèmes axisymétriques s'exprime par :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

La matrice d'élasticité est donnée par:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

#### 4.2.1. Forces nodales équivalentes pour un élément axisymétrique

##### 4.2.1.1 Force de volume

Soit une charge répartie de volume  $\{f_v\}$  répartie à l'intérieur de l'élément suivant les différentes directions  $(x, y, z)$

$$\{f_v\} = \begin{Bmatrix} f_{v_x} \\ f_{v_y} \\ f_{v_z} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Le vecteur de forces nodales, lorsqu'il est intégré sur un radian s'écrit:

$$\{f_v\} = \iiint_v [N(x, y, z)]^T \begin{Bmatrix} f_{v_x} \\ f_{v_y} \\ f_{v_z} \end{Bmatrix} dV \quad (4.7)$$

Pour le cas d'un élément rectangulaire axisymétrique  $\{f_v\} = \begin{Bmatrix} f_{v_r} \\ f_{v_z} \end{Bmatrix}$ , de la relation précédente on aura :

$$\begin{aligned} \{f_v\} &= \iiint_v [N(r, z)]^T \begin{Bmatrix} f_{v_r} \\ f_{v_z} \end{Bmatrix} r dr dz \\ &= h \iint_s [N]^T \begin{Bmatrix} f_{v_r} \\ f_{v_z} \end{Bmatrix} r dr dz \end{aligned} \quad (4.8)$$

Les forces de volume réparties peuvent être :

- Force de gravité dans la direction de l'axe z, ou
- Forces centrifuges dans les pièces en rotation dues à la rotation autour de l'axe r (comme la montre la figure (4.4)).

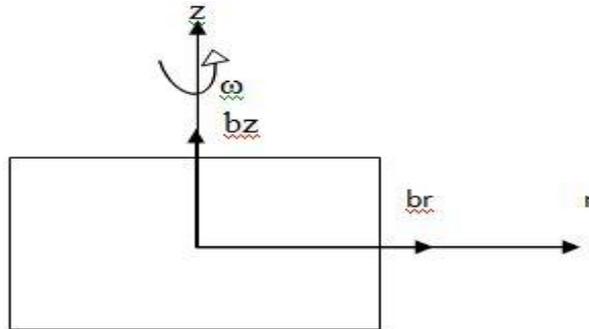


Figure 4.4 : Élément axisymétrique avec des forces volumiques

Les forces nodales équivalentes s'écrivent comme suit :

$$\{f_b\} = 2\pi \iint_s [N]^T \begin{Bmatrix} b_r \\ b_z \end{Bmatrix} r dr dz \quad (4.9)$$

Ou :

$$\begin{Bmatrix} b_r \\ b_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega^2 \rho r \\ -\rho g \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

$\omega$  : la vitesse angulaire autour de l'axe z

$\rho$  : la densité de masse du matériau

$r$  : la coordonnée radiale

$b_z$  : la force de volume due à la force de gravité

Pour un cas où on a seulement les forces centrifuges dues à la rotation (l'effet du poids propre est négligé), on a pour un  $h = 1$  :

$$\{f_b\} = 2\pi \iint_s [N]^T \begin{Bmatrix} b_r \\ 0 \end{Bmatrix} r dr dz \quad (4.11)$$

$$\{f_{b_i}\} = \frac{\rho\omega^2}{24} \begin{Bmatrix} (r_2^3 - 3r_1^3 + r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2) \\ 0 \\ (r_2^3 - 3r_1^3 + r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2) \\ 0 \\ (3r_2^3 - r_1^3 - r_1^2 r_2 - r_1 r_2^2) \\ 0 \\ (3r_2^3 - r_1^3 - r_1^2 r_2 - r_1 r_2^2) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Où  $r_1$  et  $r_2$  sont respectivement le rayon interne et le rayon externe de l'élément (Figure 4.5).

#### 4.2.1.2. Forces surfaciques

Pour les forces surfaciques, le vecteur forces nodales équivalentes est donné par :

$$\{f_s\} = \iint_s [N]^T [T] ds \quad (4.13)$$

Où  $ds$  représente la surface élémentaire de l'élément, et  $[N]$  désigne la matrice des fonctions de forme évaluée le long de la surface de l'élément. L'équation (4.13) est intégrée sur un élément linéaire, les forces nodales équivalentes sont représentées sur la figure (4.5), nous avons :

$$\{f_s\} = \iint_s [N]^T \begin{Bmatrix} b_r \\ b_z \end{Bmatrix} r dr dz \quad (4.14)$$

Le chargement axisymétrique sur un radian est décrit pour le cas d'un élément rectangulaire avec quatre nœuds (figure 4.5).

Les forces nodales équivalentes sont données par :

$$F_1 = \frac{r_1 - r_0}{6} (2r_0 + r_1)$$

$$F_2 = \frac{r_1 - r_0}{6} (r_0 + 2r_1)$$

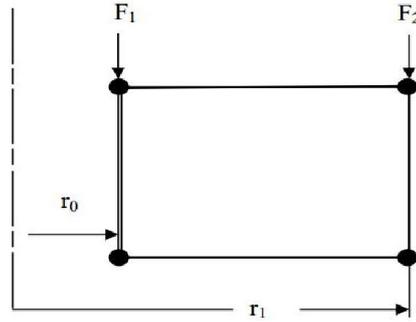


Figure 4.5: Force nodale équivalente pour un élément rectangulaire.

### 4.3. Formulation des éléments axisymétrique à champ de déformation

#### 4.3.1. Formulation de l'élément (SBTIEIR) [Sab.85a]

Le champ de déformation de l'élément est donné par:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_4 + a_5 y + a_7 x \\ \varepsilon_y &= a_6 + a_7 x + a_5 y \\ \gamma_{xy} &= a_8 + a_9 (x + y)\end{aligned}\tag{4.15}$$

Le champ de déplacement est le suivant:

$$\begin{aligned}U &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy + a_7 \frac{(x^2 - y^2)}{2} + a_8 \frac{y}{2} + a_9 \frac{y^2}{2} \\ V &= a_2 + a_3 x + a_5 \frac{(y^2 - x^2)}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} + a_9 \frac{x^2}{2} \\ \phi &= a_3 y - a_5 x + a_7 y + a_9 \frac{(x - y)}{2}\end{aligned}\tag{4.16}$$

Sous forme matricielle le champ de déplacement de l'élément (SBTIEIR) est comme suit:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [P] \{A\}\tag{4.17}$$

$$\{A\} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots, a_{24}]^T$$

$$[P(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & \frac{x^2 - y^2}{2} & \frac{y}{2} & \frac{y^2}{2} \\ 0 & 1 & x & 0 & \frac{y^2 - x^2}{2} & y & xy & \frac{x}{2} & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & y & 0 & -x & 0 & y & 0 & \frac{x - y}{2} \end{bmatrix}\tag{4.18}$$

L'élément axisymétrique à deux degrés de liberté (u, v) par nœud, l'un radial et l'autre dans les directions axiales, l'équation (4.18) est de la forme:

$$[P(r,z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z & r & rz & 0 & -\frac{r^2-z^2}{2} & \frac{z}{2} & \frac{z^2}{2} \\ 0 & 1 & r & 0 & \frac{z^2-r^2}{2} & z & rz & \frac{r}{2} & \frac{r^2}{2} \\ 0 & 0 & z & 0 & -r & 0 & z & 0 & \frac{r-z}{2} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Où u et v sont respectivement les déplacements dans les directions r et z.

La matrice de rigidité est obtenue par l'expression suivante :

$$[K^e] = \int [B]^T [D][B] dV \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} [K^e] &= [C^{-1}]^T \left[ \iiint [Q(x,y)]^T [D][Q(x,y)] dV \right] [C^{-1}] \\ &= [C^{-1}]^T [K_0] [C^{-1}] \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\text{Où : } [B] = [Q][C^{-1}] \quad (4.22)$$

$$\text{Et : } [K_0] = \iiint [Q]^T [D][Q] dv$$

Où [C] et [D], sont respectivement les matrices de transformation et d'élasticité.

Pour le cas axisymétrique l'expression précédente devient :

$$[K_0] = 2\pi \iiint [Q]^T [D][Q] r dr dz \quad (4.23)$$

La matrice [K<sub>0</sub>] donnée par l'équation (4.23) est intégrée numériquement, on a :

$$\iint dr dz = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \det[J] d\xi d\eta \quad (4.24)$$

$$[K^e] = [C^{-1}]^T \left[ \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r [Q]^T [D][Q] \det[J] d\xi d\eta \right] [C^{-1}] \quad (4.25)$$

$$[K_0] = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Q]^T [D][Q] \det[J] r d\xi d\eta \quad (4.26)$$

Les matrices [C] et [Q] sont respectivement données par:

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_i & r_i & r_i z_i & 0 & -\frac{r_i^2 - z_i^2}{2} & \frac{z_i}{2} & \frac{z_i^2}{2} \\ 0 & 1 & r_i & 0 & \frac{z_i^2 - r_i^2}{2} & z_i & r_i z_i & \frac{r_i}{2} & \frac{r_i^2}{2} \\ 0 & 0 & z_i & 0 & -r_i & 0 & z_i & 0 & \frac{r_i - z_i}{2} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Où  $r_i$  et  $z_i$  sont les coordonnées des quatre nœuds  $i$  ( $i = 1, 4$ ).

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z & 1 & r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & r & 0 & -z & \frac{1}{2} & z \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{z}{r} & 1 & z & 0 & \frac{r^2 - z^2}{2r} & \frac{z}{2r} & \frac{z^2}{2r} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

### 4.3.2. Formulation de l'élément R4BM [Bela.05]

Le champ de déformation de l'élément est donné par:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_4 + a_5 y + a_9 x \\ \varepsilon_y &= a_6 + a_7 x + a_{10} y \\ \gamma_{xy} &= a_8 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Le champ de déplacement est le suivant:

$$\begin{aligned} U &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} + a_9 \frac{x^2}{2} \\ V &= a_2 + a_3 x - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6 y + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2} + a_{10} \frac{y^2}{2} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Sous forme matricielle le champ de déplacement de l'élément (R4BM) est comme suit:

$$[P(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -\frac{y^2}{2} & \frac{y}{2} & \frac{x^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & -\frac{x^2}{2} & y & xy & \frac{x}{2} & 0 & \frac{y^2}{2} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

L'élément axisymétrique à deux degrés de liberté ( $u, v$ ) par nœud, l'un radial et l'autre dans les directions axiales, l'équation (4.31) est de la forme:

$$[P(r, z)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z & r & rz & 0 & -\frac{z^2}{2} & \frac{z}{2} & \frac{r^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & r & 0 & -\frac{r^2}{2} & z & rz & \frac{r}{2} & 0 & \frac{z^2}{2} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

La matrice de rigidité élémentaire [Ke] peut être obtenue comme précédemment, les matrices [Q] et [C] sont respectivement données par:

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & -1 & 0 & r & 0 & -z & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{z}{r} & 1 & z & 0 & -\frac{z^2}{2r} & \frac{z}{2r} & \frac{r}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_i & r_i & r_i z_i & 0 & -\frac{z_i^2}{2} & \frac{z_i}{2} & \frac{r_i^2}{2} & 0 \\ 0 & 1 & r_i & 0 & -\frac{r_i^2}{2} & z_i & r_i z_i & \frac{r_i}{2} & 0 & \frac{z_i^2}{2} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

#### 4.4. VALIDATION NUMERIQUE :

Pour valider les performances et l'efficacité de calcul obtenu avec les éléments étudiés, plusieurs exemples distincts pour les problèmes axisymétriques sont présentés.

##### 4.4.1. Plaque circulaire soumise à une charge concentrée

Considérons une plaque de forme circulaire d'épaisseur  $h = 1$ , simplement appuyée, soumise à une charge concentrée  $q=10$  au centre de la plaque ( $r = 10$ ). Soit  $E=1000$  et  $\nu=0.33$  les caractéristiques élastiques du matériau.

