

Université Mohamed Khider – Biskra
Faculté des Sciences et de la technologie
Département : Génie civil et hydraulique
Ref :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم و التكنولوجيا
قسم: الهندسة المدنية والري
المرجع:

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat en sciences en : Génie civil
Spécialité (Option) : Sol et Structures

Intitulé
**INVESTIGATION DES ELEMENTS FINIS NON
CONFORMES POUR L'ANALYSE DES STRUCTURES**

Présentée par :
FORTAS Lahcene

Soutenue publiquement le 21-10-2020

Devant le jury composé de :

Pr. Benmebarek Sadok	Professeur	Président	Université de Biskra
Pr. Belounar Lamine	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Pr. Maalem Toufik	Professeur	Examineur	Université de Batna 2
Dr. Guerraiche Khelifa	Maitre de Conférences 'A'	Examineur	Université de Batna 2

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail à :

Ma mère

Mon père

Ma future épouse

Mes frères et mes sœurs et à toute ma famille

Mes amis sans exception

REMERCIEMENTS

Il est l'heure pour moi de remercier tous ceux qui m'ont permis d'arriver au bout de cette thèse, que ce soit les collègues de travail, la famille ou les amis. Tout d'abord, j'exprime mes vifs remerciements à mon directeur de thèse, **Monsieur Lamine BELOUNAR**, Professeur à l'Université de Biskra, pour le choix du thème, pour son soutien, son encouragement et ses conseils précieux tout au long de l'élaboration de la présente thèse. Mes remerciements vont aussi à mon enseignant le professeur, **SAMAI MOHAMED LAID** au niveau de l'année théorique magister, professeur à la retraite, ses conseils et son soutien m'ont été très utiles. Je leur en suis aussi très reconnaissant pour leur motivation et leur enthousiasme.

Je tiens à remercier profondément les membres de jury :

- **Monsieur Sadok BENMEBAREK**, Professeur à l'Université de Biskra, d'avoir accepté d'examiner et présider le jury.
- **Monsieur Toufik MAALEM**, Professeur à l'Université de Batna2, qui a accepté d'être examinateur. Je le remercie très sincèrement.
- **Monsieur Khelifa GUERRAICHE**, Maître de conférences à l'Université de Batna 2, qui a accepté lui aussi d'examiner cette thèse. Je tiens à le remercier pour son extrême gentillesse.

Je tiens également à remercier en particulier mes amis **Abderraouf MESSAI**, Maître de conférences à l'université de Sétif1 et **Tarek MERZOUKI**, Maître de conférences à l'université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines (France), ainsi que mes collègues Lemmouchi BOUZIDI, Abderahim BELOUNAR, Fayçal Boussam et Houssam KHIOUANI.

PUBLICATIONS

Les travaux dans ce domaine de recherche ont abouti à la thèse de doctorat, en plus des publications et communications suivantes :

○ **Publication internationale**

- **Fortas L.**, Belounar L. and Merzouki T., Formulation of a new finite element based on assumed strains for membrane structures, International Journal of Advanced Structural Engineering 11 (Suppl 1):S9–S18, 2019.

○ **Communications internationales**

- L. Belounar, A. Messai, **L. Fortas**, T. Merzouki, A comparative study of membrane finite elements based on the strain approach, 34èmes Rencontres de l'AUGC, Université de Liège, Belgique, 25 au 27 mai 2016
- **Lahcene Fortas**, Lamine Belounar, Abderraouf Messai, Tarek Marzouki, The implementation of membrane finite elements based on the strain approach in the ABAQUS code, 2nd International Conference on Material and Structural Mechanics - MSM 2016 Marrakech, 23-25 November 2016.
- **FORTAS Lahcene**; **BELOUNAR Lamine**; **MESSAI Abderraouf** ; **MERZOUKI Tarek**, Application d'un élément fini membranaire a champ de déformation pour l'analyse elasto-plastique, Séminaire International sur les Matériaux Locaux et la Construction Durable (SIMaLoCoD) Adrar, le 04 et 05 décembre 2016.
- Mohamed Djabri, **Lahcene Fortas**, The effectiveness of the FEM in the behavior analysis of back-to-back geosynthetic-reinforced soil retaining walls, IV^{ème} Séminaire International innovation et valorisation en genie civil et matériaux de construction -INVACO'2016- 15 et 16 Décembre 2016 à Hammamet (Tunisie).
- Lemmouchi Bouzidi, A. Messai, **L. Fortas**, A. Belounar, T. Merzouki, Etude comparative des éléments tridimensionnels basés sur l'approche en déformation pour l'analyse des plaques, 2^{ème} Congrès International sur les Ingénieries Civile, Mécanique et Electrique pour l'Energie CMEEE 2017 – Marrakech 14, 15 et 16, Novembre 2017.

- Abderahim Belounar, Lamine Belounar, **Fortas Lahcene**, Mohamed Nabil Houhou, Analysis of circular plate bending with a quadrilateral strain based finite element, 3rd Conference On Advances In Mechanical Engineering Istanbul 2017-ICAME 2017 19-21 December 2017, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey.
- Abderahim Belounar, Lamine Belounar, **Lahcene Fortas**, Mohamed Nabil Houhou, Free vibration of plates with square openings using triangular Mindlin element, 5th International Conference On Advances In Mechanical Engineering Istanbul 2019, 17-19 December 2019.

TABLE DES MATIERES

RESUME	i
ABSTRACT	ii
ملخص	iii
LISTE DES NOTATION , ABREVIATION ET SYMBOLES	iv
LISTE DES FIGURES	vi
LISTE DES TABLEAUX	viii

INTRODUCTION GENERALE

1)Introduction	1
2) Objectifs de la thèse	2
3) Structuration de la thèse	3

CHAPTER 1: Rappel Théorique et Synthèse Bibliographique

1.1) Introduction	4
1.2) Qu'est-ce que la méthode des éléments finis ?	5
1.3) Procédure d'analyse par élément finis	6
1.4) Relations déformations – déplacements	7
1.5) Lois de comportement	7
1.6) Equations d'équilibres	7
1.7) Principe des travaux virtuels	7
1.8) Chargement axisymétrique	9
1.9) Introduction aux éléments finis conformes	10
1.9.1) Présentation	10
1.9.2) Eléments conformes et non conformes	10
1.9.3) Inconvénients des éléments conformes	11
1.10) Synthèse bibliographique et historique sur les éléments finis non-conformes	12
1.11) Synthèse bibliographique sur les éléments finis à champ de déformation	14
1.11.1) Introduction	14
1.11.2) Eléments coques basés sur l'approche en déformation	15
1.11.3) Eléments finis basés sur l'approche en déformation en coordonnées polaires	16
1.11.4) Eléments plaques basés sur l'approche en déformation	17
1.11.5) Eléments tridimensionnels basés sur l'approche en déformation	17
1.11.6) Eléments finis en élasticité plane basés sur l'approche en déformation	18

1.12) Conclusion	23
Chapitre 2 : Développement d'un élément fini triangulaire avec rotation dans le plan pour l'étude élasticité plane	
2.1) Introduction	24
2.2) Formulation de l'élément développé SBTDR	24
2.3) Conclusion	30
CHAPITRE 3: Validation numérique de l'élément SBTDR en statique et en vibration libre	
3.1) Introduction	32
3.2) Validation de l'élément SBTDR en statique	33
3.2.1) Poutre de Mac-Neal linéaire	33
3.2.2) Panneau de cook	34
3.2.3) Poutre circulaire épaisse sous charge de cisaillement dans le plan	35
3.2.4) Murs avec ouvertures	35
3.2.5) Poutre circulaire mince sous charge de cisaillement dans le plan	36
3.3) Validation de l'élément SBTDR en vibration libre	37
3.3.1) Vibration libre d'un mur consol	37
3.3.2) Vibration libre d'une poutre console	38
3.3.3) Vibration libre d'une poutre console à section variable	39
3.4) Conclusion	40
CHAPITRE 4: Validation de l'élément SBTIE pour l'analyse élasto-plastique et en vibration libre	
4.1) Introduction	41
4.2) Théorie de plasticité	42
4.2.1) Rappels et notion	42
4.2.1.1) Introduction	42
4.2.1.2) La non-linéarité	42
4.2.1.3) Notion de surface de charge	44
4.2.2) Invariants de contrainte	45
4.2.3) Critères de plasticité (Rupture)	46
4.2.3.1) Définitions	46
4.2.3.2) Critère de Von Mises	47
4.2.3.3) Critères de Mohr-Coulomb et Tresca	48
4.2.4) Méthodes pour générer des charges	49

4.2.4.1) Matrice Constitutive (méthode des contraintes initiales)	49
4.2.4.2) Méthode visco-plastic (méthode des déformations initiales)	50
4.3) Validation numérique de l'élément SBTIE en non linéaire	51
4.3.1) Analyse de la capacité portante d'un sol purement cohérent	51
4.3.2) Analyse axisymétrique non drainée	52
4.4) Validation numérique de l'élément SBTIE en vibration libre	54
4.4.1) Vibration libre d'un mur console	54
4.4.2) Vibration libre d'une poutre console	55
4.4.3) Vibration libre d'une poutre console à section variable	56
4.5) Conclusion	58
CHAPITRE 5: Validation numérique de l'élément SBTIEE	
5.1) Introduction	59
5.2) Validation de l'élément SBTIEE en statique	60
5.2.1) Poutre console élancée de MacNeal	60
5.2.2) Poutre console soumise à un moment de flexion	60
5.2.3) Poutre console courte d'Allman	61
5.2.4) Poutre console circulaire mince sous un chargement de cisaillement	62
5.3) Validation de l'élément SBTIEE en vibration libre	63
5.3.1) Vibration libre d'un mur console	63
5.3.2) Vibration libre d'une poutre console	63
5.3.3) Vibration libre d'une poutre console à section variable	65
5.4) Validation de l'élément SBTIEE en non linéaire	66
5.4.1) Analyse de la capacité portante d'un sol purement cohérent	66
5.4.2) Analyse axisymétrique non drainée	67
5.5) Conclusion	69
CONCLUSIONS GENERALE	70
Liste de Référence	72
ANNEXE :Construction des matrices	80

RESUME

Le développement d'un nouvel élément fini triangulaire membranaire non-conforme avec une rotation dans le plan basé sur l'approche en déformation constitue le principal objectif de la présente thèse. Cet élément possède trois degrés de liberté à chaque nœud, deux translations (U , V) et une rotation dans le plan (θ_z). L'élément nommé SBTDR (strain-based triangular with drilling rotation) est proposé comme une contribution positive à la bibliothèque d'éléments finis existants et destiné à l'analyse statique et en vibration libre des structures.

Le champ de déplacement a été développé en utilisant l'approche en déformation. Il est basé sur des composantes de déformation qui satisfont à la fois les équations de compatibilité et les équations d'équilibre. L'élément formulé est validé à travers une série de tests en statique et en vibration libre. La rapidité de convergence et la bonne performance de cet élément ont été confirmées en comparant les résultats obtenus aux solutions analytiques et numériques des autres éléments.

Dans la deuxième partie, l'élément SBTIE de la littérature a été validé en vibration libre et en élasto-plastique. L'élément SBTIE est un élément membranaire basé sur le champ de déformation, ayant une forme triangulaire à quatre nœuds, et avec deux degrés de liberté par nœuds (u , v). Les deux comportements de cet élément sont étudiés, pour la première fois, et les résultats ont révélé une bonne convergence.

Quant à la dernière partie, l'élément rectangulaire (SBRIEE) mentionné dans la littérature a été transformé en un élément triangulaire à quatre nœuds nommé (SBTIEE). Le champ de déformation de cet élément (SBTIEE) est le même que celui de l'élément rectangulaire (SBRIEE). Cet élément a deux degrés de liberté, u et v , à chacun des trois nœuds d'angle et au nœud intermédiaire supplémentaire. Ce dernier (l'élément SBTIEE) a été validé en statique, en vibration libre et en elasto-plastique.

Mots Clés/ Elément membranaire; approche en déformation; analyse elasto-plastique ; analyse en vibration libre.

ABSTRACT

The development of a new non-conforming triangular membrane finite element with in-plane rotation using the strain based approach constitutes the main objective of the present thesis. This element has three degrees of freedom at each node, two translations (U, V) and the in-plane rotation (θ_z). This element named SBTDR (strain based triangular with drilling rotation) is proposed as a positive contribution to the library of existing finite elements and intended for static and free vibration analysis of structures.

The displacement field was developed using the strain approach. It is based on deformation components that satisfy both the compatibility equations and the equilibrium equations. The developed element is validated through a series of static and free vibration tests. The accuracy and the good performance of this element have been confirmed by comparing the results obtained to the analytical and numerical solutions of the other elements.

In the second part, the element SBTIE of the literature was validated in free vibration and in elasto plastic analysis. The element SBTIE is a membrane element based on the strain approach, having a triangular shape with four nodes, with two degrees of freedom at each node (u, v). The two behaviors of this element are studied, for the first time, and the results have shown good convergence.

As far the last part, the rectangular element (SBRIEE) mentioned in the literature has been transformed to a triangular element with four nodes named (SBTIEE). The strain field of this element (SBTIEE) is the same strain field as the rectangular element (SBRIEE). This element has two degrees of freedom, u and v , at each of the three corner nodes and at the additional intermediate node. This latter SBTIEE element has been validated in static, free vibration and in elastoplastic analysis.

Keywords / Membrane element; strain approach; elastoplastic analysis; free vibration analysis.

ملخص

تحدث هذه الأطروحة في الجزء الأول بتطوير عنصر محدود غشائي جديد مثلث الشكل غير المطابق قائم على مبدأ التشوه.

يحتوي هذا العنصر على ثلاث درجات من الحرية عند كل عقدة (درجتين للانتقال ودرجة للدوران) ، العنصر المسمى

SBTDR اقترح لإثراء مكتبة العناصر المحدودة الموجودة.

حقل الانتقالات لهذا العنصر تم تطويره باستعمال مبدأ التشوه، والذي يستند إلى مكونات التشوه المحققة لكل من معادلات التوافق ومعادلات التوازن. تم تقييم أداء هذا العنصر من خلال سلسلة من الاختبارات في الحالة الستاتيكية وفي حالة الاهتزاز الحر. النتائج التي تم الحصول عليها مقارنة بالحلول التحليلية والعديدية للعناصر الأخرى، بينت سرعة التقارب والأداء الجيد لهذا العنصر.

في الجزء الثاني من الأطروحة، تحققنا من العنصر SBTIE المذكور في المؤلفات في كل من تحليل الاهتزاز الحر والتحليل غير المرن. العنصر SBTIE هو عنصر غشائي قائم على مبدأ التشوه مثلث الشكل بأربع عقد ، مع درجتين من الحرية بكل عقدة (u ، v). تم دراسة سلوكيات هذا العنصر لأول مرة وأظهرت النتائج أداء جيداً.

