

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra

Faculté des Sciences et de la technologie

Département de Génie civil et d'Hydraulique

Ref :.....



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة المدنية والري
المرجع:.....

Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de
Magister

Spécialité : **Hydraulique**

Option : **Ouvrages Hydrauliques**

Thème

**Contribution à l'étude de l'écoulement uniforme
dans un canal de forme trapézoïdal**

Présenté par : **LAMRI Ahmed Amine**

Soutenu le : 19 /06 / 2013 devant le jury composé de

ACHOUR	Bachir	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
DEBABECHE	Mahmoud	Professeur	Président	Université de Biskra
OUAMANE	Ahmed	Professeur	Examineur	Université de Biskra
BOUZIANE	Tewfik	Maitre de conférences	Examineur	Université de Biskra

REMERCIEMENTS

Louange Dieu tout puissant pour tout ce qu'il m'a donné afin que je puisse terminer ce travail.

Tout d'abord, je tiens à remercier vivement et très fort mon promoteur M. ACHOUR Bachir, professeur à l'Université de Biskra pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de diriger ce travail. Je le remercie infiniment pour son aide, pour ses conseils judicieux et ses orientations, afin que je puisse mener ce travail à terme.

Je remercie chaleureusement M. DEBABECHE Mahmoud, Professeur à l'Université de Biskra qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Je tiens à lui exprimer ma plus profonde gratitude.

J'exprime mes plus sincères remerciements à M. BOUZIANE Tewfik, Maître de conférences, à l'Université de Biskra, à M. OUAMANE Ahmed, Professeur, à l'Université de Biskra, pour intérêt qu'ils portent à ce travail en acceptant de le juger.

A tous mes professeurs qui ont contribué à ma formation de près ou de loin.

Enfin, je dédie ce modeste travail à ma famille et plus particulièrement mes parents.

Résumé:

Notre travail s'est intéressé à l'écoulement uniforme dans un canal de forme trapézoïdale. L'étude s'est basée sur les relations de *Chézy* et de *Manning*. L'analyse de l'écoulement a été menée d'une part à coefficient de résistance constant et à coefficient de résistance variable. En se basant sur la relation générale du débit volume, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* et le coefficient de rugosité de *Manning* ont été exprimés. Leur représentation graphique a montré qu'ils passent tous deux par un maximum. En absence la dimension de linéaire du canal, la méthode du modèle rugueux a permis de calculer ces coefficients par des relations explicites applicables dans tout le domaine de l'écoulement turbulent.

Mots clés:

Canal trapézoïdal, méthode du modèle rugueux, coefficient de Chézy, coefficient de Manning, dimensionnement

Abstract:

Our work takes an interest in uniform flow in a trapezoidal shaped channel. The study is based on *Chezy's* and *Manning's* relationships. The flow is analyzed firstly under a constant resistance coefficient and secondly with a variable resistance coefficient. Considering the consistent uniform flow relationship, *Chezy's* and *Manning's* coefficients are expressed and their graphical representation shows a maximum. Despite the fact that the linear dimension of the channel is unknown, the rough model method allows the determination of these coefficients from explicit relations applied in the fully turbulent flow domain.

Keywords:

Channel trapezoidal method rough model, coefficient of Chezy, Manning coefficient. dimensioning.

ملخص :

عملنا كان مهتما في التدفق موحدة في قناة شبه منحرف. وتستند الدراسة على العلاقات شازي ومانينغ. وأجري تحليل تدفق الى معامل مقاومة ثابت من جهة و معامل المقاومة المتغير استنادا إلى العلاقة العامة من حجم التدفق، وأعرّب عن معامل المقاومة التدفق ومعامل خشونة مانينغ و شازي. وأظهرت تمثيلها البياني أن كلا منهما تمر عبر كحد أقصى في غياب قطر قناة ، تم استخدام أسلوب النموذج خشنة لحساب هذه المعاملات من قبل علاقات صريحة تنطبق على مجال كامل من تدفق المضطرب

كلمات البحث:

قناة شبه منحرف نموذج طريقة خشنة ، ومعامل شازي، معامل مانينغ. أبعاد.

SOMMAIRE

	Page
Introduction générale	1
I. Ecoulement uniforme.....	3
I.1. Introduction.....	3
I.2. Equations hydrodynamiques.....	3
I.2.1. Concept de l'uniformité.....	3
I.2.2. Equation de continuité.....	4
I.2.3. Equation du mouvement.....	4
I.3. Calcul du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i>	7
I.4. Formule de <i>Manning</i>	7
I.5. Coefficient de frottement et vitesse moyenne de l'écoulement.....	8
I.5.1. Exemple d'application 1.1.....	11
I.5.2. Exemple d'application 1.2.....	12
I.6. Calcul de l'écoulement uniforme.....	14
I.6.1. Relation générale du débit volume.....	14
I.6.2. Expression générale du coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> et <i>n</i> de <i>Manning</i>	17
I.6.3. Application au canal de forme rectangulaire.....	18
I.7. Conclusion.....	23
II. Ecoulement uniforme dans un canal de forme trapézoïdal.....	24
II.1. Introduction.....	24
II.2. Caractéristiques géométriques.....	25
II.3.1. Caractéristiques du modèle rugueux de référence.....	27
II.3.2. Relations de base destinées au calcul des dimensions linéaires.....	30
II.3.3. Facteur de correction des dimensions linéaires.....	33
II.4. Dimensionnement du canal par la relation de Darcy-Weisbach pour un rapport d'aspect imposé.....	39
II.4.1. Exemple d'application 2.1.....	40
II.5. Dimensionnement du canal par la relation de Chézy pour un rapport d'aspect imposé.....	43
II.5.1. Exemple d'application 2.2.....	47
II.6. Dimensionnement du canal par la relation de Manning pour un rapport d'aspect imposé.....	49
II.6.1. Exemple d'application 2.3.....	53
II.7. Etude de l'écoulement à coefficient de résistance variable.....	56
II.7.1. Relation générale du coefficient de résistance de Chézy.....	56
II.7.2. Relation générale du coefficient de résistance de Manning.....	67
Conclusion générale	76
Références bibliographiques	78

INTRODUCTION GENERALE

L'écoulement uniforme dans un canal est caractérisé par la constance de sa profondeur, de sa section transversale et de sa pente longitudinale. Il est en outre permanent lorsque le débit volume qu'il écoule demeure constant ou est indépendant du temps. On admet que la vitesse moyenne est constante ou que sa répartition est uniforme dans toute section du canal.

Dans la pratique, l'écoulement uniforme est très rare. Il se produit, d'un point de vue théorique, lorsque le canal a une longueur infinie ou très grande. Cependant, le calcul de l'écoulement dans les canaux et rivières est effectué sous l'hypothèse de l'uniformité. Ce calcul se base, en règle générale, sur les formules usuelles de type *Chézy* ou *Manning*, en admettant que le coefficient de résistance à l'écoulement est aussi constant. Cette constance du coefficient de résistance n'est pourtant pas souvent justifiée, à moins que l'écoulement ne soit dans le domaine turbulent rugueux. Lorsque l'écoulement est dans le domaine de transition, le coefficient de résistance à l'écoulement ne peut être considéré comme étant constant, mais il varie en fonction de la profondeur. A l'heure actuelle, il n'existe aucune relation explicite permettant d'évaluer le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* ou de *Manning* lorsque l'écoulement est dans le domaine de transition ou lisse. Pour le cas du régime d'écoulement turbulent rugueux, ces coefficients sont tabulés et dépendent de la nature du matériau constituant le canal, ainsi que de nombreux d'autres facteurs. Des relations simplifiées ont été proposées par le passé pour évaluer ces coefficients. Ces relations sont de type *Bazin* ou *Kutter* dans lesquelles le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* dépend de la nature du matériau et du rayon hydraulique.

Le présent mémoire est subdivisé en deux grandes parties. La première partie est entièrement dédiée à un état des connaissances sur l'écoulement uniforme. Le concept d'uniformité est expliqué à travers un schéma simplifié et l'équation de continuité est présentée. Ceci est suivi par les équations du mouvement qui mènent aux relations universellement connues de *Darcy* et de *Chézy* ainsi qu'à la relation liant le coefficient C de *Chézy* au coefficient de frottement f . Les relations de *Bazin* et de *Kutter*, souvent citées dans la littérature et permettant d'estimer le coefficient C de *Chézy* sont présentées et discutées. Le coefficient de frottement, au sens de *Colebrook-White* est exprimé en particulier en fonction du coefficient de forme de la section du canal. L'expression générale de la vitesse moyenne V est aussi présentée en fonction de ce coefficient et des autres paramètres régissant l'écoulement.

Dans cette partie de l'étude, l'expression générale du débit volume ainsi que celle du nombre de *Reynolds*, applicable à tout profil de canal et dans tout le domaine de l'écoulement turbulent, est indiquée. L'expression générale du débit volume permet de déduire la relation du coefficient *C* de *Chézy* et celle du coefficient *n* de *Manning*. Le calcul de l'écoulement uniforme est présenté à travers un exemple d'application sur le canal de forme rectangulaire.

La seconde partie du mémoire constitue notre propre contribution à l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal trapézoïdal. Pour mieux appréhender le problème, deux aspects sont examinés. Le premier aspect concerne l'étude de l'écoulement uniforme lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement demeure constant et le second aspect est lié à l'étude de l'écoulement uniforme lorsque le coefficient de résistance à l'écoulement est variable ou est fonction de la variation de la profondeur de l'écoulement.

Après avoir présenté les caractéristiques géométriques du canal, celles de l'écoulement, telles que la largeur du plan d'eau, le périmètre mouillé et l'aire de la section mouillée, on a calculé la dimension linéaire du canal.

L'étude de l'écoulement uniforme à coefficient de résistance variable a recours à la relation générale du débit volume qui dépend à la fois de l'aire de la section mouillée, du rayon hydraulique, de la pente longitudinale de la conduite, de la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et de la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Tous les paramètres qui régissent l'écoulement turbulent sont ainsi pris en considération. La relation générale du débit volume permet de déduire l'expression du coefficient de résistance de *Chézy* ainsi que le coefficient de rugosité de *Manning*. La représentation graphique adimensionnelle de ces coefficients est présentée et les courbes de variation obtenues sont commentées. En outre, la théorie du modèle rugueux de référence permet le calcul aisé de ces coefficients à travers des relations dépendant de la gamme de variation du taux de remplissage.

I. ECOULEMENT UNIFORME

I.1. Introduction

Au cours de cette partie de notre étude, un état de connaissances sur l'écoulement uniforme est présenté, sous les aspects théorique et pratique.

Dans un premier temps, les équations théoriques de l'écoulement uniforme sont démontrées et commentées. Dans un second temps, les méthodes de calcul de l'écoulement sont présentées et étayées par des exemples pratiques.

Notre attention est portée principalement sur les équations largement utilisées de *Chézy* et de *Manning*, en insistant sur la méthode de détermination des coefficients de résistance à l'écoulement.

I.2. Equations hydrodynamiques

I.2.1. Concept de l'uniformité

L'écoulement est uniforme permanent lorsque la profondeur y ou le rayon hydraulique R_h , la vitesse moyenne V , le débit volume Q , la rugosité ε et la pente longitudinale i demeurent inchangés dans toute section de la conduite ou du canal. Les lignes de courant sont parallèles et rectilignes et la pression verticale est de nature hydrostatique. La pente du fond, la ligne piézométrique et la pente de la ligne de charge totale sont identiques.

Dans les canaux naturels, l'écoulement uniforme est rare. Il est également assez rare dans les canaux et conduites artificielles. Il peut s'observer dans des canaux prismatiques de très grande longueur, loin des extrémités amont et aval (Figure 1.1.).

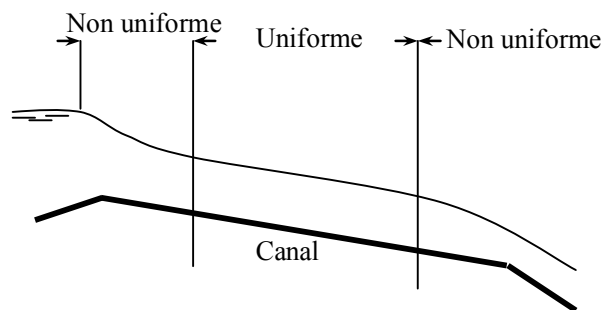


Figure 1.1 : Concept d'uniformité (*Chow, 1973 ; Graf et Altinakar, 1993*)

1.2.2. Equation de continuité

Lorsque l'écoulement est uniforme et permanent, l'aire de la section mouillée A reste inchangée dans la direction x le long de l'écoulement et dans le temps t . L'équation de continuité qui s'écrit :

$$\frac{\partial(VA)}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

devient :

$$\frac{\partial(VA)}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

avec $VA=Q$. Le débit volume Q est donc une constante, soit :

$$Q = \text{constante} \quad (1.3)$$

Entre deux sections transversales données 1 et 2, nous pouvons écrire :

$$V_1A_1 = V_2A_2 = Q \quad (1.4)$$

1.2.3. Equation du mouvement

Considérons un canal prismatique de forme quelconque (Figure 1.2). Le liquide en écoulement occasionne une force de frottement sur les parois qui peut s'écrire :

$$F_f = \tau_o P dx \quad (1.5)$$

où τ_o est la force par unité d'aire de surface mouillée, P est le périmètre mouillé et dx est la longueur élémentaire de la tranche de canal considéré (Figure 1.2).

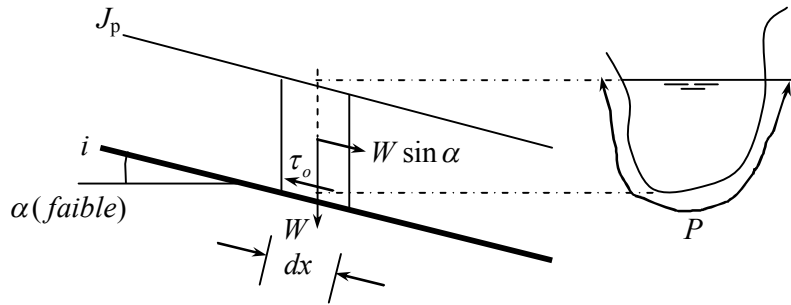


Figure 1.2 : Schéma de définition de l'écoulement uniforme

Sur la figure 1.2, la quantité $W \sin \alpha$ représente la composante tangentielle du poids propre W de la tranche liquide élémentaire dx , soit :

$$W = \rho g \times \text{Volume} = \rho g A dx = \varpi A dx$$

La composante tangentielle du poids propre W s'écrit donc :

$$F_g = \varpi A dx \sin \alpha = W \sin \alpha \quad (1.6)$$

Lorsque l'écoulement uniforme est établi, les forces F_f et F_g , données par les relations (1.5) et (1.6) respectivement, s'équilibrent. Ainsi :

$$\tau_o P dx = \varpi A dx \sin \alpha \quad (1.7)$$

La relation (1.7) permet d'écrire :

$$\tau_o = \varpi \frac{A}{P} \sin \alpha \quad (1.8)$$

Le rapport A/P représente le rayon hydraulique R_h , tandis que $\sin \alpha$ désigne la pente longitudinale i . La relation (1.8) s'écrit alors :

$$\tau_o = \varpi R_h i \quad (1.9)$$

On définit :

$$\frac{\tau_o}{\rho} = v_*^2 \quad (1.10)$$

où v_* désigne ce que l'on appelle la vitesse de frottement. Tenant compte de (1.10), la relation (1.9) permet d'écrire que :

$$v_* = \sqrt{g R_h i} \quad (1.11)$$

D'autre part, on définit le coefficient de frottement f (*Graf et Altinakar, 1991*) par :

$$f = \frac{8\tau_o}{\rho V^2} \quad (1.12)$$

La combinaison des relations (1.10) et (1.12) permet d'écrire que :

$$f = 8 \left(\frac{v_*}{V} \right)^2 \quad (1.13)$$

En tenant compte des relations (1.9) et (1.12), nous pouvons déduire que :

$$f \frac{\rho V^2}{8} = \varpi R_h i$$

Cette dernière relation s'écrit plus simplement sous la forme :

$$i = f \frac{1}{4R_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.14)$$

La relation (1.14) est connue sous le nom de relation de *Darcy-Weisbach*. Elle est très utilisée pour les écoulements dans les conduites. Dans cette relation, le coefficient de frottement f dépend du nombre de *Reynolds* R , de la rugosité relative ε / R_h , mais aussi de la forme géométrique de la section de canal considéré. La relation (1.14) s'écrit souvent sous la forme :

$$V = \sqrt{8g / f} \sqrt{R_h i} \quad (1.15)$$

Ou bien :

$$V = C\sqrt{R_h i} \quad (1.16)$$

Avec : $C = \sqrt{8g / f}$

La relation (1.16) est connue sous le nom de relation de *Chézy* et le coefficient C est appelé coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* dont la dimension est $m^{1/2}s^{-1}$. La relation (1.16) ne peut être utilisée que pour un écoulement turbulent rugueux.

I.3. Calcul du coefficient C de *Chézy*

Le coefficient C de *Chézy* est un paramètre dimensionnel ($m^{1/2}/s$). Différentes formules, d'origine empirique, ont été proposées pour le calcul du coefficient C de *Chézy*. Les plus citées par la bibliographie sont celles de *Bazin* (1897) et de *Kutter*.

La formule de *Bazin* présente le coefficient C de *Chézy* comme une fonction du rayon hydraulique R_h et d'un coefficient m_B , dit coefficient de *Bazin*, dont l'unité est $m^{1/2}$. Selon *Bazin*, le coefficient C de *Chézy* est :

$$C = \frac{87}{1 + (m_B / \sqrt{R_h})} \quad (1.17)$$

Le coefficient m_B de *Bazin* varie de $m_B = 0,06 m^{1/2}$ pour un fond de canal lisse, à $m_B = 1,75 m^{1/2}$ pour un lit de galets ou encombré d'herbe.

La formule de *Kutter* a la même forme que celle de *Bazin*. Elle exprime le coefficient C de *Chézy* par :

$$C = \frac{100}{1 + (m_K / \sqrt{R_h})} \quad (1.18)$$

Où m_K est le coefficient de *Kutter* dont l'unité est $m^{1/2}$.

I.4. Formule de *Manning*

La formule la plus utilisée en pratique est la formule de *Manning* (1891). Elle exprime la vitesse V de l'écoulement comme étant :

$$V = \frac{1}{n} R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (1.19)$$

Le coefficient n est appelé coefficient de *Manning* et son unité est $m^{-1/3}s$. La formule de *Manning* est simple mais elle ne doit être utilisée que pour les écoulements turbulents rugueux, correspond aux valeurs élevées du nombre de *Reynolds* (*Graf et Altinakar*, 1993). Sous ces conditions, le coefficient n de *Manning* reste constant pour une rugosité donnée. Des tables de valeurs du coefficient n de *Manning* ont été établies par *Crausse* (1951). En règle générale n varie entre 0,012 et 0,15.

1.5. Coefficient de frottement et vitesse moyenne de l'écoulement

Il est d'un grand intérêt pratique d'exprimer le coefficient de frottement de la relation (1.14) de *Darcy-Weisbach*, pour les écoulements turbulents dans les conduites et canaux. Pour les conduites circulaires de diamètre D , *Colebrook* (1937) a proposé de calculer le coefficient de frottement f par la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k_s / D}{3,7} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) \quad (1.20)$$

Où k_s désigne le diamètre des grains de sable utilisés lors de l'expérimentation, que l'on note également par ε ou rugosité absolue, et R est le nombre de *Reynolds*. La relation (1.20) est applicable dans l'ensemble du domaine turbulent (lisse, transition et turbulent rugueux) et pour $R > 2300$. Compte tenu de son caractère implicite vis-à-vis de f , la relation (1.20) nécessite un procédé itératif.

L'application de la relation (1.20) a été généralisée aux canaux ouverts (*Silberman et al.*, 1963) de diverses formes géométriques et de divers types de rugosité. Elle s'écrit alors sous la forme :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k_s}{a R_h} + \frac{b}{R \sqrt{f}} \right) \quad (1.21)$$

où $12 < a < 15$ et $0 < b < 6$.

Dans la relation (1.20) et lorsque le nombre de *Reynolds* R prend des valeurs élevées ($R \rightarrow \infty$), le coefficient de frottement f ne dépend que de la rugosité relative k_s/D . L'écoulement est alors hydrauliquement rugueux. Lorsque $k_s/D \rightarrow 0$, le coefficient de frottement f ne dépend que du nombre de *Reynolds* R et l'écoulement est alors hydrauliquement lisse. Lorsque le coefficient de frottement f dépend à la fois de k_s/D et de R , l'écoulement est dans la zone d'écoulement de transition, zone intermédiaire entre l'écoulement hydrauliquement lisse et hydrauliquement rugueux.

En introduisant le rayon hydraulique $R_h = D/4$, le nombre de *Reynolds* R s'écrit :

$$R = \frac{V(4R_h)}{\nu} \quad (1.22)$$

où V est la vitesse moyenne de l'écoulement et ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement. En tenant compte de (1.22), la relation (1.20) s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k_s}{3,7(4R_h)} + \frac{2,51\nu}{V(4R_h)\sqrt{f}} \right) \quad (1.23)$$

La relation (1.23) est applicable aux conduites en charge de profil quelconque. Plusieurs auteurs ont tenté de généraliser la relation (1.23) aux canaux ouverts (*Bock*, 1966 ; *Marchi* et *Rubatta*, 1981). Le rayon hydraulique R_h peut représenter une infinité de canaux de profils géométriques différents. A titre d'exemple, si b_o et h_o sont respectivement la largeur et la hauteur d'un profil rectangulaire, le rayon hydraulique R_{ho} s'écrit :

$$R_{ho} = \frac{b_o h_o}{b_o + 2h_o} \quad (1.24)$$

Pour une hauteur donnée h et une largeur b , le rayon hydraulique R_h s'écrit :

$$R_h = \frac{bh}{b + 2h} \quad (1.25)$$

En égalant les relations (1.24) et (1.25), il vient :

$$\frac{bh}{b_o h_o} = \frac{b+2h}{b_o+2h_o} \quad (1.26)$$

La relation (1.26) peut également s'écrire :

$$\frac{bh}{b_o h_o} = \frac{b/b_o + 2h/b_o}{1+2h_o/b_o} \quad (1.27)$$

En introduisant la fonction $\Phi = h_o/b_o$, la relation (1.27) devient :

$$\frac{bh}{b_o h_o} = \frac{b/b_o + 2\Phi h/h_o}{1+2\Phi} \quad (1.28)$$

Ainsi, toute combinaison de h et de b satisfaisant la relation (1.28) conduit au même rayon hydraulique R_h (*Sinniger et Hager, 1989*).

Bock (1966) introduit le coefficient de forme ϕ de la section qui dépend uniquement de la géométrie du profil du canal considéré :

$$\phi = R_{he} / R_h \quad (1.29)$$

où R_{he} est le rayon hydraulique effectif. Tenant compte de (1.29), la relation (1.23) s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{k_s}{3,7(4\phi R_h)} + \frac{2,51\nu}{V(4\phi R_h)\sqrt{f}} \right) \quad (1.30)$$

En régime d'écoulement turbulent lisse, *Bock* (1966) a proposé les relations suivantes pour le calcul du coefficient de forme ϕ :

- Profil rectangulaire

$$\phi = \left[\frac{1,629(h/b)}{1+2(h/b)} \right]^{1/4} \quad (1.31)$$

- Profil trapézoïdal pour une pente de talus $m = \cotg\alpha \square 1$

$$\phi = \left[1,629(h/b) \frac{1+(h/mb)}{1+2\sqrt{1+m^2}(h/mb)} \right]^{1/4} \quad (1.32)$$

- Profil triangulaire dont la pente du talus est m

$$\phi = (2,539m)^{0,15} \quad (1.33)$$

- Profil circulaire de diamètre D

$$\phi = (h/D)^{1/4} \quad (1.34)$$

En tenant compte de la relation (1.14), la relation (1.30) permet alors d'exprimer la vitesse moyenne V de l'écoulement sous la forme :

$$V = -4\sqrt{2giR_h} \log \left(\frac{k_s}{14,8\phi R_h} + \frac{2,51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}} \right) \quad (1.35)$$

La relation (1.35) exprime la vitesse uniforme de l'écoulement dans les conduites et canaux.

1.5.1. Exemple d'application 1.1

Soit un canal rectangulaire de largeur $b = 2m$, siège d'un écoulement de profondeur $h = 1,5m$. Il est caractérisé par une pente longitudinale $i = 0,001$ et une rugosité équivalente de sable $k_s = 0,0005m$. Le liquide en écoulement a une viscosité cinématique $\nu = 0,000001m^2/s$. Calculer la vitesse moyenne V de l'écoulement uniforme ainsi que le débit volume Q .

Solution

Le rayon hydraulique $R_h = A/P$ est :

$$R_h = \frac{bh}{b+2h} = \frac{2 \times 1,5}{2 + 2 \times 1,5} = 0,6$$

Le paramètre h/b est :

$$h/b = 1,5/2 = 0,75$$

Selon la relation (1.31), le paramètre ϕ est :

$$\phi = \left[\frac{1,629(h/b)}{1+2(h/b)} \right]^{1/4} = \left(\frac{1,629 \times 0,75}{1+2 \times 0,75} \right)^{1/4} = 0,83610455$$

Ainsi, la relation (1.35) donne :

$$\begin{aligned} V &= -4\sqrt{2giR_h} \log \left(\frac{k_s}{14,8\phi R_h} + \frac{2,51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,6} \times \\ &\quad \log \left(\frac{0,0005}{14,8 \times 0,83610455 \times 0,6} + \frac{2,51 \times 0,00001}{8 \times 0,83610455 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,6^3}} \right) \square 1,795 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Le débit volume Q est alors :

$$Q = VA = Vbh = 1,795 \times 2 \times 1,5 = 5,385 \text{ m}^3 / \text{s}$$

En admettant $\phi = 1$, la vitesse moyenne V serait en vertu de la relation (1.35) :

$$\begin{aligned} V &= -4\sqrt{2giR_h} \log \left(\frac{k_s}{14,8\phi R_h} + \frac{2,51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}} \right) \\ &= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,6} \times \\ &\quad \log \left(\frac{0,0005}{14,8 \times 1 \times 0,6} + \frac{2,51 \times 0,00001}{8 \times 1 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,6^3}} \right) \square 1,828 \text{ m/s} \end{aligned}$$

L'écart relatif entre les deux valeurs ainsi calculées de la vitesse moyenne V n'est que de 1,84%. Nous pouvons donc conclure que l'effet de la forme du profil sur la vitesse moyenne V n'est que du second ordre.

1.5.2. Exemple d'application 1.2

Soit une conduite circulaire de diamètre $D = 2\text{m}$, siège d'un écoulement uniforme de

profondeur $h = 1m$. Elle est caractérisée par une pente longitudinale $i = 0,001$ et par une rugosité équivalente de sable $k_s = 0,0005m$. Le liquide en écoulement a une viscosité cinématique $\nu = 0,000001m^2/s$. Calculer la vitesse moyenne V de l'écoulement uniforme ainsi que le débit volume Q .

Solution

L'aire de la section mouillée A est :

$$A = \frac{D^2}{4} \left[\cos^{-1}(1 - 2h/D) - 2(1 - 2h/D) \sqrt{h(1 - h/D)/D} \right]$$

avec $h/D = 1/2 = 0,5$

soit :

$$A = \frac{2^2}{4} \times \left[\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,5) - 2 \times (1 - 2 \times 0,5) \times \sqrt{0,5 \times (1 - 0,5)} \right] = 1,57079633m^2$$

Le périmètre mouillé P est :

$$P = D \cos^{-1}(1 - 2h/D) = 2 \times \cos^{-1}(1 - 2 \times 1/2) = 3,14159265m$$

Le rayon hydraulique R_h est :

$$R_h = A/P = 1,57079633/3,14159265 = 0,5$$

Selon la relation (1.34), le paramètre ϕ est :

$$\phi = (h/D)^{1/4} = 0,5^{1/4} = 0,84089642$$

En application de la relation (1.35), la vitesse moyenne V de l'écoulement uniforme est :

$$\begin{aligned}
V &= -4\sqrt{2giR_h} \log\left(\frac{k_s}{14,8\phi R_h} + \frac{2,51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}}\right) \\
&= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,5} \times \\
&\quad \log\left(\frac{0,0005}{14,8 \times 0,84089642 \times 0,5} + \frac{2,51 \times 0,000001}{8 \times 0,84089642 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,5^3}}\right) \square 1,607 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

Par suite, le débit volume Q est :

$$Q = VA = 1,607 \times 1,57079633 = 2,524 \text{ m}^3 / \text{s}$$

En admettant $\phi = 1$, la vitesse moyenne V serait en vertu de la relation (1.35) :

$$\begin{aligned}
V &= -4\sqrt{2giR_h} \log\left(\frac{k_s}{14,8\phi R_h} + \frac{2,51\nu}{8\phi\sqrt{2giR_h^3}}\right) \\
&= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,5} \times \\
&\quad \log\left(\frac{0,0005}{14,8 \times 1 \times 0,5} + \frac{2,51 \times 0,000001}{8 \times 1 \times \sqrt{2 \times 9,81 \times 0,001 \times 0,5^3}}\right) \square 1,637 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

L'écart relatif entre les deux valeurs ainsi calculées de la vitesse moyenne V n'est que de 1,82%. Nous pouvons encore conclure que l'effet de la forme du profil sur la vitesse moyenne V n'est que du second ordre.