La solution analytique pour ce problème est également donnée par Timoshenko et Woinowsky-Krieger [Tim.59], la géométrie et le maillage utilisé pour ce problème sont montrés sur la figure (4.6)

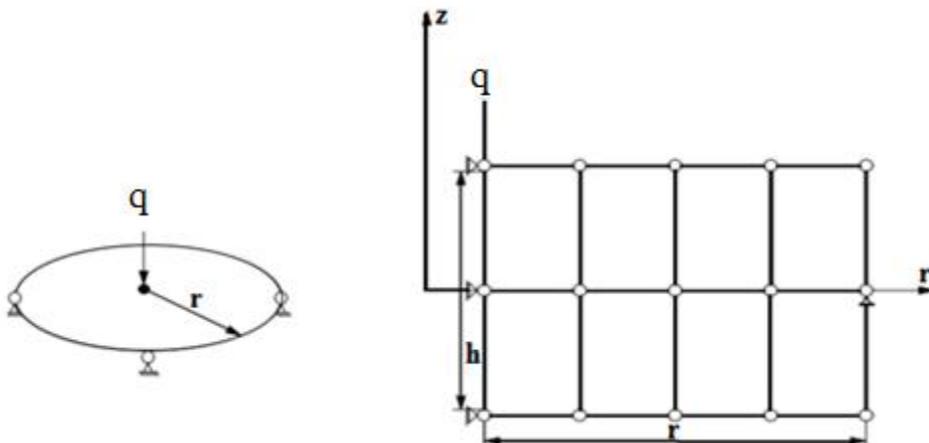


Figure 4.6 : Plaque circulaire en appui simple soumise à une charge ponctuelle [Guer.14]

La solution exacte [Tim.59] des moments de flexion et des contraintes associées est donnée par:

$$M_r = \frac{q}{4\pi}(1+\nu)\ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (4.35)$$

$$M_\theta = \left(\frac{q}{4\pi}(1+\nu)\ln\left(\frac{b}{a}\right) + 1 - \nu\right) \quad (4.36)$$

$$\sigma_r = \frac{12M_r z}{h^3} \quad (4.37)$$

$$\sigma_\theta = \frac{12M_\theta z}{h^3} \quad (4.38)$$

Le déplacement radial est donné par :

$$U_r = \frac{q}{8\pi D} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} - 1 - 2\ln\left(\frac{a}{b}\right) \right) r z \quad (4.39)$$

Où  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  représente la rigidité de la plaque

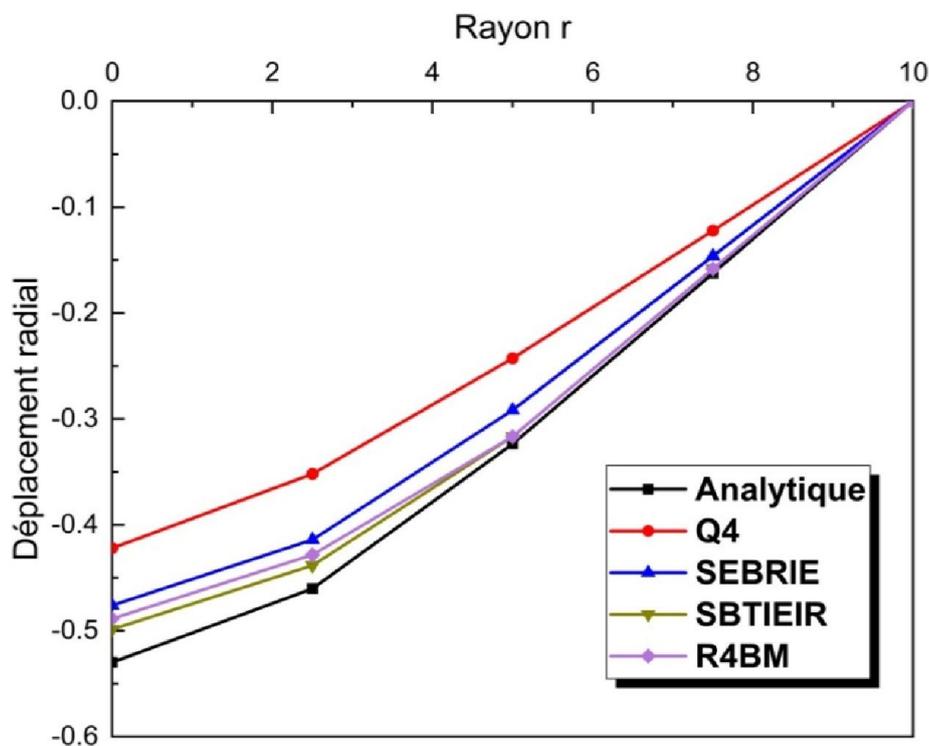


Figure 4.7 : Déplacement radial  $U_r$  d'une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée (maillage 2x4).

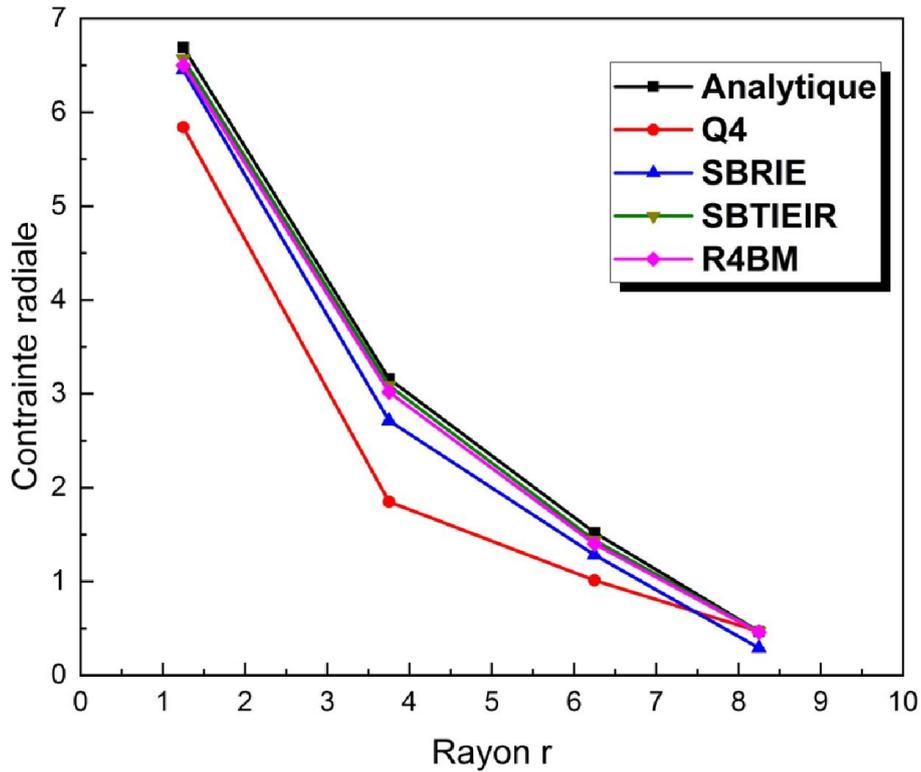


Figure 4.8 : Contrainte radiale  $\sigma_r$  calculée au centre des éléments pour une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée (maillage 2x4).

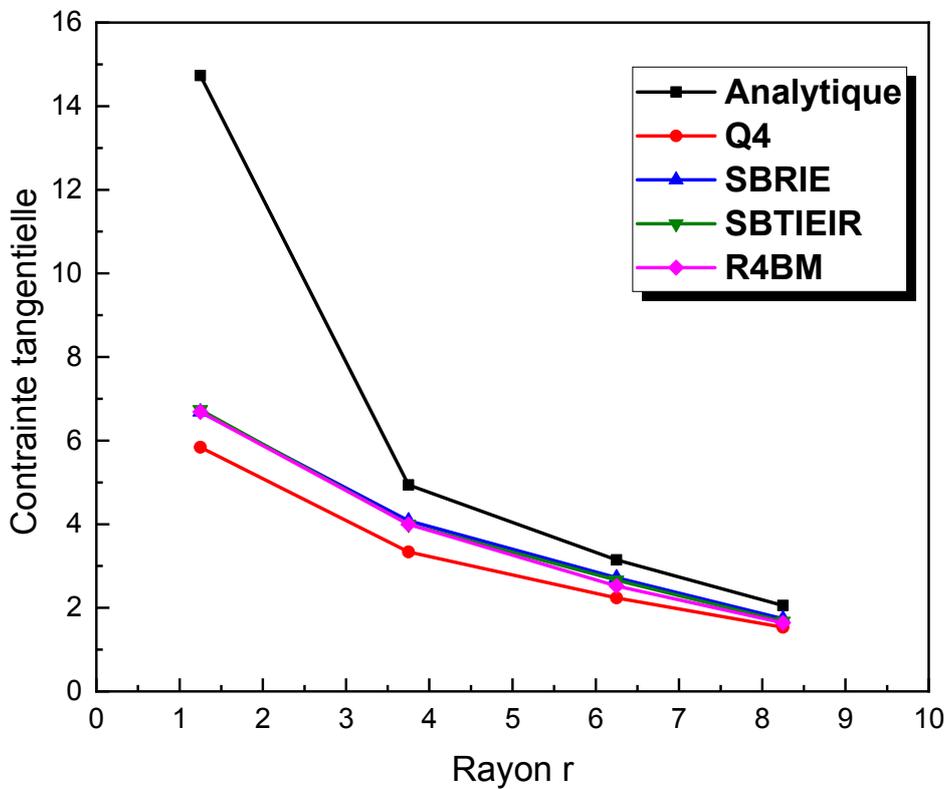


Figure 4.9 : Contrainte tangentielle  $\sigma_\theta$  calculée au centre des éléments pour une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée (maillage 2x4).

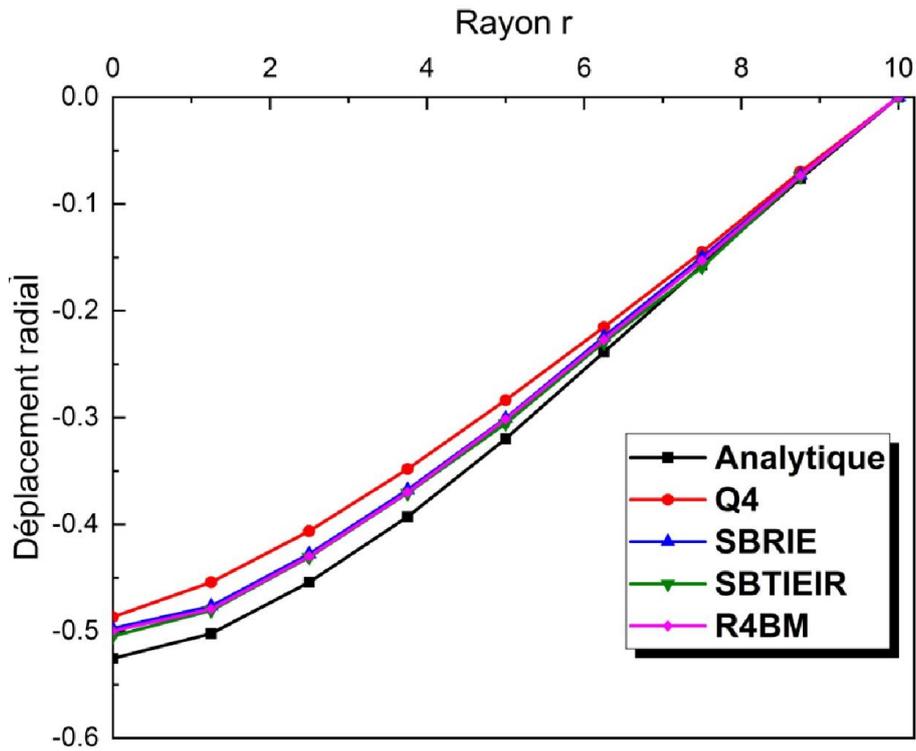


Figure 4.10 : Déplacement radial  $U_r$  d'une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée (maillage 2x8).

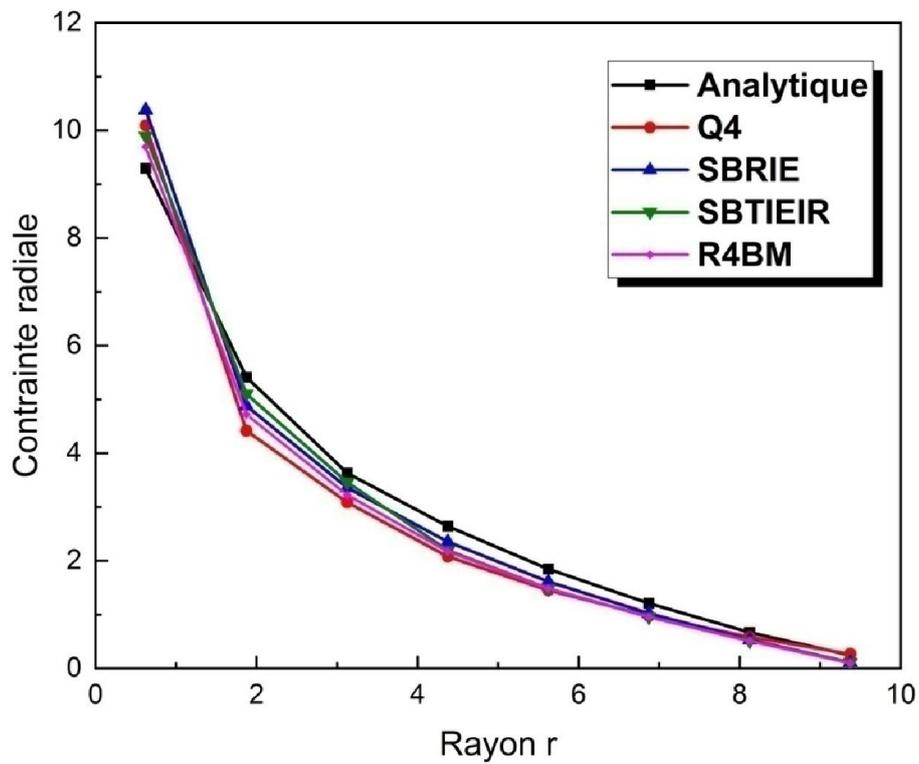
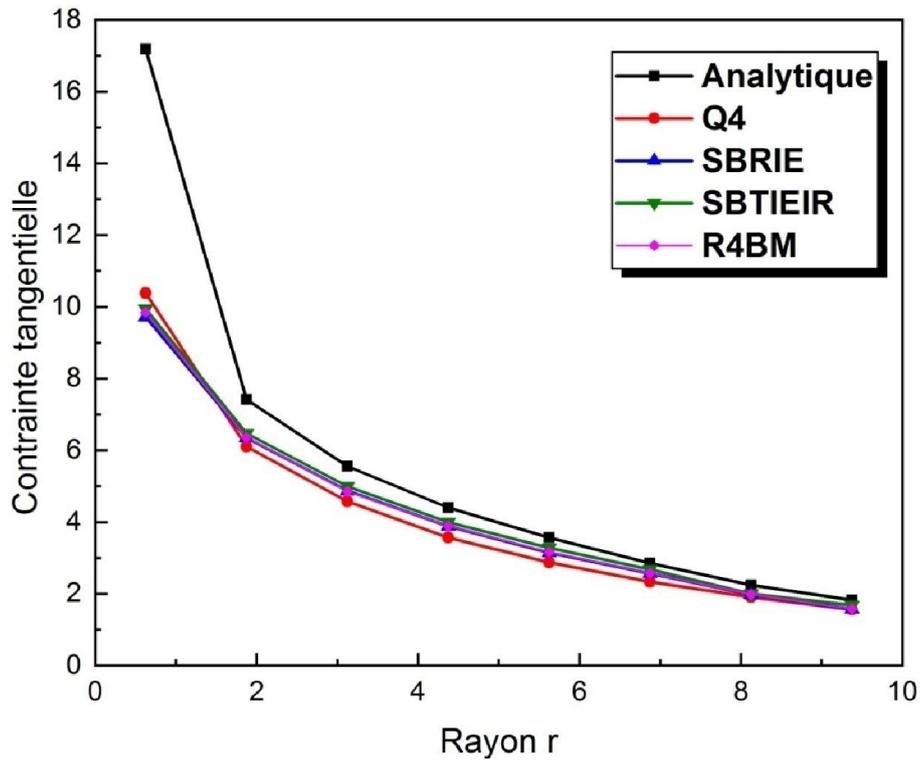


Figure 4.11 : Contrainte radiale  $\sigma_r$  calculée au centre des éléments pour une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée (maillage 2x8).