أما بالنسبة للجزء الأخير ، فقد تم تحويل العنصر المستطيل (SBRIIE) المذكور في المؤلفات إلى عنصر مثلث بأربع عقد سمي (SBTIEE). حقل التشوه لهذا العنصر (SBTIEE) هو نفس حقل التشوه للعنصر المستطيل (SBRIIE). يحتوي هذا العنصر على درجتين من الحرية ، u و v ، في كل من العقد الثلاث وفي العقدة المتوسطة الإضافية. تم التحقق من صحة هذا العنصر في SBTIEE في الحالة الستاتيكية، في حالة الاهتزاز الحر وكذا في التحليل غير المرن.

الكلمات المفتاحية: عنصر غشائي ; مبدأ التشوه; التحليل غير المرن; تحليل الاهتزاز الحر.

LISTE DES NOTATIONS, ABREVIATIONS ET SYMBOLES

○ NOTATIONS

$\{F_e\}$	Vecteur de charge
$[D]$	Matrice d'élasticité
$[J]$	Matrice Jacobéenne
$[K]$	Matrice de rigidité globale
$[K_e]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[M]$	Matrice de masse globale
$[M_e]$	Matrice de masse élémentaire
E	Module d'Young
G	Module de cisaillement
h	Epaisseur de la plaque
u, v	Déplacements suivant les directions x et y respectivement
x, y, z	Coordonnées cartésiennes du repère global
T	Température
γ	Masse volumique
γ_{xy}, γ_{yz}	Déformation de cisaillement
κ	Coefficient de cisaillement
ϵ_x et ϵ_y	Déformations directes suivant x et y respectivement
ζ	Fraction volumique martensitique
θ_z	Rotation dans le plan
ν	Coefficient de Poisson
ρ	Densité de masse
σ_x, σ_y	Contraintes normales suivant les directions x et y respectivement
τ_{xy}, τ_{zy}	Contraintes de cisaillement
Ψ_y et Ψ_x	Rotations des sections droites autour des axes y et x respectivement

○ ABREVIATIONS

CT	Cisaillement transverse
ddl	Degrés de liberté
M.E.F.	Méthode des éléments finis
SBTIE	Strain-Based Triangular In-plane Element
SBTIEE	Strain-Based Triangular In-plane Elementwith equilibrium
SBTDR	Strain-Based Triangular With Drilling Rotation

○ SYMBOLES

\int	Intégrale
$[\]$	Matrice
$[\]^T$	Matrice transposé
$[\]^{-1}$	Matrice inverse

LISTE DES FIGURES

Chapitre 1.

Figure 1.1 Processus d'analyse d'un modèle numérique	4
Figure 1.2 Elément triangulaire à quatre nœuds sous chargement	10

Chapitre 2.

Figure 2.1 Elément triangulaire membrane avec rotation dans le plan	25
---	----

Chapitre 3.

Figure 3.1 Poutre console élancée de Mac-Neal soumise à deux cas de chargement (1) : à cisaillement pur et (2) : à flexion pure	33
Figure 3.2 Panneau de Cook modélisé par un maillage (2x2)	34
Figure 3.3 Poutre circulaire épaisse modélisée avec huit éléments triangulaires	35
Figure 3.4 Propriétés géométriques et matérielles de la paroi de cisaillement couplée	36
Figure 3.5 Poutre circulaire mince modélisé avec douze éléments triangulaires	36
Figure 3.6 Vibrations libres d'un mur en cisaillement	37
Figure 3.7 Vibrations libres d'une poutre console	38
Figure 3.8 Vibration libre d'une poutre console trapézoïdale	39

Chapitre 4.

Figure 4.1 Elément triangulaire membrane (SBTIE)	41
Figure 4.2 Méthode de rigidité constante	43
Figure 4.3 Méthode de rigidité variable (tangente)	43
Figure 4.4 Modélisation du comportement élasto-plastique	44
Figure 4.5 Critère de Von Mises et de Tresca	47
Figure 4.6 Critère de rupture de Mohr-Coulomb	48
Figure 4.7 Géométrie et maillage de la semelle filante	51
Figure 4.8 Géométrie et maillage du problème axisymétrique	53
Figure 4.9: Vibrations libres d'un mur en cisaillement	55
Figure 4.10: Vibrations libres d'une poutre console	56
Figure 4.11 Vibration libre d'une poutre console trapézoïdale	57

Chapitre 5.

Figure 5.1 Elément triangulaire membrane (SBTIEE)	59
Figure 5.2 Poutre console élancée de MacNeal (Données et maillages)	60
Figure 5.3 Poutre console modélisée avec deux éléments quadrilatéraux	61
Figure 5.4 Poutre console courte d'Allman	61
Figure 5.5 Poutre console circulaire mince modélisée avec (6x1)	62

Figure 5.6 Vibrations libres d'un mur en cisaillement	63
Figure 5.7 Vibrations libres d'une poutre console	64
Figure 5.8 Vibration libre d'une poutre console trapézoïdale	65
Figure 5.9 Géométrie et maillage de la semelle filante	66
Figure 5.10 Capacité portante par rapport au déplacement central	66
Figure 5.11 Géométrie et maillage du problème axisymétrique	68

LISTE DES TABLEAUX

Chapitre 1.

Tableau 1.1 Quelques éléments formules par l'approche en déformation	20
Tableau 1.2 Quelques éléments formules par d'autres approches	21

Chapitre 3.

Tableau 3.1 Déplacement vertical normalisé à l'extrémité libre de la poutre de MacNeal	33
Tableau 3.2 Déplacement vertical normalisé au point C	34
Tableau 3.3 Déplacement vertical normalisé au point A	35
Tableau 3.4 Comparaison de la déflexion latérale à différents niveaux	36
Tableau 3.5 Déplacement vertical normalisé à l'extrémité libre	37
Tableau 3.6 Trois premières fréquences (Hz) des modes de flexion d'un mur	38
Tableau 3.7 Quatre premières fréquences propres ($\times 10^4$ Hz) d'une poutre console	39
Tableau 3.8 Quatre premières fréquences propres ($\times 10^4$ Hz) d'une console trapézoïdale	40

Chapitre 4.

Tableau 4.1. Déplacement vertical du nœud chargé de coordonnées (0,0)	52
Tableau 4.2. Contrainte déviatorique et pression interstitielle par rapport au déplacement vertical dans le cas ($\psi = 0$).	54
Tableau 4.3. Contrainte déviatorique et pression interstitielle par rapport au déplacement vertical dans le cas ($\psi = 30^\circ$).	54
Tableau 4.4. Trois premières fréquences propres (Hz) d'un mur en cisaillement	55
Tableau 4.5. Quatre premières fréquences propres ($\times 10^4$ Hz) d'une poutre console	56
Tableau 4.6. Quatre premières fréquences propres ($\times 10^3$ rad/s) d'une console trapézoïdale	57

Chapitre 5.

Tableau 5.1 Déplacement vertical normalisé à l'extrémité libre de la poutre de MacNeal	60
Tableau 5.2 Déplacement vertical normalisé au point A ($V_A^{ref} = 100$) de la poutre console	61
Tableau 5.3. Déplacement vertical normalisé au point A	62
Tableau 5.4. Déplacement vertical normalisé au point A d'une poutre console circulaire mince.	62
Tableau 5.5. Trois premières fréquences propres (Hz) d'un mur en cisaillement	63
Tableau 5.6. Quatre premières fréquences propres ($\times 10^4$ Hz) d'une poutre console	64
Tableau 5.7. Quatre premières fréquences propres ($\times 10^3$ rad/s) d'une console trapézoïdale	65
Tableau 5.8. Déplacements verticaux du nœud chargé	67
Tableau 5.9. Contrainte déviatorique et pression interstitielle par rapport au déplacement vertical dans le cas ($\psi = 0$).	68
Tableau 5.10. Contrainte déviatorique et pression interstitielle par rapport au déplacement vertical dans le cas ($\psi = 30^\circ$).	69

Introduction générale

1. Introduction

La formulation des éléments finis simples et robustes est devenue un sujet d'intérêt et un plus important domaine de recherche en mécanique des structures. Cependant, les éléments basés sur le modèle en déplacement tels que l'élément quadrilatéral à quatre nœuds se comportent très mal pour les problèmes en flexion. Des efforts considérables ont été orientés pour surmonter les faiblesses de ces éléments par le développement d'éléments efficaces en utilisant différents concepts et formulations tels que les éléments à déformation imposée ou des éléments à déformation imposée améliorée. (Li and Huang 2014; Piltner and Taylor 1999). Les éléments conformes généralisés (Chen et al. 2004; Li and Huang 2014), les éléments quasi conformes (Wang et al. 2014; Xia et al. 2017) et les éléments en coordonnées quadrilatérales (Li and Huang 2014; Cen et al. 2015) ainsi que d'autres éléments de membrane robustes avec rotation dans le plan ont été développés (Kugler et al. 2010; Cen et al. 2011; Zouari et al. 2016).

Tous ces éléments sont regroupés en deux grandes familles : les éléments conformes et les éléments non conformes. En effet, les éléments finis non conformes bénéficient de meilleures propriétés de stabilité par rapport aux éléments finis conformes. Ces éléments se caractérisent par la simplicité des fonctions de base, le nombre réduit des degrés de liberté, la relaxation des conditions de continuité inter-éléments, leur stabilité et leur bon comportement de convergence.

Parmi ces éléments non conformes nous distinguons **les éléments à champ de déformation**.

L'approche en déformation présente certains avantages par rapport aux autres formulations. En effet les deux critères de convergence principaux (mode de déformation constante et mode du corps rigide) sont directement reliés aux déformations. D'autre part les éléments finis basés sur le modèle en déformation possèdent des degrés de liberté externes essentiels qui permettent d'éviter les difficultés associées aux degrés de liberté internes contrairement aux éléments liés à un grand nombre de degrés de liberté qui engendrent un grand nombre d'inconnues.

Concernant les éléments membranaires, Plusieurs tentatives ont été entreprises pour développer des éléments finis **conformes** ayant trois degrés de liberté par nœud. Ces derniers

possèdent des avantages pratiques pour l'analyse des structures de coque, des plaques pliées et des panneaux raidis. Allman [Allm.84] est le premier à avoir développé un élément fini triangulaire simple pour l'analyse en élasticité plane qui inclut des rotations dans le plan. Bergan et Fellipa [Berg.85] ont formulé un élément triangulaire en utilisant la méthode de formulation libre. Cook [Cook.86] a développé un triangle possède neuf degrés de liberté, six translations et trois rotations en plan. MacNeal et Harder [MacN.88] ont introduit des modifications pour améliorer la formulation du concept de Cook [Cook.86]. En 1988, Allman [Allm.88b] a dérivé un élément fini quadrilatère membranaire d'ordre inférieur avec des rotations en superposant quatre triangles à rotations planes.

La contribution de l'approche en déformation pour le développement des éléments finis membranaires **non conformes** avec rotation dans le plan a été citée dans plusieurs travaux. Sabir [Sabi.85] a développé un élément membranaire à trois nœuds SBTIEIR (Strain Based Triangular In-plane Element with In-plane Rotation) ayant une rotation dans le plan comme degré de liberté nodal. Belarbi et Bourezane [Bela.05] ont développé un nouvel élément, basé sur le modèle déformation. L'élément membranaire triangulaire a trois degrés de liberté par nœud. Des éléments membranaires rectangulaires à quatre nœuds avec trois degrés de liberté par nœuds (deux translations (u , v) et une rotation θ_z dans le plan) basés sur l'approche en déformation ont été développés par Rebiai et Belounar [Rebi.13,14].

Le travail de développement des éléments finis vise l'amélioration de la précision et la rapidité de convergence d'une étude d'une structure discrétisée

En effet pour obtenir une convergence satisfaisante, les éléments membranaires dérivant de l'approche en déplacement exigent un grand nombre d'éléments dans le maillage des structures, par conséquent, les éléments non conformes basés sur le modèle en déformation n'exigent qu'un petit nombre d'éléments en maillage pour avoir une bonne convergence.

2. Objectifs de la thèse

Un nouvel élément fini triangulaire membranaire basé sur l'approche en déformation avec trois nœuds ayant trois degrés de liberté à chaque nœud, deux translations (U , V) et une rotation dans le plan (θ_z), dénommé SBTDR (strain-based triangular with drilling rotation) est proposé pour enrichir la bibliothèque d'éléments finis existants en apportant une solution aux problèmes de verrouillage soulevés par les éléments d'ordre linéaire basés sur le modèle en déplacement.

Les objectifs de la présente thèse peuvent être résumés comme suit :

-Le développement d'un élément fini membranaire triangulaire basé sur l'approche en déformation dont le principal objectif est l'amélioration de l'analyse en termes de résultats et de temps de calcul pour l'analyse linéaire.

-L'extension de cet élément SBTDR à l'analyse en vibration libre de structures.

-La validation de l'élément SBTIE cité dans la référence [Sabi.95] en vibration libre et en élasto-plastique.

-La validation de l'élément rectangulaire (SBRIEE), qui a été transformé en un élément triangulaire à quatre nœuds nommé (SBTIEE), en statique, en vibration libre et en non-linéaire. Le champ de déformation de cet élément (SBTIEE) est le même que celui de l'élément rectangulaire (SBRIEE).

3. Structuration de la thèse

La thèse est constituée d'une introduction générale, de cinq chapitres, d'une conclusion générale et d'une annexe.

Le premier chapitre est consacré à un rappel sur les notions de base de la méthode des éléments finis et une recherche bibliographique sur les éléments finis existants dans la littérature développés par différentes formulations notamment les éléments finis non conformes.

Le deuxième chapitre présente le développement de l'élément fini membranaire triangulaire à trois nœuds nommé SBTDR (strain-based triangular with drilling rotation) basé sur l'approche en déformation dont les équations d'équilibre sont satisfaites comme condition supplémentaire pour l'analyse linéaire.

Le troisième chapitre est consacré à la validation de l'élément triangulaire SBTDR à travers une série de tests standards de la littérature pour les deux types d'analyse statique et vibration libre. Les résultats ont confirmé les bonnes performances de cet élément.

La validation de l'élément triangulaire à quatre nœuds SBTIE pour l'analyse en vibratoire et en non-linéarité fait l'objet du **quatrième chapitre**.

La transformation de l'élément rectangulaire (SBRIEE) de Sabir à un élément triangulaire à quatre nœuds nommé SBTIEE en prenant le même champ de déformation est présenté dans le **cinquième chapitre**. Sa validation en statique, en vibration libre et en non-linéarité a été effectuée.