Les exemples d'application que nous venons de considérer montrent clairement que l'effet du paramètre ϕ sur la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme n'est pas significatif. Par conséquent, l'application de la relation (1.20) de *Colebrook* peut être étendue aux canaux ouverts, sans générer d'erreur relative significative. Dans cette relation, le diamètre D doit être remplacé par le diamètre hydraulique D_h , soit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log\left(\frac{k_s / D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}}\right) \quad (1.36)$$

I.6. Calcul de l'écoulement uniforme

I.6.1. Relation générale du débit volume

La relation dimensionnelle du débit volume Q peut être écrite sous la forme (Achour et Bedjaoui, 2006) :

$$Q = \varphi(i, \varepsilon, A, R_h, \nu) \quad (1.37)$$

où i est la pente du canal considéré, ε est la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne du canal, A est l'aire de la section mouillée, R_h est le rayon hydraulique et ν est la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Le système d'équations de base de l'écoulement turbulent en conduites ou canaux ouverts est composé de trois relations. La première relation est la relation (1.14) de *Darcy-Weisbach*, la seconde relation est la relation (1.36) de *Colebrook* dans laquelle $k_s = \varepsilon$ et la troisième relation est celle de *Reynolds* $R = 4Q / (P\nu)$. La relation (1.14) de *Darcy-Weisbach* peut se mettre sous la forme :

$$i = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2 \quad (1.38)$$

Pour toute forme de section de canal, l'aire de la section mouillée A ainsi que le périmètre mouillé P peuvent s'écrire respectivement :

$$A = L^2 A^* \quad (1.39)$$

$$P = LP^* \quad (1.40)$$

Dans les relations (1.39) et (1.40), L est une dimension linéaire quelconque telle que la largeur b d'un canal rectangulaire ou le diamètre D d'une conduite de forme circulaire. Les paramètres A^* et P^* sont des paramètres adimensionnels qui dépendent exclusivement du paramètre de forme de la section considérée. A titre d'exemple, l'aire de la section mouillée A d'une section rectangulaire de largeur b et dont la profondeur de l'écoulement est h s'écrit $A = bh = b^2 (h/b)$ et par suite $L = b$ et $A^* = h/b$. Le périmètre mouillé P est $P = b + 2h = b(1 + 2h/b)$, par suite $P^* = 1 + 2h/b$.

En tenant compte des relations (1.39) et (1.40), la relation (1.38) permet d'écrire que :

$$L = (f/8)^{1/5} \left(Q / \sqrt{gi} \right)^{2/5} \left(P^* / A^{*3} \right)^{1/5} \quad (1.41)$$

La relation (1.40) permet d'écrire que le nombre de *Reynolds* R est :

$$R = \frac{4Q}{LP^*v} \quad (1.42)$$

Avec l'indice « r », on se réfère à un canal de référence rugueux caractérisé par une rugosité relative $\varepsilon_r / R_{hr} = 0,148$ arbitrairement choisie. En outre, en admettant que l'écoulement est dans le domaine turbulent rugueux, le coefficient de frottement f_r est donné par la relation (1.34) de *Colebrook* pour $R \rightarrow \infty$, impliquant que $f_r = 1/16$. Ainsi, avec l'aide des relations (1.39) et (1.40), la relation (1.38) permet de déduire que la dimension linéaire L_r du modèle rugueux est :

$$L_r = 128^{-1/5} \left(Q_r / \sqrt{g i_r} \right)^{2/5} \left(P_r^* / A_r^{*3} \right)^{1/5} \quad (1.43)$$

En se basant sur la relation (1.42), le nombre de *Reynolds* R_r de l'écoulement dans le canal rugueux s'écrit :

$$R_r = \frac{4Q_r}{L_r P_r^* v} \quad (1.44)$$

En éliminant le débit volume Q_r entre les relations (1.43) et (1.44), il vient que :

$$R_r = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i_r} L_r^3}{v} \left(A_r^* / P_r^* \right)^{3/2} \quad (1.45)$$

La relation (1.45) peut également s'écrire, en ayant recours aux relations (1.39) et (1.40) :

$$R_r = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i_r} R_{hr}^3}{v} \quad (1.46)$$

Admettons que $i_r = i$, $L_r = L$, $Q_r \neq Q$, impliquant que $R_r \neq R$, et que le paramètre de forme de la section mouillée du canal rugueux soit le même que celui du canal considéré. Alors, nous pouvons écrire $A_r^* = A^*$, $P_r^* = P^*$ et $R_{hr} = R_h$. En comparant les relations (1.41) et (1.43), il vient que :

$$Q = \psi_Q Q_r \quad (1.47)$$

Avec :

$$\psi_Q = \frac{1}{4\sqrt{f}} \quad (1.48)$$

$$Q_r = 8\sqrt{2g}\sqrt{iL^5} \left(A_r^{*3} / P_r^* \right)^{1/2} \quad (1.49)$$

Au regard de la relation (1.47), il apparaît que le débit volume Q est égal au débit volume Q_r corrigé par les effets du facteur ψ_Q . Celui-ci peut donc être considéré comme le facteur adimensionnel de correction du débit. La relation (1.49) peut s'écrire plus simplement :

$$Q_r = 8\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \quad (1.50)$$

La relation (1.50) se présente sous la forme de la relation de *Chézy*, avec un coefficient de *Chézy* tel que $C_r = 8\sqrt{2g}$.

La combinaison des relations (1.42), (1.44) et (1.47) permet de déduire que :

$$R = \psi_Q R_r \quad (1.51)$$

En insérant les relations (1.48) et (1.51) dans la relation (1.36) pour $k_s = \varepsilon$, il vient que :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R_r} \right) \quad (1.52)$$

En ayant recours aux relations (1.51) et (1.52), nous obtenons :

$$R = -\frac{1}{2} R_r \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R_r} \right) \quad (1.53)$$

En combinant les relations (1.47), (1.50) et (1.52), le débit volume Q s'exprime alors par :

$$Q = -4\sqrt{2g} A \sqrt{R_h i} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R_r} \right) \quad (1.54)$$

Le nombre de *Reynolds* R_r est donné soit par la relation (1.44) pour $Q_r = Q$, $L_r = L$ et $P_r^* = P^*$, ou par la relation (1.46) pour $i_r = i$ et $R_{hr} = R_h$, soit :

$$R_r = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (1.55)$$

La relation (1.54) permet de calculer le débit volume Q écoulé par une conduite ou un canal de forme quelconque. Elle est application dans l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent, correspondant à $R > 2300$.

1.6.2. Expression générale du coefficient C de *Chézy* et n de *Manning*

En éliminant le facteur ψ_Q entre les relations (1.48) et (1.52), le coefficient de frottement f s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R_r} \right) \quad (1.56)$$

Lorsque i, ε, ν et R_h sont donnés, la relation (1.56) permet de calculer la valeur exacte du coefficient de frottement f pour $R > 2300$. Tenant compte de la relation (1.56), le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* $C = \sqrt{8g/f}$ s'écrit :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R_r} \right) \quad (1.57)$$

Tenant compte de la relation (1.52), la relation (1.57) peut s'écrire :

$$C = C_r \psi_Q \quad (1.58)$$

D'autre part, en comparant la relation (1.54) avec la relation de *Manning*, nous pouvons aisément déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{1/6} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8 R_h} + \frac{10,04}{R_r} \right) \quad (1.59)$$

Tenant compte de la relation (1.52), la relation (1.59) s'écrit sous la forme :

$$n = n_r \psi_Q^{-1} \quad (1.60)$$

où :

$$n_r = \frac{R_h}{8\sqrt{2g}} \quad (1.61)$$

1.6.3. Application au canal de forme rectangulaire

L'aire de la section mouillée A dans un canal rectangulaire de largeur b et dont l'écoulement est de profondeur normale y_n s'écrit :

$$A = by_n \quad (1.62)$$

La relation (1.62) peut également s'écrire, en considérant le paramètre de forme $\eta = b / y_n$:

$$A = \eta b^2 \quad (1.63)$$

Le périmètre mouillé P s'écrit :

$$P = b + 2y_n$$

ou bien :

$$P = b(1 + 2\eta) \quad (1.64)$$

En combinant les relations (1.63) et (1.64), le rayon hydraulique $R_h = A / P$ s'écrit :

$$R_h = b \frac{\eta}{1 + 2\eta} \quad (1.65)$$

En tenant compte des relations (1.64) et (1.65), la relation de *Chézy* devient :

$$Q = CA\sqrt{R_h i} = C\eta b^2 \sqrt{b \frac{\eta}{1 + 2\eta} i}$$

Soit :

$$Q = C \eta b^{5/2} \sqrt{\frac{\eta}{1+2\eta}} \sqrt{i} \quad (1.66)$$

Introduisons le paramètre adimensionnel :

$$\bar{C} = \frac{Q}{C b^{5/2} \sqrt{i}} \quad (1.67)$$

La relation (1.66) s'écrit alors :

$$\bar{C} = \frac{\eta^{3/2}}{1+2\eta} \quad (1.68)$$

En élevant au carré les deux membres de la relation (1.68), nous obtenons l'équation de troisième degré suivante :

$$\eta^3 - 2\eta \bar{C}^2 - \bar{C}^2 = 0 \quad (1.69)$$

L'équation (1.69) ne possède pas de terme du second ordre. Son discriminant est alors :

$$\Delta = \frac{\bar{C}^4}{4} \left(1 - \frac{27}{32} \bar{C}^2 \right)$$

L'étude du discriminant Δ , en particulier son signe, montre que deux racines de l'équation (1.69) ont une signification physique. En effet :

- i.* Lorsque $\bar{C} \geq \sqrt{27/32}$, alors $\Delta \leq 0$. Dans ce cas, la racine réelle de l'équation (1.69) est :

$$\eta = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{C} \cos \frac{\beta}{3} \quad (1.70)$$

où l'angle β est tel que :

$$\cos \beta = \frac{1}{\bar{C}} \sqrt{\frac{27}{32}} \quad (1.71)$$

- ii.* Lorsque $\bar{C} \leq \sqrt{27/32}$, alors $\Delta \geq 0$. Dans ce cas, la racine réelle de l'équation (1.69) est :

$$\eta = \left(\frac{\bar{C}^2}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{C}^2} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{C}^2} \right)^{1/3} \right] \quad (1.72)$$

Ainsi, à partir des valeurs connues des variables Q , C , b et i , les relations (1.70), (1.71) et (1.72) permettent, de manière explicite, le calcul de la profondeur relative normale $\eta = y_n / b$ et donc de la profondeur normale y_n .

Pour calculer la profondeur relative normale à partir des équations (1.70), (1.71) et (1.72), il est nécessaire d'évaluer le paramètre \bar{C} et donc le coefficient C de Chézy. Les étapes suivantes sont recommandées pour une démarche correcte du calcul, à partir des valeurs connues des paramètres Q , i , b , ε et ν :

- Connaissant la valeur des paramètres Q , i , b et sachant que $C_r = 8\sqrt{2g}$, la variable adimensionnelle $\bar{C}_r = Q / (C_r b^{5/2} \sqrt{i})$ est alors calculée.
- Pour $\bar{C} = \bar{C}_r$, les relations (1.70), (1.71) et (1.72) donnent la valeur de la profondeur relative normale η_r dans le modèle rugueux, sous l'hypothèse d'un régime d'écoulement turbulent rugueux.
- A partir des valeurs ainsi connues de b et de η_r , les relations (1.64) et (1.65) permettent de calculer le périmètre mouillé P_r et le rayon hydraulique R_{hr} respectivement.
- Les valeurs connues de Q , P_r et ν permettent le calcul aisé du nombre de Reynolds R_r en application de la relation $R_r = 4Q / (P_r \nu)$.
- Avec les valeurs connues des paramètres R_{hr} , R_r et ε , le paramètre adimensionnel ψ est calculé selon la relation suivante (Achour et Bedjaoui, 2006) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / R_{hr}}{19} + \frac{8,5}{R_r} \right) \right]^{-2/5} \quad (1.73)$$

- Compte tenu des valeurs connues de R_{hr} , R_r , ε et ψ , le coefficient C de Chézy est alors déduit de la relation :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon / R_{hr}}{14,8\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} R_r} \right) \quad (1.74)$$

- Les relations (1.70), (1.71) et (1.72) donnent la valeur recherchée de la profondeur relative normale η , après avoir évalué le paramètre adimensionnel $\bar{C} = Q / (C b^{5/2} \sqrt{S_o})$.

Exemple d'application

Soit un canal rectangulaire de largeur $b = 1,5m$ écoule un débit volume $Q = 0,79m^3 / s$ d'un liquide de viscosité cinématique $\nu = 10^{-6} m^2 / s$, sous une pente $i = 0,0001$. La paroi interne du

canal est caractérisée par une rugosité absolue $\varepsilon \rightarrow 0$. Déterminer la valeur de la profondeur normale y_n .

I.7. Solution

- i. Calculons la valeur du paramètre adimensionnel $\bar{C}_r = Q / (C_r b^{5/2} \sqrt{i})$ où $C_r = 8\sqrt{2g}$:

$$C_r = 8\sqrt{2g} = 35,43557534 m^{1/2} / s$$

$$\bar{C}_r = Q / (C_r b^{5/2} \sqrt{i}) = 0,79 / (35,43557534 \times 1,5^{5/2} \times \sqrt{0,0001}) = 0,809020367 m^{1/2} / s$$

- ii. Nous pouvons constater que $\bar{C}_r \leq \sqrt{27/32}$. La profondeur relative normale η_r est alors donnée par la relation (1.72), soit :

$$\begin{aligned} \eta_r &= \left(\frac{\bar{C}_r^2}{2} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{C}_r^2} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \bar{C}_r^2} \right)^{1/3} \right] \\ &= \left(\frac{0,809020367^2}{2} \right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,809020367^2} \right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,809020367^2} \right)^{1/3} \right] = 1,340614511 \end{aligned}$$

- iii. Le périmètre mouillé P_r dans le modèle rugueux est :

$$P_r = b(1 + 2\eta_r) = 1,5 \times (1 + 2 \times 1,340614511) = 5,521843532 m$$

- iv. Le nombre de Reynolds R_r de l'écoulement dans le modèle rugueux est :

$$R_r = 4Q / (P_r \nu) = 4 \times 0,79 / (5,521843532 \times 10^{-6}) = 572272,6444$$

- v. Le paramètre adimensionnel ψ est, selon la relation (1.73) :

$$\psi = 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / R_{hr}}{19} + \frac{8,5}{R_r} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{8,5}{572272,6444} \right) \right]^{-2/5} = 0,719151253$$

- vi. Le coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy est, selon la relation (1.74) :

$$C = -4\sqrt{2g} \log\left(\frac{\varepsilon / R_{hr}}{14,8\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} R_r}\right)$$

$$= -4 \times \sqrt{2 \times 9,81} \times \log\left(\frac{10,04}{0,719151253^{3/2} \times 572272,6444}\right) = 80,45823914 m^{1/2} / s$$

vii. Le paramètre adimensionnel \bar{C} est, selon la relation (1.67) :

$$\bar{C} = \frac{Q}{Cb^{5/2}\sqrt{i}} = \frac{0,79}{80,45823914 \times 1,5^{5/2} \times \sqrt{0,0001}} = 0,356310335$$

viii. Nous constatons que $\bar{C} \leq \sqrt{27/32}$ et la profondeur relative normale η , est donnée par la relation (1.72) :

$$\eta = \left(\frac{\bar{C}^2}{2}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27}\bar{C}^2}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27}\bar{C}^2}\right)^{1/3} \right]$$

$$= \left(\frac{0,356310335^2}{2}\right)^{1/3} \times \left[\left(1 + \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,356310335^2}\right)^{1/3} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{32}{27} \times 0,356310335^2}\right)^{1/3} \right] = 0,66660814025$$

La profondeur normale y_n recherchée est par suite :

$$y_n = b\eta = 1,5 \times 0,66660814025 = 0,99991221 m \approx 1 m$$

I.7. exemple d'application au canal de forme trapézoïdal

Calculer y_n pour :

$m=2$ m, $b=5$ m, $Q=30$ m/s $i=0,001$ et $n=0,015$

$$A = by_n + my_n^2 = y_n(5 + 2y_n)$$

$$P = b + 2y_n\sqrt{1+m^2} = 5 + 2y_n\sqrt{1+2^2}$$

D'après la formule de Manning Sticker :

$$Q = \frac{1}{n} AR_h^{2/3} \sqrt{i}$$

$$30 = 2,108 \frac{[(5 + 2y_n)y_n]^{5/3}}{[5 + 2y_n \sqrt{1 + 2^2}]^{2/3}}$$

Le calcul de l'équation est complexe .

I.7. Conclusion

Le présent chapitre a eu pour objectif principal de donner un aperçu sur l'écoulement uniforme, tant sur le plan théorique que pratique. A travers un schéma simplifié, nous avons expliqué le concept d'uniformité. Les équations du mouvement ont pu mener à la relation de *Darcy-Weisbach* et à celle de *Chézy* dont le coefficient de résistance à l'écoulement est déterminé selon les approches de *Bazin* et de *Kutter*. La relation de *Manning* a été présentée et nous avons indiqué qu'elle ne s'appliquait que pour les écoulements turbulents rugueux. Le coefficient de frottement f de l'écoulement a été exprimé sous la forme d'une relation générale, applicable aux conduites et canaux. Pour les conduites et canaux fermés en charge, la formule de *Colebrook* demeure valable. L'influence du facteur de forme sur le coefficient de frottement et la vitesse moyenne de l'écoulement n'est que du second ordre, de telle sorte que la formule de *Colebrook* est généralisable aux canaux et conduites à surface libre. Un exemple d'application numérique a pu confirmer le second ordre de l'influence de ce facteur de forme. La relation générale du débit volume, valable pour toutes les formes de conduites et de canaux, a été déduite du modèle rugueux de référence. Elle exprime le débit volume sous la forme dimensionnelle $Q = \varphi(i, \varepsilon, A, R_h, \nu)$. Grâce au modèle rugueux de référence, le nombre de *Reynolds* a pu être présenté en fonction de la rugosité relative et du nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement dans ce modèle. De la même manière, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* et le coefficient de rugosité de *Manning* ont été exprimés suivant une relation de validité générale. Elle s'applique à toutes les formes de conduites et de canaux, dans l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent. Les relations obtenues ont été appliquées au cas du canal de forme rectangulaire et ont eu pour objectif principal la détermination de la profondeur normale de l'écoulement.

CHAPITRE II

ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL DE FORME TRAPEZOIDALE

II.1. Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal de forme trapézoïdale. Cette étude comprend le dimensionnement du canal, ce qui revient à déterminer sa largeur de base et la détermination de la profondeur normale. Ce sont les deux principaux problèmes qui se posent dans l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal de forme trapézoïdale.

Le dimensionnement du canal repose sur la théorie du modèle rugueux de référence. Cela consiste à choisir un canal de forme trapézoïdale rugueux de rugosité donnée et de déterminer alors ses caractéristiques hydrauliques et géométriques. Ces caractéristiques permettent alors de déterminer celles réelles du canal étudié en appliquant des relations théoriques préalablement établies. Ces relations sont établies sur la base de formules régissant l'écoulement uniforme telles que celles de *Darcy-Weisbach*, de *Chézy* ou de *Manning-Strickler*.

Le calcul de la profondeur normale de l'écoulement dans le canal considéré est issu du théorème de *Lagrange* qui donne la solution du problème en une série illimitée. D'un point de vue théorique, la solution du problème est exacte mais elle est obtenue à l'infini, ce qui n'est pas pratique à l'usage de l'ingénieur. La série obtenue doit être alors tronquée, ce qui mène à une solution approchée du problème.

En règle générale, l'emploi des formules usuelles de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts ne permet pas une solution directe au problème du calcul de la profondeur normale.

Dans ce chapitre, nous montrons, à travers l'exemple du canal de forme trapézoïdale, que ce problème peut être aisément résolu. En outre, une méthode fiable est proposée pour l'estimation directe des coefficients de résistance f de *Colebrook-White*, C de *Chézy* et n de *Manning*, applicable à tous les profils géométriques connus et notamment au profil de forme trapézoïdale qui intéresse notre étude.

II.2. Caractéristiques du canal étudié

Le canal est schématiquement représenté sur la figure 2.1. Il est caractérisé par sa base b et par le paramètre m , égal à la cotangente de l'angle d'inclinaison α des parois du canal par rapport à l'horizontale.

L'écoulement est défini par la profondeur normale y_n .

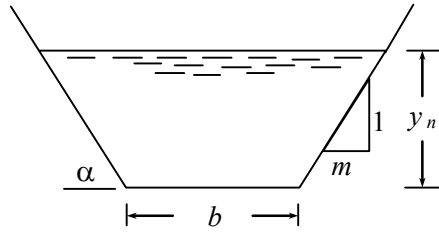


Figure 2.1 : Caractéristiques du canal de forme trapézoïdale

Les parois internes du canal sont caractérisées par la rugosité absolue ε et le débit volume écoulé est Q . Le canal est le siège d'un écoulement uniforme d'un liquide de viscosité cinématique ν , sous une pente longitudinale i .

La forme de la section mouillée est définie par le paramètre de forme $\eta = y_n / b$, appelé aussi rapport d'aspect.

Tous les paramètres ainsi indiqués sont connus et constituent les données du problème. Il s'agit alors de dimensionner le canal considéré, ce qui revient à calculer la dimension linéaire b ainsi que la profondeur normale y_n qui constitue la hauteur minimale du canal.

L'aire de la section mouillée A de l'écoulement s'écrit :

$$A = by_n + my_n^2 \quad (2.1)$$

qui peut également s'écrire :

$$A = b^2\eta(1 + m\eta) \quad (2.2)$$

Le périmètre mouillé P est :

$$P = b + 2y_n\sqrt{1 + m^2} \quad (2.3)$$

ou bien :

$$P = b\left(1 + 2\eta\sqrt{1 + m^2}\right) \quad (2.4)$$

Le diamètre hydraulique est par suite :

$$D_h = 4\frac{A}{P} = 4\frac{b^2\eta(1 + m\eta)}{b\left(1 + 2\eta\sqrt{1 + m^2}\right)}$$

soit :

$$D_h = 4b\frac{\eta(1 + m\eta)}{1 + 2\eta\sqrt{1 + m^2}} \quad (2.5)$$

Notons que lorsque $m = 0$, correspondant à un angle d'inclinaison des parois du canal $\alpha = 90^\circ$, la forme rectangulaire est alors obtenue.

II.3. Caractéristiques du modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux de référence du canal étudié est représenté schématiquement sur la figure 2.2. Il est caractérisé par sa base \bar{b} et par le paramètre $\bar{m} = m$. L'écoulement est de profondeur \bar{y}_n .

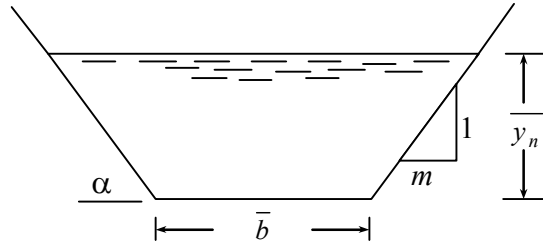


Figure 2.2 : Schéma de définition du modèle rugueux de référence du canal de forme trapézoïdale

Le paramètre de forme $\bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b}$ du modèle rugueux de référence est égal à celui du canal à dimensionner, représenté par la figure 2.1, soit :

$$\bar{\eta} = \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} = \eta = \frac{y_n}{b} \quad (2.6)$$

Le modèle rugueux écoule le même débit volume que celui du canal à dimensionner, sous la même pente longitudinale, soit :

$$\bar{Q} = Q; \bar{i} = i \quad (2.7)$$

En tenant compte de la relation (2.2), l'aire de la section mouillée \bar{A} de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est donc :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \eta (1 + m\eta) \quad (2.8)$$

Le périmètre mouillé \bar{P} est, selon la relation (2.4) :

$$\bar{P} = \bar{b} \left(1 + 2\eta \sqrt{1 + m^2} \right) \quad (2.9)$$

Le diamètre hydraulique est par suite :

$$\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}}$$

soit :

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\eta(1+m\eta)}{1+2\eta\sqrt{1+m^2}} \quad (2.10)$$

Le modèle rugueux de référence que nous considérons est en fait un canal de forme trapézoïdale caractérisé par une largeur de base \bar{b} , une rugosité absolue $\bar{\varepsilon}$, écoulant un débit volume \bar{Q} d'un liquide de viscosité cinématique $\bar{\nu}$, sous une pente longitudinale \bar{i} .

Le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement est \bar{R} et le coefficient de frottement est \bar{f} .

On affecte à ce canal une forte rugosité relative, arbitrairement choisie égale à $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 3,7 \cdot 10^{-2}$, de telle sorte que l'écoulement qui s'y produit soit en régime turbulent rugueux ou soit supposé être comme tel.

La rugosité relative arbitrairement choisie $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 3,7 \cdot 10^{-2}$ est obtenue pour diverses valeurs de la rugosité absolue $\bar{\varepsilon}$ et du diamètre hydraulique \bar{D}_h .

Puisque l'écoulement est ou supposé être en régime turbulent rugueux, le coefficient de frottement \bar{f} est donc régi par la relation de *Nikuradse* pour $\varepsilon/D_h = \bar{\varepsilon}/\bar{D}_h$ et $f = \bar{f}$, soit :

$$\bar{f} = \left[-2 \log \left(\frac{\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (2.11)$$

En substituant dans la relation (2.11) la valeur choisie $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 3,7 \cdot 10^{-2}$, le coefficient de frottement \bar{f} prend alors la valeur constante :

$$\bar{f} = \left[-2 \log \left(\frac{3,7 \cdot 10^{-2}}{3,7} \right) \right]^{-2} = (4)^{-2} = \frac{1}{16}$$

soit :

$$\bar{f} = \frac{1}{16} \quad (2.12)$$

L'écoulement turbulent rugueux se produisant dans le modèle rugueux de référence est donc caractérisé par un coefficient de frottement constant égal à 1/16. Cet écoulement est également régi par la relation de *Darcy-Weisbach*, exprimant la pente longitudinale i selon la formule suivante :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2}$$

où f est le coefficient de frottement.

La relation précédente peut également d'écrire :

$$i = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2 \quad (2.13)$$

Appliquées au modèle rugueux de référence, la relation précédente mène à écrire que la pente

longitudinale \bar{i} du modèle rugueux est :

$$\bar{i} = \frac{\bar{f}}{8g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} Q^2 \quad (2.14)$$

Or, le diamètre hydraulique est $\bar{D}_h = 4\bar{A} / \bar{P}$, où \bar{A} et \bar{P} désignent respectivement l'aire de la section mouillée et le périmètre mouillé de l'écoulement dans le modèle rugueux. La relation (2.14) s'écrit alors, avec $\bar{f} = 1/16$:

$$\bar{i} = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} \bar{Q}^2 \quad (2.15)$$

D'autre part, le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence s'écrit par définition :

$$\bar{R} = \frac{\bar{V} \bar{D}_h}{\nu} \quad (2.16)$$

où \bar{V} est la vitesse moyenne du liquide en écoulement, de viscosité cinématique ν . Or, la vitesse moyenne \bar{V} est liée au débit volume \bar{Q} par la relation :

$$\bar{Q} = \bar{V} \bar{A} \quad (2.17)$$

La relation (2.16) s'écrit alors :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{\bar{P}\nu} \quad (2.18)$$

II.3. Relations de base destinées au calcul des dimensions linéaires

Le présent paragraphe propose d'établir les relations fondamentales destinées au calcul des dimensions linéaires b et y_n . Les relations sont établies sous les conditions suivantes : $Q = \bar{Q}$, $\eta = \bar{\eta}$ et $i = \bar{i}$.

En tenant compte des relations (2.8) et (2.9), la relation (2.15) devient alors :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{1+2\eta\sqrt{1+m^2}}{\bar{b}^5 \eta^3 (1+m\eta)^3} Q^2 \quad (2.19)$$

soit :

$$\bar{b} = \left[\frac{1+2\eta\sqrt{1+m^2}}{128\eta^3 (1+m\eta)^3} \right]^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (2.20)$$

La relation (2.20) permet le calcul explicite de la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence, à partir des valeurs connues du débit volume Q , de la pente i et du paramètre de forme η . Les effets de la viscosité cinématique ν du liquide ne sont pas pris en considération, puisque l'écoulement est, ou supposé être, dans le domaine turbulent rugueux.

En termes adimensionnels, la relation (2.20) peut s'écrire plus simplement :

$$\frac{1+2\eta\sqrt{1+m^2}}{128\eta^3(1+m\eta)^3} Q_{\bar{b}}^{*2} = 1 \quad (2.21)$$

où la conductivité relative $Q_{\bar{b}}^*$ est :

$$Q_{\bar{b}}^* = \frac{Q}{\sqrt{gi\bar{b}^5}} \quad (2.22)$$

La profondeur normale \bar{y}_n de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence est telle que $\bar{y}_n = \bar{b}\eta$ et s'écrit, en tenant compte de la relation (2.20) :

$$\bar{y}_n = \left[\frac{\eta^2 \left(1 + 2\eta\sqrt{1+m^2} \right)}{128(1+m\eta)^3} \right]^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gJ} \right)^{1/5} \quad (2.23)$$

En termes adimensionnels, la relation (2.23) peut s'écrire :

$$\frac{\eta^2 \left(1 + 2\eta\sqrt{1+m^2} \right)}{128(1+m\eta)^3} Q_{y_n}^{*2} = 1 \quad (2.24)$$

où la conductivité relative $Q_{y_n}^*$ est donnée par :

$$Q_{y_n}^* = \frac{Q}{\sqrt{gi y_n^5}} \quad (2.25)$$

Le nombre de Reynolds $\bar{R} = 4Q/(\bar{P}\nu)$, caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, s'écrit, en tenant compte des relations (2.9) et (2.20) :

$$\bar{R} = 4(128)^{1/5} \left[\frac{\eta(1+m\eta)}{\left(1+2\eta\sqrt{1+m^2}\right)^2} \right]^{3/5} \frac{(gJQ^3)^{1/5}}{\nu} \quad (2.26)$$

Le nombre de *Reynolds* \bar{R} est donc entièrement défini par les paramètres connus Q, J, η et ν .

II.3. Facteur de correction des dimensions linéaires

Selon la méthode du modèle rugueux, toute dimension linéaire b d'un canal donné est égale à la dimension linéaire homologue \bar{b} du modèle rugueux, corrigée par les effets d'un facteur de correction ψ . Cela se traduit par la relation fondamentale :

$$b = \psi \bar{b} \quad (2.27)$$

Etant donné que la dimension linéaire \bar{b} est plus grande que la dimension linéaire b , alors le facteur de correction ψ est inférieur à l'unité, ou bien $0 < \psi < 1$.