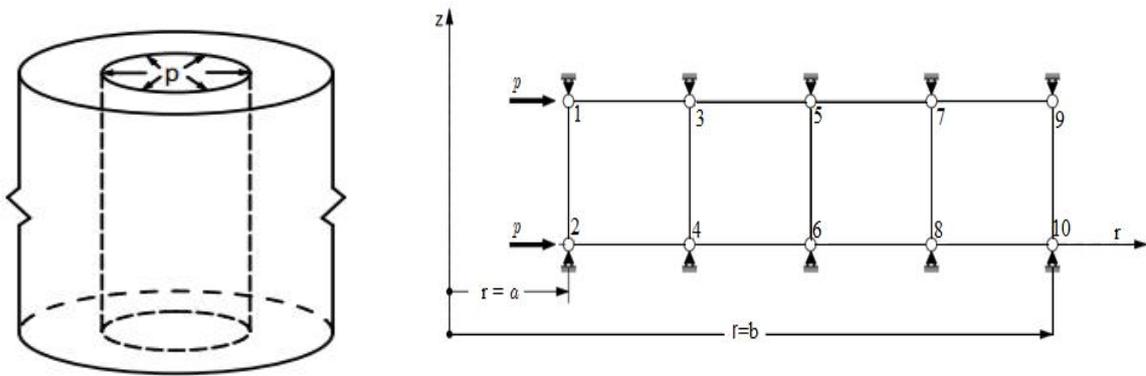


**Figure 4.12** : Contrainte tangentielle  $\sigma_\theta$  calculée au centre des éléments pour une plaque circulaire simplement appuyée sous une charge concentrée (maillage 2x8).

Les figures (4.7 à 4.12) donnent les résultats obtenus pour les déplacements radiaux et les contraintes radiales et tangentielles des éléments étudiés. A travers ces résultats on constate que les éléments étudiés donnent de bons résultats. Par contre, l'élément Q4 pour un maillage grossier, la précision est largement insuffisante, il est sensible au phénomène de blocage en cisaillement. Lorsqu'on raffine le maillage ses résultats s'améliorent mais il reste moins performant par rapport aux éléments basés sur l'approche en déformations. Les résultats obtenus des contraintes radiales pour les éléments basés sur l'approche en déformations sont en accord avec ceux des solutions analytiques même pour un maillage grossier, tandis que l'élément Q4 classique donne de très mauvais résultats. Pour les contraintes tangentielles les résultats montrent que les éléments à champ de déformation donnent des résultats acceptables uniquement pour des rayons supérieurs à 6, l'élément Q4 reste loin de la solution. Lorsqu'on raffine le maillage, la distribution de la contrainte près du centre de l'élément est sensiblement améliorée pour un rayon supérieur à 3.

#### 4.4.2. Cylindre à parois épaisse sous une pression interne

Considérons un cylindre, à paroi épaisse de rayon interne  $r_1 = a = 4$  et de rayon externe  $r_2 = b = 10$ , soumis à une pression interne  $P = 10$ , comme indiqué sur la figure (4.13), ayant les caractéristiques mécaniques suivant : module de Young  $E=1000$  et coefficient de poisson  $\nu = 0.3$ . Le cylindre se prolonge indéfiniment le long de l'axe  $z$ , il est en état de déformation plane le long de cette direction. Nous présentons une section rectangulaire dans le plan  $(r, z)$  discrétisée en utilisant quatre éléments annulaires quadrilatéraux au long de la radiale  $r$  et un élément le long de la direction axiale  $z$  comme le montre la figure (4.13).



**Figure 4.13:** Cylindre épais soumis à une pression interne

Les résultats obtenus sont comparés à la solution analytique proposée par Timoshenko [Tim 51], qui est donnée par :

$$\sigma_r = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[ 1 - \frac{b^2}{r^2} \right] \quad (4.40)$$

$$\sigma_\theta = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[ 1 + \frac{b^2}{r^2} \right] \quad (4.41)$$

$$\sigma_z = p \frac{2a^2 \nu}{b^2 - a^2} \quad (4.42)$$

Et Pour le déplacement radial elle est donnée par :

$$u_r = \frac{pa^2}{E} \frac{(b^2 + r^2(1 - 2\nu))}{(b^2 - a^2)r} (1 + \nu) \quad (4.43)$$

Les figures (4.14 à 4.19) montrent la variation du déplacement radial suivant la direction  $r$  et les contraintes radiales et tangentielles pour les éléments formulés.

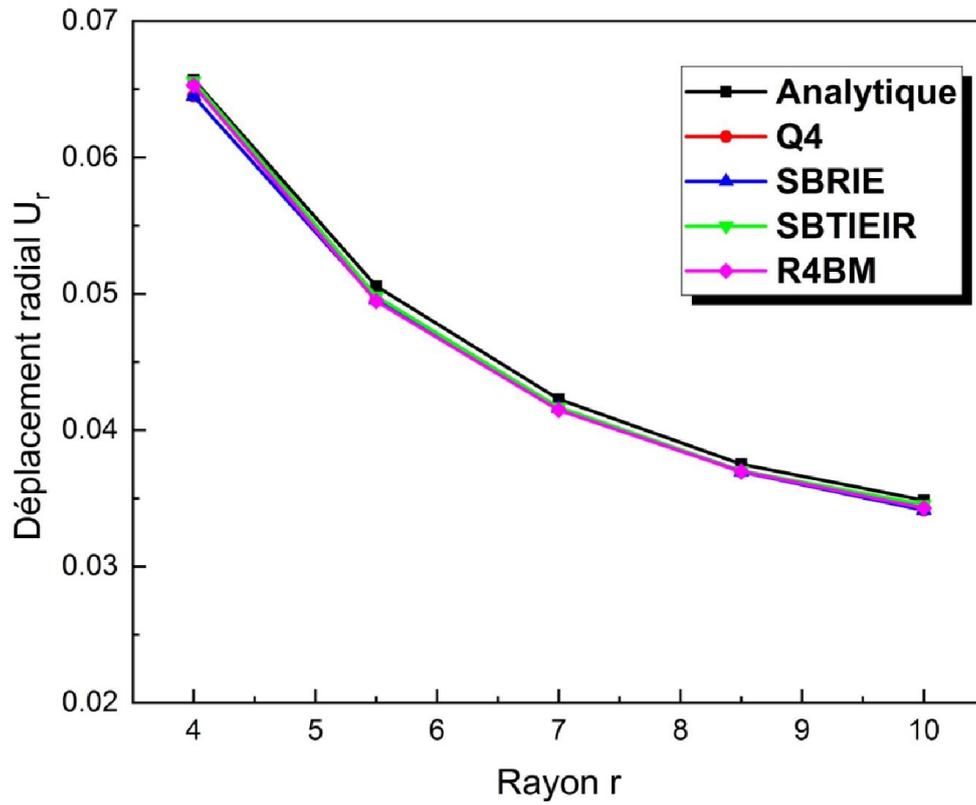


Figure 4.14: Déplacement radial d'un cylindre épais sous une pression interne (maillage 1x4).

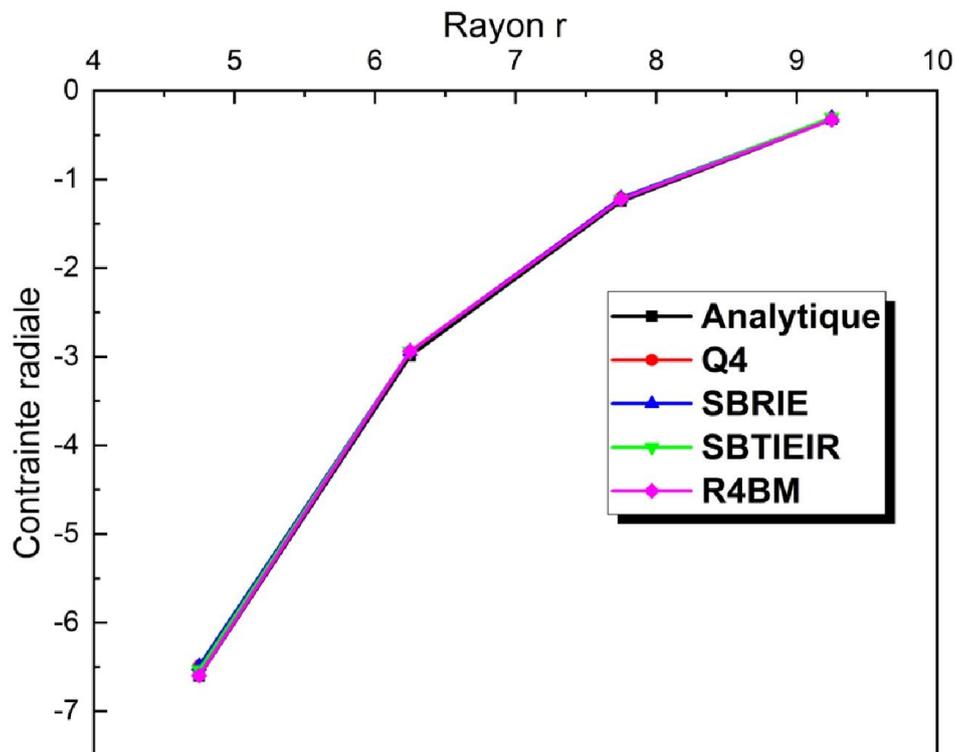


Figure 4.15: Contrainte radiale calculée au centre des éléments d'un cylindre épais sous une pression interne (maillage 1x4).

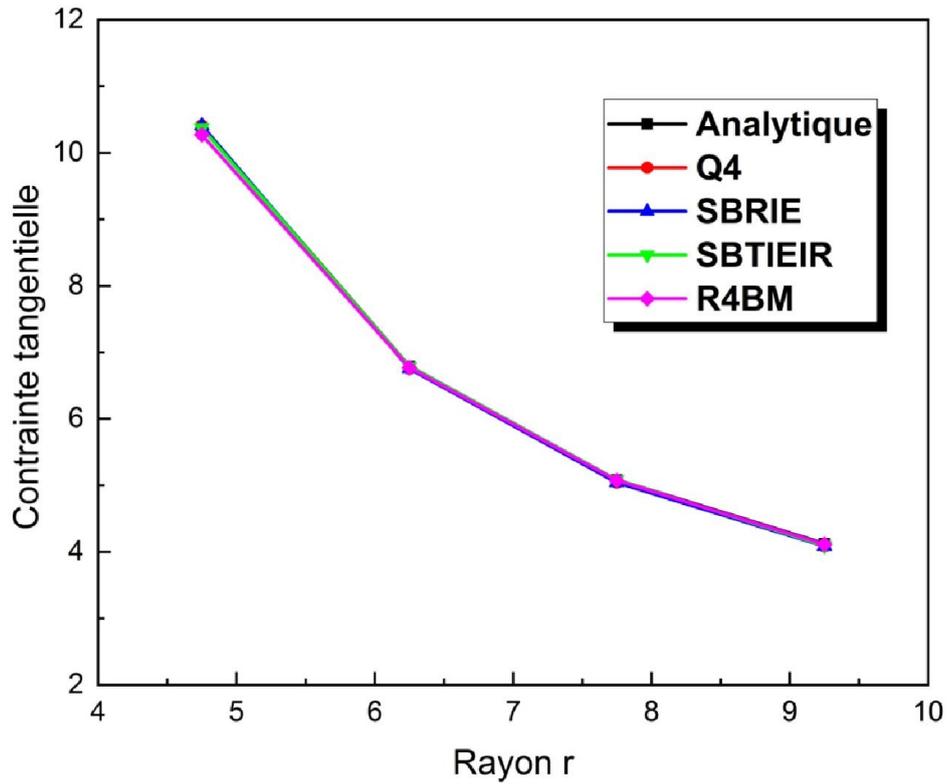


Figure 4.16: Contrainte tangentielle calculée au centre des éléments d'un cylindre épais sous une pression interne (maillage 1x4).