Chapitre 1

Rappel Théorique et Synthèse Bibliographique

1.1. Introduction

En mécanique de l'ingénieur, on distingue aujourd'hui, trois domaines. En premier lieu la mécanique expérimentale qui permet l'observation directe d'un phénomène physique en laboratoire. En second lieu la mécanique appliquée qui s'en sert, en vue de le représenter pertinemment en modèle mathématique, c'est la modélisation. Enfin la mécanique numérique qui intervient afin d'étudier les méthodes de résolution de ces modèles ou autrement dit ces équations déduites du domaine précédent.

De façon générale, les différentes étapes d'analyse d'un problème physique s'organisent suivant le processus schématisé ci-après. Nous partons d'un problème physique. Le cadre précis de l'étude est défini par les hypothèses simplificatrices qui permettent de déterminer le modèle mathématique approprié. La difficulté pour l'ingénieur est de savoir choisir parmi les lois de la physique, celles dont les équations traduiront avec la précision voulue la réalité du phénomène physique. Un bon choix doit apporter une réponse acceptable pour des efforts de mise en œuvre non prohibitifs.

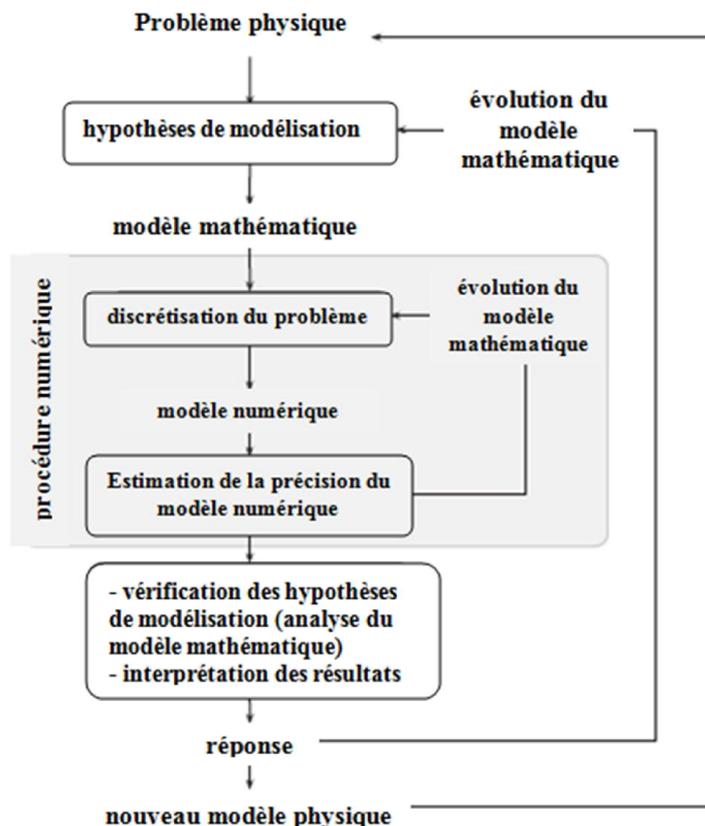


Figure 1.1 Processus d'analyse d'un modèle numérique

Si le modèle mathématique n'admet pas de solution analytique, il est alors nécessaire de chercher une solution approchée de ce dernier. Dès lors, la discrétisation du problème correspond au choix d'un modèle numérique permettant de traiter les équations mathématiques. Il est important de savoir distinguer et hiérarchiser les différents niveaux d'hypothèses utilisés pour modéliser un phénomène physique. En effet, la solution exacte d'un modèle mathématique qui ne correspond pas à la réalité physique est inutile.

Les codes éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisés lors de la conception et à l'analyse de produits industriels. Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés. L'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée et peut paraître de moins en moins une affaire de spécialistes.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les principes de base de cette méthode.

1.2. Qu'est-ce que la méthode des éléments finis ?

C'est une méthode mathématique d'intégration numérique des équations aux dérivées partielles mises sous forme variationnelle.

Tous les problèmes de calcul de structures élastiques se ramènent à un système d'équations aux dérivées partielles qu'il est souvent impossible de résoudre analytiquement.

La méthode des éléments finis a connu plusieurs développements depuis son apparition en 1956. Argyris [Argy.60] et Turner [Turn.56] ont fait une analogie directe en adoptant un comportement simplifié pour des petites portions : ils représentent un milieu continu élastique à deux dimensions par un assemblage de panneaux triangulaires, sur lesquels les déplacements sont supposés variés linéairement comme pour chaque barre ou poutre du système discret : chaque panneau est décrit par une matrice de rigidité et l'assemblage donne la rigidité globale du milieu continu. D'où la naissance d'éléments finis avec "panneaux" comme nom.

Argyris et Kelsey [Argy.60] utilisent la notion d'énergie dans l'analyse des structures et font appel à des méthodes mathématiques (résidus pondérés, principes variationnels ...). Le terme "élément fini" est utilisé pour la première fois par Clough [Clou.60], et dès lors, il y a eu un développement rapide de la méthode.

D'abord appliquée au calcul des structures et solides, la méthode des éléments finis a pris, dès 1965, une extension fantastique, quand on a réalisé qu'elle représentait une méthode générale de la résolution numérique des problèmes aux limites. Tout phénomène physique, dont la modélisation conduit à des équations différentielles avec conditions aux

limites, est devenu accessible et ce pour les cas de : structures, solides, chaleur, fluides, combustion,...etc. [Frey.01]

Les applications de la méthode des éléments finis sont tout aussi nombreuses et variées. Les ingénieurs de diverses disciplines utilisent les éléments finis, que ce soit en mécanique des fluides ou des solides, mais aussi pour les problèmes thermiques, électromagnétiques, chimiques, etc. On retrouve aussi des applications en physique, et notamment en astrophysique.

Les techniques de calcul des structures ont connu ces quarante dernières années un développement considérable, et ceci à cause des besoins des industries de pointes et grâce aux progrès réalisés dans le domaine des ordinateurs. Ainsi la méthode des éléments finis est communément utilisée aujourd'hui pour l'analyse des structures dans de nombreux secteurs de l'industrie : de l'aérospatial, du nucléaire, du génie civil, de la construction mécanique, ...etc.

L'intérêt de la méthode des éléments finis est qu'elle représente un outil puissant d'analyse numérique pour arriver à des solutions approchées à des problèmes que rencontrent les ingénieurs qui ne cherchent plus des solutions exactes et fermes car elles nécessitent énormément d'efforts intellectuels et de temps lorsqu'elles sont possibles.

1.3. Procédure d'analyse par élément finis

La procédure comporte les étapes suivantes :

- Idéalisation et discrétisation de la structure en éléments finis par un maillage constitué de lignes ou de surfaces imaginaires .Les éléments sont supposés reliés en un nombre fini de points nodaux situés sur leurs frontières. Les déplacements de ces points nodaux seront les inconnues de base du problème.
- Le choix d'une fonction de déplacement permettant de définir de manière unique le champ de déplacements de ses nœuds. En se basant sur cette fonction de déplacement, la matrice de rigidité, de l'élément qui lie les forces nodales et les déplacements nodaux en utilisant le principe des travaux virtuels ou le principe de l'énergie potentielle totale minimale, est déduite.
- Analyse de la structure idéalisée de l'assemblage des éléments .Cette analyse procède de la manière classique qui a été décrite par la méthode de rigidité.
- Solution de ces équations avec évaluation des déplacements et des efforts internes dans la structure (contrainte, déformation).
- Résolution d'un problème en élasticité qui consiste à:

- Déterminer le vecteur déplacement en tout point de la structure
- Déterminer le tenseur des déformations en tout point de la structure
- Déterminer le tenseur des contraintes en tout point de la structure

1.4. Relations déformations – déplacements

Dans un système de coordonnées cartésiennes x et y , les relations entre les déformations planes ε_x , ε_y , γ_{xy} et les déplacements de translation U et V , sont données par :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1)$$

1.5. Loi de comportement

Si on suppose que le comportement est élastique, la relation contrainte-déformation est linéaire sous la forme :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (1.2)$$

Où $[D]$ est la matrice d'élasticité donnée soit en :

a) Contrainte plane :

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

b) déformation plane :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

1.6. Equations d'équilibres

L'équilibre d'un élément infinitésimal est donné sous forme condensé par l'équation suivante :

$$\partial_j \sigma_{ij} + f_i = 0 \quad (1.5)$$

1.7. Principe des travaux virtuels

Durant n'importe quel déplacement virtuel imposé à l'élément, le travail extérieur total produit par les charges nodales doit être égal au travail interne total des contraintes.

Les déplacements nodaux virtuels imposés sont représentés par le vecteur $\{\bar{q}_e\}$ où :

$$\{\bar{q}_e\} = \begin{Bmatrix} \bar{q}_{e1} \\ \bar{q}_{e2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{q}_{en} \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

Ces déplacements nodaux virtuels produisent des déformations virtuelles $\{\bar{\varepsilon}(x, y)\}$ aux points de l'élément où les contraintes réelles sont les $\{\sigma(x, y)\}$.

$$\{\bar{\varepsilon}(x, y)\} = [B] \{\bar{q}_e\} \quad \text{et} \quad \{\sigma(x, y)\} = [D][B] \{q_e\} \quad (1.7)$$

Alors le travail interne (l'énergie de déformation interne) par unité de volume est donné par :

$$W_{\text{int}} = \{\bar{\varepsilon}(x, y)\} \{\sigma(x, y)\} \quad (1.8)$$

Le travail interne total est obtenu par l'intégrale de volume suivante :

$$\int_V W_{\text{int}} dV = \int_V \{\bar{\varepsilon}(x, y)\}^T \cdot \{\sigma(x, y)\} dV \quad (1.9)$$

En substituant les expressions de $\bar{\varepsilon}$ et σ dans l'équation du travail interne, et on obtient :

$$\int_V W_{\text{int}} dV = \int_V \{\bar{\varepsilon}(x, y)\}^T [D][B] \{q_e\} dV = \int_V [B]^T \{\bar{q}_e\} [D][B] \{q_e\} dV \quad (1.10)$$

Maintenant le travail virtuel extérieur produit par les forces nodales réelles, durant le déplacement virtuel imposé $\{\bar{q}_e\}$ à l'élément est donné comme suit :

$$W_{\text{ext}} = \{\bar{q}_e\}^T \{F_e\} \quad (1.11)$$

Où $\{F_e\}$ est le vecteur des forces nodales réelles.

L'opération finale consiste à évaluer le travail interne et le travail externe produits pendant les déplacements virtuels $\{\bar{q}_e\}$. Puisque le principe de base des déplacements virtuels est valide pour n'importe quel système de déplacements appliqué, on peut choisir ce dernier comme l'on veut. Dans le cas présent, il est commode de supposer les déplacements nodaux égaux à l'unité. On obtient alors :

$$\{F_e\} = \left[\int_V [B]^T [D][B] dV \right] \{q_e\} \quad (1.12)$$

L'équation s'écrit à nouveau comme suit : $[K_e] \{q_e\} = \{F_e\}$.

Il est clair que la matrice de rigidité élémentaire $[K_e]$ est donnée par l'expression :

$$[K_e] = \int_V [B]^T [D][B].dV \quad (1.13)$$

Où [D] représente la matrice des coefficients de rigidité.

L'équation d'équilibre global pour le cas statique et le cas des vibrations libres est réécrite comme suit :

$$\begin{cases} [K]\{q\} = [F] \\ [K] - \omega^2[M]\{q\} = \{0\} \end{cases} \quad (1.14)$$

{q} est le vecteur global de la structure. {K} est la matrice de rigidité, {M} est la matrice de masse et {F} est le vecteur de charge. Ils sont obtenus en assemblant les contributions des éléments individuels à l'aide des matrices élémentaires.

1.8. Chargement axisymétrique

Dans le passage aux conditions axisymétriques, x et y sont substituées respectivement par r et z dans la matrice [C], ainsi la matrice de déformation axisymétrique [Q*] s'écrit comme:

$$[Q^*] = [L^*][C] \quad (1.15)$$

Où [L*] est l'opérateur différentiel défini par :

$$[L^*] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Les différentes matrices de déformation [Q*] pour les éléments SBTDR, SBTIE et SBTIEE sont données dans l'annexe.

La figure 1.2 présente le chargement unitaire répartie pour l'élément triangulaire à quatre nœuds. Les forces nodales équivalentes sont données par :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{r_1 - r_0}{6}(2r_0 + r_1) \\ F_2 &= \frac{r_1 - r_0}{6}(r_0 + 2r_1) \end{aligned} \quad (1.17)$$

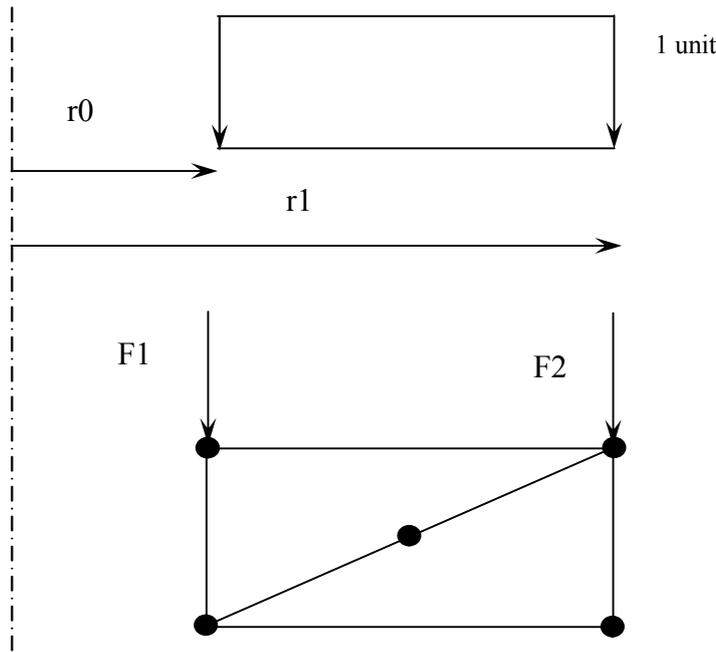


Figure 1.2 : Elément triangulaire à quatre nœuds sous chargement

1.9. Introduction sur les éléments finis conformes

1.9.1. Présentation

Pour traiter un problème par éléments finis, il existe différentes approches telles que l'approche en déplacement où une approximation du champ de déplacements est supposée tout en vérifiant qu'il satisfait la compatibilité des déplacements à l'intérieur de l'élément. Pour ce faire, une fonction de déplacement est choisie permettant de définir l'état de déplacement d'une façon unique. La deuxième approche celle en contraintes qui consiste à définir un champ de contraintes de façon à assurer l'équilibre de l'élément. Par la suite, les équations de compatibilité des déplacements sont posées. Leur résolution permet l'obtention des forces. Ensuite l'approche mixte qui est un mélange des deux approches précédentes ce qui a donné naissance au concept d'élément fini hybride.