Comme le périmètre mouillé P est une dimension linéaire, alors nous pouvons écrire :

$$P = \psi \bar{P} \quad (2.28)$$

En ce qui concerne l'aire de la section mouillée A , celle-ci étant proportionnelle à la dimension linéaire b au carré, nous pouvons alors écrire que :

$$A = \psi^2 \bar{A} \quad (2.29)$$

Appliquons les relations (2.28) et (2.29) à la relation (2.13). Nous obtenons :

$$i = \frac{f}{8g} \psi \bar{P} \frac{Q^2}{\psi^6 \bar{A}^3}$$

Soit :

$$i = \frac{f}{8g} \frac{\bar{P} Q^2}{A^3} \frac{1}{\psi^5} \quad (2.30)$$

Remarquons, en vertu de la relation (2.14) que :

$$\frac{1}{8g} \frac{\bar{P} Q^2}{A^3} = \frac{\bar{i}}{f} \quad (2.31)$$

En combinant les relations (2.30) et (2.31), il vient alors que :

$$i = \frac{f}{f} \frac{\bar{i}}{f} \frac{1}{\psi^5} \quad (2.32)$$

Comme $\bar{f} = 1/16$ et $i = \bar{i}$, la relation (2.32) s'écrit alors plus simplement :

$$1 = \frac{16f}{\psi^5}$$

Soit :

$$f = \frac{\psi^5}{16} \quad (2.33)$$

Il faut donc noter que le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est étroitement lié au coefficient de frottement f .

Dans cette étape du chapitre, il est nécessaire de faire appel à la formule de *Colebrook-White* exprimant le coefficient de frottement f , soit :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R \sqrt{f}} \right) \quad (2.34)$$

Le diamètre hydraulique D_h figurant dans la relation (2.34) est une dimension linéaire et peut donc s'écrire, en vertu de la relation (2.28) :

$$D_h = \psi \bar{D}_h \quad (2.35)$$

Le nombre de *Reynolds* R figurant dans la relation (2.34) s'écrit, par définition :

$$R = \frac{4Q}{Pv} \quad (2.36)$$

Compte de la relation (2.28), la relation (2.36) devient :

$$R = \frac{4Q}{\psi Pv} \quad (2.37)$$

Puisque $Q = \bar{Q}$, nous pouvons alors remarquer que la quantité $4Q/\bar{P}v$ figurant dans la relation (2.37) correspond au fait au nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux. Ainsi :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} \quad (2.38)$$

En combinant les relations (3.37) et (2.38), il ressort que :

$$R = \psi^{-1} \bar{R} \quad (2.39)$$

Introduisons les relations (2.33), (2.35) et (2.39) dans la relation (2.34). Nous obtenons :

$$\frac{4}{\psi^{5/2}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{-1} \bar{R} \psi^{5/2}} \right)$$

Ou bien :

$$\psi^{5/2} \log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{3,7\psi} + \frac{10,04}{\psi^{3/2} \bar{R}} \right) = -2 \quad (2.40)$$

Selon la relation (2.40), le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est fonction de la rugosité absolue ε et des caractéristiques hydrauliques \bar{D}_h et \bar{R} de l'écoulement dans le modèle rugueux. La relation (2.40) montre bien qu'elle est implicite vis-à-vis du facteur ψ . Une relation approchée de ψ a été déterminée et les calculs ont montré que le facteur de correction ψ pouvait s'écrire, avec une excellente approximation, sous la forme :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.41)$$

La relation approchée (2.41) a été comparée à la relation exacte (2.40). La comparaison a été menée en respectant les étapes suivantes :

1. On fixe une valeur de la rugosité relative $\varepsilon / \overline{D}_h$ entre les valeurs 0 et 0,05 afin de balayer l'ensemble du diagramme universel de *Moody*.
2. On fait varier le nombre de *Reynolds* \overline{R} avec un pas arbitrairement choisi.
3. Par un procédé itératif, on calcule la valeur du coefficient de correction ψ en application de la relation exacte (2.40).
4. On calcule la valeur approchée de ψ selon la relation proposée (2.41).
5. On calcule enfin l'écart relatif $\Delta\psi / \psi (\%)$ entre les valeurs de ψ déterminées au cours des étapes 3 et 4.

Les résultats de cette comparaison ont été tracés graphiquement dans le système d'axes de coordonnées à divisions semi logarithmiques de la figure 2.3.

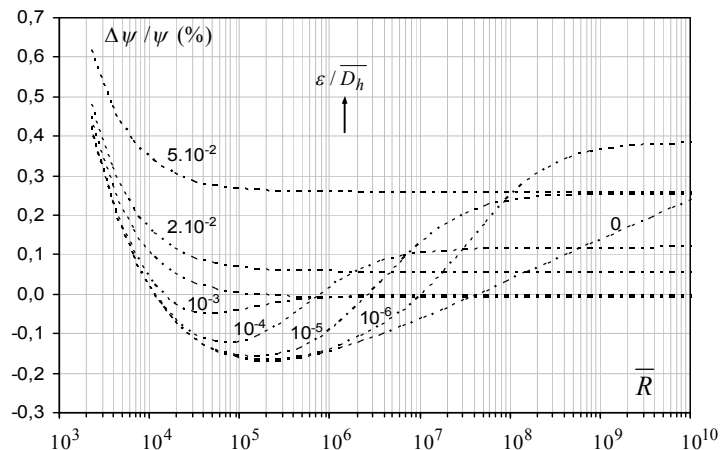


Figure 2.3 : Comparaison entre les valeurs exactes et approchées du coefficient ψ calculées selon les relations (2.40) et (2.41).

Il ressort de la figure 2.3 que, pour les valeurs pratiques $\overline{R} > 10^4$, l'écart relatif entre les valeurs exactes et approchées de ψ ne dépassent guère 0,4% seulement. Ceci montre clairement la fiabilité de la relation approchée (2.41) qui peut donc être appliquée avec une erreur très acceptable. Notons que la relation approchée (2.41) est applicable à l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent, comprenant le régime d'écoulement lisse, le régime

d'écoulement de transition et le régime d'écoulement turbulent rugueux.

II.4. Dimensionnement du canal par la relation de *Darcy-Weisbach* pour un rapport d'aspect imposé

Le dimensionnement du canal consiste donc à déterminer la valeur de la dimension linéaire b , correspondant à la largeur de base du canal. Il faut noter que les paramètres connus du problème sont : le débit volume Q , le paramètre d'aspect ou paramètre de forme η , la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne du canal, la pente géométrique i du canal, la cotangente m de l'angle d'inclinaison du canal par rapport à l'horizontale et enfin la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. A partir de ces six paramètres connus, les étapes suivantes sont recommandées pour déterminer la dimension linéaire recherchée b du canal étudié :

- i.* Avec les valeurs connues des paramètres Q , i , η et m , la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence est déterminée par application de la relation (2.20).
- ii.* Connaissant les valeurs de \bar{b} , m et de η , la relation (2.10) permet de calculer la valeur du diamètre hydraulique \bar{D}_h de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence, tandis que le périmètre mouillé \bar{P} du modèle rugueux est déterminé par application de la relation (2.9).
- iii.* Les valeurs connues des paramètres Q , \bar{P} et ν sont introduites dans la relation (2.38) pour l'évaluation du nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence.
- iv.* A partir des valeurs connues de ε / \bar{D}_h et de \bar{R} , la relation (2.41) permet le calcul explicite du facteur de correction des dimensions linéaires ψ .
- v.* Enfin, connaissant les valeurs de \bar{b} et de ψ , la valeur recherchée de la dimension linéaire b est directement déduite de la l'application de la relation fondamentale (2.27).

Afin de mieux illustrer les étapes de calcul du dimensionnement ci-dessus indiquées, l'exemple d'application suivant est proposé.

Exemple d'application 2.1

On désire déterminer la dimension linéaire b du canal de forme trapézoïdale représenté par la figure 2.1, en utilisant la relation de *Darcy-Weisbach*.

Les données du problème sont :

Débit volume $Q = 43,26 m^3 / s$, paramètre de forme $\eta = y_n / b = 1,5$, pente longitudinale du canal $i = 10^{-3}$, l'angle d'inclinaison $\alpha = 45^\circ (m = 1)$ des parois par rapport à l'horizontale, rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-3} m$, viscosité cinématique du liquide en écoulement $\nu = 10^{-6} m^2 / s$.

Solution

i. La dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.20) :

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \left[\frac{1 + 2\eta\sqrt{1+m^2}}{128\eta^3(1+m\eta)^3} \right]^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} = \\ &= \left[\frac{1 + 2 \times 1,5 \times \sqrt{1+1^2}}{128 \times 1,5^3 \times (1+1 \times 1,5)^3} \right]^{1/5} \times \left(\frac{43,26^2}{9,81 \times 0,001} \right)^{1/5} = 2,717378086 m \end{aligned}$$

ii. Selon la relation (2.9), le périmètre mouillé \bar{P} dans le modèle rugueux est:

$$\bar{P} = \bar{b} \left(1 + 2\eta\sqrt{1+m^2} \right) = 2,717378086 \times \left(1 + 2 \times 1,5 \times \sqrt{1+1^2} \right) = 14,24623691 m$$

iii. Le diamètre hydraulique \bar{D}_h dans le modèle rugueux est, en vertu de la relation (2.10) :

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\eta(1+m\eta)}{1+2\eta\sqrt{1+m^2}} = 4 \times 2,717378086 \times \frac{1,5 \times (1+1 \times 1,5)}{1+2 \times 1,5 \times \sqrt{1+1^2}} = 7,77483595 m$$

iv. Le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est, selon la relation (2.38) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}\nu} = \frac{4 \times 43,37}{14,24623691 \times 10^{-6}} = 12146365,46$$

v. Le facteur de corrections des dimensions linéaires ψ est donc, selon la relation (2.41) :

$$\begin{aligned} \psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 7,77483595}{4,75} + \frac{8,5}{12146365,46} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0,736018461 \end{aligned}$$

vi. La dimension linéaire b recherchée est, en vertu de la relation fondamentale (2.27) :

$$b = \psi \bar{b} = 0,736018461 \times 2,717378086 = 2 m$$

vii. La profondeur normale y_n est par suite :

$$y_n = b\eta = 2 \times 1,5 = 3m$$

viii. Au cours de cette étape, vérifions nos calculs en déterminant la pente longitudinale i par application de la relation (2.13) :

$$i = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2$$

Selon la relation (2.33), le coefficient de frottement est :

$$f = \psi^5 / 16 = 0,736018461 / 16 = 0,013499682$$

L'aire de la section mouillée A , compte tenu de la relation (2.2) :

$$A = b^2 \eta (1 + m \eta) = 2^2 \times 1,5 \times (1 + 1 \times 1,5) = 15m^2$$

Le périmètre mouillé P est, selon la relation (2.4) :

$$P = b \left(1 + 2\eta \sqrt{1 + m^2} \right) = P = 2 \times \left(1 + 2 \times 1,5 \times \sqrt{1 + 1^2} \right) = 10,48528137m$$

Ainsi :

$$i = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2 = \frac{0,013499682}{8 \times 9,81} \times \frac{10,48528137}{15^3} \times 43,26^2 = 0,001$$

Il s'agit bien de la valeur de i donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

II.5. Dimensionnement du canal par la relation de Chézy pour un rapport d'aspect imposé

Le problème consiste à déterminer la dimension linéaire b correspondant à la largeur de base du canal étudié pour les valeurs connues du débit volume Q , de la rugosité absolue ε , de la pente géométrique i , du paramètre m , de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement et pour la valeur imposée du rapport d'aspect η ou paramètre de forme.

La relation de Chézy s'écrit :

$$Q = CA \sqrt{R_h i} \quad (2.42)$$

où C est le coefficient de résistances à l'écoulement de Chézy. Ce coefficient a pour unité $m^{1/2} / s$ et il est injustement considéré en pratique comme une constante. On estime que sa valeur ne dépend que de la nature du matériau constituant le canal. Or, il est bien évident que la résistance à l'écoulement devrait dépendre non seulement de la nature du matériau ou de la rugosité absolue ε , mais aussi et surtout de la profondeur de l'écoulement ou du rayon hydraulique R_h . Nous établirons dans ce paragraphe la relation qui lie le coefficient C au

facteur de correction des dimensions linéaires ψ , ce qui donnera une meilleure signification physique à C . Dans ce paragraphe, le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* ne sera plus considéré comme une constante et sa valeur n'est pas une donnée du problème. Elle sera calculée en fonctions des caractéristiques géométriques du canal et hydrauliques de l'écoulement.

En tenant compte des relations (2.2) et (2.5), la relation (2.42) s'écrit :

$$Q = Cb^2\eta(1+m\eta)\sqrt{b} \frac{\sqrt{\eta(1+m\eta)}}{\sqrt{1+2\eta\sqrt{1+m^2}}} \sqrt{i}$$

Ou bien, plus simplement :

$$Q = Cb^{5/2} \frac{[\eta(1+m\eta)]^{3/2}}{[1+2\eta\sqrt{1+m^2}]^{1/2}} \sqrt{i} \quad (2.43)$$

La relation (2.43) permet de déduire que :

$$b = \frac{[1+2\eta\sqrt{1+m^2}]^{1/5}}{[\eta(1+m\eta)]^{3/5}} \left(\frac{Q^2}{C^2 i} \right)^{1/5} \quad (2.44)$$

Deux paramètres sont inconnus dans la relation (2.44). Il s'agit de la dimension linéaire b que l'on recherche et du coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. La relation (2.44) n'est pas suffisante pour évaluer la dimension linéaire recherchée b .

Le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est étroitement lié au coefficient de frottement f par la relation bien connue :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (2.45)$$

Définissons pour le modèle rugueux de référence le coefficient de résistance à l'écoulement \bar{C} de *Chézy*. Selon la relation (2.45), nous pouvons écrire que :

$$\bar{C} = \sqrt{\frac{8g}{\bar{f}}} \quad (2.46)$$

Or, nous avons déjà établi au cours des paragraphes précédents que le coefficient de frottement \bar{f} de l'écoulement dans le modèle rugueux est constant et est tel que $\bar{f} = 1/16$. En

introduisant cette valeur dans la relation (2.46), il vient que :

$$\bar{C} = 8\sqrt{2g} \quad (2.47)$$

Ainsi, le coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* dans le modèle rugueux est aussi une constante.

En combinant les relations (2.33) et (2.45), nous pouvons facilement déduire que :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (2.48)$$

Ainsi, comme pour le coefficient de frottement f , le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est étroitement lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ .

Appliquons au modèle rugueux la relation (2.44) sous les conditions $Q = \bar{Q}$ et $i = \bar{i}$. Il vient que :

$$\bar{b} = \frac{\left[1 + 2\bar{\eta}\sqrt{1 + m^2}\right]^{1/5}}{\left[\bar{\eta}(1 + m\bar{\eta})\right]^{3/5}} \left(\frac{Q^2}{\bar{C}^2 i}\right)^{1/5} \quad (2.49)$$

En tenant compte de la relation (2.47), la relation (2.49) devient :

$$\bar{b} = \frac{\left[1 + 2\bar{\eta}\sqrt{1 + m^2}\right]^{1/5}}{\left[\bar{\eta}(1 + m\bar{\eta})\right]^{3/5}} \left(\frac{Q^2}{128gi}\right)^{1/5} \quad (2.50)$$

Admettons, dans un premier, que le rapport d'aspect $\bar{\eta}$ dans le modèle rugueux soit le même que celui de l'écoulement dans le canal étudié, soit $\bar{\eta} = \eta$. La relation (2.50) s'écrit alors :

$$\bar{b} = \frac{\left[1 + 2\eta\sqrt{1 + m^2}\right]^{1/5}}{\left[128\eta^3(1 + m\eta)^3\right]^{1/5}} \left(\frac{Q^2}{gi}\right)^{1/5} \quad (2.51)$$

Ainsi, tous les paramètres figurant dans le membre droit de l'équation (2.51) sont bien déterminés et cette équation permet donc d'évaluer de manière explicite la dimension linéaire

\bar{b} du modèle rugueux. Ce qu'il faut noter, c'est que la relation (2.51) est identique à la relation (2.20) obtenue par la transformation de la relation de *Darcy-Weisbach*. Ceci revient à dire que le dimensionnement du canal par application de la relation de *Chézy* s'effectue selon les mêmes étapes que celles indiquées dans le paragraphe II.4.

Exemple d'application 2.2

Reprenons les données de l'exemple d'application 2.1 et déterminons la dimension linéaire b ainsi que le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*.

Les données du problème sont :

Débit volume $Q = 43,26m^3/s$, paramètre de forme $\eta = y_n/b = 1,5$, pente longitudinale du canal $i = 10^{-3}$, l'angle d'inclinaison $\alpha = 45^\circ (m = 1)$ des parois par rapport à l'horizontale, rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-3}m$, viscosité cinématique du liquide en écoulement $\nu = 10^{-6}m^2/s$.

Solution

i. La dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.20) :

$$\begin{aligned}\bar{b} &= \left[\frac{1 + 2\eta\sqrt{1+m^2}}{128\eta^3(1+m\eta)^3} \right]^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} = \\ &= \left[\frac{1 + 2 \times 1,5 \times \sqrt{1+1^2}}{128 \times 1,5^3 \times (1+1 \times 1,5)^3} \right]^{1/5} \times \left(\frac{43,26^2}{9,81 \times 0,001} \right)^{1/5} = 2,717378086m\end{aligned}$$

ii. Selon la relation (2.9), le périmètre mouillé \bar{P} dans le modèle rugueux est:

$$\bar{P} = \bar{b} \left(1 + 2\eta\sqrt{1+m^2} \right) = 2,717378086 \times \left(1 + 2 \times 1,5 \times \sqrt{1+1^2} \right) = 14,24623691m$$

iii. Le diamètre hydraulique \bar{D}_h dans le modèle rugueux est, en vertu de la relation (2.10) :

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\eta(1+m\eta)}{1+2\eta\sqrt{1+m^2}} = 4 \times 2,717378086 \times \frac{1,5 \times (1+1 \times 1,5)}{1+2 \times 1,5 \times \sqrt{1+1^2}} = 7,77483595m$$

iv. Le nombre de *Reynolds* \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est, selon la relation (2.38) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}\nu} = \frac{4 \times 43,26}{14,24623691 \times 10^{-6}} = 12146365,46$$

v. Le facteur de corrections des dimensions linéaires ψ est donc, selon la relation (2.41) :

$$\begin{aligned}\psi &\cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / D_h}{4,75} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 7,77483595}{4,75} + \frac{8,5}{12146365,46} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 0,736018461\end{aligned}$$

vi. La dimension linéaire b recherchée est, en vertu de la relation fondamentale (2.27) :

$$b = \psi \bar{b} = 0,736018461 \times 2,717378086 = 2m$$

vii. Au cours de cette étape, vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par la relation de *Chézy* :

$$Q = CA\sqrt{R_h i}$$

Selon la relation (2.48), le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} = \frac{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}}{0,736018461^{5/2}} = 76,24611503m^{0,5} / s$$

L'aire de la section mouillée A , compte tenu de la relation (2.2) :

$$A = b^2 \eta (1 + m \eta) = 2^2 \times 1,5 \times (1 + 1 \times 1,5) = 15m^2$$

Le rayon hydraulique $R_h = D_h / 4$ est, selon la relation (2.5):

$$R_h = b \frac{\eta(1+m\eta)}{1+2\eta\sqrt{1+m^2}} = 2 \times \frac{1,5 \times (1+1 \times 1,5)}{1+2 \times 1,5 \times \sqrt{1+1^2}} = 1,430576774m$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}Q &= CA\sqrt{R_h i} = 76,24611503 \times 15 \times \sqrt{1,430576774 \times 0,001} = 43,258m^3 / s \\ &\square 43,26m^3 / s\end{aligned}$$

Le débit volume Q ainsi calculé correspond bien à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

II.6. Dimensionnement du canal par la relation de *Manning* pour un rapport d'aspect imposé

La formule de *Manning* (1891) figure parmi les équations régissant l'écoulement uniforme les plus utilisées dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien. Le débit volume Q est exprimé par :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} \quad (2.52)$$

Le coefficient n est le coefficient de *Manning* et dont la valeur est étroitement liée à celle du coefficient k de *Strickler* puisque $n = k^{-1}$.

Dans la relation (2.52), l'aire de la section mouillée A et le rayon hydraulique R_h sont donnés respectivement par les relations (2.2) et (2.5). En introduisant ces relations dans (2.52), il vient que :

$$Q = \frac{1}{n} b^2 \eta (1+m\eta) b^{2/3} \frac{[\eta(1+m\eta)]^{2/3}}{\left(1+2\eta\sqrt{1+m^2}\right)^{2/3}} \sqrt{i}$$

Ou bien, plus simplement :

$$Q = \frac{1}{n} b^{8/3} \frac{[\eta(1+m\eta)]^{5/3}}{\left(1+2\eta\sqrt{1+m^2}\right)^{2/3}} \sqrt{i} \quad (2.53)$$

La relation (2.53) permet de déduire que :

$$b = \left(\frac{nQ}{\sqrt{i}}\right)^{3/8} \frac{\left(1+2\eta\sqrt{1+m^2}\right)^{1/4}}{[\eta(1+m\eta)]^{5/8}} \quad (2.54)$$

Dans la relation (2.54), les paramètres inconnus du problème sont la dimension linéaire b ainsi que le coefficient n de *Manning*. Celui-ci n'est pas une donnée du problème et il doit être calculé au même titre que le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*. Ainsi, la relation (2.54) ne peut pas suffire à évaluer la dimension linéaire b .

En comparant les relations de *Chézy* et de *Manning*, nous pouvons aisément déduire que les coefficients C de *Chézy* et n de *Manning* sont liés par la relation :

$$n = \frac{R_h^{1/6}}{C} \quad (2.55)$$

Rappelons d'une part que le coefficient C de *Chézy* est lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ par la relation (2.48), soit :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \quad (2.48)$$

D'autre part, étant donné que le rayon hydraulique R_h est une dimension linéaire, nous pouvons écrire, selon la relation fondamentale (2.27) :

$$R_h = \psi \overline{R_h} \quad (2.56)$$

En introduisant les relations (2.48) et (2.56) dans la relation (2.55), il vient que :

$$n = \frac{\psi^{1/6} \overline{R_h}^{-1/6}}{8\sqrt{2g} / \psi^{5/2}}$$

Soit, après simplifications :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \overline{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (2.57)$$

La relation (2.57) montre bien que le coefficient n de *Manning* est lié au coefficient de correction des dimensions linéaires ψ . Celui-ci dépend à son tour des caractéristiques hydrauliques \overline{D}_h et \overline{R} de l'écoulement dans le modèle rugueux, en vertu de la relation (2.41).

Appliquons la relation (2.54) au modèle rugueux sous les conditions $Q = \overline{Q}$, $\eta = \overline{\eta}$ et $i = \overline{i}$:

$$\overline{b} = \left(\frac{\overline{nQ}}{\sqrt{\overline{i}}} \right)^{3/8} \frac{\left(1 + 2\overline{\eta}\sqrt{1+m^2} \right)^{1/4}}{\left[\overline{\eta}(1+m\overline{\eta}) \right]^{5/8}} \quad (2.58)$$

Le coefficient \overline{n} de *Manning* de l'écoulement dans le modèle rugueux est régi par la relation (2.55), soit :

$$\overline{n} = \frac{\overline{R}_h^{-1/6}}{C} \quad (2.59)$$

Or, le coefficient \overline{C} est une constante en vertu de la relation (2.47). La relation (2.59) devient alors :

$$\overline{n} = \frac{\overline{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} \quad (2.60)$$

Remplaçons la relation (2.60) dans la relation (2.58), il vient que :

$$\overline{b} = \left(\frac{Q^2}{128gi} \right)^{3/16} \overline{R}_h^{-1/16} \frac{\left(1 + 2\overline{\eta}\sqrt{1+m^2} \right)^{1/4}}{\left[\overline{\eta}(1+m\overline{\eta}) \right]^{5/8}} \quad (2.61)$$

De la relation (2.10), le rayon hydraulique $\overline{R}_h = \overline{D}_h / 4$ s'écrit :

$$\overline{R}_h = \overline{b} \frac{\eta(1+m\eta)}{1+2\eta\sqrt{1+m^2}} \quad (2.62)$$

Remplaçons la relation (2.62) dans la relation (2.61), il vient alors :

$$\bar{b} = \left(\frac{Q^2}{128gi} \right)^{3/16} \bar{b}^{-1/16} \frac{[\eta(1+m\eta)]^{1/16} (1+2\eta\sqrt{1+m^2})^{1/4}}{(1+2\eta\sqrt{1+m^2})^{1/16} [\eta(1+m\eta)]^{5/8}}$$

Après simplifications, nous pouvons écrire que :

$$\bar{b} = \frac{(1+2\eta\sqrt{1+m^2})^{1/5}}{[128\eta^3(1+m\eta)^3]^{1/5}} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (2.63)$$

Ainsi, tous les paramètres figurant dans le membre droit de l'équation (2.63) sont bien déterminés et cette équation permet donc d'évaluer de manière explicite la dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux. Ce qu'il faut remarquer, c'est que la relation (2.63) est identique à la relation (2.20) obtenue par la transformation de la relation de *Darcy-Weisbach*. Ceci revient à dire que le dimensionnement du canal par application de la relation de *Manning* s'effectue selon les mêmes étapes que celles indiquées dans le paragraphe II.4.

Exemple d'application 2.3

Reprenons les données de l'exemple d'application 2.1 et déterminons la dimension linéaire b ainsi que le coefficient de résistance à l'écoulement n de *Manning*.

Les données du problème sont :

Débit volume $Q = 43,26m^3/s$, paramètre de forme $\eta = y_n/b = 1,5$, pente longitudinale du canal $i = 10^{-3}$, l'angle d'inclinaison $\alpha = 45^\circ (m = 1)$ des parois par rapport à l'horizontale, rugosité absolue $\varepsilon = 10^{-3}m$, viscosité cinématique du liquide en écoulement $\nu = 10^{-6}m^2/s$.

Solution

i. La dimension linéaire \bar{b} du modèle rugueux de référence est, selon la relation (2.63) :

$$\bar{b} = \left[\frac{1+2\eta\sqrt{1+m^2}}{128\eta^3(1+m\eta)^3} \right]^{1/5} \left(\frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} =$$

$$= \left[\frac{1 + 2 \times 1,5 \times \sqrt{1+1^2}}{128 \times 1,5^3 \times (1+1 \times 1,5)^3} \right]^{1/5} \times \left(\frac{43,26^2}{9,81 \times 0,001} \right)^{1/5} = 2,717378086m$$

ii. Selon la relation (2.9), le périmètre mouillé \bar{P} dans le modèle rugueux est:

$$\bar{P} = \bar{b} \left(1 + 2\eta \sqrt{1+m^2} \right) = 2,717378086 \times \left(1 + 2 \times 1,5 \times \sqrt{1+1^2} \right) = 14,24623691m$$

iii. Le diamètre hydraulique \bar{D}_h dans le modèle rugueux est, en vertu de la relation (2.10) :

$$\bar{D}_h = 4\bar{b} \frac{\eta(1+m\eta)}{1+2\eta\sqrt{1+m^2}} = 4 \times 2,717378086 \times \frac{1,5 \times (1+1 \times 1,5)}{1+2 \times 1,5 \times \sqrt{1+1^2}} = 7,77483595m$$

iv. Le nombre de Reynolds \bar{R} caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est, selon la relation (2.38) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 43,37}{14,24623691 \times 10^{-6}} = 12146365,46$$

v. Le facteur de corrections des dimensions linéaires ψ est donc, selon la relation (2.41) :

$$\psi \cong 1,35 \left[-\log \left(\frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} = 1,35 \times \left[-\log \left(\frac{10^{-3} / 7,77483595}{4,75} + \frac{8,5}{12146365,46} \right) \right]^{-2/5}$$

$$= 0,736018461$$

vi. La dimension linéaire b recherchée est, en vertu de la relation fondamentale (2.27) :

$$b = \psi \bar{b} = 0,736018461 \times 2,717378086 = 2m$$

viii. Le coefficient n de Manning est, selon la relation (2.57) :

$$n = \frac{\psi^{8/3} \bar{R}_h^{-1/6}}{8\sqrt{2g}} = \frac{0,736018461^{8/3} (7,77483595 / 4)^{1/6}}{8 \times \sqrt{2 \times 9,81}} = 0,013922021m^{-1/3}s$$

ix. Au cours de cette étape, vérifions nos calculs en déterminant le débit volume Q par la relation de Manning :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i}$$

$$A = b^2 \eta (1+m\eta) = 2^2 \times 1,5 \times (1+1 \times 1,5) = 15m^2$$

$$R_h = b \frac{\eta(1+m\eta)}{1+2\eta\sqrt{1+m^2}} = 2 \times \frac{1,5 \times (1+1 \times 1,5)}{1+2 \times 1,5 \times \sqrt{1+1^2}} = 1,430576774m$$

Ainsi :

$$Q = \frac{1}{n} A R_h^{2/3} \sqrt{i} = \frac{1}{0,013922021} \times 15 \times 1,430576774^{2/3} \sqrt{0,001} = 43,2576m^3 / s$$

$$\square 43,26m^3 / s$$

Le débit volume Q ainsi calculé correspond bien à celui donné à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

II.7. ETUDE DE L'ÉCOULEMENT A COEFFICIENT DE RESISTANCE VARIABLE

Il est tout à fait justifié d'admettre que, pour le même canal, le coefficient de résistance à l'écoulement varie en fonction du taux de remplissage η . Ceci serait valable aussi bien pour le coefficient de résistance C de *Chézy* que pour le coefficient n de *Manning*. En pratique, lorsqu'il s'agit de dimensionner un canal trapézoïdal à écoulement libre, les paramètres connus sont le débit volume Q , la pente longitudinale i du canal, la rugosité absolue ε caractérisant l'état de la paroi interne du canal, le taux de remplissage η et la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Notons que ni le coefficient de résistance de *Chézy*, ni celui de *Manning* ne constitue une donnée du problème. Lorsque l'une ou l'autre des formules de *Chézy* et de *Manning* doit être utilisée pour dimensionner le canal, il sera alors nécessaire de déterminer la valeur de C ou celle de n . Ceci constitue l'un des objectifs principaux de cette partie de l'étude.