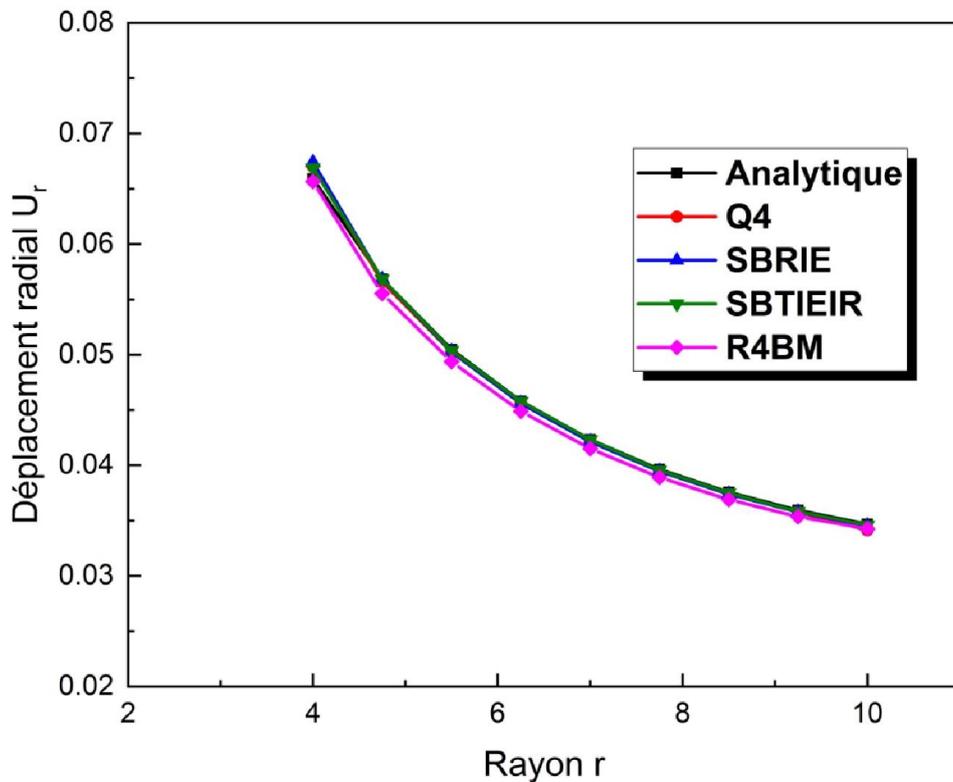


Figure 4.17 : Déplacement radial calculé au centre des éléments d'un cylindre épais sous une pression interne (maillage 1x8).

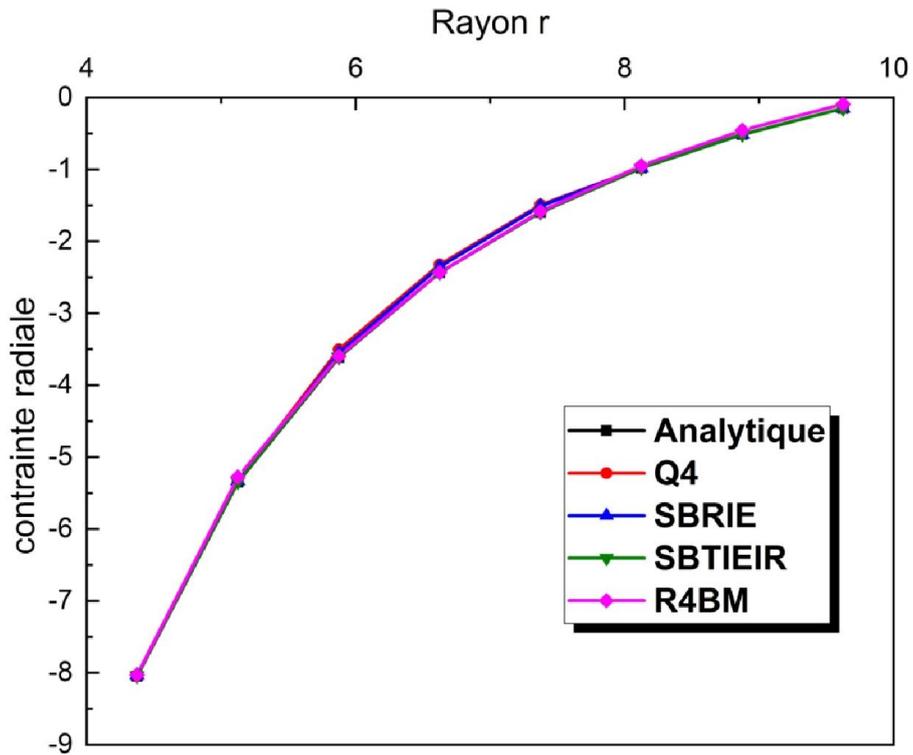


Figure 4.18: Contrainte radiale calculée au centre des éléments d'un cylindre épais sous une pression interne (maillage 1x8)

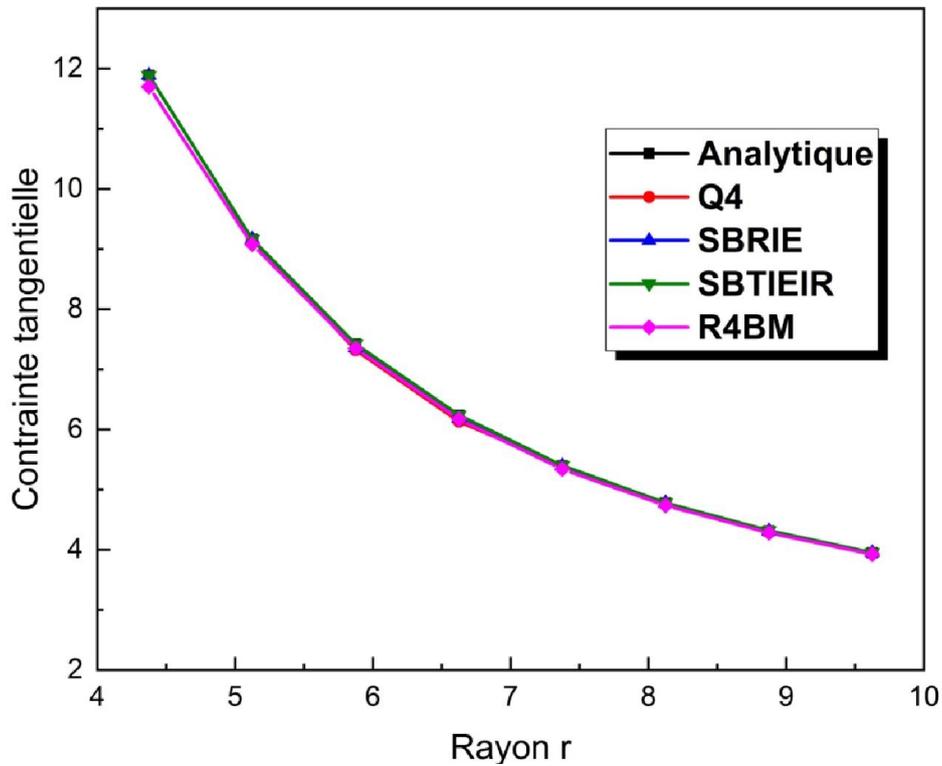


Figure 4.19: Contrainte tangentielle calculée au centre des éléments d'un cylindre épais sous une pression interne (maillage 1x8)

Les résultats des déplacements radiaux et des contraintes radiales et tangentiels représentés sur les Figures (4.14 à 4.19) montrent une bonne compatibilité avec la solution analytique proposée par Timoshenko [Tim.51] pour tous les éléments.

### 4.4.3. Disque annulaire en rotation

Le but de ce problème est de déterminer les déplacements radiaux et les contraintes radiales et tangentiels d'un disque creux axisymétrique tournant autour de l'axe z avec une vitesse angulaire  $\omega=0.5$  supposée constante. Une "tranche" d'épaisseur  $h = 1$  est extraite et discrétisée dans le plan  $(r, z)$  de rayon intérieur  $R_i = a = 4$  et de rayon extérieur  $R_o = b = 10$  comme le montre la figure (4.20), le disque est soumis à une force de volume  $(\rho\omega^2 r)$  sur le long du rayon. Le module de Young et le coefficient de Poisson sont pris respectivement égale à  $E = 1000$ ,  $\nu = 0.33$ , et la densité de masse est  $\rho = 3$ .

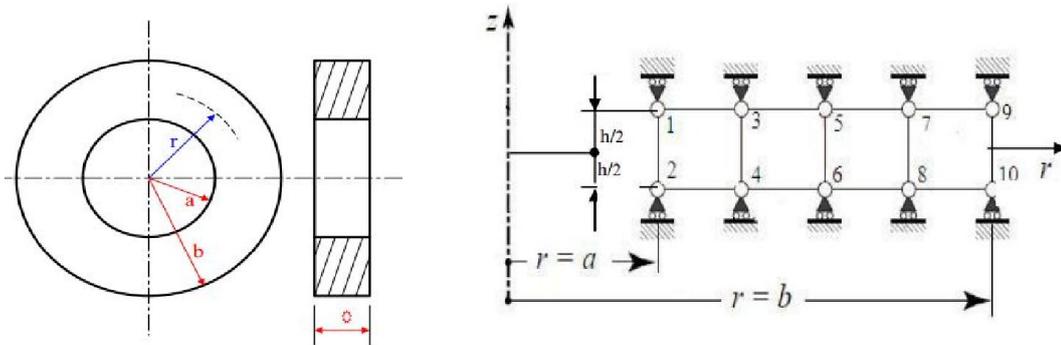


Figure 4.20 : Géométrie et maillage d'un disque annulaire en rotation [Guer.14]

Les résultats obtenus sont comparés à la solution analytique donnée par Timoshenko [Tim.51]

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 R_o^2 \left[ \left( \frac{R_i}{R_o} \right)^2 + 1 - \left( \frac{r}{R_o} \right)^2 - \left( \frac{R_i}{r} \right)^2 \right] \quad (4.44)$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 R_o^2 \left[ \left( \frac{R_i}{R_o} \right)^2 + 1 - \left( \frac{R_i}{r} \right)^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu} \left( \frac{r}{R_o} \right)^2 \right] \quad (4.45)$$

$$U_r = \frac{(3+\nu)(1-\nu)}{8E} \rho \omega^2 R_o^2 r \left[ 1 + \left( \frac{R_i}{R_o} \right)^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \left( \frac{R_i}{r} \right)^2 - \frac{1+\nu}{3+\nu} \left( \frac{r}{R_o} \right)^2 \right] \quad (4.46)$$

La convergence du déplacement radial ( $U_r$ ) aux nœuds, des contraintes radiales ( $\sigma_r$ ) et tangentiels ( $\sigma_\theta$ ) au centre des éléments, est montrée sur les figures (4.21) à (4.23) pour un maillage 1x4 (quatre éléments dans la direction radiale, un seul élément dans le sens axial). Les résultats montrés dans les figures (4.21 à 4.23) indiquent, en générale, la bonne convergence des éléments étudiés vers la solution analytique pour les déplacements radiaux et

les contraintes radiales contrairement aux contraintes tangentielles qui sont moins satisfaisantes pour ce maillage.

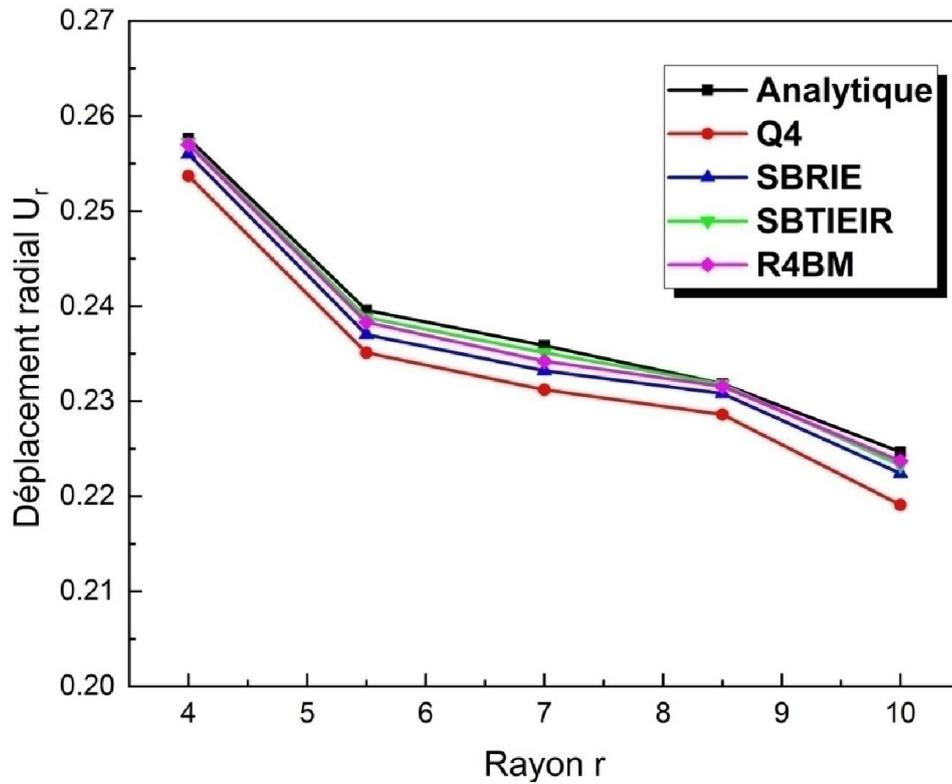


Figure 4.21: Disque en rotation; déplacement radial (maillage 1x4)