En plus, nous distinguons deux types d'éléments finis : les éléments conformes et les éléments non conformes

1.9.2. Eléments conformes et non conformes

Les différents champs de déplacement nécessitent un nombre total de constantes égales au nombre total des degrés de liberté de l'élément. Cependant, il convient de choisir les

constantes proportionnellement aux différents champs de déplacement suivant la destination de l'élément et de la nature du problème à analyser.

Le choix des fonctions de forme limite le nombre de degrés de liberté du système qu'est en réalité infini. De ce fait, le minimum réel de l'énergie ne pourra jamais être atteint quelle que soit la finesse du maillage. Pour assurer la convergence de la solution vers la solution exacte, il est nécessaire de vérifier un certain nombre de conditions ou critères:

- **Critère 1** : représente des modes rigides où la fonction de déplacements doit être telle qu'il soit impossible qu'un élément se déforme quand les déplacements de ses nœuds sont causés par un mouvement de corps rigide.

- **Critère 2** : représente des états de déformation constante dont la fonction représentative des déplacements doit être telle que, si les déplacements nodaux correspondent à des déformations constantes, ces déformations constantes sont effectivement obtenues.

- **Critère 3** : condition de compatibilité où les fonctions de déplacement doivent être choisies de telle sorte que les déformations aux interfaces des éléments soient infinies.

Les critères 1 et 2 se traduisent par le terme élément complet. Le critère 3, quant à lui, par le terme élément compatible. Si les éléments finis satisfont les conditions de complétude et de compatibilité ; ils sont dits "éléments conformes". Pour ce type d'éléments, la solution converge de façon monotone vers la solution exacte. Les éléments qui ne satisfaisant pas les conditions sont dits "éléments non conformes". Parmi ces éléments, certains d'entre eux ne convergent pas, alors que d'autres convergent et pas nécessairement par le bas et de façon monotone. Comme il y a des éléments non conformes qui présentent un taux de convergence supérieur à celui d'éléments conformes, ils sont très utilisés en pratique.

1.9.3. Inconvénients des éléments conformes

La résolution d'un problème elliptique d'ordre $2k$ dans un contexte d'élément fini conforme impose que l'espace discret soit de classe C^{k-1} . Cela signifie que les fonctions de base doivent être de classe C^0 pour un problème de second ordre et de classe C^1 pour un problème de quatrième ordre. Ces conditions ne sont pas toujours satisfaites, comme dans le cas des problèmes réels où les frontières sont des courbes pas assez régulières et où les coefficients sont variables, par exemple. En outre, dans le cas d'un problème de quatrième ordre (problème des plaques ou des parois minces par exemple), la construction de l'espace discret nécessite l'utilisation de polynômes de degrés élevés pour satisfaire l'appartenance à la

classe C^1 . Ceci conduit à des systèmes linéaires de grande taille. De telles restrictions de continuité constituent le premier inconvénient des éléments finis conformes.

D'autres problèmes des éléments finis conformes peuvent être ajoutés à ceux déjà mentionnés, notamment, ceux de stabilité et de convergence. Ce genre de problèmes peuvent être rencontrés dans les équations de Stokes en mécanique des fluides [Ern.04] qui conduisent, par conséquent, aux modes parasites et au verrouillage numérique. La même situation d'instabilité peut être rencontrée dans les équations de Navier-Stokes incompressibles en mécanique des fluides également.

D'ailleurs, les problèmes de convergence peuvent être rencontrés dans les équations d'élasticité, plus précisément, pour les matériaux incompressibles quand le coefficient de Lamé $\lambda \rightarrow \infty$, ou autrement, en terme du coefficient de Poisson ν , quand ν est proche à 0.5. De tels phénomènes sont connus sous le nom de blocage ou de verrouillage.

Les inconvénients déjà mentionnés des éléments finis conformes ont bien ouvert la route pour l'apparition et le succès des éléments finis non conformes, En effet, les avantages de ces derniers, notamment, la simplicité des fonctions de base, le nombre réduit des degrés de liberté, la relaxation des conditions de continuité inter-éléments, leur stabilité et leur bon comportement de convergence, ont contribué à leur développement. *Les éléments à champ de déformation* constituent une frange de ces éléments non conformes.

1.10.Synthèse bibliographique et historique sur les éléments finis non-conformes

Des éléments non conformes ont été utilisés pour résoudre des problèmes de mécanique des fluides depuis que l'élément triangulaire non conforme a été proposé par Crouzeix et Raviart [Crou.73]. Cet élément triangulaire non conforme a des degrés de liberté aux points médians des trois bords d'un triangle, de telle sorte que la continuité à travers les interfaces des éléments voisins n'est imposée qu'aux points médians. Après les travaux de Crouzeix et Raviart [Crou.73], des éléments non conformes analogues pour les quadrilatères ont été proposés.

Rannacher et Turek [Rann.92] ont présenté les éléments quadrilatéraux non conformes, à savoir rotâtes bilinéaire éléments, pour le problème de Stokes et ont montré que les éléments non conformes peuvent être utilisés comme éléments stabilisés de Stokes. Zhang [Zhan.97] a analysé l'élément quadrilatéral non conforme de Wilson – Taylor sur des maillages quadrilatéraux arbitraires pour résoudre des équations élastiques incompressibles.

Han [Han.84a] a proposé un élément rectangulaire non conforme pour résoudre les équations de Stokes stationnaires et les équations de Navier-Stokes [Han.84b].

Plus tard, Douglas et al. [Doug.99] ont introduit un nouvel élément quadrilatère, qui est une modification des éléments bilinéaires rotatifs, préservant une certaine propriété d'annulation.

Sur la base de ces éléments quadrilatéraux, Cai et al. [Cai.00] ont proposé des éléments Stokes stabilisés. De tels éléments quadrilatéraux ont été utilisés pour définir un espace d'éléments finis mixtes non conformes pour les équations de Maxwell complètes dans [Doug.00], ce qui a constitué, à notre connaissance, le premier élément non conforme pour les équations de Maxwell. Ensuite, des éléments quadrilatéraux ont été appliqués pour résoudre le problème de Helmholtz [Doug.01] et les ondes dans les milieux viscoélastiques [Gauz.01],[Ha.02].

Ces éléments non conformes, appliqués aux problèmes de mécanique des structures, se sont révélés être sans verrouillage. Brenner et Sung [Bren.92] ont été les premiers à prouver ce résultat pour les éléments linéaires triangulaires par morceaux de Crouzeix et Raviart pour le problème de déplacement pur, exploitant la relaxation de la continuité à travers les interfaces entre les éléments.

Lee et al. [Lee.03] ont suggéré que les effets de verrouillage pouvaient être supprimés en utilisant les éléments non conformes rectangulaires ou quadrilatéraux introduits par Rannacher et Turek [Rann.92] et Douglas et al. [Doug.99].

L'utilisation des éléments non-conformes pour la modélisation des structures tridimensionnelles est motivée par le succès de ces derniers pour les structures bidimensionnelles. Dans ce contexte, un élément volumique non-conforme a été développé par Choi et Chung [Choi.96] spécialement pour simuler les problèmes de contact élasto-plastique sans frottement en trois dimensions d'une manière simple et efficace. Dans cette étude, les auteurs ont utilisé l'élément volumique non-conforme élasto-plastique avec des nœuds variables proposé, pour la première fois, dans la référence [Choi.95]. Cet élément a été créé par l'ajout d'un nombre variable de nœuds à l'élément non-conforme hexaédrique à huit nœuds. Cette technique permet d'obtenir une série d'éléments solides de transition qui ont jusqu'à 27 nœuds. Le comportement de base de ces éléments a été amélioré par l'ajout des modes de déplacements non-conformes modifiés.

Afin d'éviter le verrouillage de Poisson ou d'épaisseur, une version non conforme de l'élément hexaédrique à 8 nœuds SFR8 a été formulée. Cet élément non conforme baptisé SFR8I est formulé par l'enrichissement de la base cinématique par la méthode de Modes Incompatibles [Ayad.13]. Cette méthode est utilisée également par Yunus et al. [Yunu.91]. Elle consiste à introduire trois modes incompatibles de déplacement à l'élément dans l'espace naturel.

Les éléments finis non conformes bénéficient de meilleures propriétés de stabilité par rapport aux éléments finis conformes. Ils ont attiré l'attention de nombreux mathématiciens, comme [Arbo.95], [Arno.02], [Doug.99], [Gira.79], [Jun.05], [Park.03], [Zhan.97].

Achhab et al. [Achc.14] ont introduit un élément fini quadrilatère non conforme simple, puis ils ont dérivé le résultat de convergence optimal pour des quadrilatères réguliers arbitraires. Dans [Achc.15a], [Achc.15b] les auteurs ont établi une nouvelle classe d'éléments finis non conformes en incluant des fonctions enrichies supplémentaires (polynômes non nécessaires) à l'élément standard Q_1K .

En 2016, Bachar et al. [Bach.16] ont proposé une condition simple, à la fois nécessaire et suffisante, qui garantit l'existence d'un élément Crouzeix-Raviart enrichi pour un cas général de d -simplex.

Récemment, Achhab et al. [Achc.19] ont introduit une famille étendue de types d'éléments quasi-Wilson non conformes pour résoudre le problème élastique planaire linéaire. Cette classe d'éléments finis non conformes a été construite en utilisant l'approche de [Achc.15b] pour l'enrichissement de l'élément fini bilinéaire standard.

1.11. Synthèse bibliographique sur les éléments finis à champ de déformation

1.11.1. Introduction

L'approche en déformation est une formulation dans laquelle l'approximation se fait sur le champ des déformations de telle façon que les équations de compatibilité et d'équilibre soient satisfaites à l'intérieur de l'élément. Les champs de déplacements sont obtenus par intégration des composants de déformations en fonction de la relation déformation / déplacement. La procédure habituelle d'élément fini s'impose comme méthode appliquée pour calculer la matrice de rigidité de l'élément à partir des fonctions de déplacements.

L'approche en déformation présente certaines facilités par rapport aux autres formulations. En effet les deux critères de convergence principaux (mode de déformation

constante et mode du corps rigide) sont directement reliés aux déformations en lieu et place des suppositions des fonctions de déplacements. D'autre part les éléments finis basés sur le modèle en déformation possèdent des degrés de liberté externes essentiels qui permettent d'éviter les difficultés associées aux degrés de liberté internes contrairement aux éléments liés à un grand nombre de degrés de liberté qui engendrent un grand nombre d'inconnues. [Ashw.72]

Contrairement aux éléments ordinaires, les composantes du champ des déplacements pour les éléments basés sur l'approche en déformation ne sont pas indépendantes. En outre le champ de déplacements des éléments basés sur l'approche en déformation est représenté par des polynômes d'ordre supérieur (polynômes quadratiques) ce qui permet d'avoir une convergence rapide aussi bien pour le déplacement que pour les contraintes quand les résultats sont comparés avec les éléments basés sur le modèle en déplacement correspondants, c'est-à-dire, les éléments qui ont le même nombre total de degrés de liberté. [Djou.04]

1.11.2. Eléments coques basés sur l'approche en déformation

Dans leurs premières publications, Ashwell et Sabir [Ashw.71a] ont démontré que pour avoir des résultats satisfaisants et qui convergent, les éléments basés sur le modèle en déplacements exigent la division des structures courbées en grand nombre d'éléments. Les imperfections de ces éléments ont été remarquées et pour surmonter ces imperfections, les éléments basés sur le modèle en déformation sont utilisés plutôt que les éléments basés sur le modèle en déplacement pour les structures courbées (dans le cas où le nombre total des degrés de liberté des éléments seraient identique) [Salh.86].

Le développement du champ de déplacements, en utilisant l'approche en déformation, a été appliqué, pour la première fois, sur des éléments courbés. Cette formulation a été utilisée pour l'analyse des arcs par Ashwell, Sabir et Roberts en 1971 [Ashw.71b] et pour l'analyse des coques cylindriques par Ashwell et Sabir en 1972 [Ashw.72], Ashwell, Sabir et Roberts [Ashw.71b] ont montré que lorsque les fonctions champs de déplacement sont supposées pour l'analyse des structures courbes, la structure doit être divisée en un grand nombre d'éléments afin d'obtenir des résultats convergents satisfaisants.

Sabir et Ashwell [Ashw.72] ont développé un élément rectangulaire de coque cylindrique qui a vingt degrés de liberté. Ce dernier utilise seulement cinq degrés de libertés externes (trois déplacements linéaires et deux rotations) afin d'éviter les difficultés associées

aux degrés de liberté internes et les nœuds internes. Il satisfait les conditions du mode du corps rigide et l'état de déformation constante.

Des éléments pour l'analyse des arcs circulaires dans le domaine non-linéaire géométrique ont été formulés comme l'élément courbé développé par Sabir et Lock en 1972 [Sabi.72]. Cet élément est basé sur la condition que la déformation circonférentielle et la variation des courbures, plutôt que les déplacements, doivent être des fonctions simples et indépendantes des coordonnées. La supériorité de cet élément a été démontrée par rapport aux éléments à fonction de forme polynomiale.

Une autre contribution a été apportée par Sabir [Sabi.75] afin de développer des éléments arcs qui se déforment en hors plan de courbure. Il a aussi formulé des éléments coque (Sabir et Ashwell [Sabi.78]), pour les charges concentrées et le calcul des contraintes aux voisinages de ces charges pour les coques minces. Par le biais forces radiales ou moments concentrés.

Un grand intérêt pour les éléments rectangulaires et quadrilatéraux de coque cylindriques avec les recherches de Sabir et Cherchafi [Sabi.82] qui ont développé un élément qui est une modification de l'élément développé par Ashwell et Sabir [Ashw.72]. L'élément résultant a les mêmes représentations géométriques que l'élément précédant, sauf que la formulation de cet élément est basée sur les hypothèses de [Sander – Koiter] au lieu des hypothèses de Kirchhoff - Love utilisées dans la formulation de l'élément [Ashw.72].

Un autre élément de coque cylindrique surbaissée basé sur le modèle en déformation a été développé par Djoudi et Bahai [Djou.03]. L'élément est rectangulaire dans le plan ayant seulement les 5 degrés de liberté essentiels dans chaque nœud. L'efficacité de l'élément est démontrée dans l'analyse linéaire et non linéaire géométrique des structures coques. Cet élément a été aussi utilisé dans le calcul des fréquences naturelles des coques cylindriques [Djou.04].