II.7.1. Relation générale du coefficient de résistance de *Chézy*

Pour mettre en évidence la variation du coefficient C de *Chézy* en fonction de tous les paramètres régissant l'écoulement, la formule de *Achour et Bedjaoui* (2006) est d'une grande utilité. Cette relation, applicable à tous les profils géométriques, a été établie dans le domaine entier de l'écoulement turbulent englobant ainsi les régimes d'écoulement turbulent lisse, de transition et turbulent rugueux. Selon *Achour et Bedjaoui* (2006), le débit volume Q s'exprime par :

$$Q = -4\sqrt{2g} A\sqrt{R_h} i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.64)$$

où ε est la rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite et R est un nombre de *Reynolds* que l'on peut exprimer par la relation :

$$R = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i R_h^3}}{\nu} \quad (2.65)$$

$$\text{On note: } R^* = \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu} \quad (2.66)$$

En comparant les relations (2.42) et (2.64), il apparaît clairement que le coefficient C de *Chézy* est tel que :

$$C = -4\sqrt{2g} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.67)$$

ou bien, en termes adimensionnels :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R} \right) \quad (2.68)$$

Tenant compte de la relation (2.5), la relation (2.67) montre bien que le coefficient de résistance C de *Chézy* dépend à la fois de la rugosité relative ε/b , du taux de remplissage η et d'un nombre de *Reynolds* R , lui-même fonction de la pente i , la largeur du canal b , de η et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Nous pouvons donc écrire la relation fonctionnelle suivante :

$$c(b, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0$$

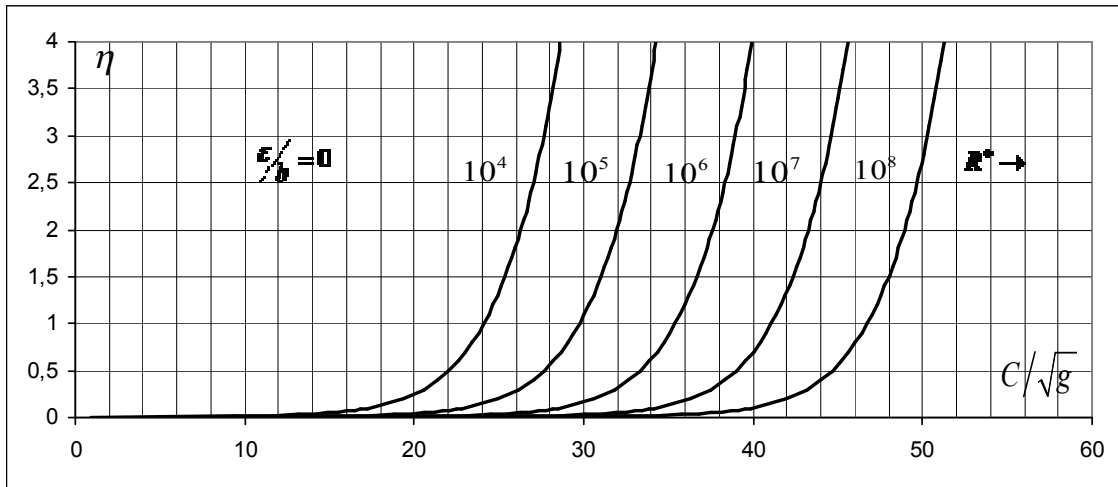
Tenant compte de la relation (2.5), la relation (2.65) s'écrit :

$$\frac{C}{\sqrt{g}} = -4\sqrt{2} \log \left[\frac{\varepsilon}{b} \frac{(1 + 2n\sqrt{1 + m^2})}{14,8n(1 + mn)} + \frac{10,04}{32\sqrt{2}R^*} \left[\frac{(1 + 2n\sqrt{1 + m^2})}{n(1 + mn)} \right]^{3/2} \right] \quad (2.69)$$

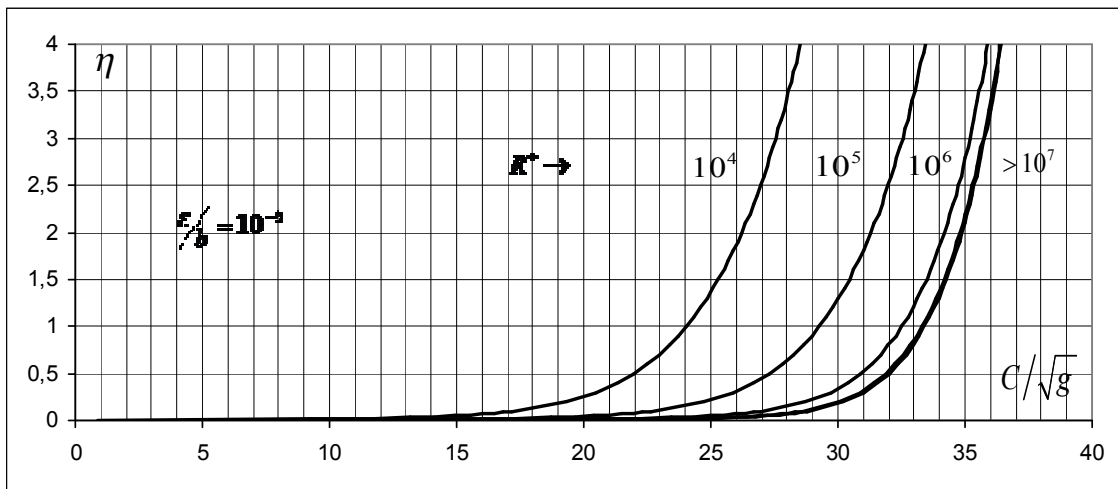
Il apparaît ainsi que le coefficient de résistance C de *Chézy* dépend de la rugosité relative ε/b , du taux de remplissage η du canal et du nombre de *Reynolds* R^* . Lorsque ces paramètres sont donnés, la relation (2.69) permet la détermination explicite du coefficient C . Cependant, lorsqu'il s'agit de dimensionner le canal, la largeur du canal n'est plus une donnée du problème et seuls les paramètres $Q, \eta, i, \varepsilon, \nu$ sont connus. Dans ce cas, la relation (2.69) ne permet plus de déterminer de manière explicite le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy*.

La représentation graphique de la relation (2.69) est comme suit:

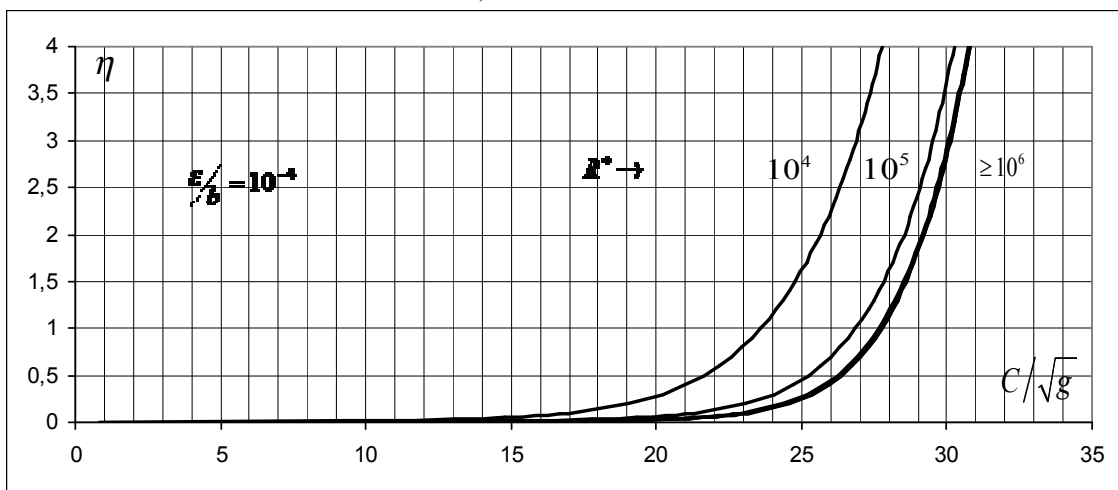
-Pour l'angle $\alpha = 30^\circ$:



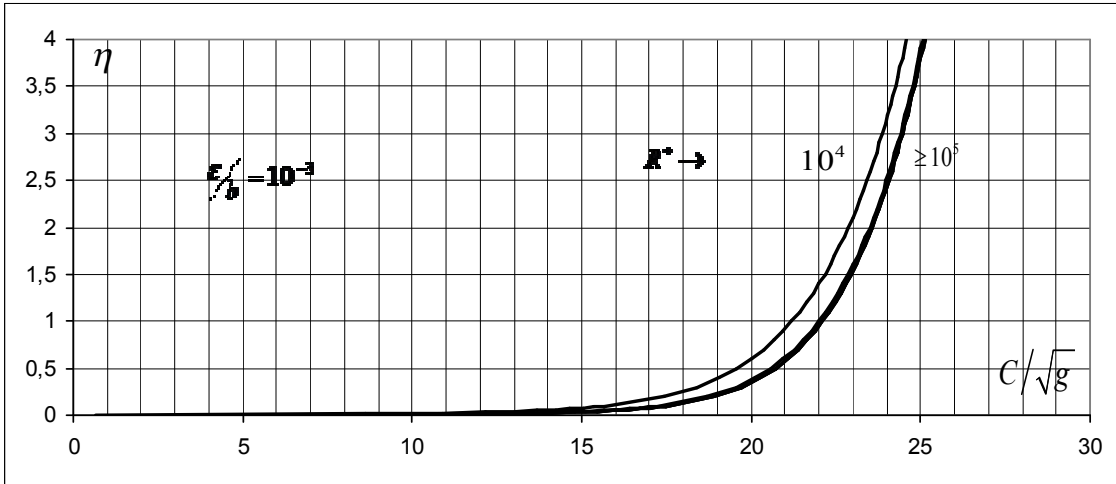
a)



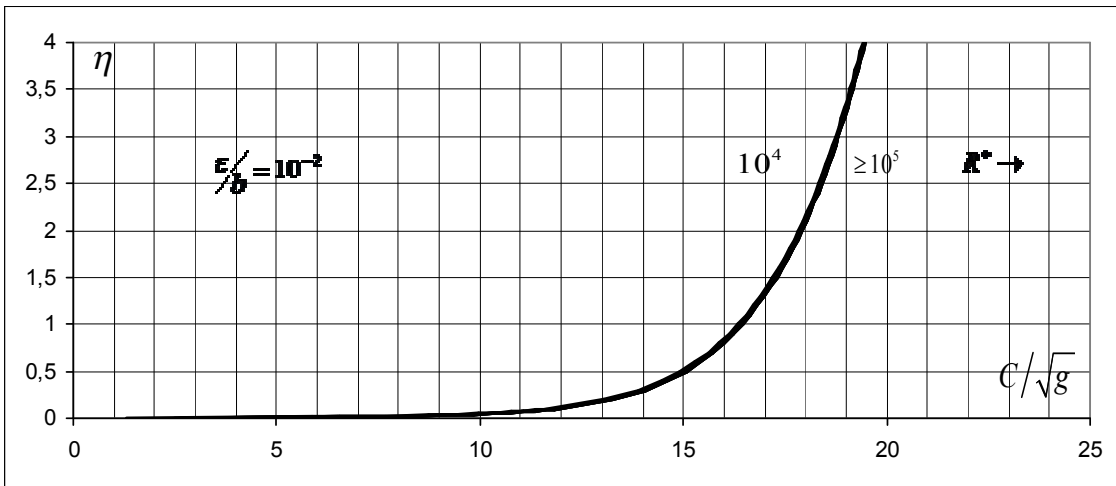
b)



c)

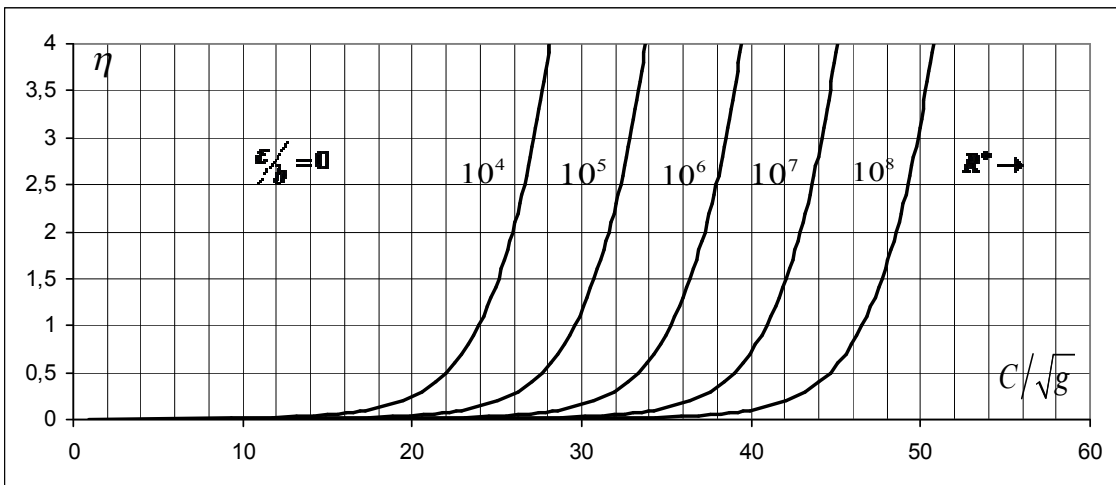


d)

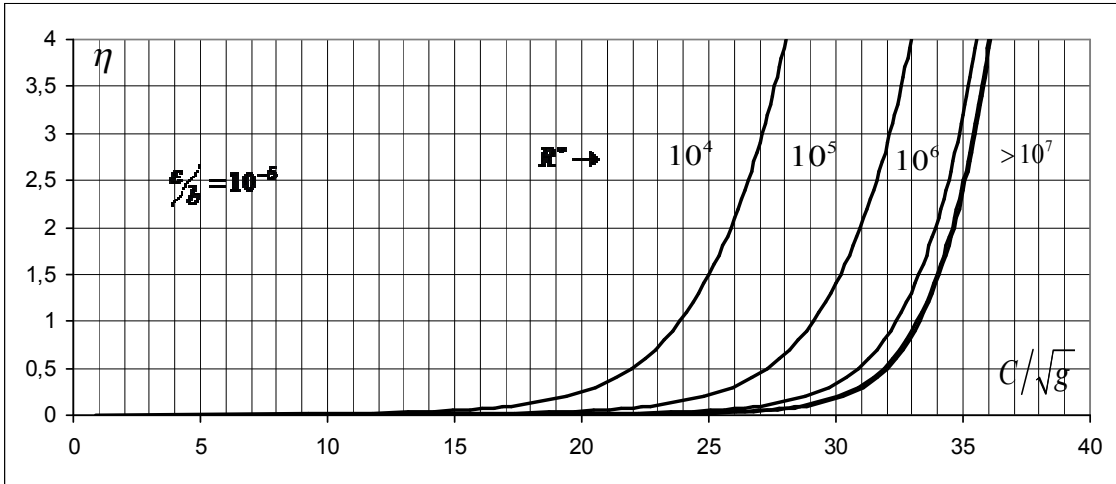


e)

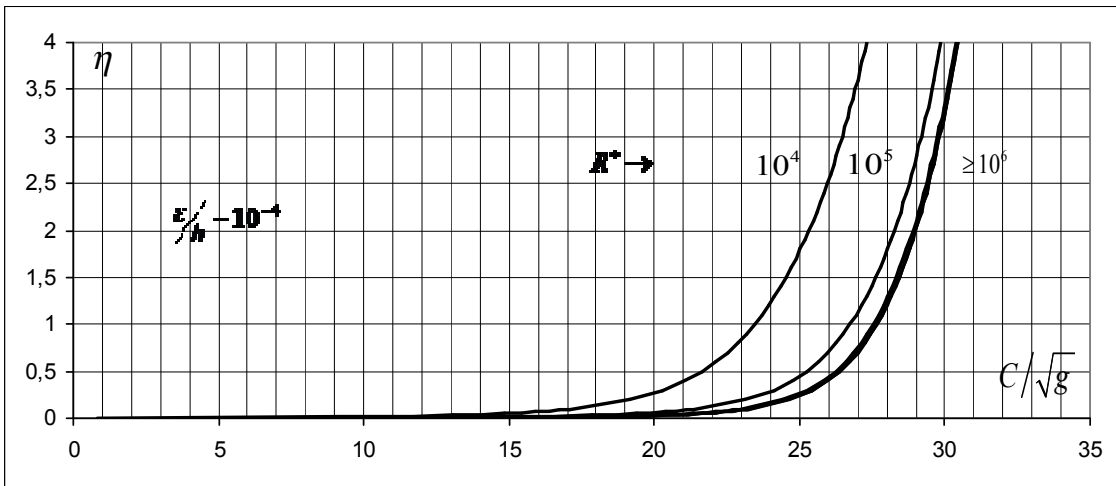
-Pour l'angle $\alpha = 45^\circ$



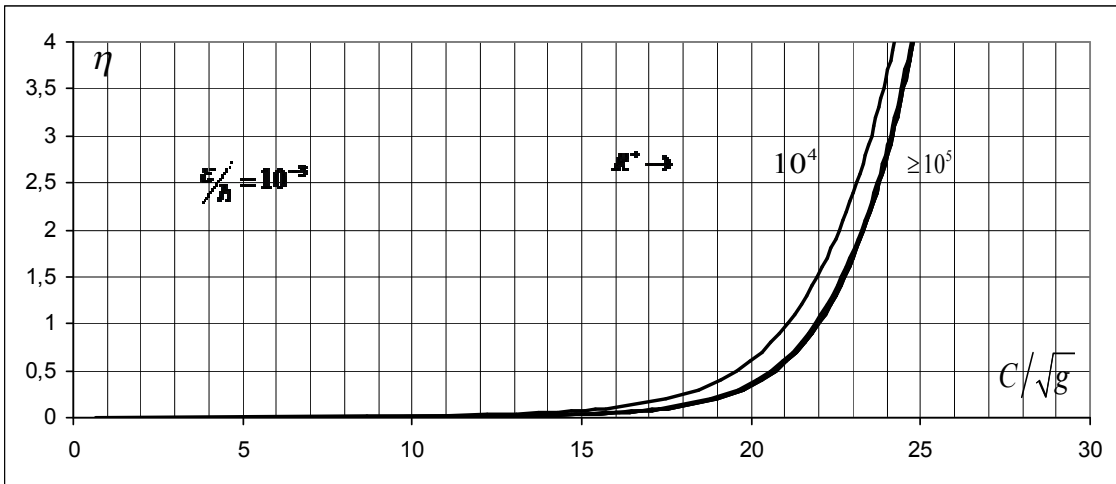
a)



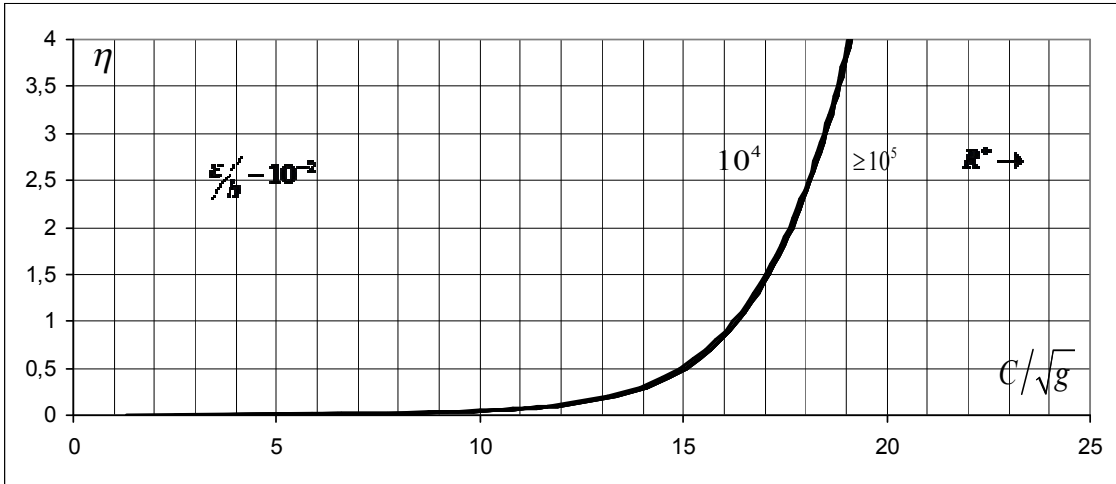
b)



c)

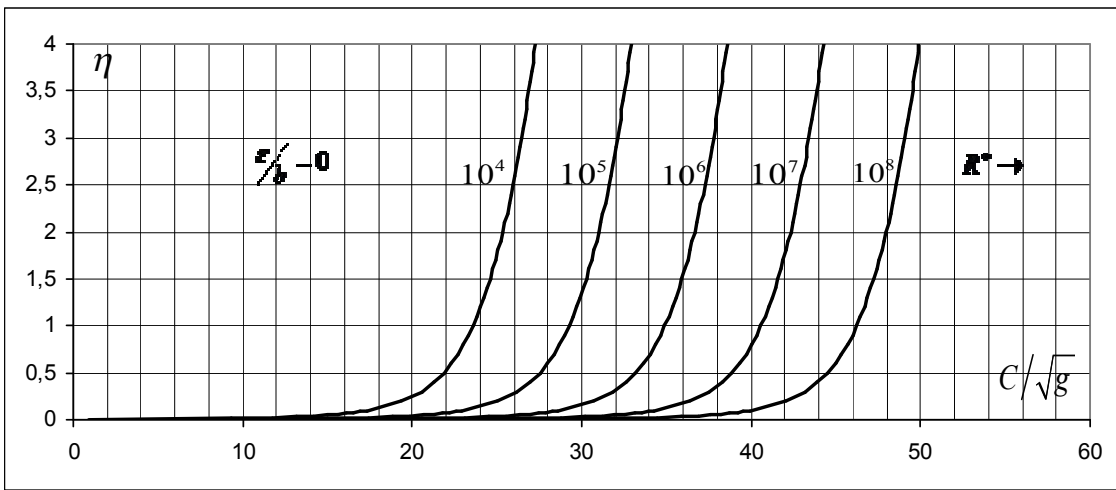


d)

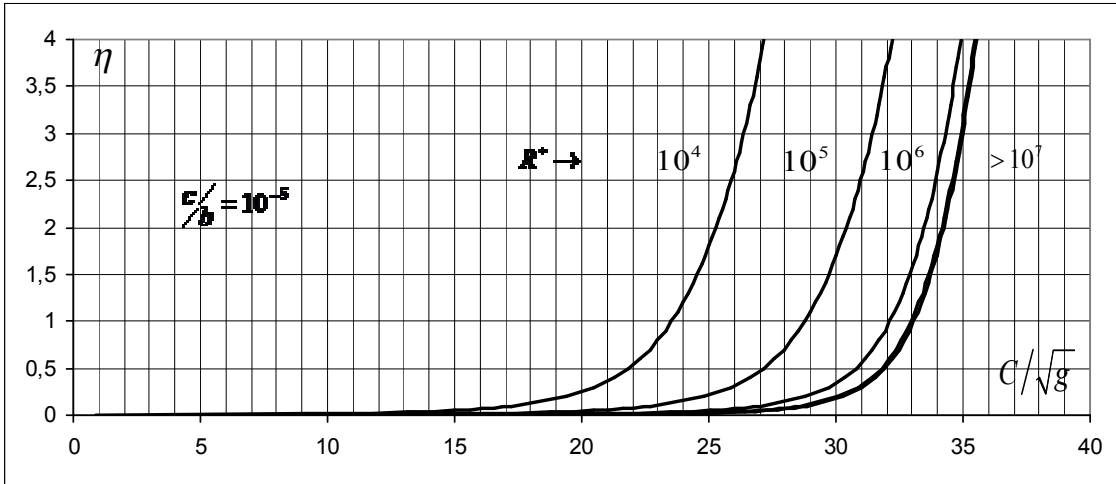


e)

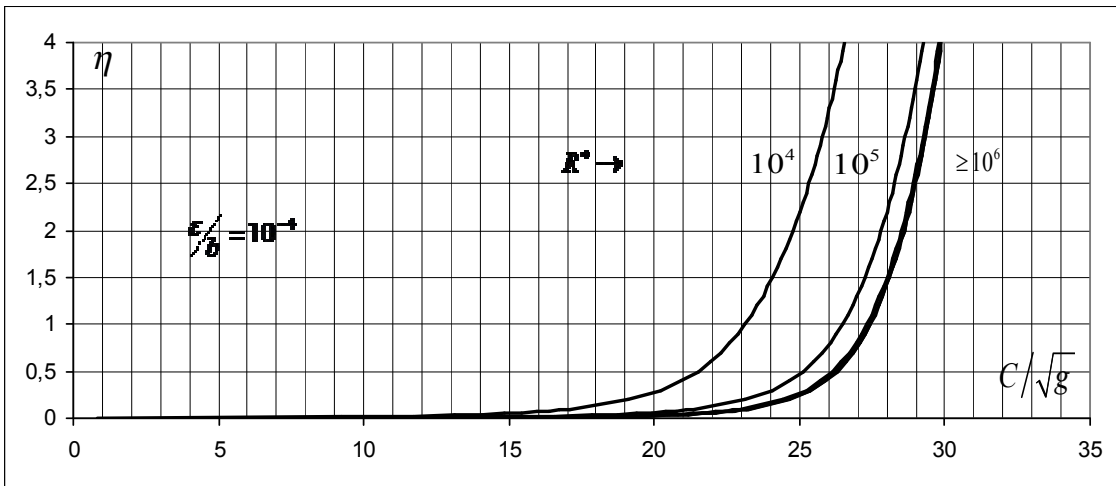
-Pour l'angle $\alpha = 60^\circ$:



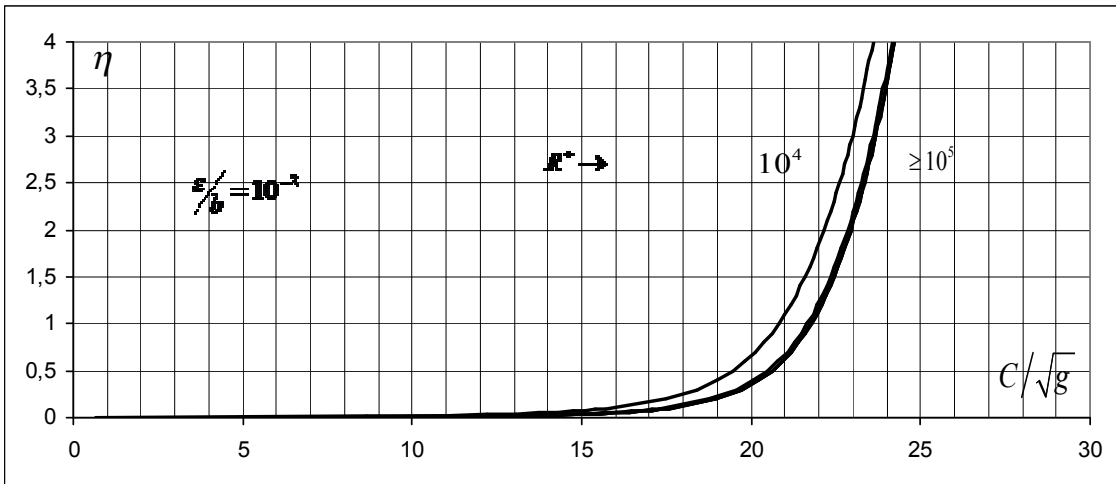
a)



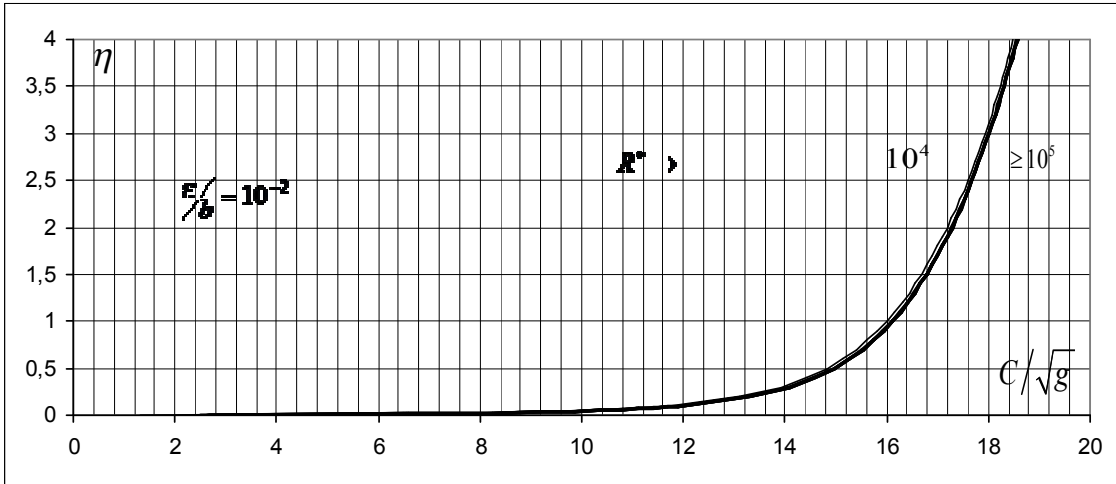
b)



c)