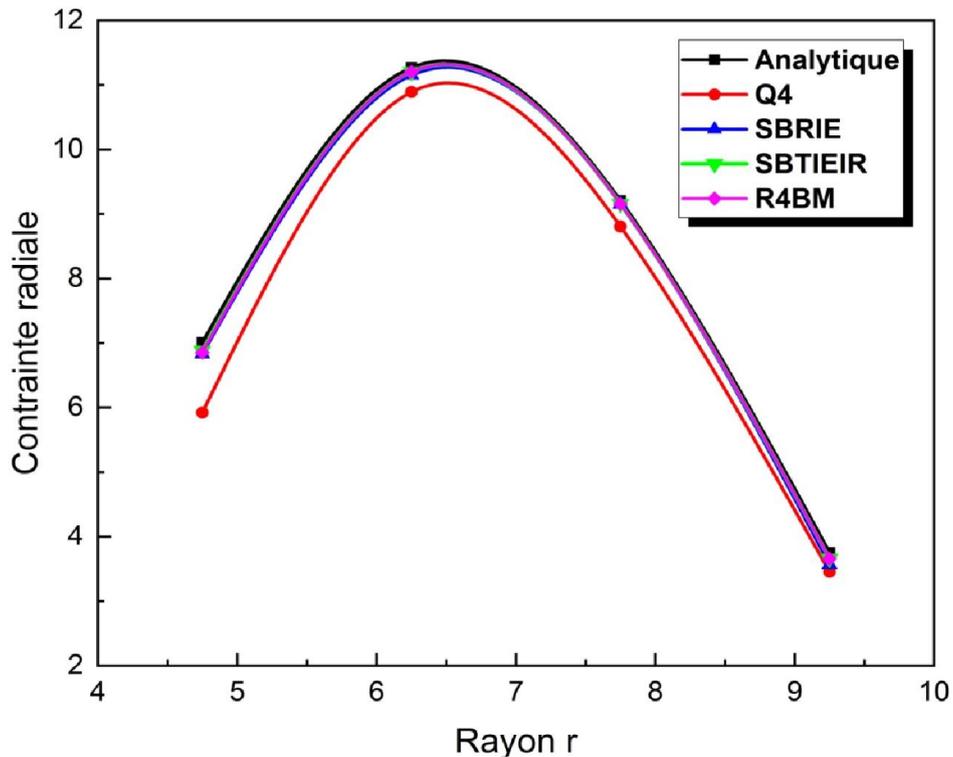
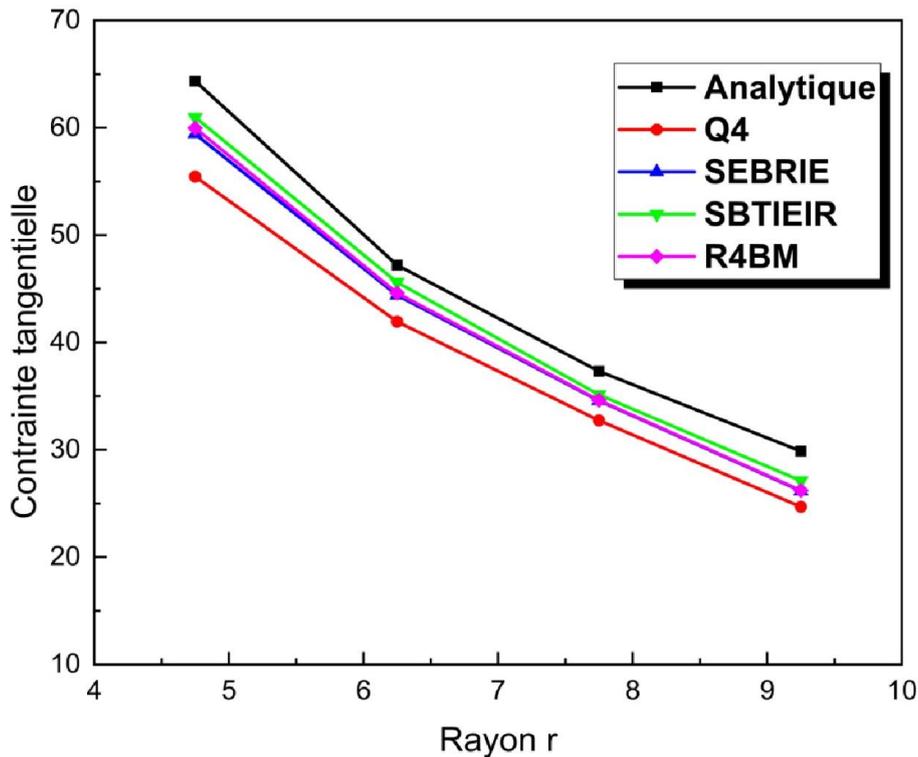


Figure 4.22 : Disque en rotation; contrainte radiale calculée au centre des éléments (maillage 1x4)



**Figure 4.23** : Disque en rotation; contrainte tangentielle calculée au centre des éléments (Maillage 1x4)

#### 4.5. Conclusion

Les éléments basés sur l'approche en déformation SBRIE, SBTIEIR et R4BM formulés en axisymétrie sont présentés dans ce chapitre, la matrice de rigidité est établie grâce à une intégration numérique. Les performances des éléments formulés sont évaluées à travers une série de tests, les résultats correspondant sont comparables aux solutions analytiques et à l'élément Q4, les résultats obtenus montrent clairement les avantages que présente le modèle en déformation par rapport au modèle en déplacement. Les éléments axisymétriques basés sur l'approche en déformation donnent quasiment la solution analytique même pour un maillage réduit ainsi que pour l'élément Q4 mais pas dans le cas des plaques où la flexion est dominante.

L'élément Q4 a une insuffisance dans le cas des plaques contrairement aux éléments à champ de déformation qui donnent de bons résultats soit pour les déplacements radiaux ou pour les contraintes radiales et tangentielles. En conclusion, les résultats reportés dans ce chapitre confirment la supériorité des éléments à champ de déformation par rapport à l'élément Q4, en effet cette supériorité est vérifiée pour tous les cas de tests.

# **CONCLUSION GENERALE**

## **Conclusion générale**

Au cours de ce travail, une recherche bibliographique sur les éléments finis basés sur le modèle en déformation existant dans la littérature a été effectuée, ainsi qu'un aperçu sur les éléments finis courbes formulés par d'autres approches.

Dans le présent travail deux types d'éléments secteurs basés sur l'approche en déformation (tridimensionnel, membranaire) ont été développés.

Le premier élément développé est nommé SBS3D (Strain Based Sector three-Dimensional), destiné à l'analyse linéaire des structures circulaires. Nous avons utilisé l'intégration numérique et analytique dans la construction de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément développé SBS3D, après satisfaction des conditions de compatibilité. Le présent élément SBS3D a été formulé en utilisant le champ de déplacement de l'élément hexaédrique simple à huit nœuds SBH8 basé sur l'approche en déformation développée par Belarbi et Charif [Bela.99] (en remplaçant  $x$  et  $y$  par  $r$  et  $\theta$ ). Cet élément possède trois degrés de liberté essentiels ( $U_r$ ,  $V_\theta$  et  $W$ ) à chacun des huit nœuds de coins. En effet, les résultats numériques obtenus en utilisant cet élément sont en bon accord avec les résultats analytiques, et montrent qu'il est libre de tout verrouillages numériques lorsqu'on modélise un cylindre à paroi épaisse, et convergent vers les solutions analytiques proposées, contrairement à l'élément 3D basé sur l'approche en déplacement B8.

Le deuxième élément baptisé SBST4 (Strain Based Secteur Triangulaire 4-node), basé sur l'approche en déformation, est un élément secteur triangulaire à quatre nœuds, chaque nœud contient seulement les deux translations ( $U_r$  et  $V_\theta$ ). Nous avons utilisé l'intégration numérique à la place de l'intégration analytique dans la construction de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément développé. Cet élément est formulé en se basant sur l'élément rectangulaire à quatre nœuds basé sur l'approche en déformation (SBRIE) développée par Sabir et Salhi [Sab.83a], en utilisant l'approche dite directe (consiste à interpoler sur les variables polaires  $r$  et  $\theta$  de la même manière qu'on le fait sur les variables cartésiennes  $x$  et  $y$  tout en vérifiant l'équation de compatibilité exprimée en coordonnées polaires). Nous avons essayé d'améliorer le comportement en membrane des structures à travers ce nouvel élément. En effet, ce sont les coordonnées cartésiennes, utilisées dans les fonctions de forme de l'élément SBRIE qui ont été transformées en coordonnées polaires. Pour la validation, l'élément développé est passé sur plusieurs tests numériques et les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats analytiques confirmant sa bonne performance.

Finalement, nous avons formulé et examiné des éléments membranaires basés sur l'approche en déformation dans le cas des structures axisymétriques. Les éléments formulés et testés sont les éléments de Sabir [Sab.85a] (SBRIE : Strain Based Rectangular In-plane Element), [Sab.83a] (SBTIEIR : Strain Based Triangular In-plane Element with In-plane Rotation) et l'élément de Belarbi [Bela.05] (R4BM) dont le premier est un élément rectangulaire avec deux degrés de liberté par nœud (U, V), par contre le deuxième est un élément triangulaire qui admet une rotation dans le plan comme degré de liberté additionnel (deux translations et une rotation autour de l'axe z) et le troisième est un élément rectangulaire à cinq nœuds avec un nœud central et possédants deux degrés de liberté par nœud (U, V). L'intégration numérique a été utilisée pour l'obtention de la matrice de rigidité. Les résultats ont montré que les éléments à champ de déformation donnent de bons résultats et surtout lorsque la flexion est dominante.

En conclusion, nous pouvons dire que les nombreuses applications numériques étudiées prouvent la validité et l'efficacité de l'approche en déformation pour l'analyse des structures à contour circulaire et axisymétriques.

Les résultats des éléments basés sur l'approche en déformation sont forts encourageants et permettent de prévoir les possibilités de proposer des extensions possibles de notre travail:

- Une perspective du travail consiste à examiner cet élément dans l'étude dynamique libre et forcée et sur la non linéarité matérielle et géométrique.
- L'implémentation de l'élément formulé dans le code de calcul ABAQUS, et le valider à travers une série de tests de la flexion des poutres, plaques minces et épaisses en statique et en vibration libre et forcée.

# **BIBLIOGRAPHIE**

**BIBLIOGRAPHIE**

- [Agh.07] Aghdam M.M., Mohammadi M., Erfanian V., Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method. *Thin-Walled Structures*, vol.45, pp.983-990, 2007.
- [Arg.60] Argyris J. H., Matrix displacement analysis of anisotropic shells by triangular elements. *J. Roy. Aer. Soc.*, Vol. 69, pp. 801-805, 1965.
- [Ash.71] Ashwell D.G., Sabir A.B., Limitation of certain curved finite elements applied to arches. *IJMS*, vol.13, pp.133-139, 1971
- [Ash.71a] Ashwell D.G., Sabir A.B., Roberts T.M., Further studies in application of curved finite elements to circular arches. *International Journal of Mechanics Science*, vol.13, pp.507-17, 1971.
- [Ash.72] Ashwell D.G., Sabir A.B., A new cylindrical shell finite element based on simple indépendant strain functions. *IJMS* 14, pp.171-183, 1972.
- [Aya.13] Ayad R., Zouari W., Meftah K., Ben Zineb T., Benjeddou A., Enrichment of linear hexahedral finite elements using rotations of a virtual spacefiber. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.95, pp.46–70, 2013.
- [Bap.77] Bapu Rao M.N., Guruswam P., Sampathkumaran K.S. , Finite element analysis of thick annular and sector plates. *International Journal of Nuclear Engineering and Design*, vol.41, pp.247–255, 1977.
- [Bas.00a] Bassayya K., Shrinivasa U., A 14-node brick element, PN5X1, for plates and shells. *Computers & Structures*, vol.74, pp.176 -178, 2000.
- [Bas.00b] Bassayya K., Bahattacharya K., Shrinivasa U., Eight–Node brick, PN340, represents constant stress fields exactly. *Computers & Structures*, vol.74, pp.441-460, 2000.
- [Bela.97] Belarbi M.T., Charif A., Analyse des plaques relativement épaisses à l'aide d'un élément cubique simple basé sur le modèle en déformation. 1<sup>er</sup> Congrès arabe de la mécanique. Damas (Syrie) 1-3 Juin 2, pp.25-30, 1997.
- [Bela.98] Belarbi M.T., Charif A., Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan. *Revue Européenne des Eléments finis*, vol.7, pp.439-458, 1998.
- [Bela.99] Belarbi M.T., Charif A., Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses. *Revue Européenne des Eléments Finis*, vol.8, pp.135-157, 1999.

- [Bela.05]** Belarbi M.T., Maalam T., On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis. *Revue Européenne des Eléments Finis* 40, pp.985-997,2005.
- [Bela.05a]** Belarbi M. T., Bourezane M., On improved Sabir triangular element with drilling rotation. *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 9, pp. 1151-1175, 2005.
- [Belo.05]** Belounar L., Guenfoud M., A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending. *Thin-Walled Structures*, vol.43, pp. 47-63, 2005.
- [Belo.05a]** Belounar L., Analyse du comportement des plaques par éléments finis -Eléments de plaque à champ de déformation-, Thèse de Doctorat d'état, Université de Biskra, 119 pages, 2005.
- [Belo.06]** Belounar L., Benmebarek S., Hamadi D., Plate bending with a solid strain based element that satisfies the equilibrium equations". 6th European Solid Mechanics Conference. ESMC2006, Budapest 28 August-1 September 2006.
- [Belo.08]** Belounar L., Benmebarek S., Analysis of skew rhombic plates using a strain based solid finite element. 8<sup>th</sup> International congress on advances in civil engineering, North Cyprus, 15-17 September 2008.
- [Belo.11]** Belounar L., Benmebarek S., A rectangular strain based finite element for plate bending analysis. *CMM-2011 – Computer Methods in Mechanics*, Warsaw, Poland. Editors, A. Borkowski, T. Lewinski, G. Dzierzanowski, 9–12 May 2011.
- [Belo.17]** Belounar L., Belounar A., Houhou M.N., Plate bending with strain based Mindlin triangular finite element. 3<sup>rd</sup>Conference on Advances in Mechanical Engineering ISTANBUL 2017-ICAME2017, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey, 19-21December 2017.
- [Belo.14]** Belounar L., Guerraiche K., A new strain based brick element for plate bending. *Alexandria Engineering Journal*, vol. 53, pp. 95–105, 2014.
- [Belo.14a]** Belounar L., Guerraiche K., Rebiai C., Benmebarek S., A 3D eight nodes brick finite element based on the strain approach,International Conference on Civil Engineering and Applied Mechanics (ICCEAM 2014), Dubai UAE, December 25-26, 2014.
- [Belo.A.17]** Belounar A., Belounar L., Houhou M.N., Analysis of circular plate bending with a quadrilateral strain based finite element, 3<sup>rd</sup>Conference on Advances in Mechanical Engineering ISTANBUL 2017-ICAME2017, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey, 19-21December 2017.
- [Belo.16]** Belounar L., Messai A., Merzouki T., Fortas L., A comparative study of membrane finite elements based on the strain approach. *Academic Journal of civil Engineering*, vol. 34, pp. 66–72, 2016.