1.11.3. Eléments finis basés sur l'approche en déformation en coordonnées polaires

Le succès de l'application de l'approche en déformation pour les problèmes en élasticité plane a mené à l'extension des travaux pour le développement des éléments finis secteurs dans un système de coordonnées polaires. Ceci est mené de deux façons : La première est de développer des éléments finis basés sur le modèle en déformation par une approche directe c'est-à-dire, en assumant les expressions polynomiales des déformations en coordonnées polaires et en intégrant les équations résultantes pour obtenir les fonctions de déplacements. La deuxième, est d'utiliser le champ de déplacements obtenu par l'approche en

déformation et en transformant le système de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires. Un exemple de ces éléments, est celui développé par Sabir et Salhi en 1986[Sabi.86].

Récemment, Khiouani et al. [Khio.20] ont formulé d'un nouvel élément de secteur tridimensionnel basé sur l'approche en déformation est présentée pour les problèmes de flexion de plaque et l'analyse statique linéaire des structures circulaires.

1.11.4. Eléments plaques basés sur l'approche en déformation

Un nouvel élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déformation et la théorie de Mandlin / Reissner est développé par Belounar et Guenfoud [Bel.05] pour l'analyse des plaques épaisses ou minces en flexion. Ce nouvel élément appelé SBRP (Strain Based Rectangulaire Plate) possède quatre nœuds de coins avec trois degrés de liberté à chaque nœud. Il est avéré numériquement plus efficace que l'élément similaire basé sur le modèle en déplacement. En plus, plusieurs éléments robustes basés sur l'approche en déformation ont été formulés pour l'étude de la flexion des plaques [Bel.06], [Bel.08], [Bel.11],[Bel.14b], [Bel.16], [Bel.17], [Belo.17a], [Bou.17],[Belo.19c].

Récemment, Belounar et al. [Belo.19a],[Belo.19b],[Belo.20a] et [Belo.20b] ont formulé de nouveaux éléments finis pour les analyses statiques et vibrations libres des plaques. Les éléments développés, qui contiennent les trois degrés de liberté externes essentiels à chacun des trois nœuds d'angle, sont basés sur la théorie de Reissner / Mindlin et sur l'approche en déformation.

1.11.5. Eléments tridimensionnels basés sur l'approche en déformation

Cette approche a ensuite été étendue aux problèmes en élasticité tridimensionnelle. Belarbi et Charif [Bela.99] ont développé un nouvel élément hexaédrique simple(SBH8) à huit nœuds et trois degrés de liberté par nœud (u , v et w) basé sur le modèle en déformation avec la modification de la matrice d'élasticité, afin d'éviter l'utilisation des éléments tridimensionnels (hexaédriques et prismatiques) d'ordre élevé pour l'étude de la flexion des plaques. Un autre élément tridimensionnel vérifiant les équations d'équilibre pour la flexion des plaques minces et épaisses a été développé par Maalem [Maal.02].

Hamadi et Maalem [Hama.10] ont développé un nouvel élément fini parallélépipédique baptisé SBP8C (Strain Based Parallelepiped 8-node Condensed). Il a été formulé par l'utilisation de la condensation statique. Cet élément peut être utilisé pour l'analyse de problèmes tridimensionnels ainsi que pour la flexion de plaques minces et épaisses.

Belounar et Guerraique [Bel.14a] et [Guer.18] ont formulé de nouveaux éléments finis tridimensionnels utilisant l'approche par déformation pour l'analyse linéaire de la flexion des plaques. L'élément développé possède les trois degrés de liberté externes essentiels (u , v et w) au niveau de chacun des huit nœuds d'angle ainsi qu'au nœud centroïde.

Messai et al. [Mess.19a] et [Mess.19b] ont développé un élément fini brique (SBBNN) en 3D basé sur l'approche en déformation, avec trois degrés de liberté essentiels par nœud (u , v et w) dédié à l'analyse des structures. La matrice d'élasticité utilisée dans la formulation de cet élément est modifiée en introduisant les constantes de contraintes planes et un coefficient de cisaillement transversal.

1.11.6. Éléments finis en élasticité plane basés sur l'approche en déformation

La contribution de l'approche en déformation pour le développement des éléments finis membranaires avec rotation dans le plan a été mise en exergue dans plusieurs travaux :

Sabir [Sabi.85] a développé un élément membranaire à trois nœuds SBTIEIR (Strain Based Triangular In-plane Element with In-plane Rotation) ayant une rotation dans le plan comme degré de liberté nodal.

Bouzirra[Bouz.86] a développé un élément secteur en incorporant des rotations dans le plan (12ddl/élément). Cet élément a été modifié et amélioré par Djoudi [Djou.90], qui a suggéré que les déformations de cisaillement soient indépendantes.

Sabir et Sfindji [Sabi.95] ont développé deux éléments, le premier est un élément triangulaire deux degrés liberté essentiels dans chacun des trois nœuds d'angles étai nœud du milieu du côté de l'élément résultant et possède huit degrés de liberté. Le deuxième est rectangulaire avec les mêmes degrés de liberté que l'élément précédant aux quatre nœuds des coins et au nœud du centre, il a donc dix degrés de liberté. Ces éléments sont utilisés sous diverses formes, y compris la condensation statique et l'équilibre satisfaisant pour obtenir des solutions à des problèmes en élasticité 2D.

Belarbi et Bourezane [Bela.05a] ont développé un nouvel élément, basé sur le modèle déformation. L'élément membranaire triangulaire a trois degrés de liberté par nœud. Un élément rectangulaire basé sur l'approche en déformation, possédant les deux d.d.l essentiels pour chacun des nœuds sommets, est développé pour la résolution des problèmes d'élasticité linéaire plane en général a été développé par Belarbi et Maalem [Bela.05b]. Des éléments membranaires rectangulaires à quatre nœuds avec trois degrés de liberté par nœud (deux

translations (u , v) et une rotation θ_z dans le plan) basés sur l'approche en déformation ont été développés par Rebiai et Belounar [Rebi.13],[Rebi.14]. D'autres études numériques avec des éléments membranaires basés sur l'approche en déformation ont été effectuées [Fort.16a][Fort.16b],[Belo.17b], [Khio.17].

Bouzidi et al. [Bou.19] ont développé un élément fini quadrilatère basé sur le modèle de déformation est présentée pour l'analyse statiques et dynamiques des structures membranaires. L'élément quadrilatéral proposé qui possède deux degrés de liberté (u et v) aux quatre nœuds d'angle ainsi qu'au nœud central.

Tableau 1.1. Quelques éléments formules par l'approche en déformation

Élément	Type d'élément	Structures étudiés	Auteur	Année
	Elément courbe	Analyse des arcs circulaires	Ashwell D.G, Sabir A.B, Roberts T.M	1971
	Elément rectangulaire	Analyse coque cylindrique	Ashwell D.G, Sabir A.B	1972
	Elément courbe	des arcs circulaires dans le domaine non-linéaire	Sabir A.B, Lock AC	1973
	Elément rectangulaire	Analyse coque cylindrique	Sabir A.B, Charchafchi T.A	1982
SBTIEIR	Elément membranaire	Les problèmes d'élasticité plane	Sabir A.B	1985
	élément fini segmentaire	Les problèmes d'élasticité plane	Sabir A.B, Salhi H.Y	1986
SBTIE	Elément triangulaire	Les problèmes d'élasticité plane	A.B. Sabir	1995
SBRIE	Elément triangulaire	Les problèmes d'élasticité plane	A.B. Sabir, A. Sfindji	1995
SBRIE1 SBRIE2	Eléments rectangulaires			
SBH8	Elément hexaédrique	L'étude des plaques minces et épaisses	M.T. Belarbi et A. Charif	1999
	Elément fini parallélépipédique	Analyse de la flexion des plaques	T. Maalem	2002
	Elément rectangulaire	Analyse coque cylindrique	Djoudi M.S. et Bahai H.	2003
SBTIEIR	Elément triangulaire	Les problèmes d'élasticité plane	M.T. Belarbi, M. Bourezane	2005
R4BM	Eléments rectangulaires	Les problèmes d'élasticité plane	M.T. Belarbi, T. Maalem	2005
SBRP	Elément rectangulaire	Analyse de la flexion des plaques	Belounar. L, Guenfoud M	2005
SBP8C	Elément fini parallélépipédique	L'étude des plaques minces et épaisses	DJ. Hamadi et T. Maalem	2010
SBREDR	Elément rectangulaire	Analyse linéaire et non linéaire des structures	C. Rebiai, L. Belounar	2013
SBQE	Elément rectangulaire	Analyse linéaire et non linéaire des structures		2014
SBB	Eléments finis tridimensionnels	L'étude des plaques minces et épaisses	L. Belounar et Kh. Guerraiche	2014
SBBEE	Elément brique	Analyse de la flexion des plaques	Kh. Guerraiche, L. Belounar, L. Bouzidi	2018

SBBNN	Elément brique	Analyse de la flexion des plaques	A. Messai, L. Belounar, T. Merzouki	2019
SBQ5	Elément quadrilatère	Analyses statiques et en vibrations libres des structures	L. Bouzidi, L. Belounar, Kh. Guerraiche	2019
SBTP4	Elément triangulaire	Analyses statiques, en vibrations libres et en flambement des plaques de Reissner – Mindlin	A. Belounar, S. Benmebarek, M. Nabil Houhou, L. Belounar	2019
SBQP	Elément quadrilatère			
SBS3D	Elément secteur tridimensionnel	Les problèmes de flexion des plaques et analyse statique linéaire des structures circulaires	H.E. Khiouani, L. Belounar, M. Nabil Houhou	2020
SBQMP	Elément quadrilatère	Analyse en vibrations libres des plaques de Reissner – Mindlin	A. Belounar, S. Benmebarek, M. Nabil Houhou, L. Belounar	2020
SBTMP	Elément triangulaire	Analyses statiques et en vibrations libres des plaques	A. Belounar, S. Benmebarek, L. Belounar	2020

Tableau 1.2. Quelques éléments formules par d'autres approches

Elément	Type d'élément	Structures étudiés	Auteurs	Année
	Elément triangulaire non conforme	problèmes de mécanique des fluides pour résoudre les équations de Stokes stationnaires	M. Crouzeix, P.A. Raviart	1973
	Elément rectangulaire non conforme	problèmes de mécanique des fluides pour résoudre les équations de Stokes stationnaires et les équations de Navier-Stokes	H. Han	1984
AT	Elément triangulaire	Les problèmes d'élasticité plane	D.J. Allman	1984
PS5 β	Elément quadrilatère	Les problèmes d'élasticité plane	Pian T.H, K. Sumihara	1984
	Elément triangulaire	Analyse des coques	P. G. Bergan, C.A. Fellipa	1985
AQ	Elément rectangulaire	Les problèmes d'élasticité plane	Cook. R.D	1986
	Elément quadrilatère	Les problèmes d'élasticité plane	D.J. Allman	1988
Q4S	Elément quadrilatère	Les problèmes d'élasticité plane	R.H.MacNeal and R.L. Harder	1988

MAQ	Elément quadrilatère	Les problèmes d'élasticité plane	Yunus, S. M., Saigal, S., Cook, R. D.	1989
07β	Elément quadrilatère	Les problèmes d'élasticité plane	Sze K.Y., Chen W. Cheung Y.K.	1992
HT	Eléments d'élasticité plane de type hybride trefftz	Les problèmes d'élasticité plane	J. Jirousek, A. Venkatesh	1992
	Eléments quadrilatéraux non conformes	problèmes de mécanique des fluides pour le problème de Stokes	R. Rannacher, S. Turek	1992
MEAS	Elément quadrilatère	Les problèmes d'élasticité plane	S.T. Yeo, B.C. Lee	1997
	Elément quadrilatère	problèmes de mécanique des fluides	J. Douglas Jr., J.E. Santos, D. Sheen, X. Ye	1999
TE4	Elément triangulaire	Les problèmes d'élasticité plane	Piltner, R., & Taylor, R. L.	2000
	Eléments Stokes stabilisés	problèmes de mécanique des fluides pour les équations de Maxwell	Cai Z, Douglas Jr. J, Santos JE, Sheen D, Ye X.	2000
HTD	Elément quadrilatère	Les problèmes d'élasticité plane	Choo YS, Choi N, Lee BC	2006
QACM4	Elément quadrilatère	Les problèmes d'élasticité plane	Cen S, Chen XM, Fu XR	2007
SFEM	Smoothed finiteelementmethod	Analyses en vibrations libres et forcées des structures	Dai KY, Liu GR	2007
HS-A7	Elément membranaire de contrainte hybride	Les problèmes d'élasticité plane	Rezaiee-Pajand, M., Karkon, M.	2013
SFR8	Elément hexaédrique	Les problèmes d'élasticité plane	R. Ayad, W. Zouari, K. Meftah, T. Ben Zineb, A. Benjeddou	2013
	élément quadrilatère non conforme		Achchab, B., Agouzal, A., & Bouihat, K.	2014
PFR4	Elément membranaire conforme à quatre nœuds	problèmes d'élasticité plane linéaire et non linéaire	Zouari, W., Hammadi, F., Ayad, R.	2016
PFR4I	Elément membranaire non conforme à quatre nœuds	problèmes d'élasticité plane linéaire et non linéaire		

1.12.Conclusion

En conclusion, la synthèse bibliographique sur l'ensemble des éléments développés que l'approche en déformation s'est avérée efficace pour le calcul des structures.

Le tableau 1ci-dessus résume les éléments basés sur l'approche en déformation, tandis que le deuxième tableau résume les éléments qui ont été choisi pour comparaison dans les autres chapitres.

Chapitre 2

Développement d'un élément fini triangulaire avec rotation dans le plan pour l'étude élasticité plane

2.1 Introduction

Le développement des éléments finis membranaires pour le calcul des structures, constitue une recherche intéressante. Les éléments membranaires sont des éléments avec trois nœuds, quatre nœuds ou plus utilisés pour modéliser des structures d'une épaisseur spécifiée qui ne présentent aucune contrainte normale à cette épaisseur.

Nous distinguons plusieurs approches pour formuler ces éléments, parmi lesquelles on peut citer l'approche en déformation. L'idée de cette approche fut originalement introduite pour la modélisation des structures dans les années 70. Le développement des champs de déplacement par l'utilisation de l'approche en déformation a été appliqué pour la première fois aux éléments courbés et elle a largement attiré l'attention de plusieurs chercheurs sur le développement de nouveaux éléments finis, parmi lesquels on peut citer son fondateur Sabir.

La formulation théorique d'un nouvel élément fini triangulaire membranaire avec une rotation dans le plan basé sur l'approche en déformation destiné à l'analyse statique et en vibration libre des structures constitue l'élément clef du présent chapitre. Cet élément nommé SBTDR (strain-based triangular with drilling rotation) possède trois degrés de liberté à chaque nœud (figure 2.1), deux translations (u , v) et une rotation dans le plan (θ_z).