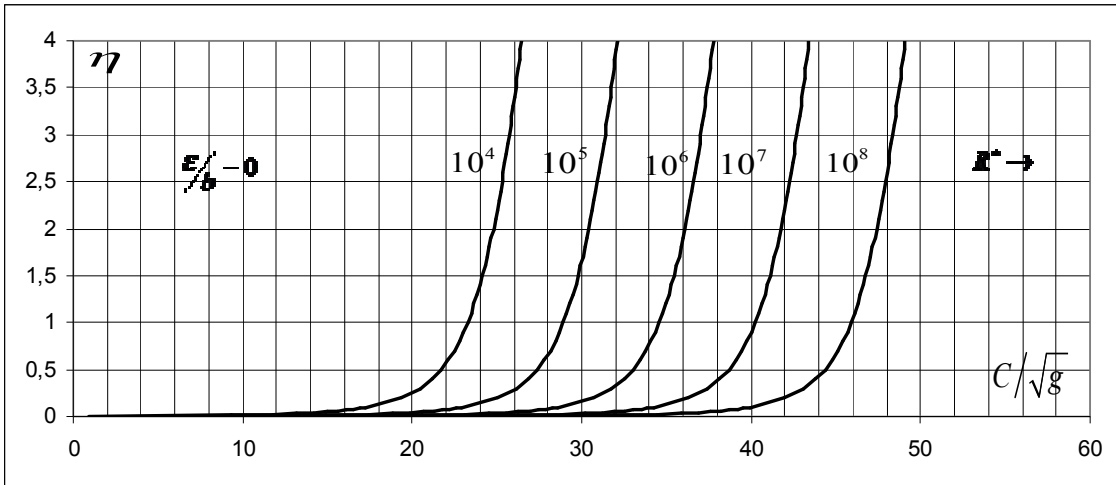


d)

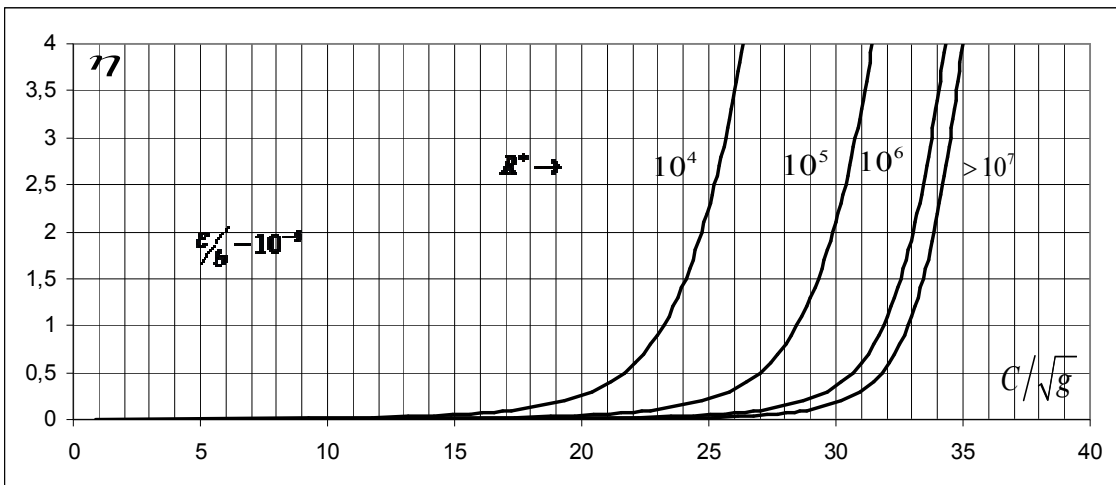


e)

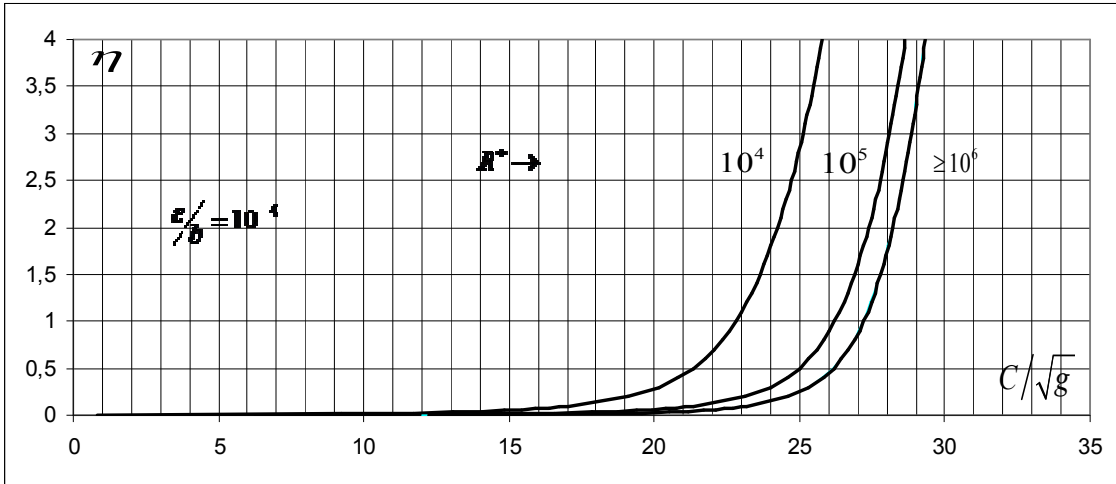
-Pour l'angle $\alpha = 70^\circ$:



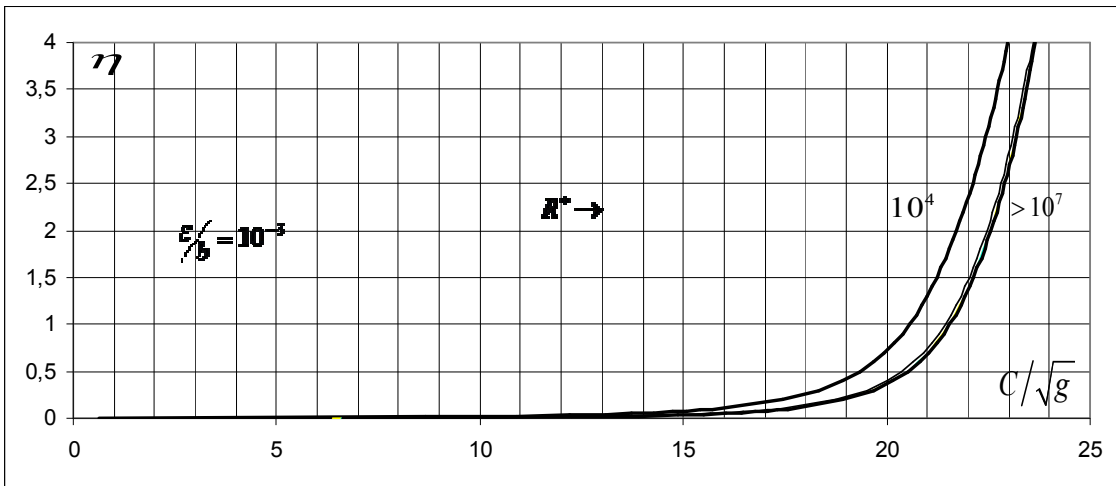
a)



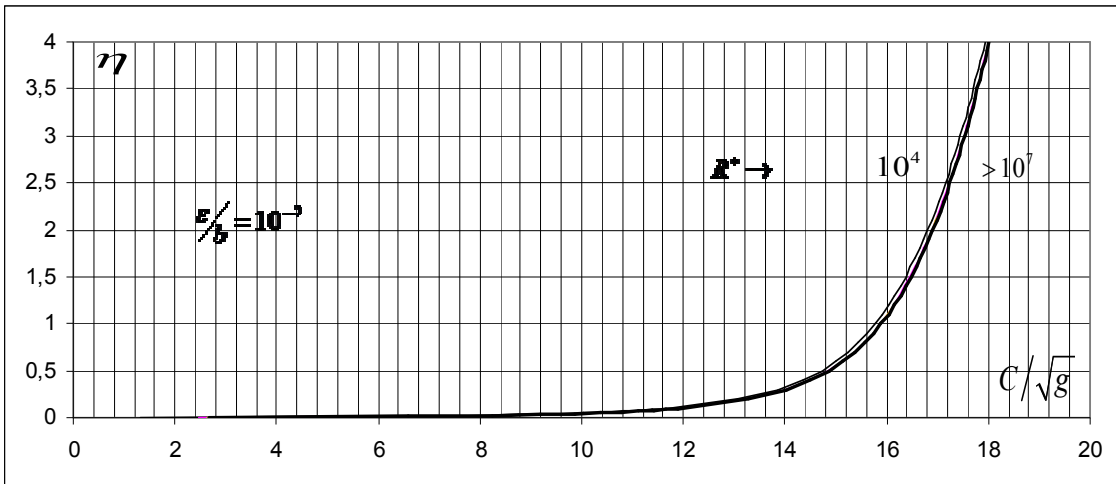
b)



c)

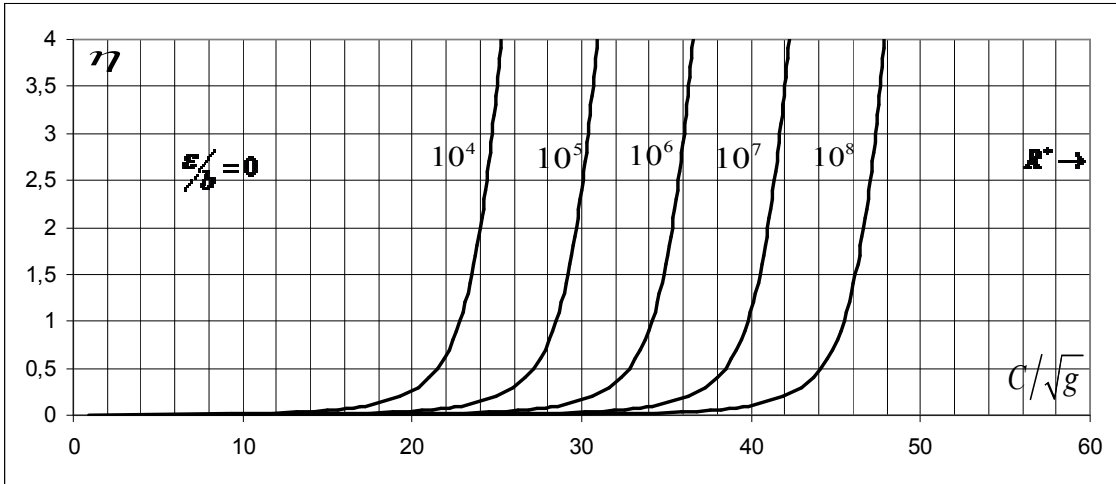


d)

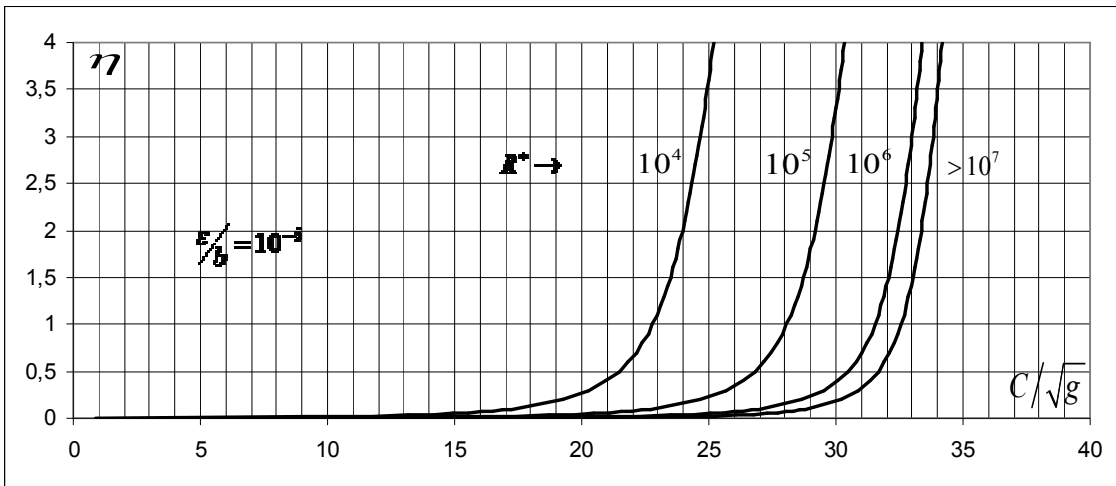


e)

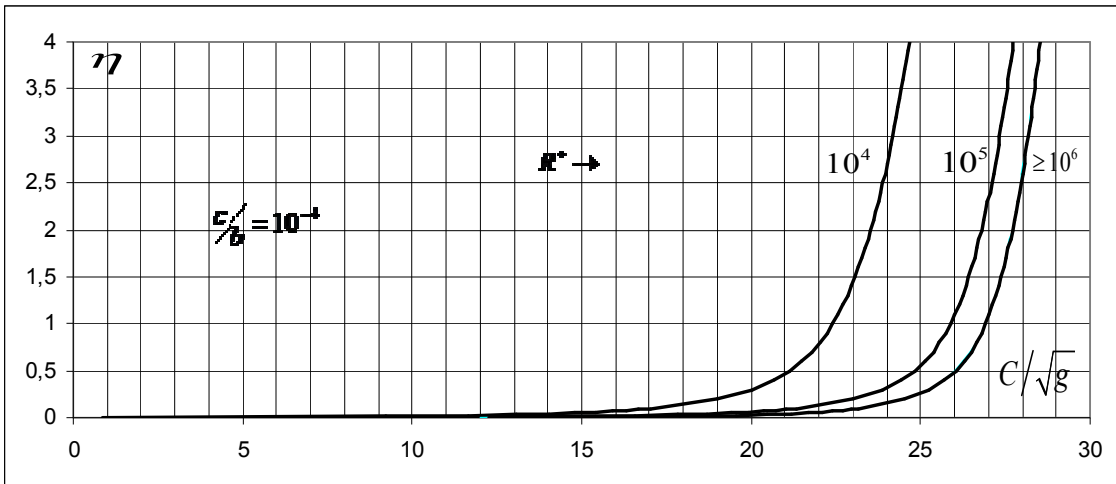
-Pour l'angle $\alpha = 80^\circ$:



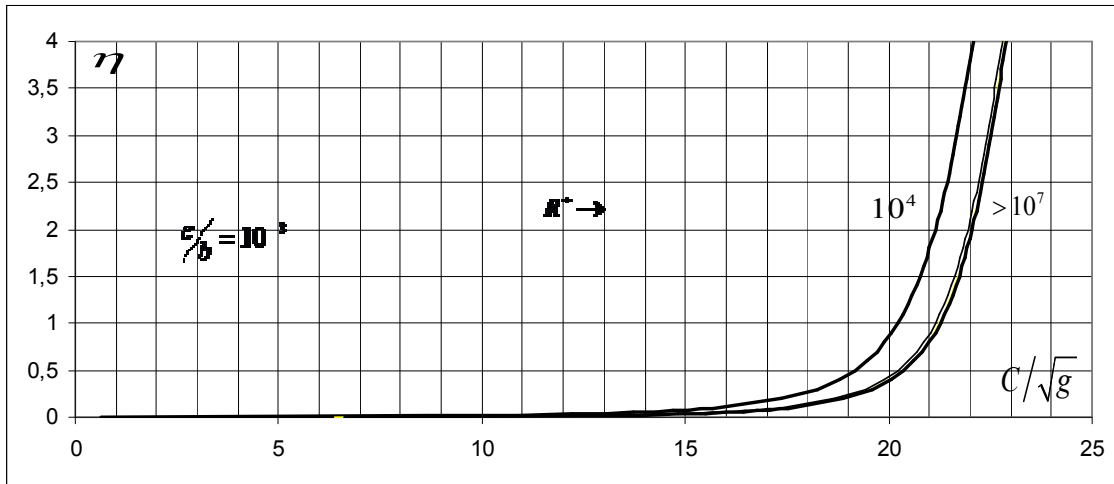
a)



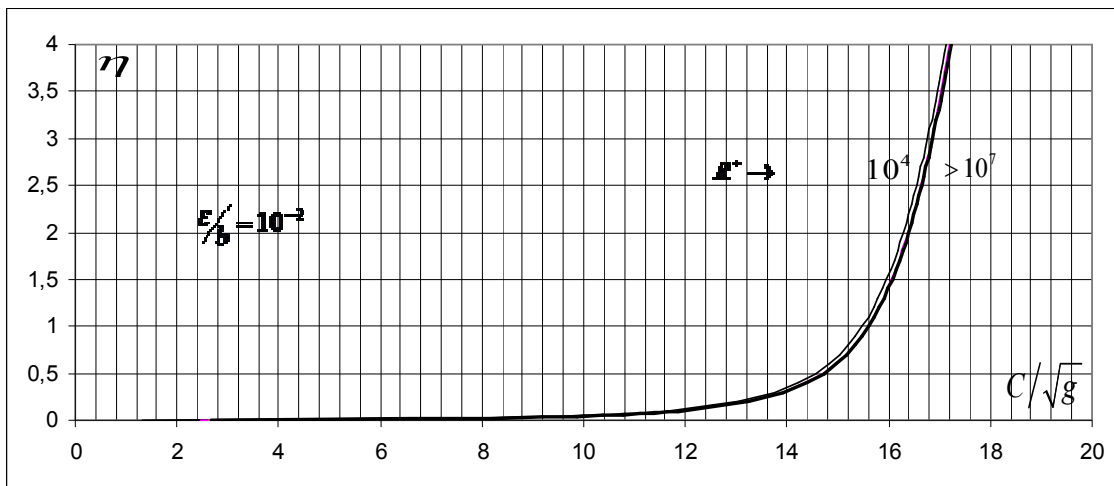
b)



c)



d)



e)

Figure 2.1 : Variation du coefficient de résistance à l'écoulement C de Chézy en fonction du taux de remplissage $\eta = y_n / D$, selon les relations (2.67) et (2.69).

Il ressort des figures (a à e) que, pour la même valeur du nombre de Reynolds R^* et quelle que soit la rugosité relative ε/b , augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η et d'autre part augmente avec l'accroissement de m . Notons que cette augmentation est très rapide dans la gamme approximative $0 \leq \eta \leq 0,2$, alors qu'elle est plus lente au-delà de $\eta = 0,2$. Pour toutes les rugosités relatives considérées.

Les figures (a à e) montre enfin que les courbes de variation de C/\sqrt{g} se resserrent au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative ε/b . Nous pouvons constater sur la figure e, correspondant à la plus forte rugosité relative considérée, que les courbes de variation de C/\sqrt{g} sont extrêmement proches les unes des autres et se confondent au-delà du nombre de

Reynolds $R^* = 10^5$. Ceci correspond au régime turbulent rugueux pour lequel C/\sqrt{g} est indépendant du nombre de *Reynolds* R^* et donc de la viscosité cinématique du liquide en écoulement.

Le nombre de *Reynolds* R^* , figurant dans la relation C/\sqrt{g} , est donné par la relation

$R^* = \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu}$. La relation C/\sqrt{g} permet donc l'évaluation du coefficient de résistance à

l'écoulement C de *Chézy*, à partir des valeurs connues du largeur du canal b , de la rugosité absolue ε , de la pente longitudinale i et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement.

II.7.2. Relation générale du coefficient n de Manning

L'expression générale du coefficient n de *Manning* peut être déduite des relations (2.52) et (2.64). En comparant ces deux relations, nous pouvons en effet déduire que :

$$\frac{1}{n} = -4\sqrt{2g} R_h^{-1/6} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R}\right) \quad (2.70)$$

Le nombre de *Reynolds* R est, pour rappel, donné par la relation (2.65). La relation (2.70) montre que le coefficient n de *Manning* est fonction de la rugosité absolue ε , du nombre de *Reynolds* R et du rayon hydraulique R_h . Cette dépendance de n vis-à-vis de R_h traduit bien le fait que n varie en fonction du taux de remplissage η du canal. Mais nous verrons, lors de la représentation graphique de n , que cette variation n'est que relative, voire faible.

En introduisant le paramètre adimensionnel :

$$N = \frac{b^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (2.71)$$

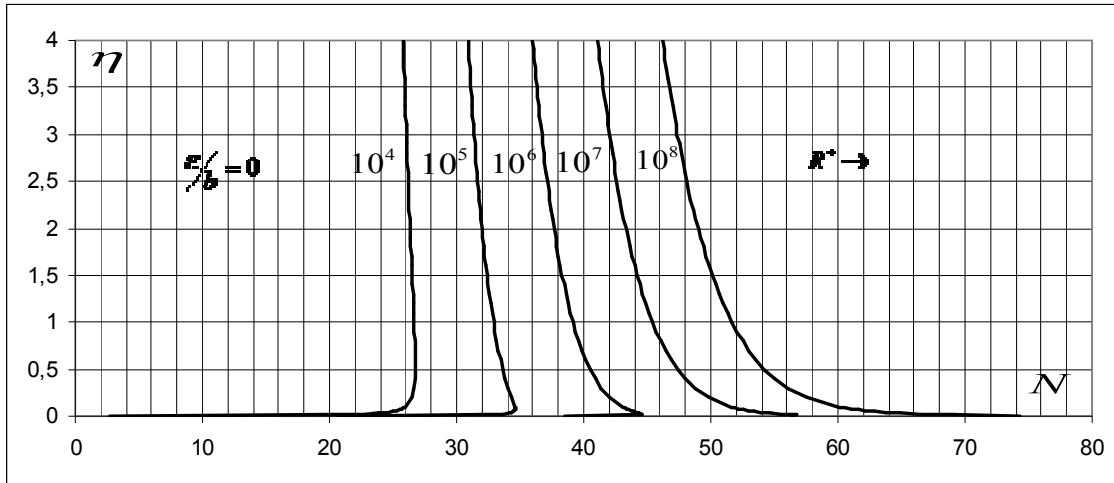
la relation (2.70) s'écrit alors :

$$N = -4\sqrt{2} \left[\frac{1 + 2n\sqrt{1 + m^2}}{n(1 + mn)} \right]^{1/6} \log \left[\frac{\varepsilon}{b} \frac{(1 + 2n\sqrt{1 + m^2})}{14,8n(1 + mn)} + \frac{10,04}{32\sqrt{2}R^*} \left[\frac{(1 + 2n\sqrt{1 + m^2})}{n(1 + mn)} \right]^{3/2} \right] \quad (2.72)$$

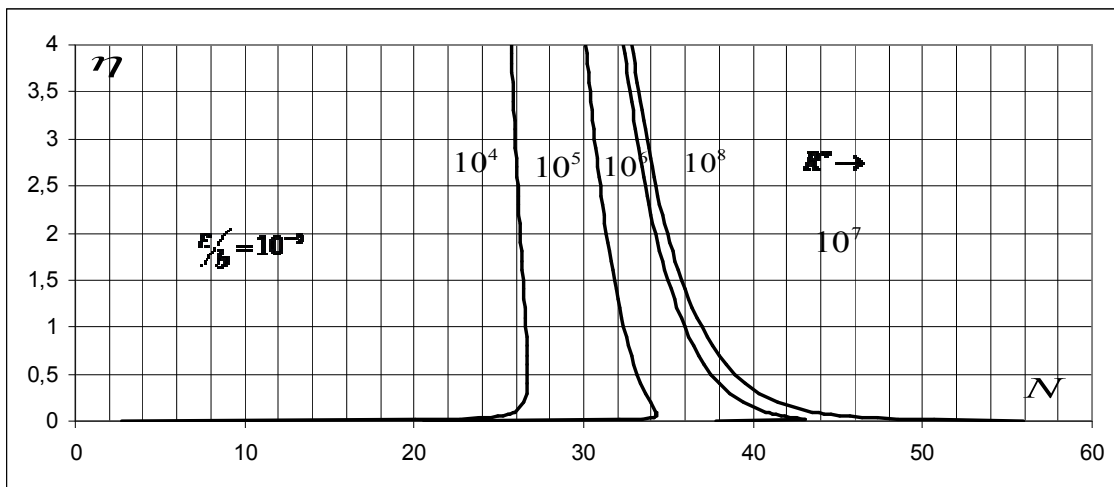
Lorsque les paramètres η, ε, b et ν sont connus, la relation (2.71) ou (2.72) permet d'évaluer le coefficient n de Manning.

La représentation graphique de la relation (2.72) est comme suit :

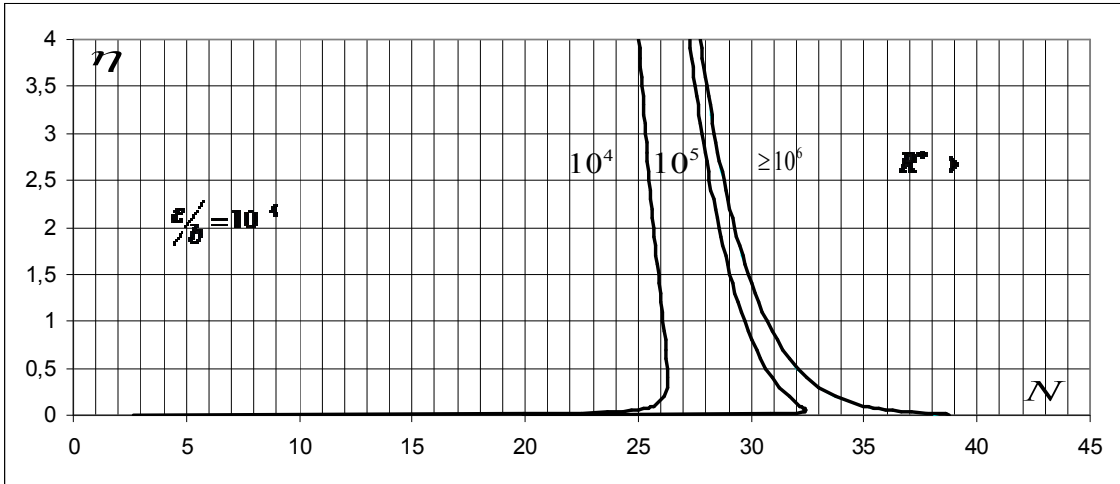
-Pour l'angle $\alpha = 30^\circ$:



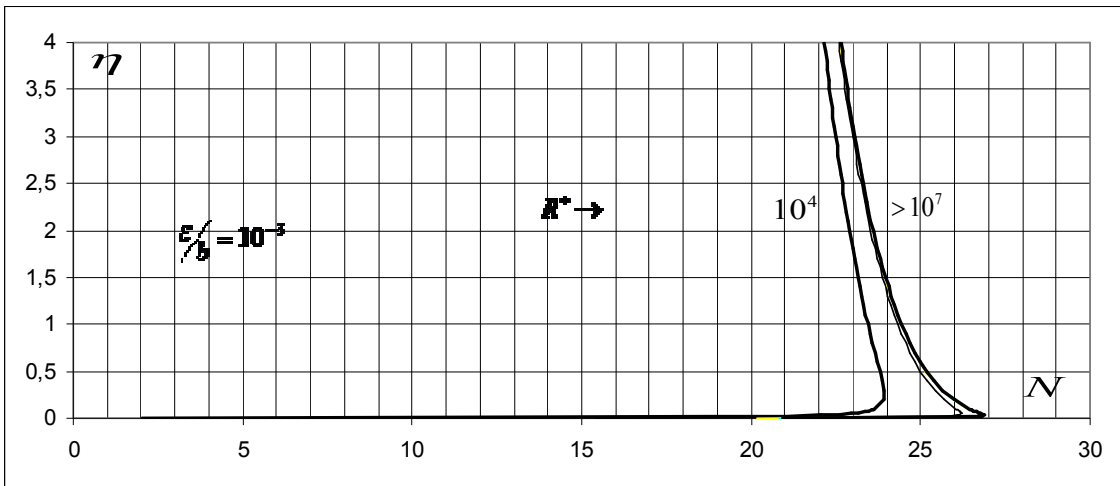
a)



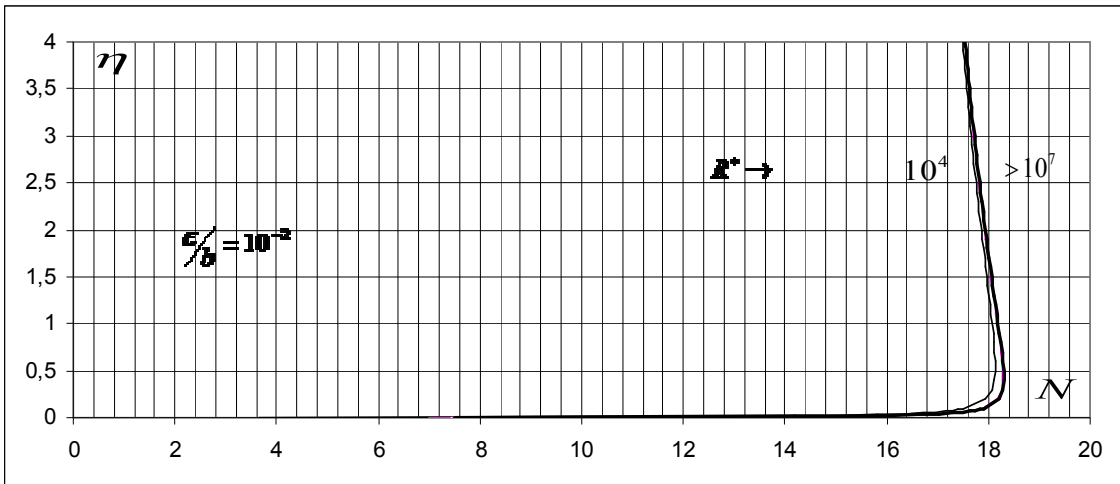
b)



c)

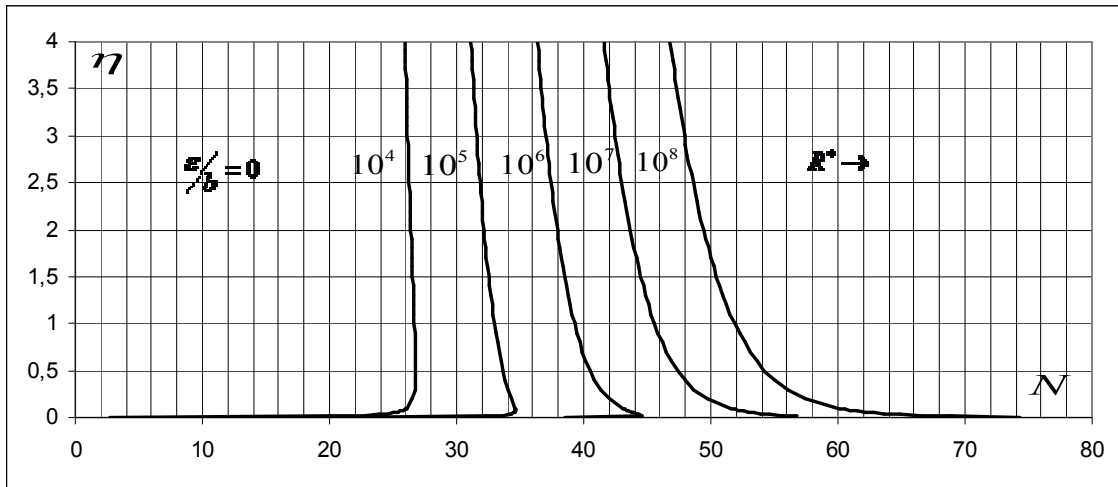


d)