- [Belo.A.17a]** Belounar A., Houhou M.N., Belounar L., Numerical Study with Membrane Strain Based finite elements, International Symposium on Construction Management And Civil Engineering (ISCMCE-2017), SKIKDA-ALGERIA.,15-16 November 2017.
- [Belo.A.19]** Belounar A., Eléments finis membranaires et flexionnels à champ de déformation pour l'analyse des structures. Thèse de doctorat, Université de Biskra, Juin 2019.
- [Belo.A.19a]** Belounar A., Benmebarek S., Houhou M.N., Belounar L., Static, free vibration and buckling analysis of plates using strain-based Reissner–Mindlin elements. International Journal of Advanced Structural Engineering, vol. 11, pp.211-230,2019.
- [Belo.A.19b]** Belounar A., Belounar L., Fortas L., Mohamed Houhou M.N., Free vibration of plates with square openings using triangular Mindlin element. 5<sup>th</sup> Conference on Advances in Mechanical Engineering ISTANBUL 2017-ICAME2017, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey, 17-19December 2019.
- [Belo.A.20]** Belounar A., Benmebarek S., Belounar L., Strain based triangular finite element for plate bending analysis. Mechanics of advanced materials and structures, vol. 27 (8) , pp.620-632, 2020.
- [Belo.A.20a]** Belounar A., Benmebarek S., Houhou M.N., Belounar L., Free vibration with mindlin plate finite element based on the strain approach. Journal of the Institution of Engineers (India) Series (C), 101(2), pp.331-346, 2020.
- [Bou.87]** Bouzerira C., Finite element analysis for general plane elasticity, Msc. Thesis, University of Walles College of Cardiff (G.B.), 1987.
- [Bou.05]** Bouzrira C., Sabir A.B., Nemouchi Z., A sector inplane finite element in polar coordinates with rotational degree of freedom. Archives of Civil Engineering, vol. 51, pp. 471-483, 2005.
- [Bou.15]** Bouzriba A., Bouzerira C., Sector element for analysis of thick cylinders exposed to internal pressure and change of temperature. Gradevinar, vol. 67, pp.547-555, 2015.
- [Bour.17]** Bourezane M., Efficient Strain Based Cylindrical Shell Finite Element. Journal of Solid Mechanics, vol. 9, pp. 632-649, 2017.
- [Bouz.19]** Bouzidi L., Belounar L., Guerraiche K., Presentation of a new membrane strain-based finite element for static and dynamic analysis, International Journal of Structural Engineering, vol. 10, pp. 40-60, 2019.

- [Bouz.17]** Bouzidi L., Messai A., Fortas L., Belounar A., Marzouki T., Etude comparative des éléments tridimensionnels basés sur l'approche en déformation pour l'analyse des plaques. 2nd International Conference on Material and Structural Mechanics – MSM 2017, Merrakech, Morocco 2017.
- [Buc.91]** Buchanan G.R., Peddieson L.S., Vibration of infinite piezoelectric cylinders with anisotropic properties using cylindrical finite elements. IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Control, vol.38, pp.291-296, 1991.
- [Bul.84]** Bull J.W., The Strain approach to the development of thin cylindrical shell finite element. Thin-Walled Structures, vol. 2, pp. 195-205, 1984.
- [Bus.70]** Bushnell D., Almroth B.O., Finite difference method for non-linear shell analysis. International Journal to Computers and Structures, vol. 3, pp. 361-388 (1970).
- [Bus.73]** Bushnell D., Finite-Difference Energy Models versus Finite-Element Models: Two Variational Approaches in One Computer Program, Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, pp. 291-336, 1973.
- [Can.68]** Cantin G., Clouth.R.W., A curved cylindrical shell finite element. AIAA Journal, vol. 6, pp. 1057-1062, 1968.
- [Can.69]** Cantin G., Rigid-body motions in curved finite elements. AIAA J. 8, pp. 1252-1255, 1969.
- [Cha.90]** Charhabi A., Calcul des plaques minces et épaisses à l'aide des éléments finis tridimensionnels. Annales de l'ITBTP n° 486, septembre 1990.
- [Cheu.75]** Cheung Y. K., Kwok W. L., Dynamic analysis of circular and sector thick, layer plates, journal of sound and vibration, vol. 42, pp.147-158, 1975.
- [Chen.80]** Chen W.F., Suzuki H., Chang T.Y., Nonlinear analysis of concrete cylinder structures under hydrostatic loading. Comput Struct, vol. 12, pp. 559-570, 1980.
- [Cheu.00]** Cheung Y. K, Zhang Y. X, Chen W. J. A refined nonconforming plane quadrilateral element, Computers and Structures, vol. 78, pp. 699–709, 2000.
- [Che.04]** Chen Y. I., Wu G .Y., A mixed 8-node hexahedral element based on the HuWashizu principle and the field extrapolation technique. Structural Engineering and Mechanics, vol, 17, pp. 113-140, 2004.
- [Cho.06]** Choi N., A hybrid Trefftz plane elasticity element with drilling degrees of freedom, Computer Methods in Applied. Mechanics Engineering. vol. 195, pp. 4095-4105, 2006.

- [Clo.60]** Clough R.W., "The finite element method in plane stress analysis." Proceedings. Second ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA, pp. 345-378. September 1960.
- [Cook.88]** Cook W.A., Body-oriented coordinates applied to the finite element method. Engineering Analysis, vol. 5, pp. 2-11, 1988.
- [Dan.96]** Danielson K.T., Noor A.K., Computational strategies for tire modeling and analysis. Computers and Structures, vol. 61, pp. 673-693, 1996.
- [Dan.96a]** Danielson K.T., Noor A.K., Finite elements developed in cylindrical coordinates for three-dimensional tire analysis. Presented at the 15th annual meeting of The Tire Society at The University of Akron, Akron, Ohio, March 19-20, 1996.
- [Dan.97]** Danielson K.T., Noor A.K., Three-dimensional finite element analysis incylindrical coordinates for nonlinear solid mechanics problems. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 27, pp. 225-249, 1997.
- [Dar.07]** Daryl L., A first course in the finite element method, fourth edition , Thomson US, (2007).
- [Der.84]** Der Avanessian G.V., Finite element analysis of curved box girder bridges. PhD thesis University College Cardiff; 1984.
- [Djo.90]** Djoudi M.S., Strain based Finite Elements for linear and geometrically analysis of structures, PHD thesis, University of Walles College of Cardiff (G.B.), June 1990.
- [Djo.03]** Djoudi M.S., Bahai H., A shallow shell finite element for the linear and nonlinear analysis of cylindrical shells. Engineering Structures, vol.25, pp.769-778, 2003.
- [Djo.04]** Djoudi M.S., Bahai H., Strain based finite element for the vibration of cylindrical panels with opening. Thin-Walled structures, vol. 42, pp. 575–588, 2004.
- [Djo.04a]** Djoudi M.S., Bahai H., A cylindrical strain-based shell element for vibration analysis of shell structures. Finite Elements in Analysis and Design ,vol.40, pp. 1947-1961, 2004.
- [Fon.73]** Fonder G.A., Clough R.W., Explicit rigid-body motion in curved finite elements. AIAA J. 11, pp.305-312, 1973.
- [For.16]** Fortas L., Belounar L., Messai A., Marzouki T., The implementation of membrane finite elements based on the strain approach in the ABAQUS code, 2<sup>nd</sup> International Conference on Material and Structural Mechanics - MSM 2016Marrakech, 23-25 November 2016.

- [For.19]** Fortas L., Belounar L., Merzouki T., Formulation of a new finite element based on assumed strains for membrane structures. *International Journal of Advanced Structural Engineering*, vol. 11, pp. 9-18, 2019.
- [Fre.07]** Fredriksson M., Ottosen N. S., Accurate eight-node hexahedral element, *International Journal for Numerical Methods and Engineering*. vol. 72, pp. 631–657, 2007.
- [Gal.76]** Gallagher R.H. *Introduction aux éléments finis*, Edition Pluralis, 1976.
- [Gea.90]** Geannakakes G.N., Vibration analysis of arbitrarily shaped plates using beam characteristic orthogonal polynomials in the semi-analytical finite strip method. *J. Sound Vibr*, vol. 137, pp. 283-303, 1990.
- [Guer.14]** Guerraiche K., *Eléments finis d'élasticité plane et de volume basés sur l'approche en déformation*. Thèse de Doctorat d'état, Université de Biskra, 116 pages, 2014.
- [Guer.18]** Guerraiche K., Belounar L., Bouzidi L., A new eight nodes brick finite element based on the strain approach. *Journal of solid mechanics*, vol. 10, pp. 186–199, 2018.
- [Gur.79]** Guruswam P., Yang T.Y., A sector finite element for dynamic analysis of thick plates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 62, pp. 505–516, 1979.
- [Hai.67]** Haisler W.E., Stricklin J.A., Rigid-body displacements of curved elements in the analysis of shells by the matrix-displacement method. *AIAAJ*, vol. 5, pp. 1525- 1527, 1967.
- [Ham.06]** Hamadi D., "Analysis of structures by non-conforming finite elements". PhD Thesis, Civil engineering department, Biskra University, Algeria, 2006, pp. 130.
- [Ham.10]** Hamadi D., Maalem T., Presentation of an Efficient Parallelepiped Finite Element Based on the Strain Approach "SBP8C". *Proceedings of the World Congress on Engineering 2010 Vol III WCE 2010*, June 30 - July 2, 2010, London, U.K
- [Hou.58]** Houbolt J. C., *A Study of Several Aerothermoelastic Problems of Aircraft Structure in High-speed Night*. Zurich: Verlag Leemann 1958.
- [Houm.04]** Houmat A., Three-dimensional hierarchical finite element free vibration analysis of annular sector plates. *Journal of Sound and Vibration*, 276, pp.181–193, 2004.
- [Jon.66]** Jones R.E., Strome D.R., Direct stiffness method analysis of shells of revolution utilizing curved elements, *AIAA J*, vol. 4, pp. 1519-1525, 1966.

- [Kam.74]** Kamaiah G.K., Vijayakumar K., Natural frequencies of circumferentially truncated sector plates with simply supported straight edges. *J. Sound Vibr*, vol. 34, pp. 53-61, 1974.
- [Kat.15]** Katili I., Batoz J. L., Maknun I. J., Hamdouni A., and O. Millet, The development of DKMQ plate bending element for thick to thin shell analysis based on the Naghdi/Reissner/Mindlin shell theory, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 100, pp. 12–27, 2015.
- [Kem.92]** Kempel L.C., Volakis J.L., A collection of edge-based elements, in: *Electromagnetic characterization of conformal antennas*. The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, NASA-CR-189530, 1992.
- [Khi.17]** Khiouani H.E., Houhou M.N., Belounar L., Guerraiche K., Contribution of Strain Based Finite Elements for Circular Curved Structures Analysis, *International Symposium on Construction Management And Civil Engineering (ISCMCE-2017)*, SKIKDA-ALGERIA.,15-16 November 2017.
- [Khi.20]** Khiouani H.E., Belounar L., Houhou M.N., A New Three-Dimensional Sector Element for Circular Curved Structures Analysis. *Journal of solid mechanics*, vol. 12, pp. 165–174, 2020.
- [Kim.89]** Kim C.S., Dickinson S.M., On the free, transverse vibration of annular and circular, thin, sectorial plates subjected to certain complicating effects. *J. Sound Vibr*, vol. 134, pp. 407-421, 1989.
- [Kim.90]** Kim Y.H., Jones R.F., Lee S.W., Study of 20-node solid element. *Communication in Applied Numerical Methods in Engineering*, vol. 6, pp. 197-205, 1990.
- [Kir.72]** Kirkhope J., Wilson G.J., Vibration of circular and annular plates using finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 4, pp. 181–193, 1972.
- [Kiri.73]** Kiritchevskii V.V. Nonlinear finite element equations in curvilinear coordinates, in: *Soprotivliniye Materialov i Teoriya Sooruzheniya*, Izdatelstvo Budivelnik, Kiev, vol. 20, pp.43-51,1973.
- [Lem.00]** Lemosse D., *Eléments finis isoparamétriques tridimensionnels pour l'étude des structures minces*, Thèse de doctorat, Ecole Doctorale SPMI/INSA Rouen, 2000.
- [Lo.00]** Lo S.H., Ling C., Improvement on the 10-node tetrahedral element for threedimensional problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 189, pp. 961-974, 2000.