2.2 Formulation de l'élément développé SBTDR [Fort.19]

Dans les problèmes en élasticité plane en coordonnées Cartésiennes, les trois composantes de la déformation sont données par:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)\end{aligned}\tag{2.1}$$

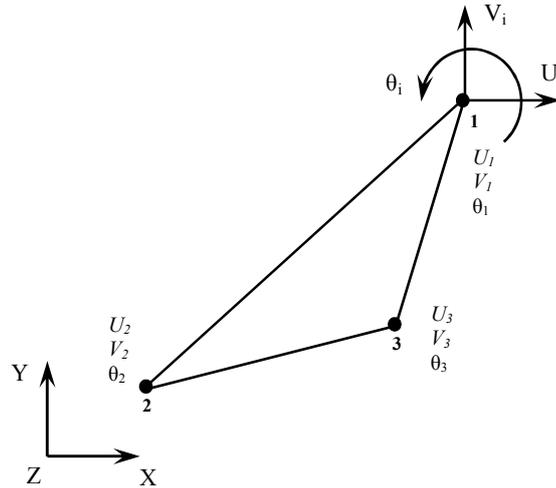


Figure 2.1 Elément triangulaire membrane avec rotation dans le plan.

L'élément triangulaire à trois nœuds nommé **SBTDR** (Strain-based Triangular with Drilling Rotation) possède 3 ddl par nœud (figure 2.1).

En considérant les déplacements de corps rigide (déplacements d'un élément sans déformations) il est obtenu :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 0 \\ \varepsilon_y &= 0 \\ \gamma_{xy} &= 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

L'intégration des deux premières équations de (2.2) donne les expressions de U et V suivantes :

$$\begin{aligned}U &= \alpha_1 + f(y) \\ V &= \alpha_2 + g(x)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Si les équations de (2.3) sont remplacées dans la troisième équation de (2.1), il s'ensuit :

$$\frac{dg(x)}{dx} + \frac{df(y)}{dy} = 0\tag{2.4}$$

La résolution de l'équation (2.4) donne :

$$\frac{df(y)}{dy} = -\alpha_3$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \alpha_3 \quad (2.5)$$

D'où:

$$f(y) = -\alpha_3 y$$

$$g(x) = \alpha_3 x \quad (2.6)$$

Les expressions de $f(y)$ et $g(x)$ obtenues sont substituées dans (2.3) pour avoir les déplacements de corps rigide qui sont:

$$U = \alpha_1 - \alpha_3 y$$

$$V = \alpha_2 + \alpha_3 x \quad (2.7)$$

Les composantes α_1 et α_2 sont les translations dans les directions x et y respectivement tandis que la composante α_3 est la rotation dans le plan. Cette rotation dans le plan θ_z peut être donnée par :

$$\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) = \alpha_3 \quad (2.8)$$

L'utilisation de la rotation dans le plan comme degré de liberté additionnel (θ_z) permet de combiner les éléments plans avec les éléments poutres en flexion, et de permettre de modéliser une poutre de renforcement dans le cas des plaques trouées.

Pour un élément triangulaire à trois nœuds comportant trois degrés de liberté (u , v et θ_z) pour chacun des nœuds d'angle, les fonctions de forme doivent contenir donc 9 constantes indépendantes, dont trois ont été utilisées pour représenter les déplacements de corps rigide (équations (2.7)). Les six constantes restantes ($\alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_9$) seront utilisées pour exprimer les déformations imposées de l'élément qui sont :

$$\varepsilon_x = \alpha_4 + \alpha_5 y - \alpha_7 v x - \alpha_9 \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} xy$$

$$\varepsilon_y = -\alpha_5 \nu y + \alpha_6 + \alpha_7 x - \alpha_9 \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} yx \quad (2.9)$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_8 + \alpha_9 (x^2 + y^2)$$

Les fonctions de déformation données par les équations (2.9) satisfont à la fois l'équation de compatibilité (2.10) et les équations d'équilibre (2.11) et (2.12), où ν est le coefficient de Poisson.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

Les deux premières expressions des déformations imposées des équations(2.9) sont substituées dans (2.1), et après intégration, il en résulte :

$$U = \alpha_4 x + \alpha_5 xy - \alpha_7 \frac{1}{2} \nu x^2 - \alpha_9 \frac{(1-\nu)x^2 y}{2(1+\nu)} + h(y)$$

$$V = \alpha_6 y + \alpha_7 xy - \alpha_5 \frac{1}{2} \nu y^2 - \alpha_9 \frac{(1-\nu)xy^2}{2(1+\nu)} + e(x) \quad (2.13)$$

Les deux équations ci-dessus sont dérivées par rapport à y et x respectivement et en les substituant dans la troisième équation de (2.1) pour avoir :

$$\gamma_{xy} = \alpha_5 x - \alpha_9 \frac{(1-\nu)x^2}{2(1+\nu)} + \frac{\partial h(y)}{\partial y} + \alpha_7 y$$

$$-\alpha_9 \frac{(1-\nu)y^2}{2(1+\nu)} + \frac{\partial e(x)}{\partial x} = \alpha_8 + \alpha_9 (x^2 + y^2) \quad (2.14)$$

Le partage des termes en x et y est élaboré pour avoir:

$$\frac{\partial h(y)}{\partial y} = \frac{1}{2} \alpha_8 - \alpha_7 y + \alpha_9 \left(\frac{(1-\nu)}{2(1+\nu)} + 1 \right) y^2$$

$$\frac{\partial e(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \alpha_8 - \alpha_5 x + \alpha_9 \left(\frac{(1-\nu)}{2(1+\nu)} + 1 \right) x^2 \quad (2.15)$$

L'intégration a abouti à :

$$h(y) = \frac{1}{2} \alpha_8 y - \frac{1}{2} \alpha_7 y^2 + \alpha_9 \left(\frac{1}{3} y^3 + \frac{(1-\nu)}{6(1+\nu)} y^3 \right)$$

$$e(x) = \frac{1}{2} \alpha_8 x - \frac{1}{2} \alpha_5 x^2 + \alpha_9 \left(\frac{1}{3} x^3 + \frac{(1-\nu)}{6(1+\nu)} x^3 \right) \quad (2.16)$$

En substituant (2.16) dans les fonctions des équations (2.13) il est obtenu:

$$\begin{aligned}
 U &= \alpha_4 x + \alpha_5 xy - \alpha_7 \frac{(vx^2 + y^2)}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} + \alpha_9 \left(-\frac{R}{2} x^2 y + \frac{R}{6} y^3 - \frac{y^3}{3} \right) \\
 V &= -\alpha_5 \frac{(vy^2 + x^2)}{2} + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2} + \alpha_9 \left(-\frac{R}{2} y^2 x + \frac{R}{6} x^3 - \frac{x^3}{3} \right) \\
 \theta_z &= -\alpha_5 x + \alpha_7 y + \alpha_9 ((x^2 - y^2) k)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

En ayant

$$R = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \quad ; \quad k = \frac{\nu}{(1+\nu)}$$

Le champ de déplacement final de l'élément **SBTDR** est obtenu en ajoutant les déplacements de corps rigide donnés par (2.7) avec ceux donnés par (2.17) pour avoir :

$$\begin{aligned}
 U &= \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_5 xy - \alpha_7 \frac{(vx^2 + y^2)}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} + \alpha_9 \left(-\frac{R}{2} x^2 y + \frac{R}{6} y^3 - \frac{y^3}{3} \right) \\
 V &= \alpha_2 + \alpha_3 x - \alpha_5 \frac{(vy^2 + x^2)}{2} + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2} + \alpha_9 \left(-\frac{R}{2} y^2 x + \frac{R}{6} x^3 - \frac{x^3}{3} \right) \\
 \theta_z &= \alpha_3 - \alpha_5 x + \alpha_7 y + \alpha_9 ((x^2 - y^2) k)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Les fonctions des déplacements donnés par (2.18) peuvent être exprimées sous forme matricielle par :

$$\{U_e\} = [P]\{\alpha\} \tag{2.19}$$

Les déplacements nodaux donnés par le vecteur ($\{q_e\}^T = (U_1, V_1, \theta_1, \dots, U_3, V_3, \theta_3)$), peuvent être évalués en substituant les coordonnées des trois nœuds de l'élément **SBTDR** (figure 2.1) pour avoir :

$$\{q_e\} = [C]\{\alpha\} \tag{2.20}$$

Avec $\{U_e\} = \{U, V, \theta\}^T$, $\{\alpha\} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9\}^T$

La matrice de transformation $[C](9 \times 9)$ relie les déplacements nodaux élémentaire ($\{q_e\}^T = (U_1, V_1, \theta_1, \dots, U_3, V_3, \theta_3)$) aux neuf constantes ($\{\alpha\}^T = (\alpha_1, \dots, \alpha_9)$). Ce vecteur des constantes peut être écrit comme suit :

$$\{\alpha\} = [C]^{-1} \{q_e\} \tag{2.21}$$

Les déformations $\{\varepsilon\}$ donnés par (2.9) peuvent être exprimées sous forme matricielle comme suit :

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\alpha\} \tag{2.22}$$

Avec $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$

Les matrices [P] et [Q] sont données par :

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -(x^2 + y^2)/2 & y/2 & (-\frac{R}{2}x^2y + \frac{R}{6}y^3 - \frac{y^3}{3}) \\ 0 & 1 & x & 0 & -(y^2 + x^2)/2 & y & xy & x/2 & (-\frac{R}{2}y^2x + \frac{R}{6}x^3 - \frac{x^3}{3}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x & 0 & y & 0 & (x^2 - y^2)k \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & -vx & 0 & -\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -vy & 1 & x & 0 & -\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}yx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (x^2 + y^2) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

En substituant l'équation (2.21) dans(2.19) et (2.22), il est obtenu :

$$\{U_e\} = [P][C]^{-1} \{q_e\} = [N] \{q_e\} \quad (2.25)$$

$$\{\varepsilon\} = [Q(x,y)][C]^{-1} \{q_e\} = [B] \{q_e\} \quad (2.26)$$

$$\text{Avec : } [N] = [P][C]^{-1}; [B] = [Q(x,y)][C]^{-1} \quad (2.27)$$

Les relations contraintes-déformations sont données par :

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (2.28)$$

Avec [D] la matrice d'élasticité:

Pour les problèmes en contrainte plane la matrice D s'écrit :

$$[D] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Pour les problèmes en déformation plane la matrice D s'écrit :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

La forme intégrale faible pour le cas statique et pour celui en vibration libre peuvent être exprimées respectivement comme suit :

$$\int_{V^e} \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V^e} \delta\{U_e\}^T \{f_v\} dV \quad (2.31)$$

$$\int_{V^e} \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV + \int_{V^e} \delta\{U_e\}^T \{\ddot{U}\} dV = 0 \quad (2.32)$$

En substituant les équations (2.25), (2.26) et (2.28) dans (2.31) et (2.32), il est obtenu :

$$\delta\{q_e\}^T \left(\int_V [B]^T [D][B] dV \right) \{q_e\} = \delta\{q_e\}^T \left(\int_V [N]^T \{f_v\} dV \right) \quad (2.33)$$

$$\delta\{q_e\}^T \left(\int_V [B]^T [D][B] dV \right) \{q_e\} + \delta\{q_e\}^T \left(\int_V \rho [N]^T [N] dV \right) \{\ddot{q}_e\} = 0 \quad (2.34)$$

D'où les matrices de rigidité et de masse élémentaires ($[K^e]$, $[M^e]$) sont exprimées respectivement comme suit:

$$[K^e] = \int_{S_e} [B]^T [D][B] dx dy$$

$$[K^e] = [C]^{-T} \left(\int [Q]^T [D][Q] dx dy \right) [C]^{-1} = [C]^{-T} [K_0][C]^{-1} \quad (2.35)$$

D'où

$$[K_0] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Q]^T [D][Q] \det(J) d\xi d\eta \quad (2.36)$$

$$[M^e] = \int_{S_e} \rho h [N]^T [N] dx dy$$

$$[M^e] = [C]^{-T} \left(\int \rho h [P]^T [P] dx dy \right) [C]^{-1} = [C]^{-T} [M_0][C]^{-1} \quad (2.37)$$

D'où

$$[M_0] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho h [P]^T [P] \det(J) d\xi d\eta \quad (2.38)$$

Le vecteur des forces nodales dû à la force volumique $\{f_v\}$ est :

$$\{F_b\} = \int_{V_e} [N]^T \{f_v\} dV = [C]^{-T} \left(\int_{V_e} [P]^T \{f_v\} dV \right) \quad (2.39)$$

2.3 Conclusion

Un nouvel élément fini triangulaire membranaire avec une rotation dans le plan basé sur l'approche en déformation est ainsi développé. Il satisfaisait les équations d'équilibre et les

équations de compatibilité. Cet élément est destiné à l'analyse statique et en vibration libre de structures.

Chapitre 3

Validation numérique de l'élément SBTDR en statique et en vibration libre

3.1 Introduction

Divers exemples de problèmes d'élasticité plane en statique et en vibration libre sont traités pour valider la précision et l'efficacité du nouvel élément développé SBTDR. La comparaison de l'élément proposé est conduite avec de nombreux éléments existants qui sont:

- PS5 β : (Pian and Sumihara. 1984)[Pian.84]
- SBTIEIR : (Sabir 1985b) [Sabi.85]
- AQ:[Cook.86]
- Q4S:(MacNeal and Harder 1988)[MacN.88]
- ALLMAN:(Allman 1988) [Allm.88a]
- MAQ: Hybrid finite element with rotational degrees of freedom [Yanu.89]
- 07 β :(Sze et al. 1992) [Sze.92]
- HTD, HT, MEAS, and TE4:(Choo et al. 2006) [Choo.06]
- SAP 2000, STAAD-PRO, OPT : (Paknahad et al. 2007) [Pakn.07]
- QACM4:(Cen et al. 2007) [Cen.07]
- SFEM (4 SC), FEM (4-node Q4), FEM (8-node Q9) and FEM (4-node QBI): (Dai and Liu 2007) [Dai.07]
- HS-A7:(Rezaiee-Pajand and Karkon 2013) [Reza.13]
- CPS4:Élément à 4 nœuds classique en contrainte plane avec intégration exact (Abaqus) (Zouari et al. 2016) [Zoua.16]

3.2 Validation de l'élément SBTDR en statique

3.2.1 Poutre de Mac-Neal linéaire

Dans ce test, le problème d'une poutre élancée, a été traité par Mac-Neal [MacN.85] pour évaluer l'efficacité de l'élément développé, les caractéristiques géométriques et matérielles sont données dans la Fig. 3.1.

Les résultats obtenus sont donnés dans le Tableau 3.1 montrent que l'élément développé est libre de tout phénomène de blocage et ses résultats sont en bon accord avec la solution exacte. En outre, il convient de noter que l'élément développé est plus précis que l'élément basé sur le champ de déformation (SBTIEIR) dans les deux cas de charge.