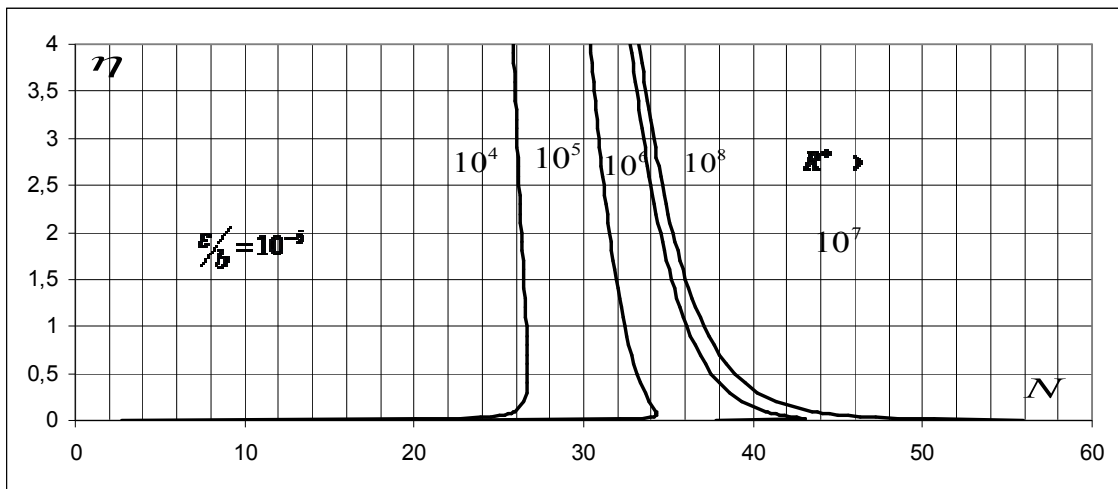


e)

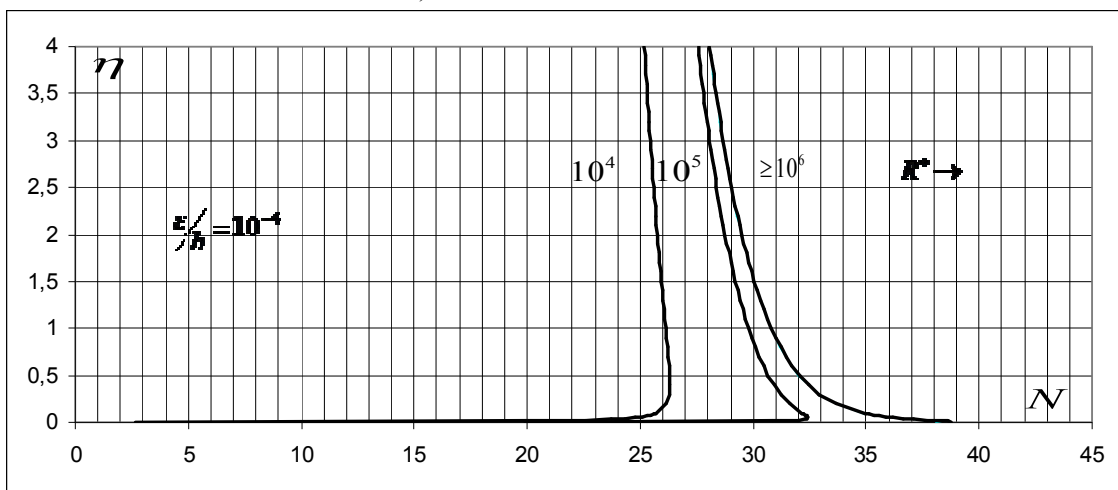
-Pour l'angle $\alpha = 45^\circ$:



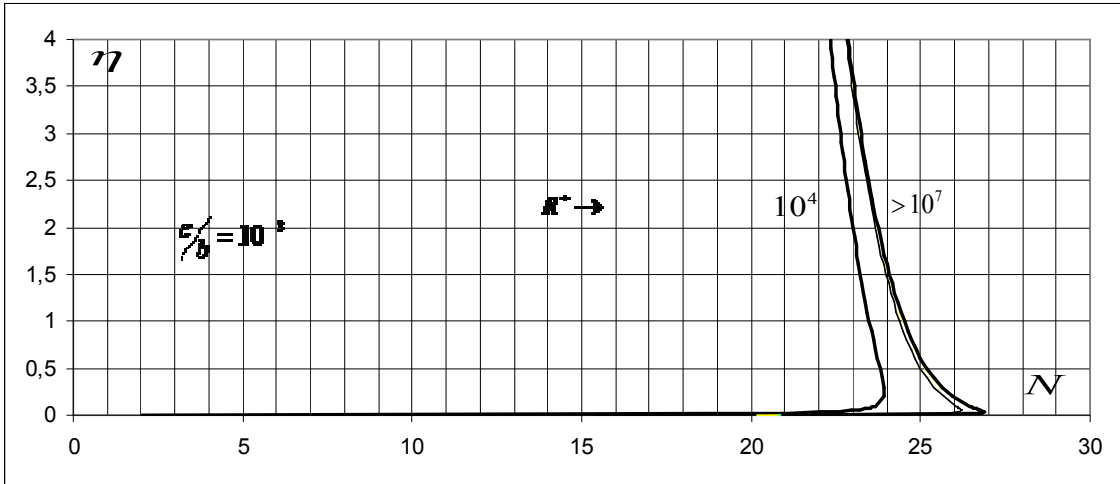
a)



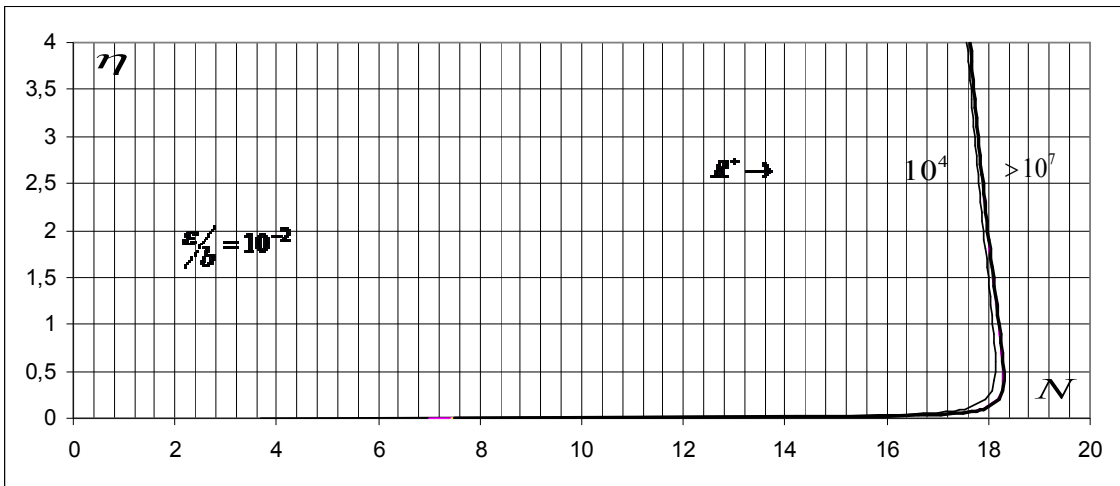
b)



c)

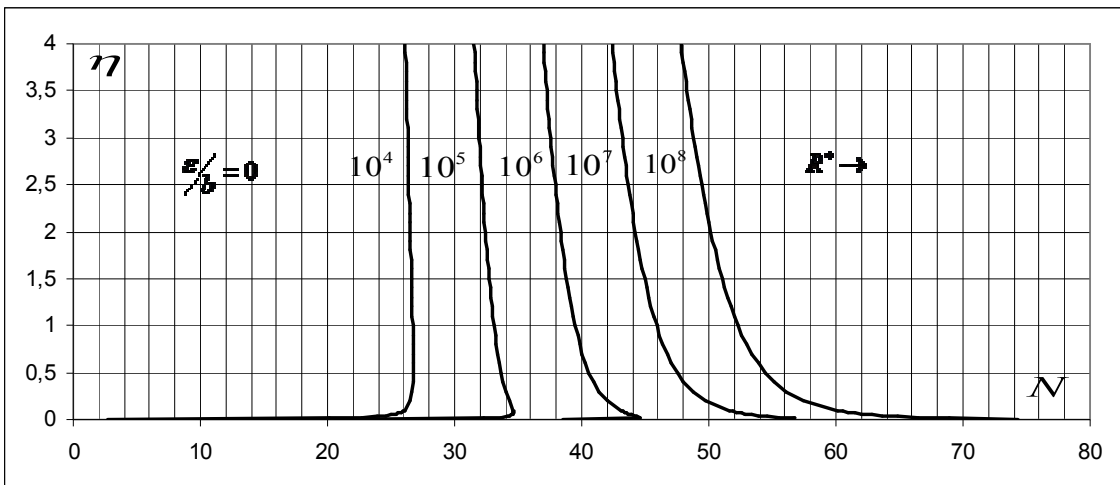


d)

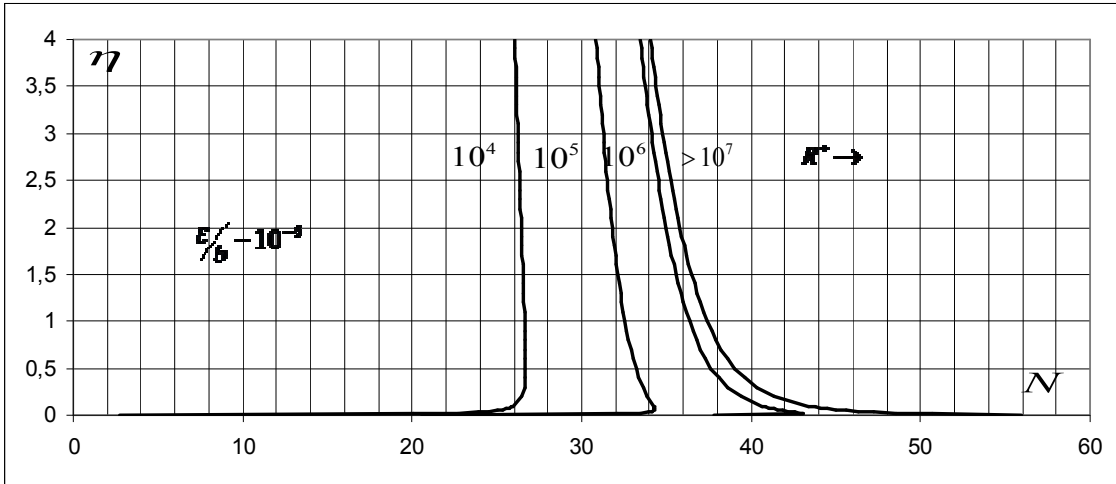


e)

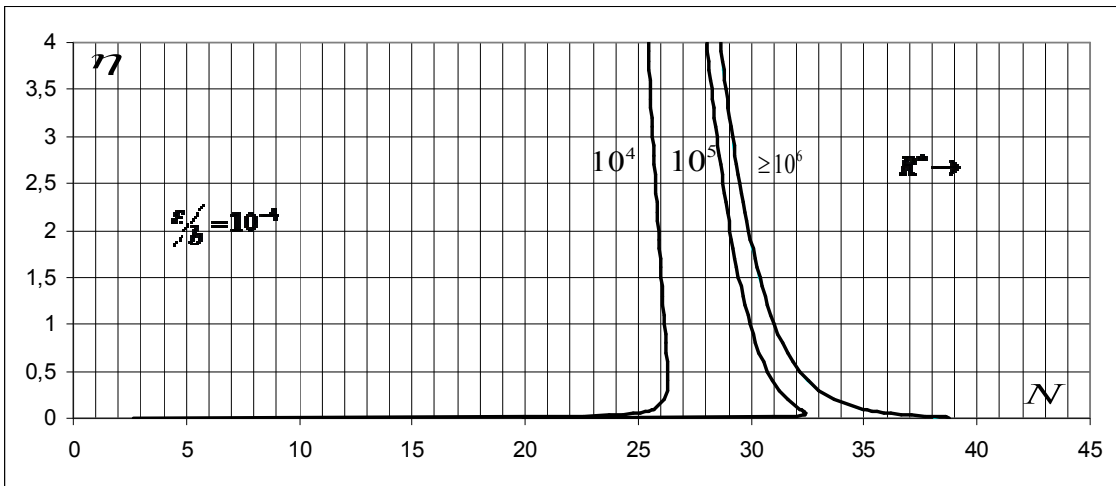
-Pour l'angle $\alpha = 60^\circ$:



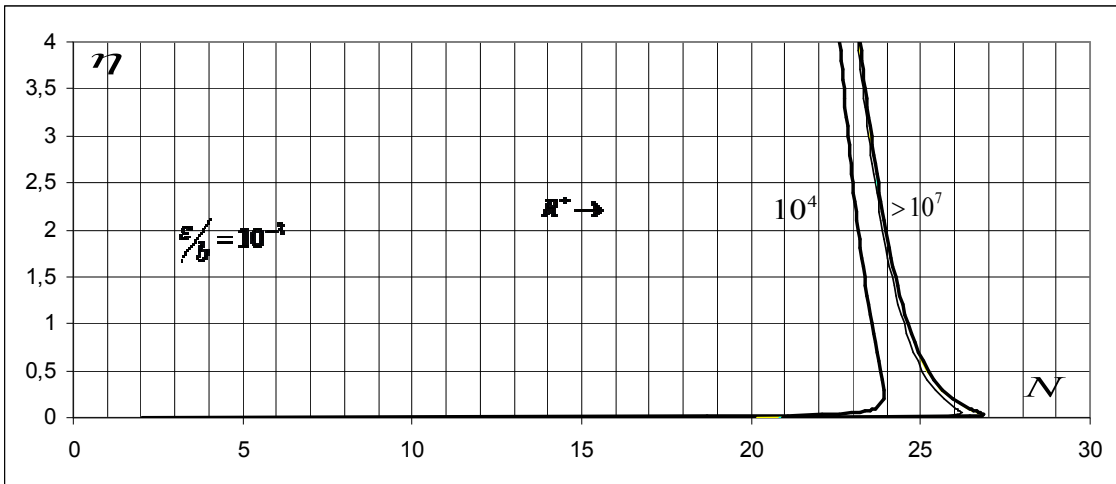
a)



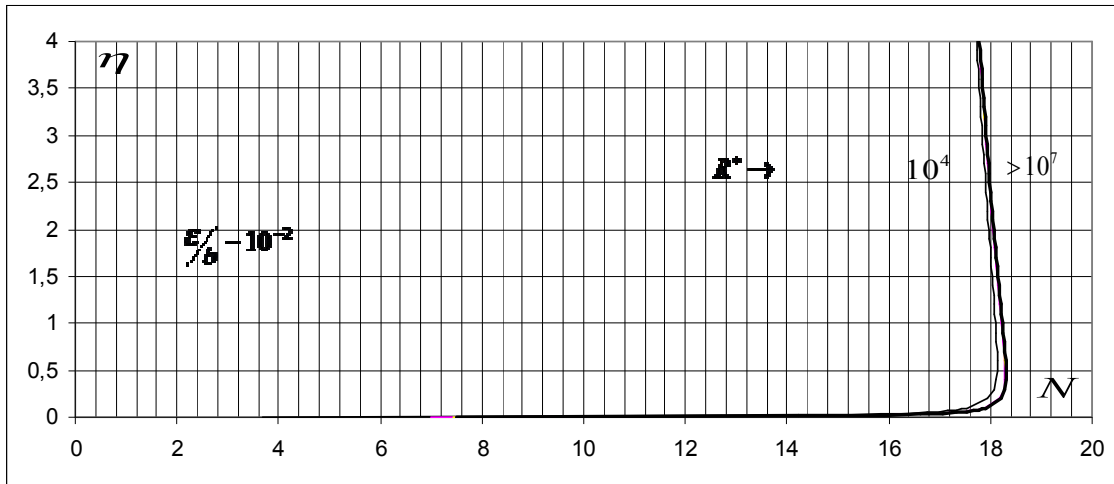
b)



c)

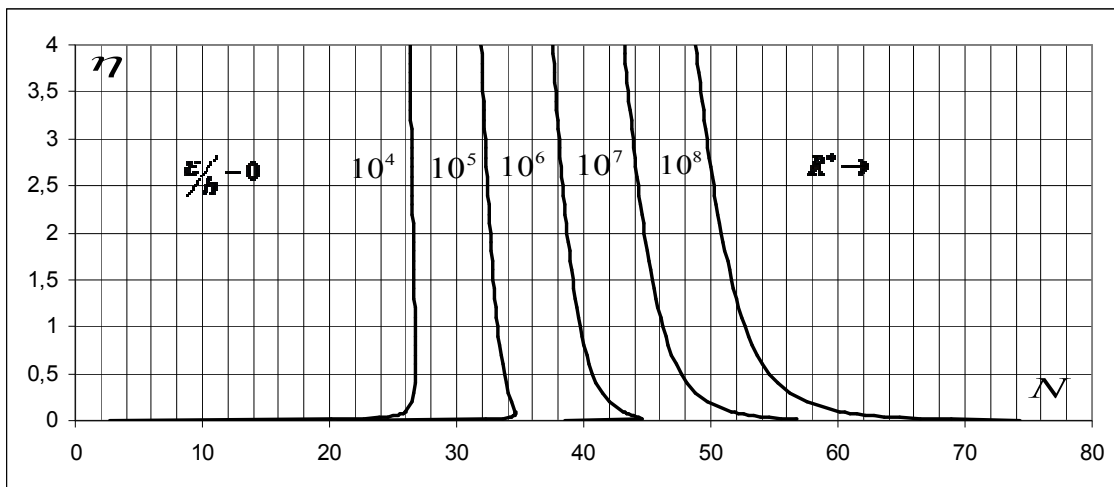


d)

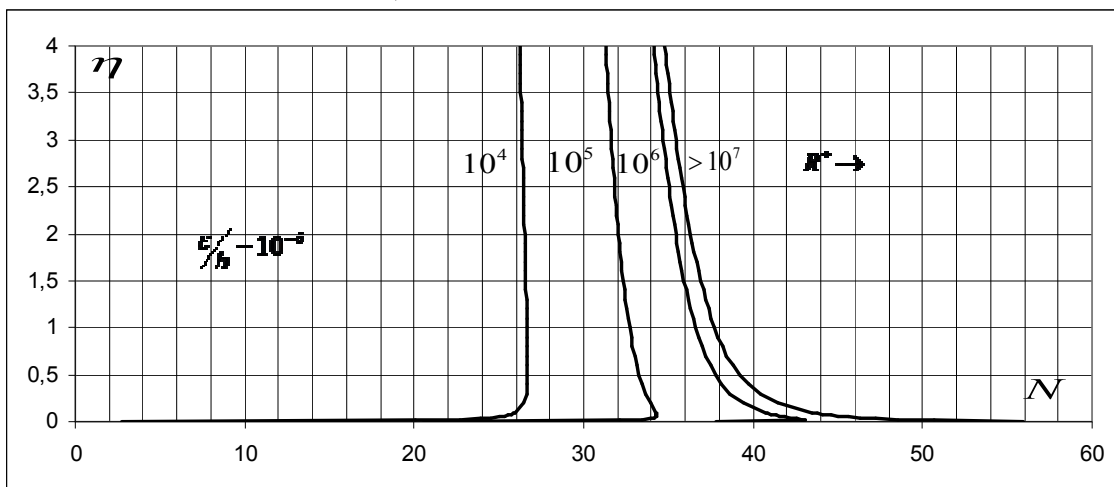


e)

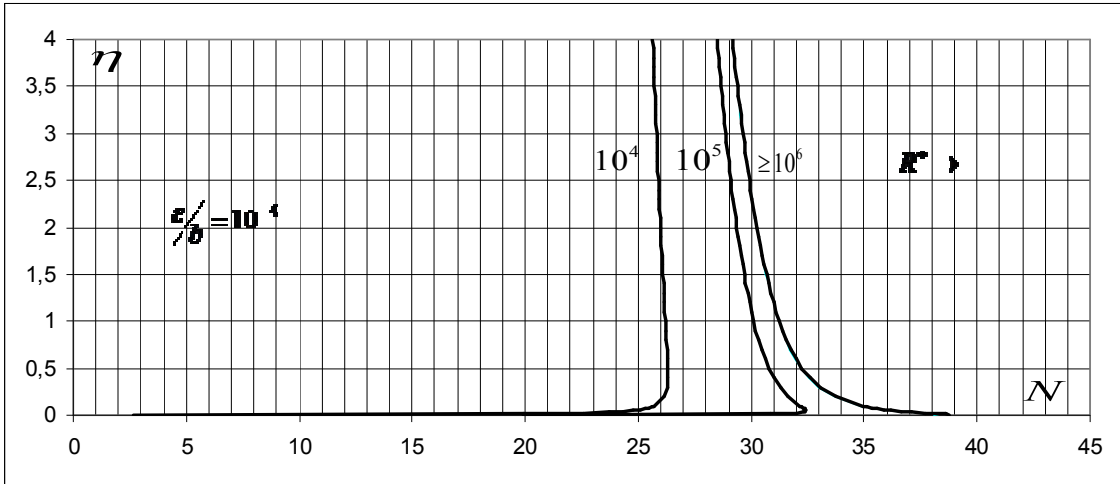
-Pour l'angle $\alpha = 70^\circ$:



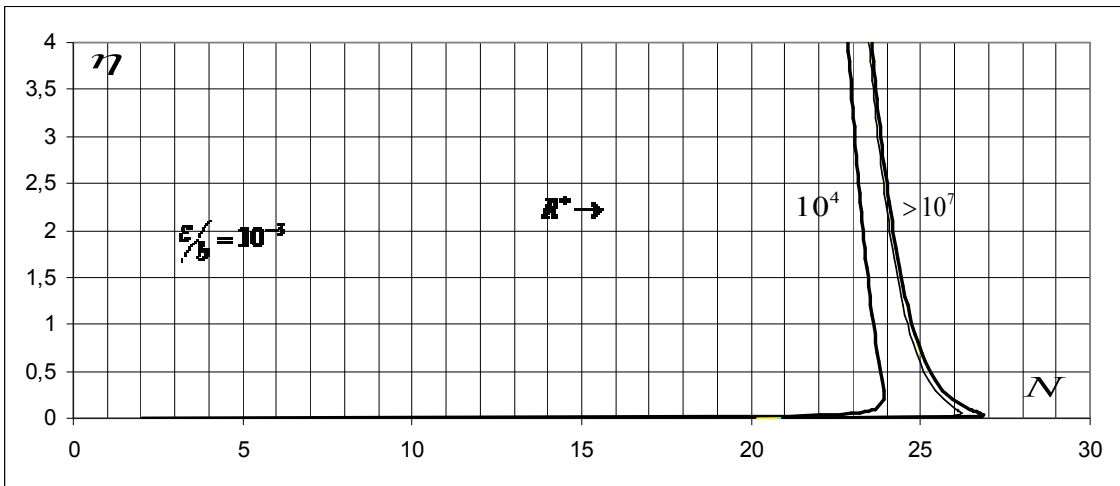
a)



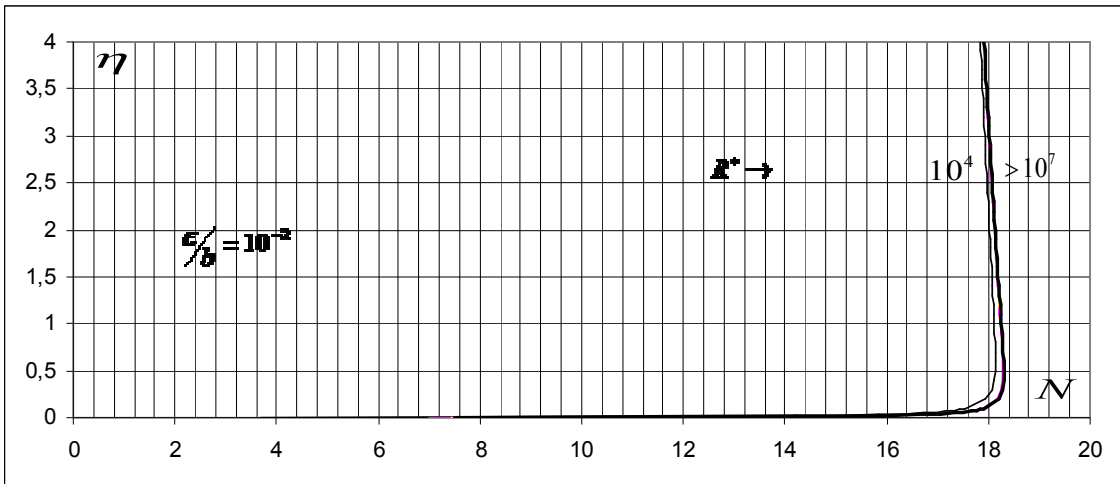
b)



c)

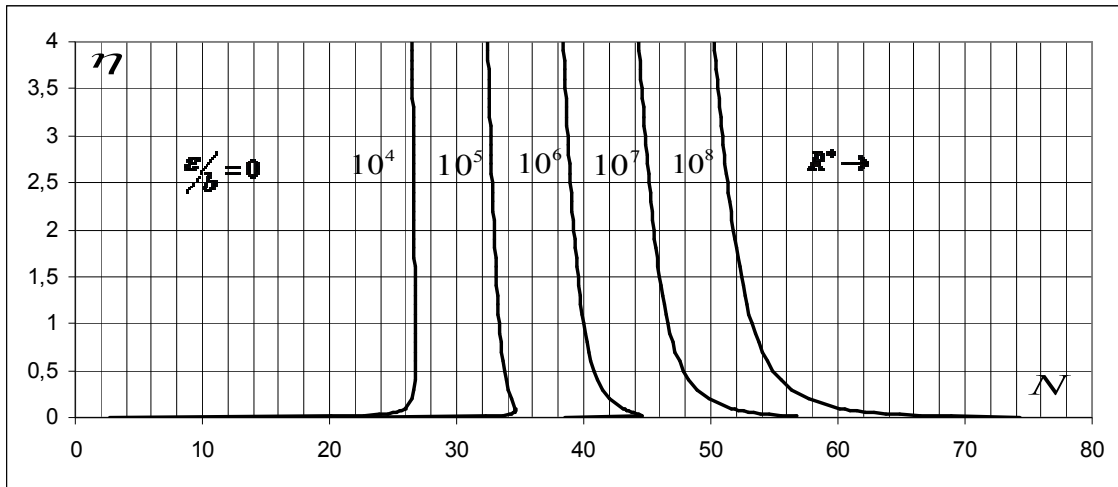


d)

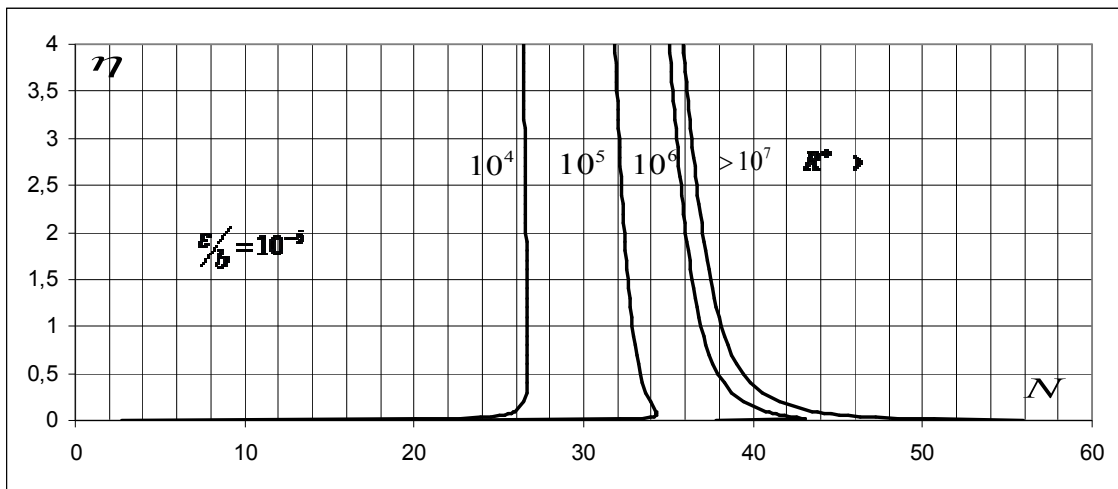


e)

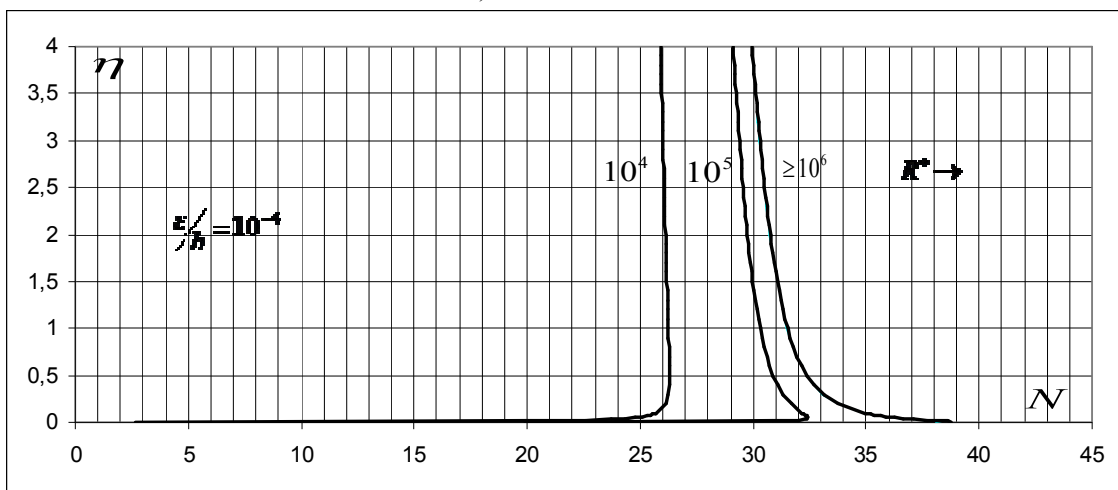
-Pour l'angle $\alpha = 80^\circ$:



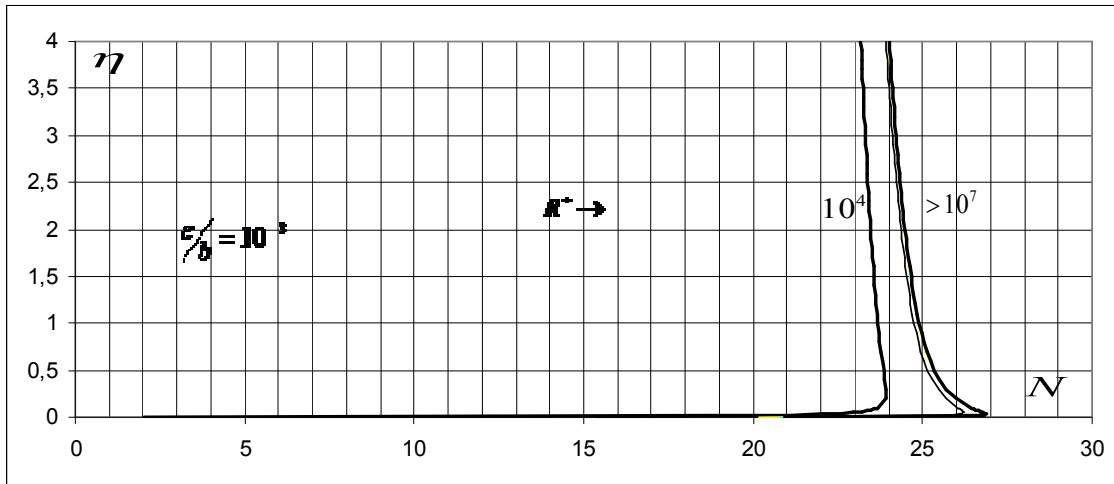
a)



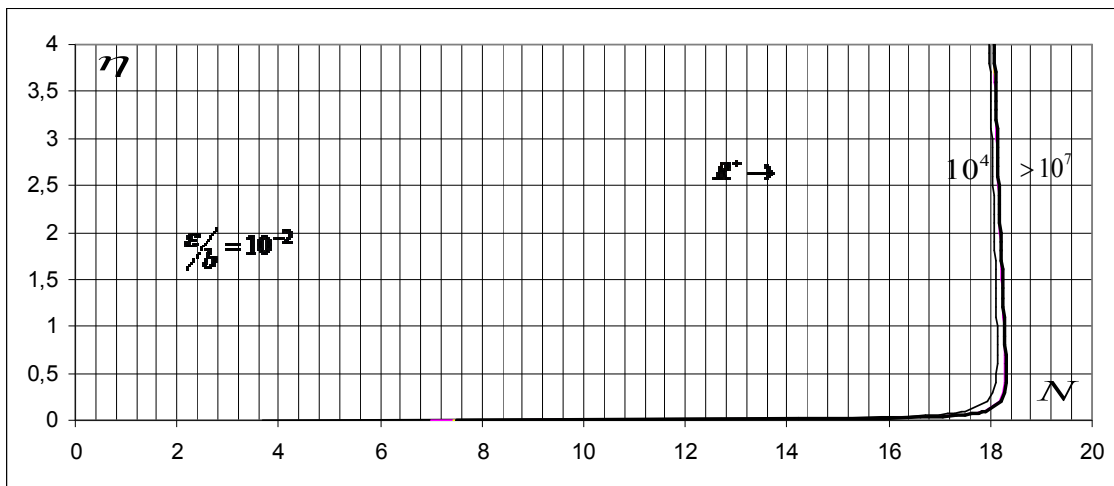
b)



c)



d)



e)

Figure 2.2 : Variation du coefficient de résistance à l'écoulement n de Manning en fonction du taux de remplissage $\eta = y_n / D$, selon les relations (2.70), (2.71) et (2.72).

Pour les valeurs pratiques de η , telles que $\eta \geq 0,2$, Il ressort des figures (a à e) les observations suivantes :

- i. Le paramètre adimensionnel N augmente, jusqu'à un maximum, avec l'accroissement du taux de remplissage η , pour les valeurs de R^* atteignant 10^4 ou légèrement supérieures à 10^4 .
- ii. Au-delà de son maximum, le paramètre N diminue avec l'accroissement du taux de remplissage η .

- iii. Pour les valeurs de $R^* \geq 10^5$, le paramètre N diminue avec l'accroissement de η .
- iv. Un changement de concavité des courbes s'opère dès que le nombre de *Reynolds* R^* atteint 10^5 .
- v. Au-delà de $\eta = 0,2$, la variation de N est graduelle et les courbes se resserrent au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative ε/b . Dès que la rugosité relative atteint la valeur $5 \cdot 10^{-3}$, les courbes se confondent quasiment lorsque le nombre de *Reynolds* R^* atteint 10^5 .

Pour les cas pratiques, la plus petite valeur du nombre de *Reynolds* R^* est de l'ordre de 10^5 , ce qui permet de conclure que le paramètre adimensionnel N présente en pratique des valeurs minimales.

En introduisant le paramètre adimensionnel :

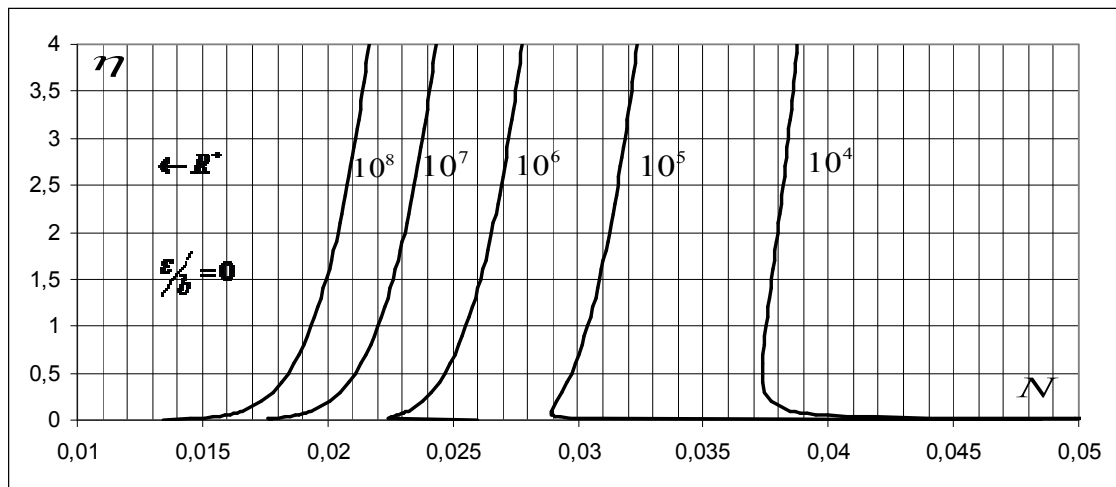
$$N = \frac{n\sqrt{g}}{b^{1/6}} \tag{2.73}$$

la relation (2.70) s'écrit alors :

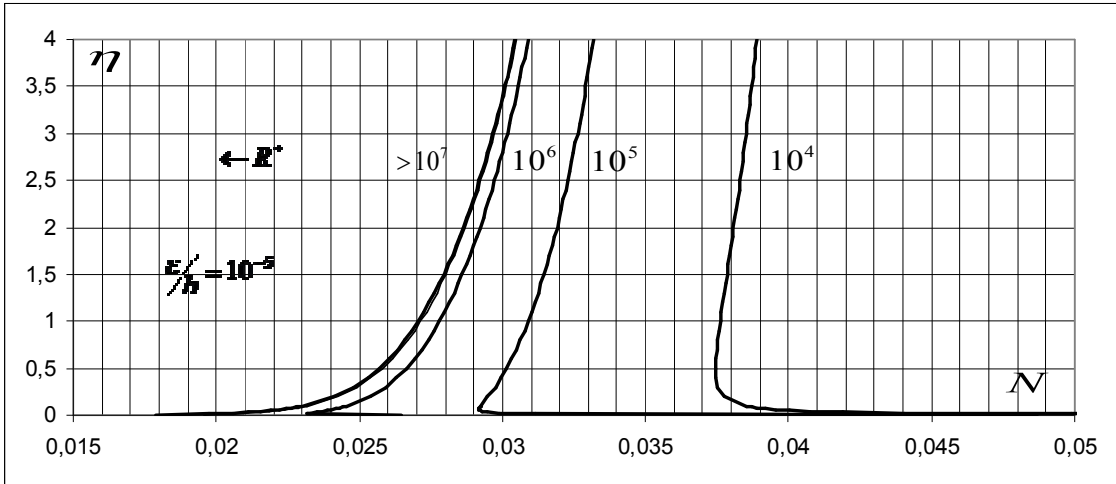
$$N = -\frac{1}{4\sqrt{2}} \left[\frac{\eta(1+m\eta)}{1+2\eta\sqrt{1+m^2}} \right]^{1/6} \left[\log \left(\frac{\varepsilon}{b} \frac{(1+2\eta\sqrt{1+m^2})}{14.8\eta(1+m\eta)} + \frac{10.04}{32\sqrt{2}R^*} \left[\frac{(1+2\eta\sqrt{1+m^2})}{\eta(1+m\eta)} \right]^{3/2} \right) \right]^{-1} \tag{2.74}$$

La représentation graphique de la relation (2.74) est comme suit :

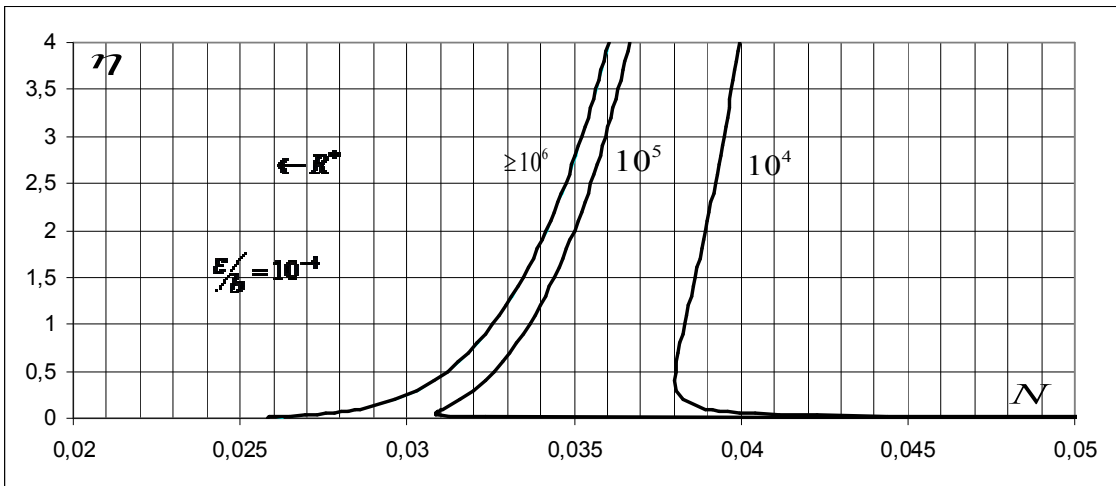
-Pour l'angle $\alpha = 30^\circ$:



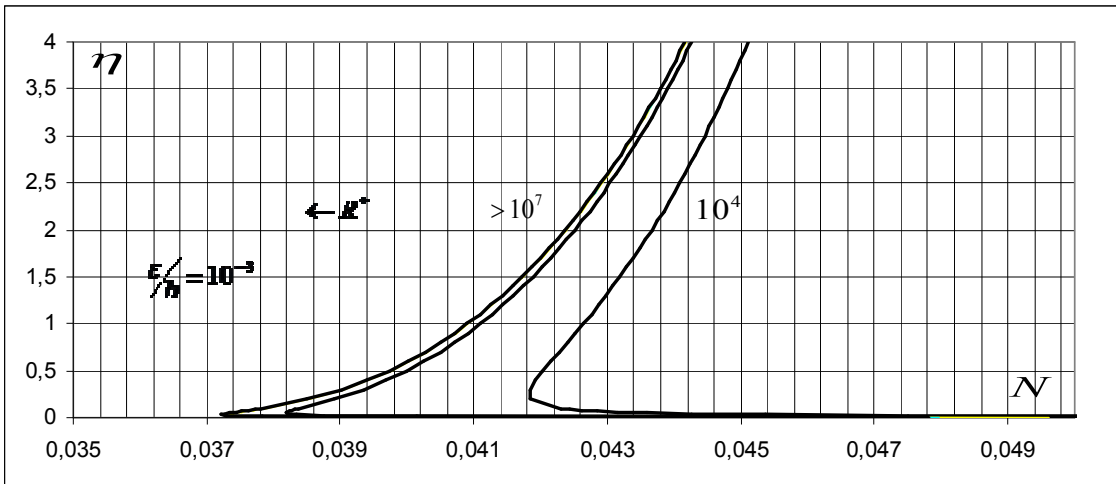
a)



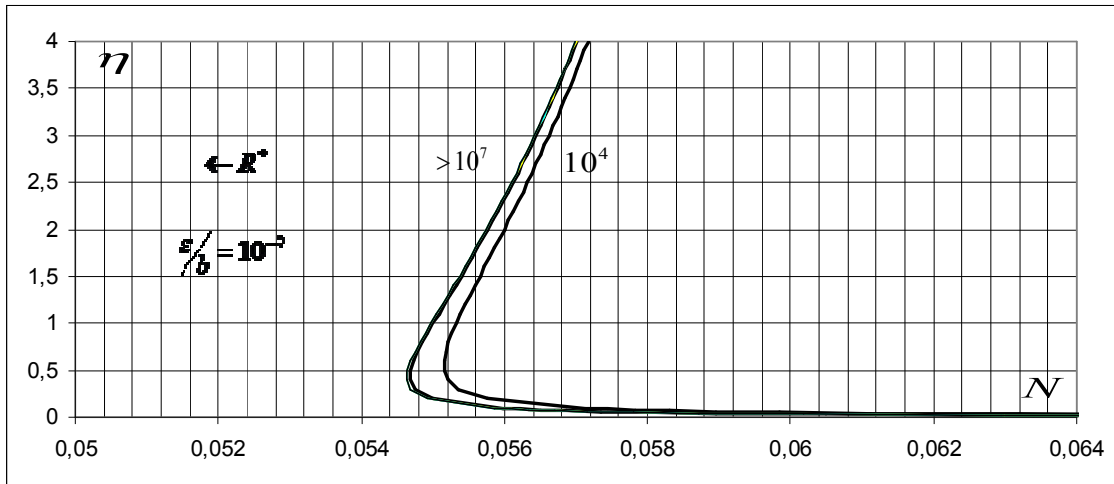
b)



c)

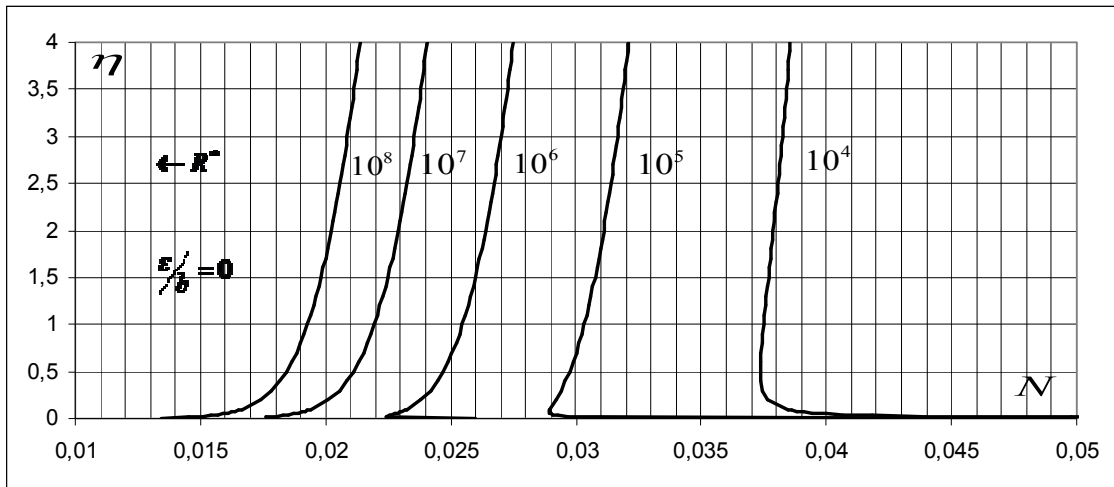


d)

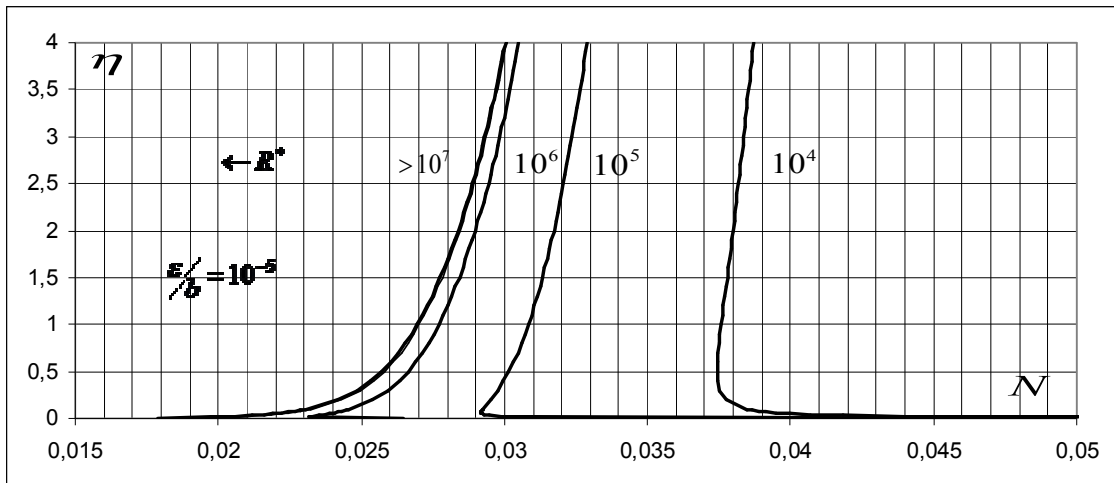


e)

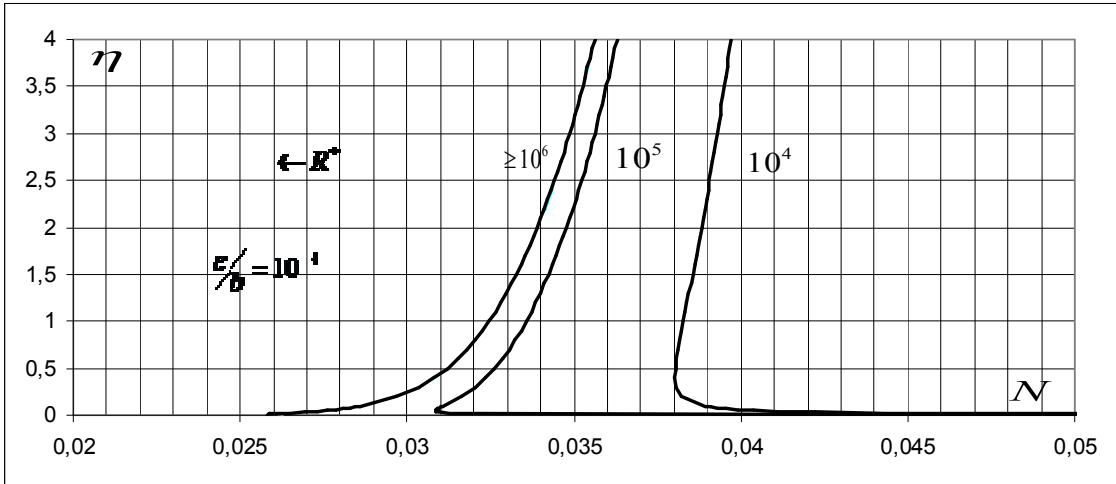
-Pour l'angle $\alpha = 45^\circ$:



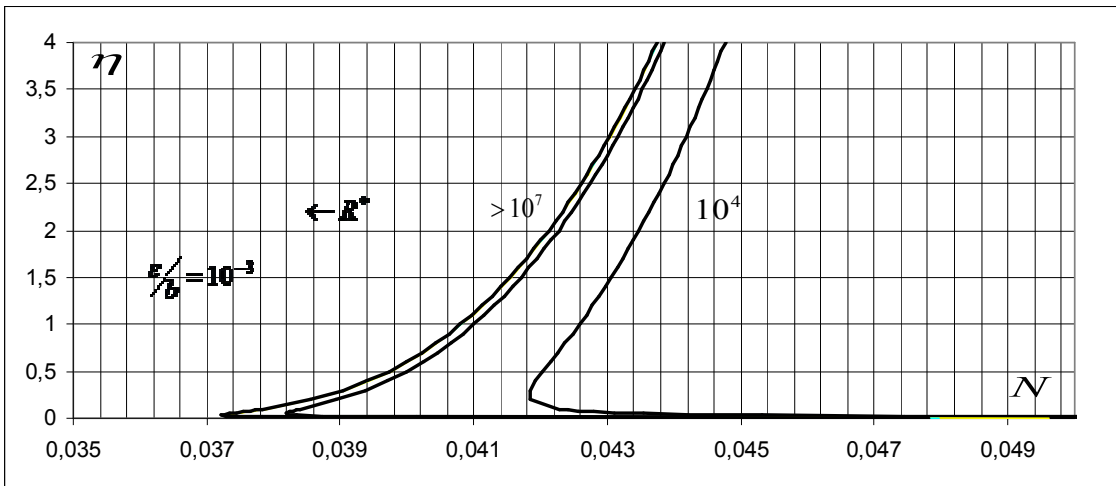
a)



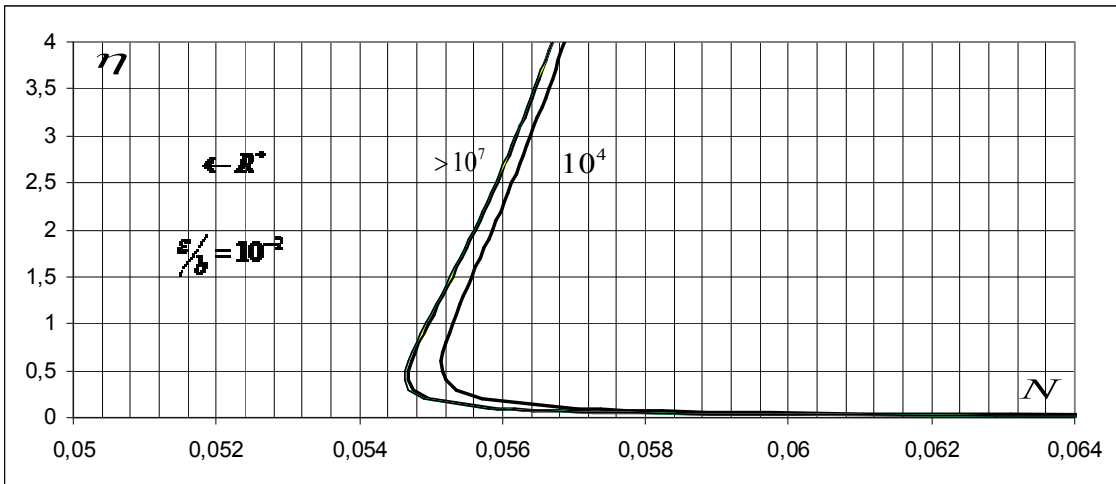
b)



c)

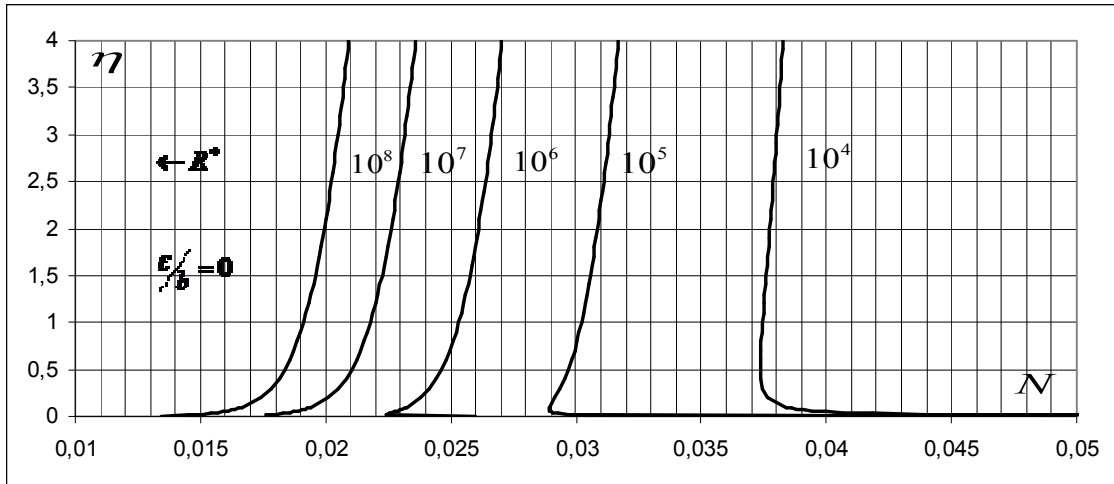


d)

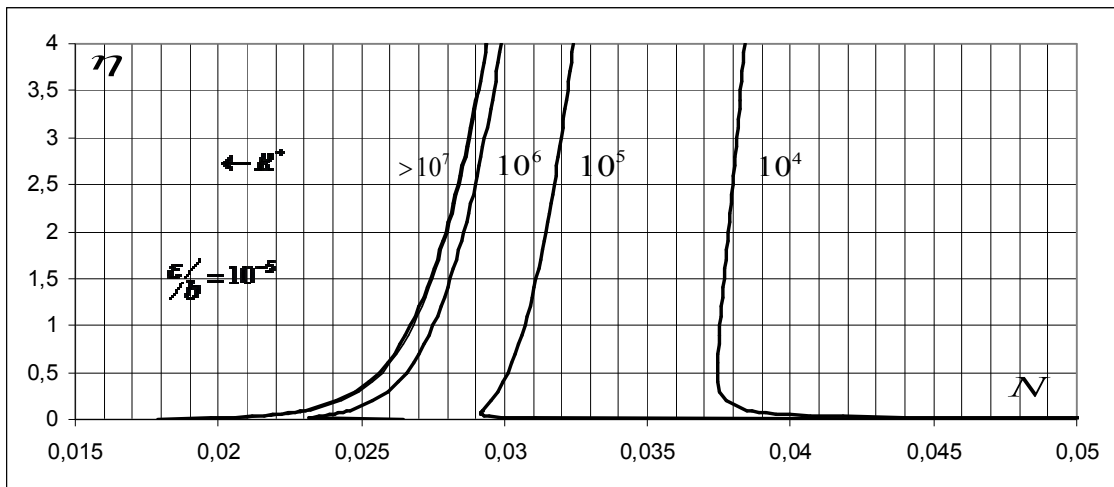


e)

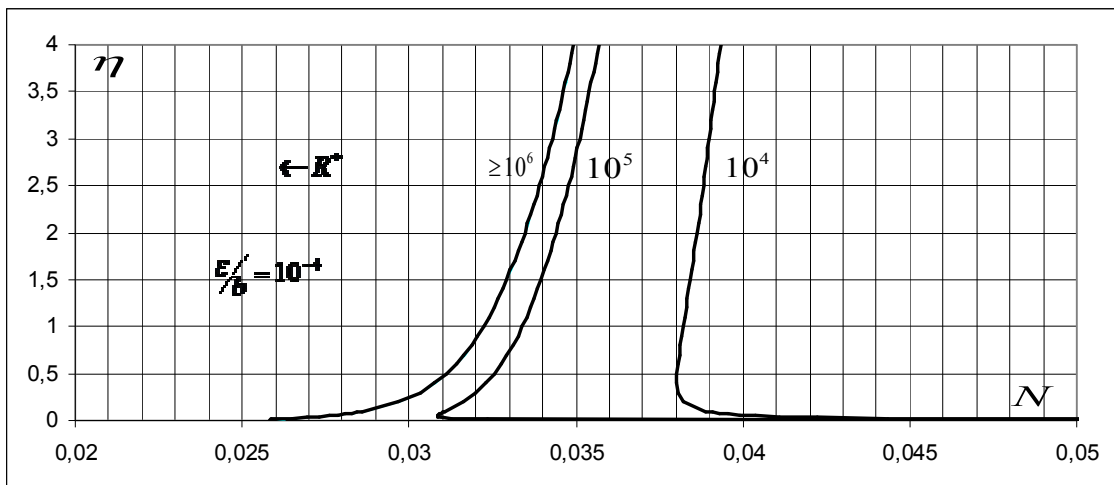
-Pour l'angle $\alpha = 60^\circ$:



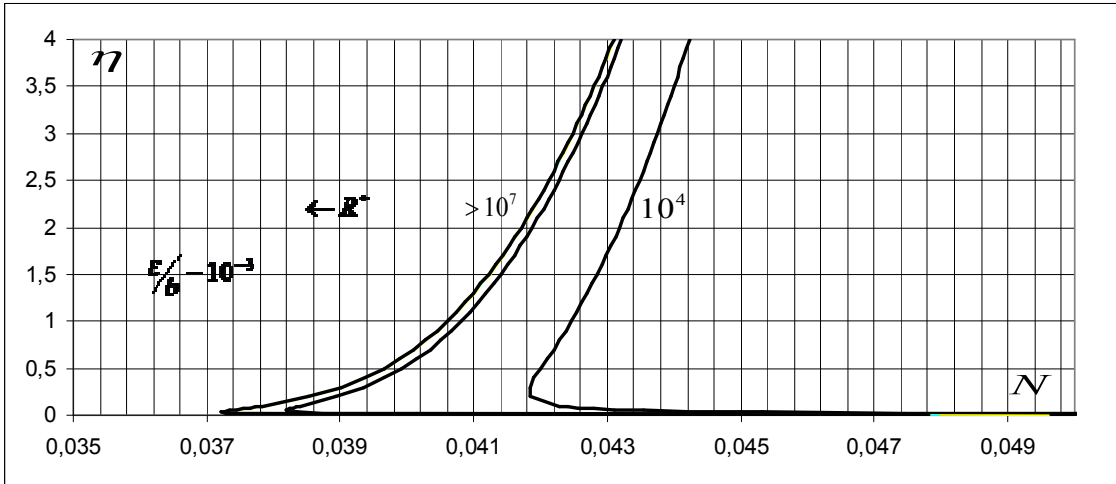
a)



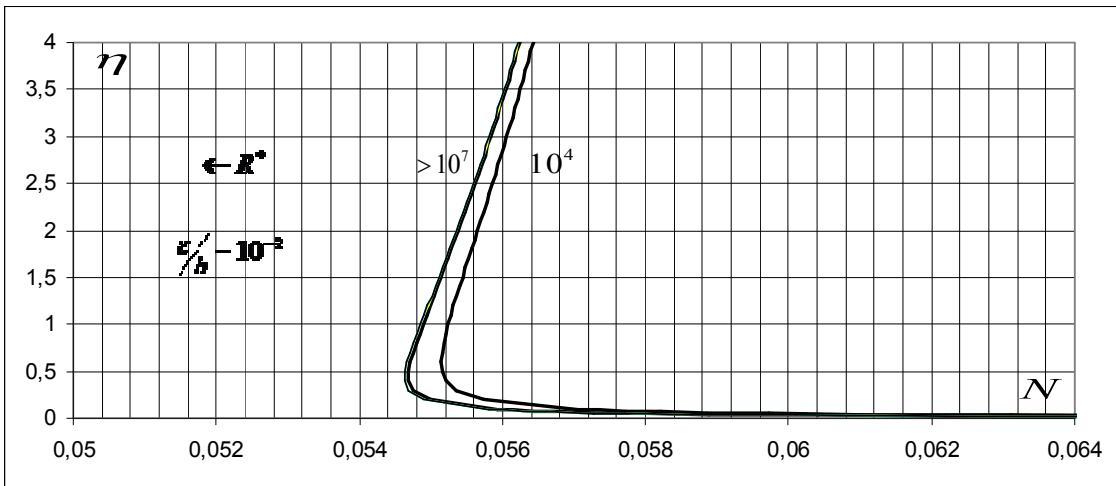
b)



c)

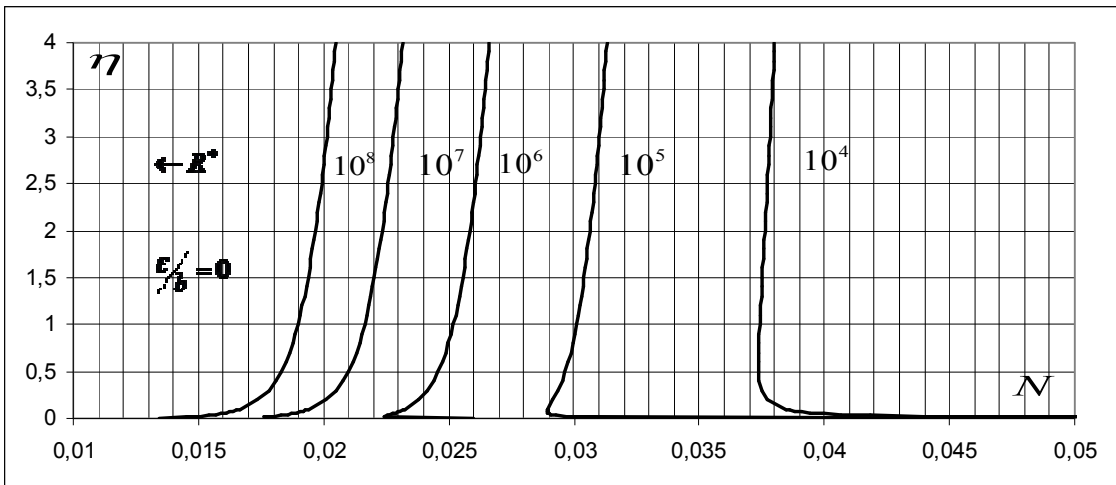


d)

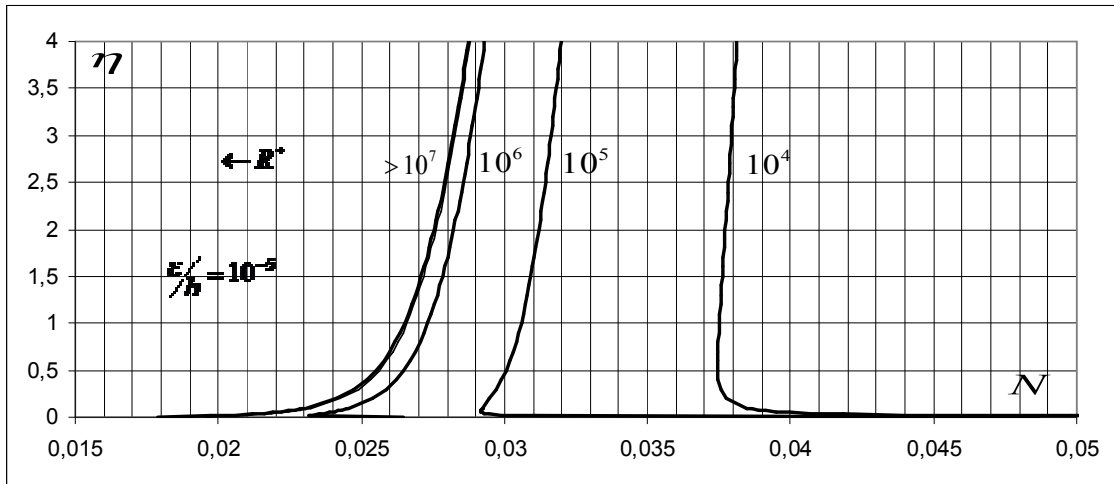


e)

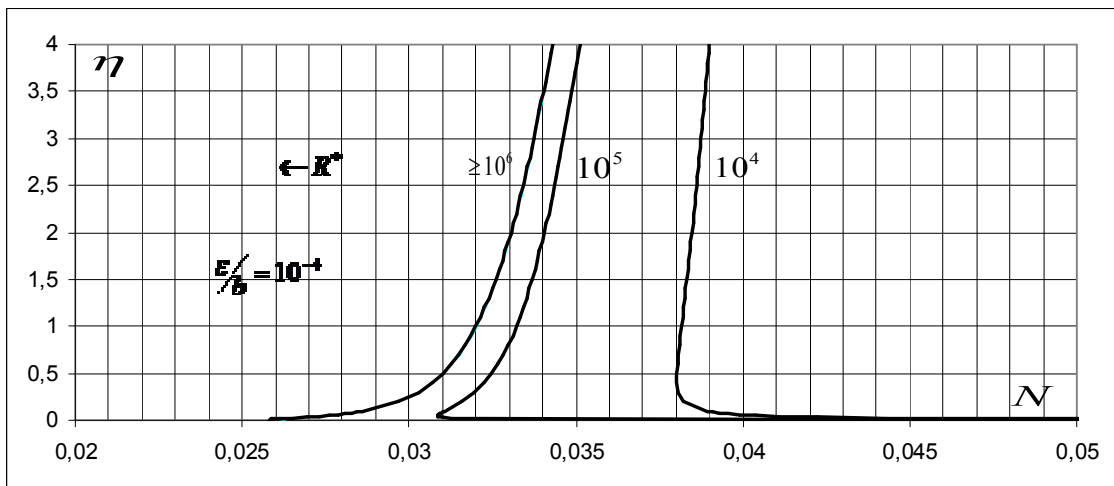
-Pour l'angle $\alpha = 70^\circ$:



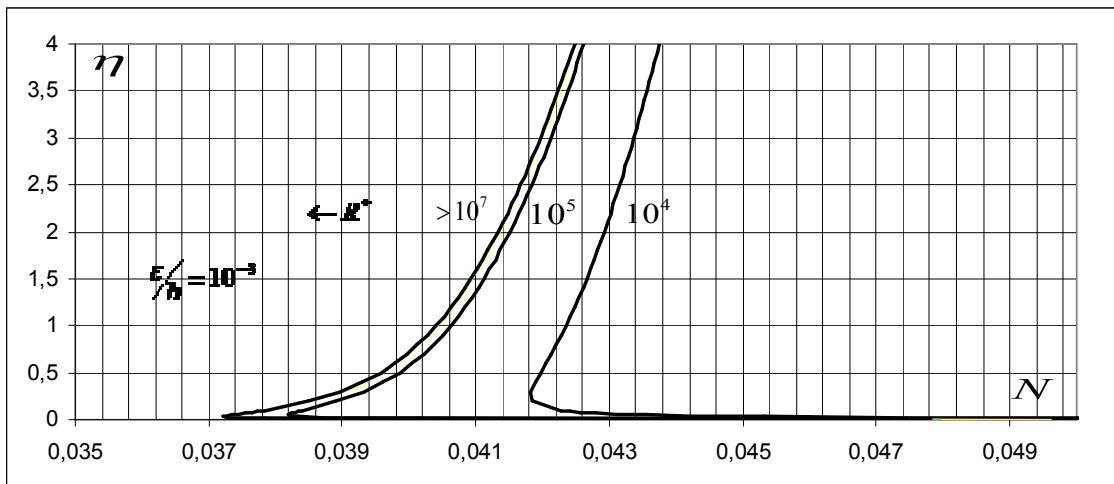
a)



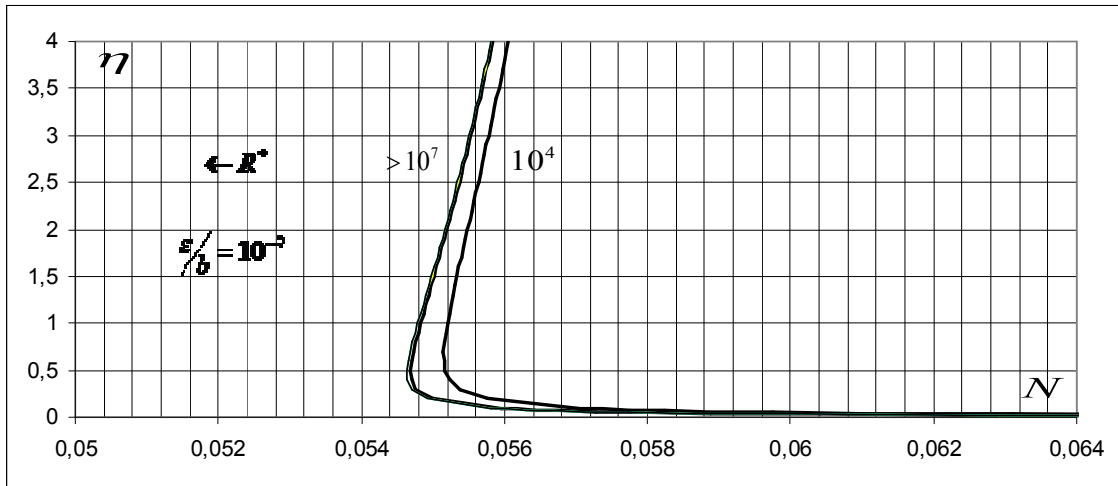
b)



c)

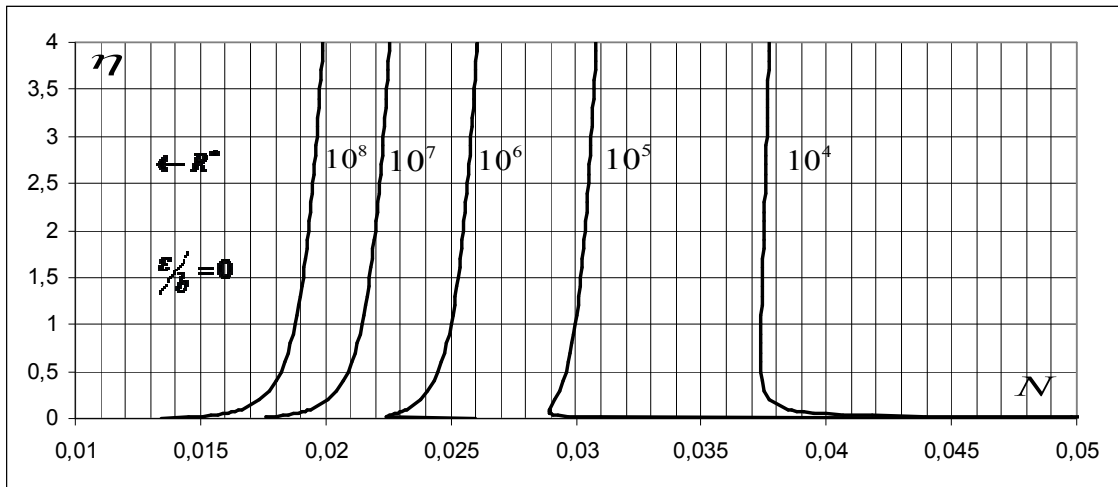


d)

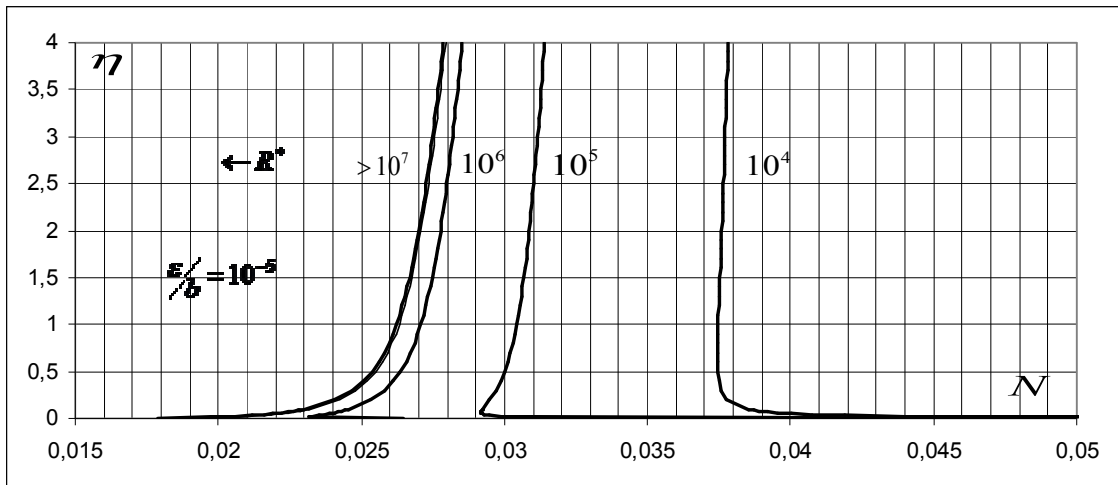


e)

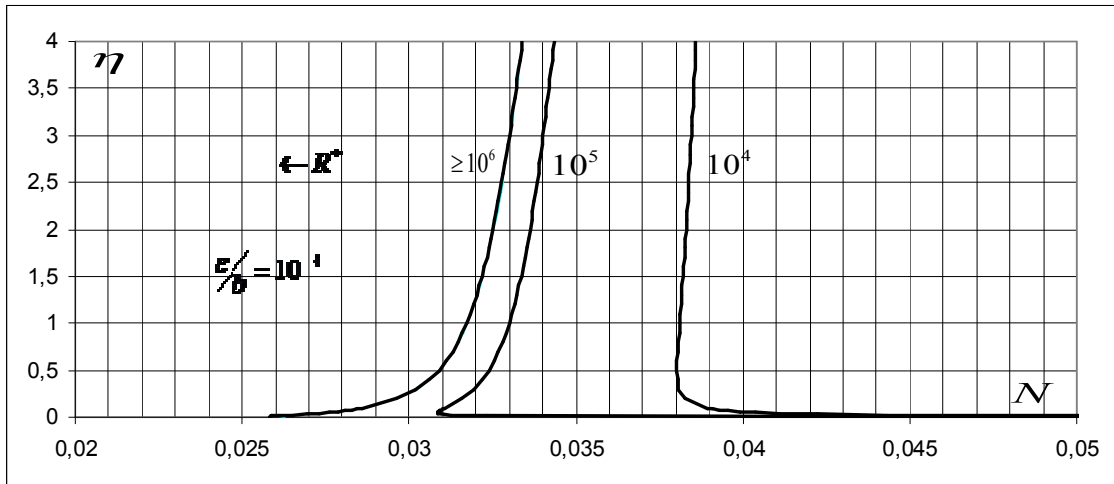
-Pour l'angle $\alpha = 80^\circ$:



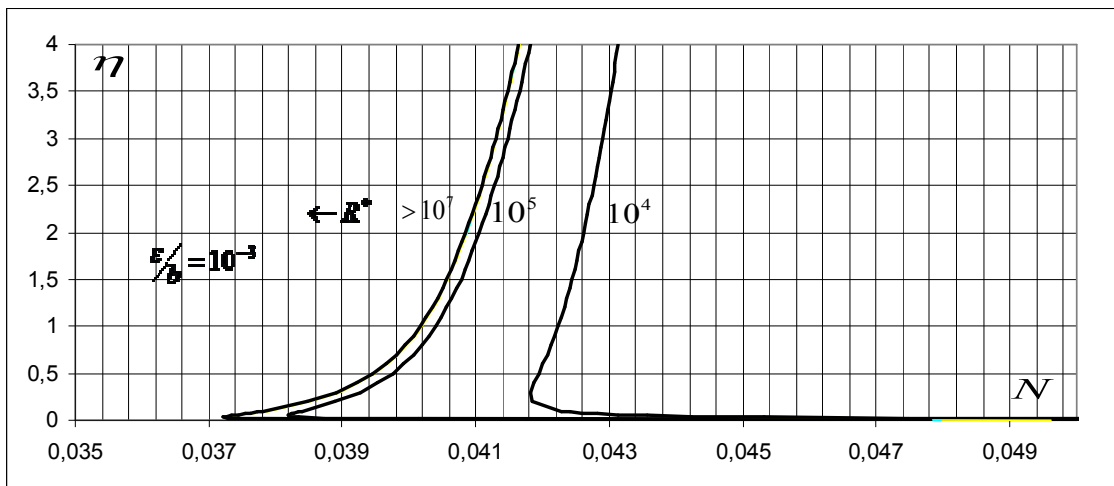
a)



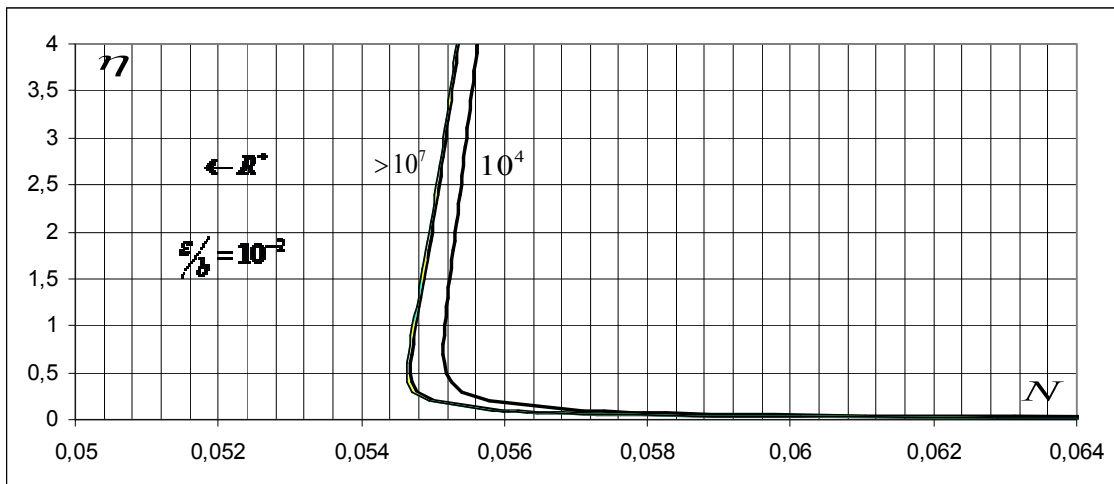
b)



c)



d)



e)

Figure 2.3 : Variation du coefficient de résistance à l'écoulement n de *Manning* en fonction du taux de remplissage $\eta = y_n / D$, selon les relations (2.70), (2.73) et (2.74).

Pour les valeurs pratiques de η , telles que $\eta \geq 0,2$, Il ressort des figures (a à e) les observations suivantes :

- vi. Le paramètre adimensionnel N diminue, jusqu'à un minimum, avec l'accroissement du taux de remplissage η , pour les valeurs de R^* atteignant 10^4 ou légèrement supérieures à 10^4 .
- vii. Au-delà de son minimum, le paramètre N augmente avec l'accroissement du taux de remplissage η .
- viii. Pour les valeurs de $R^* \geq 10^5$, le paramètre N augmente avec l'accroissement de η .
- ix. Un changement de concavité des courbes s'opère dès que le nombre de *Reynolds* R^* atteint 10^5 .
- x. Au-delà de $\eta = 0,2$, la variation de N est graduelle et les courbes se resserrent au fur et à mesure de l'augmentation de la rugosité relative ε/b . Dès que la rugosité relative atteint la valeur $5 \cdot 10^{-3}$, les courbes se confondent lorsque le nombre de *Reynolds* R^* atteint 10^5 .

Pour les cas pratiques, la plus petite valeur du nombre de *Reynolds* R^* est de l'ordre de 10^5 , ce qui permet de conclure que le paramètre adimensionnel N présente en pratique des valeurs maximales.

Conclusion :

Le second chapitre de notre mémoire a eu pour objectif principal l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal de forme trapézoïdal.

Notre étude s'est poursuivie par l'analyse de l'écoulement à coefficient de résistance variable, aussi bien celui de *Chézy* que celui de *Manning*.

La relation générale du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* a été identifiée en ayant recours la relation du débit volume proposée par *Achour* et *Bedjaoui* (2006). Le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est fonction à la fois de la rugosité relative ε/b , du taux de remplissage η et d'un nombre de *Reynolds* R , lui-même fonction de la pente longitudinale i , du dimension linéaire b , de η et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Nous avons donc écrit la relation fonctionnelle $C(b, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0$. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , nous avons déterminé le paramètre adimensionnel C/\sqrt{g} . Il se présente en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité relative ε/b et du nombre de *Reynolds* R^* . La représentation graphique du paramètre C/\sqrt{g} , en fonction de η et de R^* . Lorsque le dimension linéaire b du canal n'est pas une donnée du problème, le calcul du coefficient C de *Chézy* a pu être possible en ayant recours à la méthode du modèle rugueux (MMR).

En ce qui concerne le coefficient de résistance n de *Manning*, son expression générale a été déterminée. La représentation graphique du paramètre adimensionnel $N = b^{1/6}/n\sqrt{g}$ a montré un minimum. Pour cette même valeur de η , le coefficient n de *Manning* atteint alors sa valeur maximale. Lorsque la dimension linéaire n'est pas une donnée du problème, la méthode du modèle rugueux a permis de calculer le coefficient de résistance à l'écoulement n de *Manning*.

Conclusion générale :

Cette étude a concerné la résolution de deux problèmes relatifs à l'écoulement uniforme. Le premier problème est lié au dimensionnement du canal, c'est-à-dire à la détermination de la dimension linéaire b horizontale du canal ou la largeur de celui-ci. Le second problème consiste à la variation du coefficient de résistance à l'écoulement.

Pour résoudre ces deux types de problèmes, nous avons eu recours aux relations régissant l'écoulement uniforme qui sont la relation de *Darcy-Weisbach*, la relation de *Chézy* et enfin la relation de *Manning*. Il est apparu que l'application de ces relations ne peut être aisée en raison du fait que le coefficient de frottement f , le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* et le coefficient n de *Manning* ne sont connus et ne constituent pas une donnée du problème. Pour contourner cette difficulté majeure, nous avons eu recours à la méthode du modèle rugueux de référence qui a permis de montrer que ces coefficients de résistance sont étroitement liés au coefficient de correction des dimensions linéaires ψ , dont l'expression explicite a été établie grâce à la relation de *Colebrook-White*. Nous avons montré que dans tous les cas, le coefficient ψ pouvait être évalué, ce qui a permis de calculer les coefficients de résistance f , C et n . Pour bien appliquer les relations régissant l'écoulement uniforme pour le dimensionnement du canal, il a été nécessaire de les appliquer d'abord au modèle rugueux de référence. Ceci permet de connaître les caractéristiques géométriques et hydrauliques de ce modèle et de déduire celle de l'écoulement dans le canal étudié.

Il est apparu cependant que la méthode du modèle rugueux jouait un rôle primordial dans la résolution du problème de l'écoulement uniforme.

Notre étude s'est poursuivie par l'analyse de l'écoulement à coefficient de résistance variable, aussi bien celui de *Chézy* que celui de *Manning*.

La relation générale du coefficient de résistance à l'écoulement de *Chézy* a été identifiée en ayant recours la relation du débit volume proposée par *Achour* et *Bedjaoui* (2006). Le coefficient de résistance à l'écoulement C de *Chézy* est fonction à la fois de la rugosité relative ε/b , du taux de remplissage η et d'un nombre de *Reynolds* R , lui-même fonction de la pente longitudinale i , du dimension linéaire b , de η et de la viscosité cinématique ν du liquide en écoulement. Nous avons donc écrit la relation fonctionnelle $C(b, \eta, i, \varepsilon, \nu) = 0$. Selon la gamme de valeurs du taux de remplissage η , nous avons déterminé le paramètre

adimensionnel C/\sqrt{g} . Il se présente en fonction du taux de remplissage η , de la rugosité relative ε/b et du nombre de *Reynolds* R^* . La représentation graphique du paramètre C/\sqrt{g} , en fonction de η et de R^* . Lorsque la dimension linéaire b du canal n'est pas une donnée du problème, le calcul du coefficient C de *Chézy* a pu être possible en ayant recours à la méthode du modèle rugueux (MMR).

En ce qui concerne le coefficient de résistance n de *Manning*, son expression générale a été déterminée. La représentation graphique du paramètre adimensionnel $N = b^{1/6}/n\sqrt{g}$ a montré un minimum. Pour cette même valeur de η , le coefficient n de *Manning* atteint alors sa valeur maximale. Lorsque la dimension linéaire n'est pas une donnée du problème, la méthode du modèle rugueux a permis de calculer le coefficient de résistance à l'écoulement n de *Manning*.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Achour B., *Calcul des conduites et canaux par la MMR – Conduites et canaux en charge*, Larhys Edition Capitale, Tome 1, 2007, 610p.
- Bakhmeteff B.A., Feodoroff N.V., Discussion on open channel flow, Transactions, American Society of Engineers, Vol.108, p.492-502, 1943.
- Bazin H., Etude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts, Mémoire n°41, Annales des ponts et chaussées, Vol.14, ser.7, 4ème trimestre, p.20-70, 1897.
- Blench T., A new theory of turbulent flow in liquids of small viscosity, Journal, Institution of Civil Engineers, London, Vol.11, n°6, p.611-612, April, 1939.
- Camp T.R., Design of sewers to facilitate flow, Sewage Works Journal, Vol.18, p.1-16, 1946.
- Chow V.T., *Open channel Hydraulics*, McGraw-Hill International Editions, 1973.
- Forchheimer P., Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig and Berlin, p.139-163, 1930.
- Ganguillet E., Kutter W.R., An investigation to establish a new general formula for uniform flow of water in canals and rivers, Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines, Vol.21, n°1, p.6-25, n°2-3, p.46-59, 1869.
- Houk I.E., Calculation of flow in open channels, Miami Conservancy District, Technical report, Pt. IV, Dayton, Ohio, 1918.
- Keulegan G.H., Laws of turbulent flow in open channels, Research paper RP 1151, Journal of Research, U.S. National Bureau of Standards, Vol. 21, p.707-741, December, 1938.
- Lindquist E., On velocity formulas for open channels and pipes, Transactions of the World Power Conference, Sectional Meeting, Scandinavia, Stockholm, Vol.1, p.177-234, 1933.
- Manning R., On the flow of water in open channels and pipes, Transactions, Institution of Civil engineers of Ireland, Vol.20, p.161-207, Dublin, 1891.
- Pavlovski N.N., "*Handbook of Hydraulic*", *Kratkil Gidravlitcheskil, Spravochnik, Gosstrolizdat*, Leningrad and Moscow, 1940, 314p.
- Powell R.W., Resistance to flow in rough channels, Transactions, American Geophysical Union, Vol.31, n°4, p.575-582, August, 1950.
- Prandtl L., On fully developed turbulence, Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics, Zurich, P.62-74, 1926.
- Schnackenberg E.C., Slope discharge formulae for alluvial streams and rivers, Proceeding, New Zealand Institution of Engineers, Vol. 37, p.340-409, Wellington, 1951.
- Sinniger, R.O., Hager W.H., *Constructions hydrauliques*, Traité de Génie Civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Presses Polytechniques Romandes, (15), 1^{ère} Edition, Suisse, 1989.
- Swamee P.K., Jain A.K., Explicit equations for pipe-flow problems, Proc. ASCE, J. Hydraulics Division, Vol.102, HY5, p.657-664, 1976.
- Toebes C., Streamflow : Poly-dimensional treatment of variable factors affecting the velocity in alluvial streams and rivers, Proceedings, Institution of Civil Engineers, London, Vol.4, n°3, pt. III, p.900-938, December, 1955.