- [Mac.90] MacGregor J.D., A three-dimensional viscous flow model of stator/rotor interaction in turbomachines. Ph.D. Dissertation, Texas A&M University, College Station, Texas, 1990.
- [Mac.92] MacGregor J.D., Baskharone E.A., A three-dimensional viscous flow model of unsteady stator/rotor interaction. Proc. 4th International. Symposium. On Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery, Vol. A, Honolulu, Hawaii, 1992.
- [Meb.71] Mebane P.M., Stricklin J.A., Implicit rigid-body motion in curved finite elements. AIAAJ, vol. 9, pp. 344-345, 1971.
- [Mes.19] Messai A., Belounar L., Merzouki T., Static and free vibration of plates with a strain based brick element. European journal of computational mechanics, 2019. DOI: 10.1080/17797179.2018.1560845.
- [Min.51] Mindlin R.D., Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 18, pp.31–38, 1951.
- [Miz.91] Mizusawa T., Application of the spline element method to analyse vibration of annular sector plates. J. Sound Vibr, vol. 149, pp. 461-470, 1991.
- [Miz.92] Mizusawa T., Kajita T., Vibration of annular sector plates using the spline strip method. Commun. appl. Numer. Meth, vol. 8, pp. 537-546, 1992.
- [Mou.94] Mousa A. I., Sabir A. B., Finite Element Analysis of Fluted Conical Shell Roof Structures. Civil-Comp-Ltd, Edinburgh, Scotland, Computational Structural Engineering for Practice, pp. 173-181, 1994.
- [Mou.01] Mousa A. I., Finite Element Analysis of Rectangular-Plan Cylindrical Croined Vault. Al Azhar University Engineering Journal, AUEJ, Vol. 2, Egypt, 2001.
- [Mou.15] Mousa A., Djoudi M., New Strain based Triangular Finite Element for the Vibration of Circular Cylindrical Shell with Oblique End. International Journal of Civil & Environmental Engineering IJCEE –IJENS, vol. 15, pp. 6-11, 2015.
- [Mou.15a] Mousa A., Djoudi M., A Shallow Shell Finite Element for the Linear and Non-linear Analysis of Spherical Shells. International Journal of Civil & Environmental Engineering IJCEE –IJENS, vol. 15, pp. 24-28, 2015.
- [Mou.15b] Mousa A., Ahmed E., Al-Juaidi., Strain Based Finite Element for Cylindrical Shell under Sinusoidal Loads. American Journal of Engineering Research (AJER), vol.4, pp 163-170, 2015.
- [Ols.70] Olson M.D., Lindberg G.M., Annular and circular sector finite element for plate bending. International Journal of Mechanical Sciences, vol. 12, pp.17–33, 1970.

- [Ooi.04]** Ooi E.T., Rajendran S., Yeo J.H., A 20-node hexahedron element with enhanced distortion tolerance. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 60, pp. 2501–2530, 2004.
- [Prz.68]** Przemieniecki J.S., *Theory of Matrix Structural Analysis*. McGraw-Hill. New York, 1968.
- [Raj.69]** Raju I.S., Rao A.K., Stiffness matrices for sector elements. *AIAAJ*, vol. 7, pp. 156-157, 1969.
- [Raj.73]** Raju I.S., Krishna A.V., Rao A.K., Sector elements for matrix displacement analysis. *IJNME*. Vol. 6, pp. 553-563, 1973.
- [Ram.73]** Ramakrishnan R., Kunukkasseril V. X., Free vibration of annular sector plates. *J. Sound Vibr*, vol. 30, pp.127-129, 1973.
- [Ram.77]** Ramakrishnan R., Kunukkasseril V. X., Response of circular bridge decks to moving vehicles. *Eurhq. Engng Struct. dynam* vol. 5, pp. 377-394, 1977.
- [Reb.13]** Rebiai C., Belounar L., A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and nonlinear analysis. *archives of civil and mechanical engineering*, vol. 13, pp. 72–81, 2013.
- [Reb.14]** Rebiai C., Belounar L., An effective quadrilateral membrane finite element based on the strain approach. *Measurement*, vol. 50, pp. 263–269, 2014.
- [Rei.45]** Reissner E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics ASME*, vol. 12, pp. 69-77, 1945.
- [Rez.14a]** Rezaiee-Pajand M., Yaghoobi M., "A robust triangular membrane element". *Lat. Amer. J. Sol. Struc.*, vol. 11, pp. 2648-2671, 2014.
- [Rez.14b]** Rezaiee-Pajand M., Yaghoobi M., "An efficient formulation for linear and geometric non-linear membrane elements". *Lat. Amer. J. Sol. and Struc.*, vol. 11, pp. 1012-1035, 2014.
- [Rez.15]** Rezaiee-Pajand M., Yaghoobi M., "Two new quadrilateral elements based on strain states", *Civ.Eng. Inf. J.*, vol. 48, pp. 133-156, 2015.
- [Rul.86]** Rule W.K., A simple nonlinear constitutive model for finite element investigation of reinforced concrete structures. PhD thesis, Department of Engineering Mechanics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin, 1986.
- [Rul.89]** Rule W.K., Rowlands R.E., A simple orthotropic elasticity based constitutive model for reinforced concrete. *Expt Mech*, pp.448–454, 1989.

- [Run.78]** Runge K.H., Haynes H.H., Experimental implosion study of concrete structures. In Proceedings of the Eighth Congress of the Federation International de la Precontrainte. London, England, May 1978.
- [Sab.71]** Sabir A.B., Ashwell D. G., A comparison of curved beam finite elements when Used in vibration problems. Journal of Sound and Vibration, Volume 18, Issue 4, pp 555-563, 1971.
- [Sab.72]** Sabir A.B., Lock A.C., The application of finite element to the large deflection geometrically nonlinear behavior of cylindrical shells. International Journal of Variational Methods in Engineering Southampton, pp. 766-775, 1972.
- [Sab.73]** Sabir A.B., Lock AC., Large deflection geometrically nonlinear finite elements analysis of circular arches. International Journal of Mechanical Sciences. vol. 15, pp. 37-47, 1973.
- [Sab.75]** Sabir A.B., Stiffness matrices for the general deformation (out of plane and inplane) of curved beam elements based on independent strain functions. The mathematics of finite elements and applications II. Editor J.R.Whiteemen, Chapter 34, 411-421 Academic Press, 1975.
- [Sab.79]** Sabir A.B., Ashwell D .G., Diffusion of Concentrated Loads into Thin Cylindrical Shells. The Math of Finite Element and Applications II, Academic Press, 33, pp. 379-389, 1979.
- [Sab.82]** Sabir A.B., Charchafchi T.A., Curved rectangular and quadrilateral shell element for cylindrical shell. The mathematics of finite elements and application IV Editor. JR.Whiteman, pp. 231- 239, 1982.
- [Sab.83]** Sabir A.B., Strain based finite elements for the analysis of cylinders with holes and normally intersecting cylinders. Nuclear Engineering and Design, vol. 76, pp. 111-120, 1983.
- [Sab.83a]** Sabir A.B., A new class of Finite Elements for plane elasticity problems. CAFEM 7th, International Conference of Structural Mechanics In Reactor Technology, Chicago. 1983.
- [Sab.83b]** Sabir A.B., Chow F.Y., Elastic buckling of flat panels containing circular and square holes. International conference on instability and plastic collapse of steel structures. Manchester University, 1983.
- [Sab.85]** Sabir A.B., Ramadhani F., A shallow shell finite element for general shell analysis. Variational Methods in Engineering Proceeding of the 2nd International Conference, University of Southampton England , 1985.

- [Sab.85a]** Sabir A.B., A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom. Chapter 9 in Proceeding of the 2nd International Conference on Variational Methods in Engineering, Southampton University, Springer-Verlag, Berlin, pp. 17-25, 1985.
- [Sab.86]** Sabir A. B., Salhi H. Y., A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates. Res. Mechanica, vol. 19, pp. 1-16, 1986.
- [Sab.87]** Sabir A.B., Strain Based Shallow Spherical Shell Element. Proc. Of Int.Conf. on the Mathematics of Finite Elements and Applications, Bunel University, 1987.
- [Sab.88]** Sabir A .B., El-Erris H.F., A New Conical Shell Finite Element Computational Mechanics m. 88, pp 613-616, 1988
- [Sab.95]** Sabir A.B., Sfendji A., Triangular and Rectangular plane elasticity finite elements. Thin-Walled Structures, vol. 21, pp. 225-232, 1995.
- [Sab.97]** Sabir A.B., Moussa A.I., Analysis of fluted conical shell roofs using the finite element method.Computers & Structures, vol. 64, pp. 239-251, 1997.
- [Saw.71]** Sawko F., Merriman P.A., An annular segment finite element for plate bending, International Journal for Numerical Methods in Engineering. vol. 3, pp. 119–129, 1971.
- [Sin.90]** Singh J.P., Dey S.S., Variational finite difference method for free vibration of sector plates. Journal of Sound and Vibration, vol. 136, pp. 91–104, 1990.
- [Smi.04]** Smith I.M. , Griffith D.V., Programming the Finite Element Method. fourth ed. , John Wiley & Sons, UK, 2004.
- [Sri.85]** Srinivasan R.S., Thiruvengkatachari V., Static and dynamic analysis of stiffened plates. Comput. Struct, vol. 21, pp. 395-403, 1985.
- [Sri.89]** Srinivasa R.S., Ramachandra L.S., Large deflection analysis of bimodulus annular and circular plates using finite elements, computers and structures. vol. 31, pp. 681–691. 1989.
- [Sze.01]** Sze K.Y., Chan W.K., A six-node pentagonal assumed natural strain solid shell element. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 37, pp. 639-655, 2001.
- [Trin.09]** Trinh V.D., Formulation, développement et validation d'éléments finis de type coques volumiques sous intégrés Stabilisés utilisables pour des problèmes a cinématique et comportement non linéaires. Thèse de doctorat, Ecole Doctorale, ENSAM-Paris, 2009.

- [Tia.90]** Tian Z.S., A study of stress concentrations in solids with circular holes by three dimensional special hybrid stress finite elements. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, vol. 25, pp. 29-35, 1990.
- [Tim.51]** Timoshenko S., Goodier J. N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill. 2nd ed, 1951.
- [Tim.59]** Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., *Theory of plates and shells*, London, McGraw-Hill, 1959.
- [Tur.56]** Turner M.J., Clough R .W., Martin H .C., Topp L .J., Stiffness and deflection analysis of complex structures, *J. of Aeron. Sci.* Vol. 23, pp. 805-824, 1956.
- [Vai.73]** Vainberg D.V., Kiritchevskii V.V., Sakharov A.S., Finite element equations referred to curvilinear basis, in: *Soprotivliniye Materialov i Teoriya Sooruzheniya*, Izdatelstvo Budivel'nik, Kiev, vol. 16, pp. 125-129, 1973.
- [Ven.96]** Venkatesh D.N., Shrinivasa U., Plate bending with hexahedral with PN elements. *Computers & Structures*, vol. 60, pp. 635-641, 1996.
- [Yua.88]** Yuan F., Miller R.E. , A rectangular finite element for moderately thick flat Plates. *Comput. Struct.*, vol. 30, pp. 1375–1387, 1988.
- [Zie.67]** Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K., *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*. McGraw-Hill, London, 1967.
- [Zou.16]** Zouari W ., Hammadi F., Ayad R., Quadrilateral membrane finite elements with rotational DOFs for the analysis of geometrically linear and nonlinear plane problems. *Computers and Structures*, vol. 173, pp. 139–149, 2016.

# **ANNEXES**

## Annexe A

La matrice de transformation [C] (24x24) pour l'élément SBS3D est la suivante:

$$[C] = \begin{bmatrix} P_1(r_1, \theta_1, z_1) \\ P_2(r_2, \theta_2, z_2) \\ P_3(r_3, \theta_3, z_3) \\ P_4(r_4, \theta_4, z_4) \\ P_5(r_5, \theta_5, z_5) \\ P_6(r_6, \theta_6, z_6) \\ P_7(r_7, \theta_7, z_7) \\ P_8(r_8, \theta_8, z_8) \end{bmatrix}$$

Où la matrice 3x24 de l'équation (7) est donnée comme suit:  $[P(r_i, \theta_i, z_i)] =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \theta_i & 0 & z_i & r_i & r_i \theta_i & r_i z_i & r_i \theta_i z_i & 0 & -\frac{1}{2} \theta_i^2 & 0 & \frac{1}{2} \theta_i^2 z_i & 0 & -\frac{1}{2} z_i^2 & 0 & -\frac{\theta_i z_i^2}{2} & \frac{\theta_i}{2} & \frac{\theta_i z_i}{2} & 0 & -\frac{\theta_i z_i}{2} & \frac{z_i}{2} & \frac{\theta_i z_i}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -r_i & -z_i & 0 & 0 & -\frac{1}{2} r_i^2 & 0 & -\frac{1}{2} r_i^2 z_i & \theta_i & r_i \theta_i & \theta_i z_i & r_i \theta_i z_i & 0 & 0 & -\frac{1}{2} z_i^2 & -\frac{1}{2} r_i^2 z_i & -\frac{1}{2} r_i & \frac{1}{2} r_i z_i & \frac{1}{2} z_i & \frac{1}{2} r_i z_i & 0 & -\frac{1}{2} r_i z_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \theta_i & -r_i & 0 & 0 & -\frac{r_i}{2} & -\frac{r_i \theta_i}{2} & 0 & 0 & -\frac{\theta_i}{2} & -\frac{r_i \theta_i}{2} & z_i & r_i z_i & \theta_i z_i & r_i \theta_i z_i & 0 & -\frac{r_i \theta_i}{2} & \frac{\theta_i}{2} & \frac{r_i \theta_i}{2} & \frac{r_i}{2} & \frac{r_i \theta_i}{2} \end{bmatrix}$$

et  $r_i, \theta_i, z_i$  sont les coordonnées des huit nœuds  $i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ )