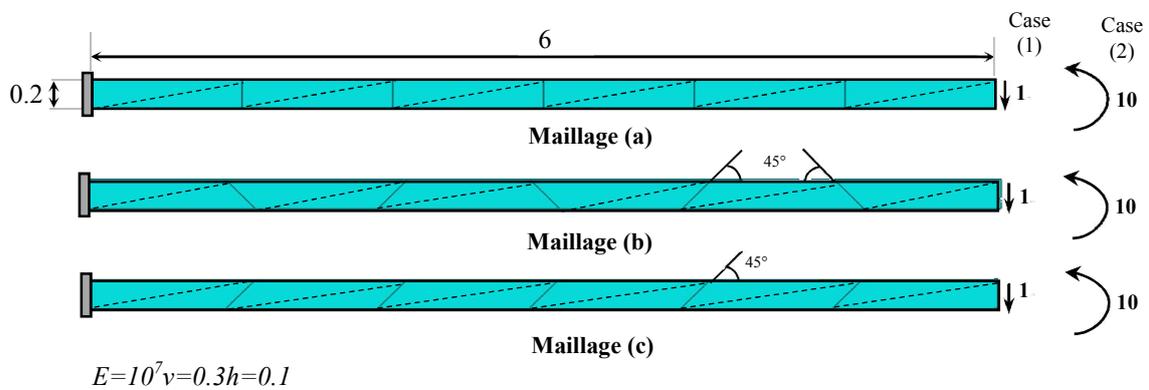


Figure 3.1. Poutre console élancée de Mac-Neal soumise à deux cas de chargement

(1) : à cisaillement pur et (2) : à flexion pure

Tableau 3.1. Déplacement vertical normalisé à l'extrémité libre de la poutre de MacNeal.

Element	Flexion pure			Force de cisaillement		
	Maillage (a)	Maillage (b)	Maillage (c)	Maillage (a)	Maillage (b)	Maillage (c)
Q4	0,093	0,022	0,031	0,093	0,027	0,034
PS5 β	1,000	0,046	0,726	0,993	0,052	0,632
AQ	0,910	0,817	0,881	0,904	0,806	0,873
MAQ	0,910	0,886	0,890	0,904	0,872	0,884
Q4S	-	-	-	0,993	0,986	0,988
07 β	1,000	0,998	0,992	0,993	0,988	0,985
SBTIEIR	0.437	0.015	0.374	0.435	0.005	0.333
SBTDR	1.000	1.000	1.000	0.992	0.904	0.888
Solution analytique [MacN.85]		1,000 (0,270)			1,000 (0,1081)	

3.2.2 Panneau de cook

L'analyse d'un panneau encasturé sur le bord gauche et soumis à un chargement de cisaillement uniforme le long du bord libre a été proposée et résolue par Cook [Cook.74]. Les propriétés géométriques et matérielles sont données sur la figure 3.2 et les résultats du déplacement à l'extrémité libre (point C) sont donnés dans le tableau 3.2 dont la solution de référence donnée par Bergan et Felippa [Berg.85] est ($V_{Cref}=23.9$).

Les résultats obtenus de l'élément SBTDR pour les trois types de maillage considérés se révèlent légèrement meilleurs que ceux obtenus en utilisant les autres éléments. On peut noter qu'une bonne précision est fournie pour l'élément courant quelle que soit la densité du maillage.

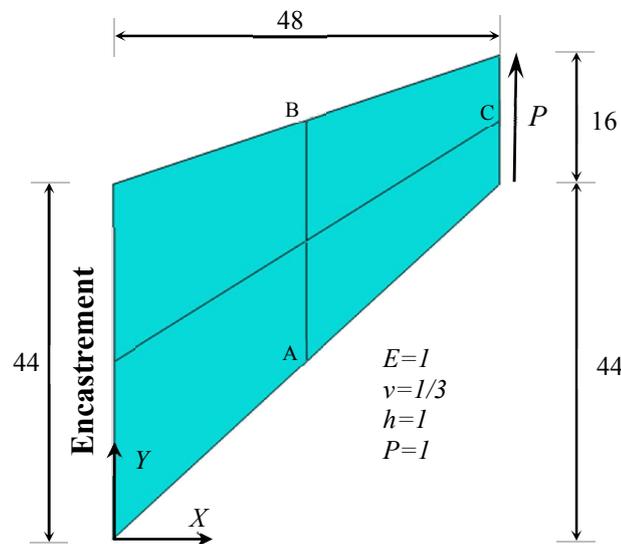


Figure 3.2. Panneau de Cook modélisé par un maillage (2x2).

Tableau 3.2. Déplacement vertical normalisé au point C.

Modèle d'élément	Maillage 2 x 2	4 x 4	8 x 8	Erreur (%) (8x8)
	Déplacement vertical	Déplacement vertical	Déplacement vertical	
HTD	0,847	0,951	0,985	1,5
HT	0,502	0,765	0,921	7,9
MEAS	0,502	0,765	0,921	7,9
ALLMAN	0,823	0,938	0,981	1,9
TE4	0,848	0,941	-	-
SBTDR	0,663	0,877	1,069	6,9
(32x32)		1,000		
[Berg.85]		(23,90)		

3.2.3 Poutre circulaire épaisse sous charge de cisaillement dans le plan

Le test représenté sur la figure 3.3 concerne la poutre circulaire épaisse soumise à une force de cisaillement $F = 600$ à son extrémité libre. Trois types de maillages réguliers : 2x2; 4x2 et 6x2 sont considérés. Les résultats obtenus du déplacement vertical au point A sont donnés dans le tableau 3.3 et sont comparés à ceux d'autres éléments. Il en ressort que l'élément développé fournit des résultats plus précis que l'élément CPS4 et moins précis que ceux de l'élément QACM4.

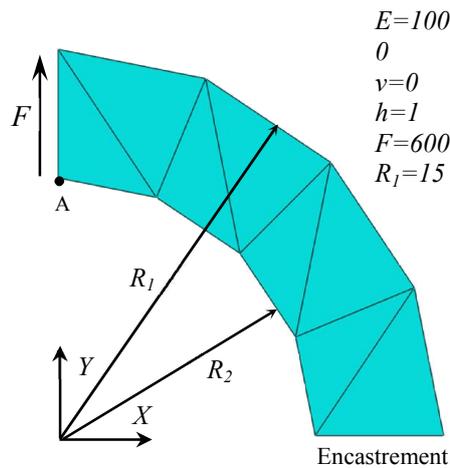


Figure 3.3. Poutre circulaire épaisse modélisée avec huit éléments triangulaires.

Tableau 3.3. Déplacement vertical normalisé au point A.

Maillage	HS-A7	QACM4	CPS4	SBTDR
2x1	0.987	-	0.251	0.322
4x1	0.994	0.938	0.643	0.766
6x1	-	0.979	0.811	0.937
Erreur (%) (6x1)	-	2.1	18.9	6.3
Solution de référence [Zoua.16]			90.1	1.00

3.2.4 Murs avec ouvertures

Un mur avec des ouvertures (figure 3.4) a été analysé pour déterminer l'efficacité et la précision de l'élément SBTDR. Les propriétés géométriques et matérielles de ce mur assemblé à huit étages sont illustrées à la figure 3.4. Les déplacements latéraux du modèle aux niveaux 2, 4, 6 et 8 (Tableau 3.4) ont été calculés et comparés à ceux des codes commerciaux (SAP-2000 et STAADPRO) donnés par [Pakn.07]. Les résultats obtenus, en utilisant l'élément SBTDR développé, sont en bon accord avec ceux obtenus en utilisant l'élément OPT et les logiciels commerciaux SAP-2000 et STAADPRO.

Tableau 3.4. Comparaison de la déflexion latérale à différents niveaux.

Étage	2	4	6	8
SAP 2000	0.55	1.48	2.54	3.62
STAAD-PRO	0.68	1.68	2.78	3.86
OPT element	0.71	1.91	3.19	4.43
SBTDR	0.62	1.72	2.89	4.017

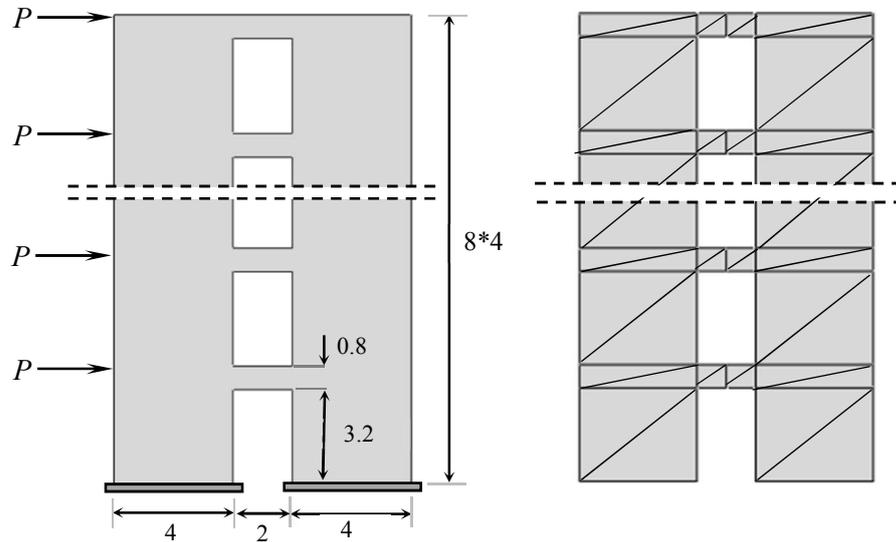


Figure 3.4. Propriétés géométriques et matérielles de la paroi de cisailment couplée.

3.2.5 Poutre circulaire mince sous charge de cisailment dans le plan

Ce test permet d'analyser une poutre mince circulaire encastree à une extrémité et soumise à une charge de cisailment unitaire à l'extrémité libre (Figure 3.5). Trois maillages réguliers de 6x1; 12x2 et 24x4 sont considérés. Les résultats obtenus du déplacement vertical à l'extrémité libre (point A) sont donnés dans le tableau 3.5. Il convient de noter que l'élément SBTDR offre une meilleure convergence vers la solution exacte que les autres éléments.

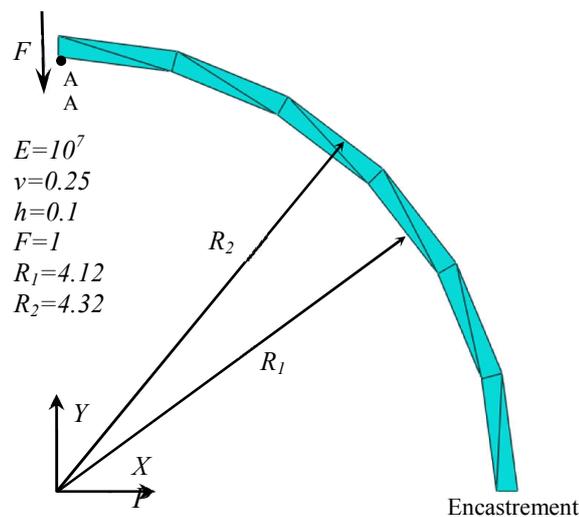


Figure 3.5. Poutre circulaire mince modélisée avec douze éléments triangulaires

Tableau 3.5. Déplacement vertical normalisé à l'extrémité libre.

Maillage	CPS4	HT	SBTDR
6x1	0.073	0.075	0.2025
12x2	0.247	0.251	0.454
24x4	0.572	0.555	0.797
Erreur (%) (24x4)	42.8	44.5	20.3
Solution de référence [Choo.06]		0.08734	
		1.00	

3.3 Validation de l'élément SBTDR en vibration libre

3.3.1 Vibration libre d'un mur console

Cet exemple étudie les vibrations de flexion dans le plan d'un mur console [Cheu.00] avec un maillage régulier constitué de 32 éléments en prenant les trois premières fréquences naturelles des modes de flexion. Les propriétés géométriques et matérielles sont données sur la figure 3.6.

Les résultats obtenus par l'élément SBTDR sont moins précis que ceux obtenus par l'élément T6, alors que les fréquences obtenues par les éléments Q4 et T3 sont considérablement plus grandes que celles de la solution analytique.

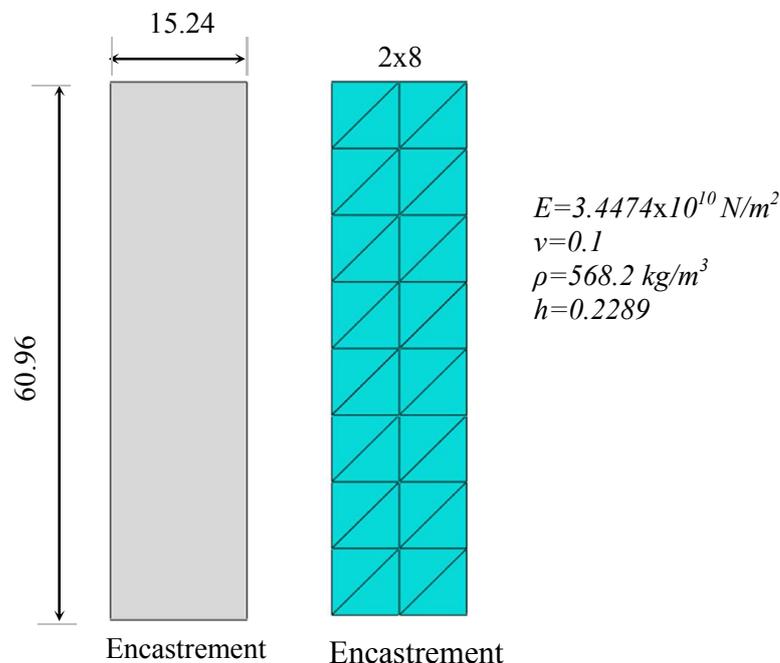


Figure 3.6. Vibration libre d'un mur en cisaillement.

Tableau 3.6. Trois premières fréquences (Hz) des modes de flexion d'un mur.

Mode	1	2	3
Q4	5.252	28.028	67.652
T3	6.658	33.759	79.341
T6	4.959	25.772	60.221
SBTDR	4.31	24.11	60.50
Valeur théorique [Cheu.00]	4.973	26.391	62.066

3.3.2 Vibration libre d'une poutre console

L'analyse est effectuée dans le cas d'un problème de contrainte plane d'une poutre console, avec ses caractéristiques données dans la figure 3.7. Les résultats numériques des quatre premières fréquences pour l'élément SBTDR ont été comparés avec ceux des éléments (SFEM, FEM-T3 et Q4) (Tableau 3.7) pour examiner la précision de l'élément développé. Une meilleure convergence des résultats est obtenue avec l'élément SFEM et le nouvel élément SBTDR se comporte mieux que les éléments T3 ou Q4, et qu'il est en bon accord avec la solution de référence.