Pour un matériau isotrope, la matrice d'élasticité [D] s'écrit:

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
S &= (r_2 x r_1); & S_1 &= (r_1^2 x r_2) + (r_2^2 x r_1); & S_2 &= (r_1^2 x r_2^2); \\
S_3 &= (r_1^3 x r_2^2) + (r_2^3 x r_1^2); & S_4 &= (r_2^4 x r_1) + (r_1^4 x r_2); & S_5 &= (r_2^3 x r_1) + (r_1^3 x r_2); \\
H_1 &= 4.c.h.D_{11}.L; & H_2 &= 4.c.E_1.h.(D_{11} + D_{12}); \\
H_3 &= 4.c.h.D_{11}.L; & H_4 &= \frac{2}{3}.c.h.D_{11}.(4.E_1 - c^2.L) \\
H_5 &= -\frac{2}{3}.c.h^3.D_{11}.L; & H_6 &= 4.c.h.D_{44}.L \\
H_7 &= -4.c.h.D_{44}.L & H_8 &= c.h.D_{44}.L.(E_2 - 4.E_1) \\
H_9 &= -\frac{2}{3}.c.h^3.D_{44}.L & H_{10} &= \frac{2}{3}.c.h^3.D_{44}.L \\
H_{11} &= -2.c.h.D_{44}.L & H_{12} &= 4.h.L.c.\left(\frac{1}{3}.D_{11}.c^2 + D_{44}\right) \\
H_{13} &= \frac{1}{3}.c.h.E_1.(3.D_{44}.(4 - E_1) + 4.c^2.(D_{11} + D_{12})) & H_{14} &= \frac{2}{3}.c.h^3.D_{44}.L \\
H_{15} &= -\frac{2}{3}.c.h^3.L.\left(\frac{1}{3}.c^2.D_{11} + D_{44}\right) & H_{16} &= 2.c.h.L.\left(\frac{2}{3}.D_{11}.C^2 + D_{44}\right) 4.19 \\
H_{17} &= \frac{2}{3}.c.h.E_2.(3.D_{44} + 2.C^2.D_{11} + 2.C^2.D_{12}) & H_{18} &= -4.c.E_1.h.D_{44} \\
H_{19} &= \frac{4}{3}.c^3.E_2.h.D_{12} & H_{20} &= \frac{8}{9}.c^3.E_3.h.D_{12} \\
H_{21} &= \frac{4}{3}.c^3.E_2.h.D_{12} & H_{22} &= \frac{8}{9}.c^3.E_3.h.D_{12} \\
H_{23} &= \frac{4}{3}.c.h^3.D_{11}.L & H_{24} &= \frac{4}{3}.c.E_1.h^3.(D_{11} + D_{12}) \\
H_{25} &= \frac{4}{3}.c.h^3.D_{11}.L & & \\
H_{26} &= \frac{2}{3}.c.h^3.D_{11}.L.\left(2.E_1 - \left(\frac{1}{3}.c^2.L\right)\right) & H_{27} &= \frac{2}{3}.c.h^3.D_{11}.L \\
H_{28} &= 4.c.h.E_2.(D_{11} + D_{12}) & H_{29} &= 4.c.h.E_1.(D_{11} + D_{12}) \\
H_{30} &= \frac{2}{3}.c.h.E_1.(D_{11} + D_{12}).(3.E_6 - c^2) & H_{31} &= -\frac{2}{3}.c.h^3.E_1.(D_{11} + D_{12})
\end{aligned}$$

$$H_{32} = \frac{c.h.E_1}{180} \cdot \left[ D_{44} \cdot ((24.E_6) - 16.E_4 + 3.E_7 + 3.S_1 - 16.S) + 16(D_{11} + D_{12}) \cdot c^2 \cdot E_6 \right]$$

$$H_{33} = -\frac{1}{6} \cdot c.h^3 \cdot D_{44} \cdot (E_2 - 4E_1)$$

$$H_{34} = -\frac{1}{18} \cdot c.h^3 \cdot E_1 \cdot (4.c^2 \cdot (D_{11} + D_{12}) + D_{44} \cdot (12 - 3.E_6))$$

$$H_{35} = \frac{1}{6} \cdot c.h.E_1 \cdot (4.c^2 \cdot (D_{11} + D_{12}) + D_{44} \cdot (12 - 3.E_6))$$

$$H_{36} = \frac{4}{3} \cdot c.h^3 \cdot E_2 \cdot (D_{11} + D_{12})$$

$$H_{37} = \frac{4}{3} \cdot c.h^3 \cdot E_1 \cdot (D_{11} + D_{12})$$

$$H_{38} = \frac{2}{9} \cdot c.h^3 \cdot (D_{11} + D_{12}) \cdot (c^2 \cdot E_1 + 3.E_2)$$

$$H_{39} = \frac{2}{3} \cdot c.h^3 \cdot (D_{11} + D_{12}) \cdot E_1 \quad 9.23$$

$$H_{40} = \frac{c.h.E_2}{180} \cdot (D_{44} \cdot h^2 \cdot (120 + 80.E_1 + 15.E_2) + D_{55} \cdot (45.E_2 - 72.E_3 + 30.E_4) + 80.c^2 \cdot h^2 \cdot (D_{11} + D_{12}))$$

$$H_{41} = \frac{1}{90} \cdot c.h.E_1 \cdot (D_{44} \cdot h^2 \cdot (60 + 15.E_1) + D_{55} \cdot (30.E_2 - 45.E_3 + 18.E_4) + 20.c^2 \cdot h^2 \cdot (D_{11} + D_{12}))$$

$$H_{42} = -\frac{1}{12} \cdot c.h.E_1 \cdot (2.D_{44} \cdot h^2 \cdot (4 + E_1) + 3.D_{55} \cdot (2.E_1 - E_3))$$

$$H_{43} = -\frac{1}{90} \cdot c.h.E_1 \cdot (D_{44} \cdot h^2 \cdot (60 + 15.E_1) + D_{55} \cdot (30.E_2 - 18.E_4) + 20.c^2 \cdot h^2 \cdot (D_{11} + D_{12}))$$

$$H_{44} = \frac{1}{90} \cdot c.h.E_1 \cdot (D_{44} \cdot h^2 \cdot (60 + 15.E_1) + D_{55} \cdot (45.E_3 - 30.E_2 - 18.E_4) + 20.c^2 \cdot h^2 \cdot (D_{11} + D_{12}))$$

$$H_{45} = 4.c.h.L \left( \frac{1}{3} \cdot c^2 \cdot D_{44} + D_{11} \right)$$

$$H_{46} = \frac{2}{3} \cdot c.h \cdot (6.E_1 \cdot D_{11} + (c^2 \cdot L \cdot (2.D_{44} - D_{11})))$$

$$H_{47} = -\frac{4}{3} \cdot c.h^3 \cdot D_{11} \cdot L$$

$$H_{48} = c^3 \cdot h.L \cdot \left( \frac{c^2}{5} \cdot D_{11} + \frac{4}{3} \cdot D_{44} \right) + 2.c.h.D_{11} \cdot \left( E_2 - \frac{2}{3} \cdot c^2 \cdot E_1 \right)$$

$$H_{49} = c.h^3 \cdot D_{11} \cdot \left( \frac{1}{9} \cdot c^2 \cdot L - \frac{2}{3} \cdot E_1 \right)$$

$$H_{50} = \frac{2}{9}.c.h\left(c^2.D_{55}.(3.E_2 - 12.E_1 + 6.L) + 6.h^2.L.D_{11} + 2.c^2.h^2.L.D_{44}\right)$$

$$H_{51} = \frac{2}{9}.c.h\left(c^2.D_{55}.(2.E_3 - 6.E_2 + 6.E_1) + (6.h^2.E_1.D_{11} - c^2.h^2.L.(2.D_{44} - D_{11}))\right)$$

$$H_{52} = \frac{2}{3}.c.h^3.D_{11}.L$$

$$H_{53} = \frac{c.h}{45}\left(c^2.D_{55}(30E_2 - 40E_3 + 15E_5) + D_{11}.h^2(30E_2 + 20.c^2.E_1 + 3.c^4.L) + 20.c^2.h^2.D_{44}.L\right)$$

$$H_{54} = \frac{1}{9}.D_{11}.L.c^3.h^3 + \frac{2}{3}.E_1.D_{11}.c.h^3$$

$$H_{55} = 2.c.h.E_2.D_{33}$$

$$H_{56} = \frac{4}{3}.c.h.E_3.D_{33}$$

$$H_{57} = c.h.E_5.D_{33} + \frac{1}{5}.c.h^5.D_{11}.L$$

$$H_{58} = \frac{1}{15}.c.h\left(h^2.D_{55}(10.E_2 - 40.E_1 + 20.L) + 10.c^2.E_2.D_{33} + 3.h^4.L.D_{44}\right)$$

$$H_{59} = \frac{1}{45}.c.h\left(h^2.D_{55}(20.E_3 + 60.E_1 - 60.E_2) + 20.c^2.E_3.D_{33} - 9.h^4.L.D_{44}\right)$$

$$H_{60} = \frac{1}{3}.c.h^3.D_{44}.L$$

$$H_{61} = \frac{1}{45}.c.h\left(h^2.D_{55}(30.E_2 - 40.E_3 + 15.E_5) + 15.c^2.E_5.D_{33} + 9.h^4.L.D_{44} + 3.c^2.h^4.D_{11}.L\right)$$

$$H_{62} = -c.h^3.L.\left(\frac{1}{9}.c^2.D_{11} + \frac{1}{3}.D_{44}\right)$$

$$H_{63} = c.h.L.\left(\frac{1}{3}.c^2.D_{11} + D_{44}\right)$$

$$H_{64} = \frac{1}{36}.c.h\left(D_{55}(18.E_2 - 24.E_3 + 9.E_5) + 4.h^2.L(3.D_{44} + c^2.D_{11})\right)$$

$$H_{65} = \frac{1}{3}.c.h(3.D_{55}.E_1 - D_{55}.E_3 + h^2.L.D_{44})$$

$$H_{66} = -\frac{1}{36}.c.h\left(D_{55}.(18.E_2 - 9.E_5) + 4.h^2.L(3.D_{44} + c^2.D_{11})\right)$$

$$H_{67} = \frac{1}{36} \cdot c \cdot h \left( D_{55} \cdot (24 \cdot E_{33} - 18 \cdot E_2 - 9 \cdot E_5 \cdot D_{55}) + 4 \cdot h^2 \cdot L (3 \cdot D_{44} + c^2 \cdot D_{11}) \right)$$

$$H_{68} = \frac{1}{6} \cdot c \cdot h \left( 12 \cdot D_{55} \cdot E_1 + 6 D_{55} \cdot L + 3 \cdot E_2 \cdot D_{55} + 2 \cdot h^2 \cdot L \cdot D_{44} \right)$$

$$H_{69} = \frac{1}{3} \cdot c \cdot h \left( 3 \cdot E_1 \cdot D_{55} + 3 \cdot E_2 \cdot D_{55} + E_3 \cdot D_{55} + h^2 \cdot D_{44} \cdot L \right)$$

$$H_{70} = -\frac{1}{3} \cdot c \cdot h \left( E_3 \cdot D_{55} - 3 \cdot E_1 \cdot D_{55} + h^2 \cdot D_{44} \cdot L \right)$$

$$H_{71} = \frac{1}{36} \cdot c \cdot h \left( D_{55} \cdot (18 \cdot E_2 + 24 \cdot E_3 + 9 \cdot E_5 \cdot D_{55}) + 4 \cdot h^2 \cdot L (3 \cdot D_{44} + c^2 \cdot D_{11}) \right)$$

$$H_{72} = -\frac{1}{36} \cdot c \cdot h \left( D_{55} \cdot (9 \cdot E_5 - 18 \cdot E_2) + 4 \cdot h^2 \cdot L (3 \cdot D_{44} + c^2 \cdot D_{11}) \right)$$

$$H_{73} = 2 \cdot c \cdot h \cdot E_2 \cdot D_{55} + \frac{1}{3} \cdot c \cdot h^3 \cdot D_{11} \cdot L$$

$$H_{74} = \frac{1}{36} \cdot c \cdot h \left( D_{55} \cdot (18 \cdot E_2 - 24 \cdot E_3 - 9 \cdot E_5 + 24 \cdot c^2 \cdot E_2) + 4 \cdot h^2 \cdot L (3 \cdot D_{44} + c^2 \cdot D_{11}) \right)$$

## Annexe B

La matrice C est donnée comme suit:

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\theta & r & r\theta & 0 & -\frac{\theta^2}{2} & \frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 & r & 0 & -\frac{r^2}{2} & \theta & r\theta & \frac{r}{2} \end{bmatrix}$$

## Annexe c

### Présentation des différentes étapes du programme

a) Etape 1: Lecture et organisation des données

b) Etape 2: Construction de la matrice et du vecteur globaux  $[k]$  et  $\{f\}$  et résolution du système des équations  $[K] \{U\} = \{F\}$

Cette étape est la plus importante du programme, car on y effectue toutes les opérations nécessaires pour aboutir à la solution finale du problème.

- Evaluation de la matrice de rigidité élémentaire
- Calcul des vecteurs élémentaires des forces
- Calcul des déplacements aux nœuds:  $[K] \{U\} = \{F\}$
- Calcul des contraintes et déformations (SIGMA, EPS)

## ORGANIGRAMME DETAILLEE DU PROGRAMME