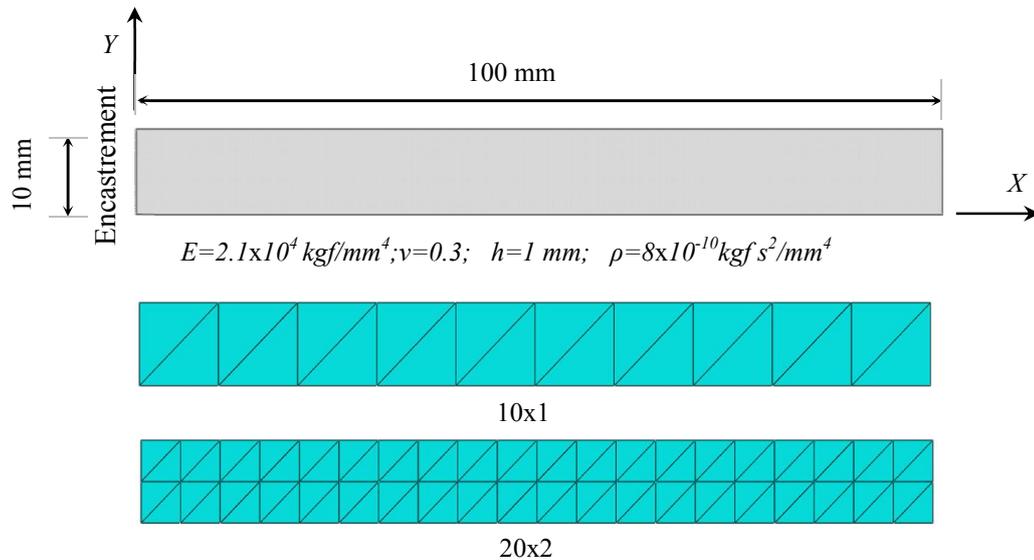


Figure 3.7. Vibrations libres d'une poutre console.

Tableau 3.7. Quatre premières fréquences propres ($\times 10^4$ Hz) d'une poutre console ($f_1=0.08276 \times 10^4$ Hz).

Maillage	Mode	SFEM (4 SC)	FEM-T3	FEM (4-node Q4)	SBTDR	ReferenceFEM- Q4 (100x10)
10x1	1	0.0861	0.1692	0.1000	0.0798	0.0824
	2	0.5071	0.9163	0.6077	0.4960	0.4947
	3	1.2828	1.2869	1.2863	1.1623	1.2825
	4	1.3124	2.1843	1.6423	1.3982	1.3037
20x2	1	0.0834	0.1117	0.0872	0.0739	0.0824
	2	0.4993	0.6539	0.5264	0.4605	0.4947
	3	1.2828	1.2843	1.2837	1.1863	1.2825
	4	1.3141	1.6748	1.4011	1.2377	1.3037

3.3.3 Vibration libre d'une poutre console à section variable

Dans cette partie, une poutre console à section variable est étudiée, pour laquelle la géométrie et le maillage sont donnés sur la figure 3.8 ($L = 10$; $H(0) = 5$, $H(L) = 3$, $t = 1.0$, $E = 3,0 \times 10^7$, $\nu = 0,3$ et $\rho = 1,0$). Les résultats calculés des quatre premières fréquences naturelles utilisant l'élément SBTDR sont donnés dans le tableau 3.8. Il en ressort que, les résultats obtenus de l'élément SBTDR sont légèrement inférieurs à ceux des éléments QBI à 4 nœuds, Q9 à 8 nœuds, SFEM et Q4.

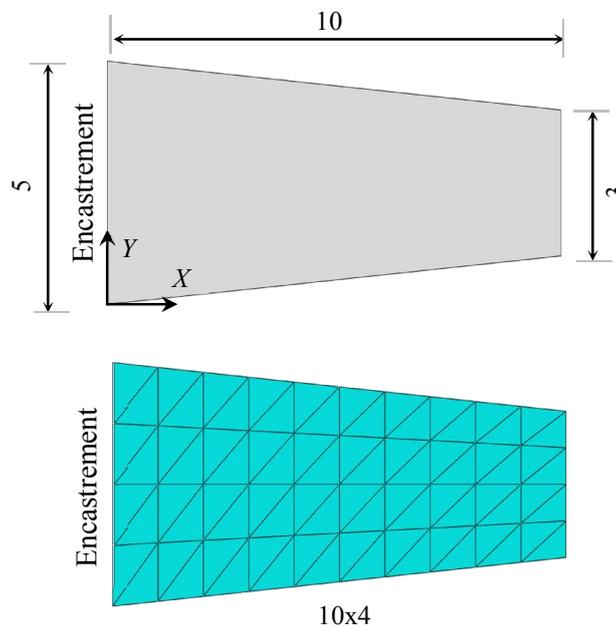


Figure 3.8. Vibration libre d'une poutre console trapézoïdale.

Tableau 3.8. Quatre premières fréquences propres ($\times 10^4$ Hz) d'une console trapézoïdale.

Maillage	Mode	SFEM (4 SC)	FEM (4-node Q4)	FEM (8-node Q9)	FEM (4-node QBI)	SBTDR
10x4	1	0,4156	0,4219	0,4167	0,4149	0,4054
	2	1,4572	1,5102	1,4623	1,4540	1,4348
	3	1,5140	1,5183	1,5155	1,5137	1,4793
	4	2,9119	3,1156	2,9534	2,9031	2,8759

3.4 Conclusion

Le présent élément triangulaire SBTDR à trois nœuds avec rotation dans le plan a été développé en se basant sur l'approche en déformation afin de le tester dans les divers problèmes et ce dans les deux cas : statique et vibration libre. Cet élément possède trois degrés de liberté pour chacun des nœuds (u , v , θ_z).

Les résultats obtenus montrent que l'élément développé est très performant en termes de précision et de convergence pour les deux cas et ses résultats sont comparables avec des éléments d'ordre élevé.

Chapitre 4

Validation de l'élément SBTIE pour l'analyse élasto-plastique et en vibration libre

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons la validation de l'élément triangulaire à quatre nœuds SBTIE [Sabi.95] à travers des tests pour l'analyse non linéaire matérielle et en vibration libre. Cet élément basé sur l'approche en déformation possède deux degrés de liberté pour chacun des trois nœuds de coin et du nœud à mi-côte (figure 4.1).

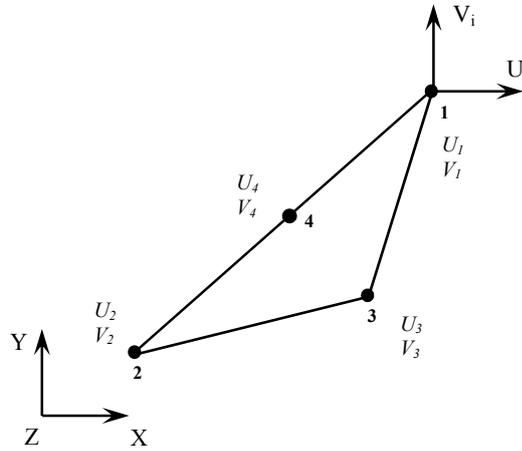


Figure 4.1. Élément triangulaire membrane (SBTIE).

Les fonctions de déformation et le champ de déplacement sont donnés respectivement par:

$$\varepsilon_x = a_4 + a_5 y \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_y = a_6 + a_7 x$$

$$\gamma_{xy} = a_8$$

$$u = a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - a_7 y^2 / 2 + a_8 y / 2 \quad (4.2)$$

$$v = a_2 + a_3 x - a_5 x^2 / 2 + a_6 y + a_7 xy + a_8 x / 2$$

Le but de cette étude est de montrer les performances de l'élément SBTIE en le comparant aux différents éléments et aux solutions analytiques.

Nous présentons tout d'abord les notions théoriques sur la plasticité et ses critères de rupture, puis on expose les tests de validation en non linéarité matérielle et en vibration libre.

4.2 Théorie de plasticité

4.2.1 Rappels et notion

4.2.1.1 Introduction

La plasticité des matériaux est caractérisée par l'apparition de déformations élastiques et de déformations irréversibles. Ces dernières se manifestent lorsque la contrainte atteint un certain seuil.

Ces rappels et notions sont tirés à partir d'une synthèse des travaux de [Owen.80] et [Smit.14].

4.2.1.2 La non-linéarité

Les processus non linéaires posent des problèmes d'analyse beaucoup plus importants que les processus linéaires.

Deux principaux types de non-linéarité peuvent se manifester dans l'analyse par éléments finis des solides:

- La non-linéarité des matériaux, dans laquelle la relation entre les contraintes et les déformations (ou d'autres propriétés des matériaux) sont des fonctions compliquées qui entraînent des coefficients d'équation selon la solution.
- La non-linéarité géométrique (également connue sous le nom d'analyse de «grande déformation» ou de «grand déplacement»), qui conduit à des produits des inconnues dans les équations.

Dans l'analyse pratique par éléments finis, deux principaux types de procédure de solution peuvent être adoptés pour modéliser la non-linéarité des matériaux. La première approche, implique des itérations de «rigidité constante» et la deuxième avec rigidité variable. Dans la présente thèse, la méthode de rigidité constante est adoptée pour sa simplicité.

La matrice de rigidité globale (généralement élastique) dans une telle analyse est formée une seule fois. Chaque itération représente donc une analyse élastique. On dit que la convergence se produit lorsque les contraintes générées par les charges satisfont à une loi contrainte-déformation ou à un critère de rendement ou de rupture dans les tolérances prescrites. Le vecteur de charges à chaque itération est constitué de charges appliquées de l'extérieur et de «charges corporelles» auto-équilibrées. Les charges corporelles ont pour effet

de redistribuer les contraintes (ou moments) dans le système, mais comme elles s'équilibrent elles-mêmes, elles ne modifient pas la charge nette sur le système. Cette analyse utilise deux méthodes pour générer les chargements du corps :

- La méthode viscoplastique (nommée déformation initiale)
- La méthode de contrainte initiale pour prédire la réponse au chargement d'un matériau élastique parfaitement plastique.

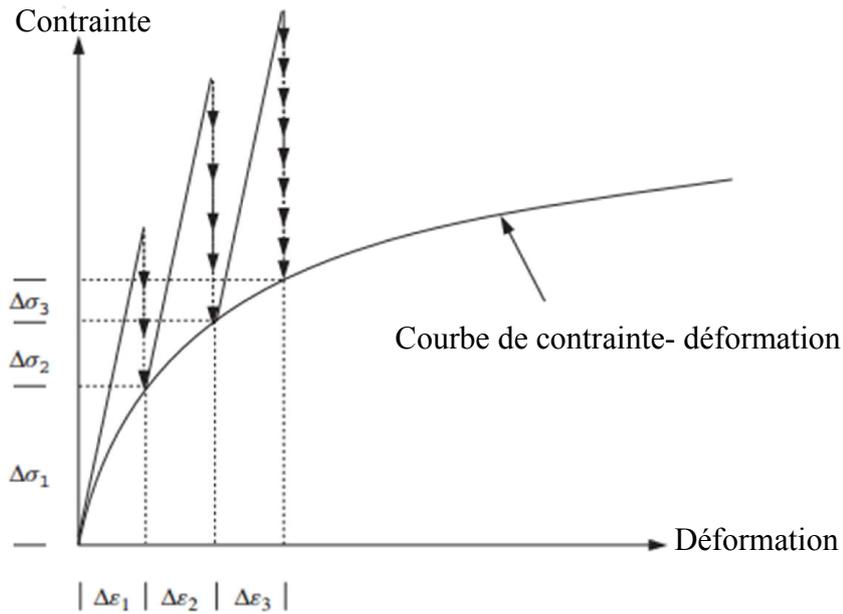


Figure 4.2. Méthode de rigidité constante.

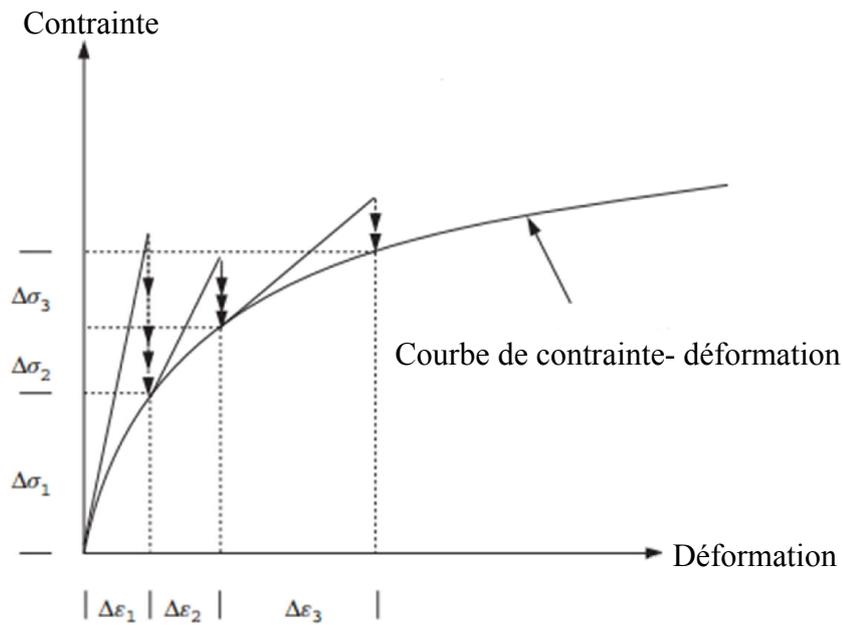


Figure 4.3. Méthode de rigidité variable (tangente).

4.2.1.3 Notion de surface de charge

Dans le cas de sollicitation multiaxiale, le seuil de plasticité est remplacé par une surface caractérisée par une fonction scalaire appelée fonction de charge.

$$F(\sigma, R) = 0$$

Avec σ : Tenseur des contraintes

R : L'ensemble des paramètres « cachés » ou « d'écrouissage ».

Cette fonction décrit dans l'espace des contraintes, une surface dite surface de charge ou d'écoulement, la position de cette surface dépend de la valeur instantanée du paramètre d'écrouissage :

Pour $F < 0$: C'est l'intérieur de la surface, ce domaine est élastique.

Pour $F = 0$: Plastification.

Pour $F > 0$: Est un état de contraintes physiquement impossibles en élasto-plasticité.

Le comportement réel est modélisé soit par la courbe élasto-plastique parfaite (a), soit par celle avec écrouissage (linéaire ou non) et donc un module élasto-plastique tangent E^{ep} linéaire ou non (b). Ce dernier cas est plus général :

Donc si $E^{ep} = 0$ c'est le cas de l'élasto-plasticité parfaite, si $E^{ep} > 0$ c'est le durcissement (écrouissage positif) et si $E^{ep} < 0$ c'est l'adoucissement (écrouissage négatif).

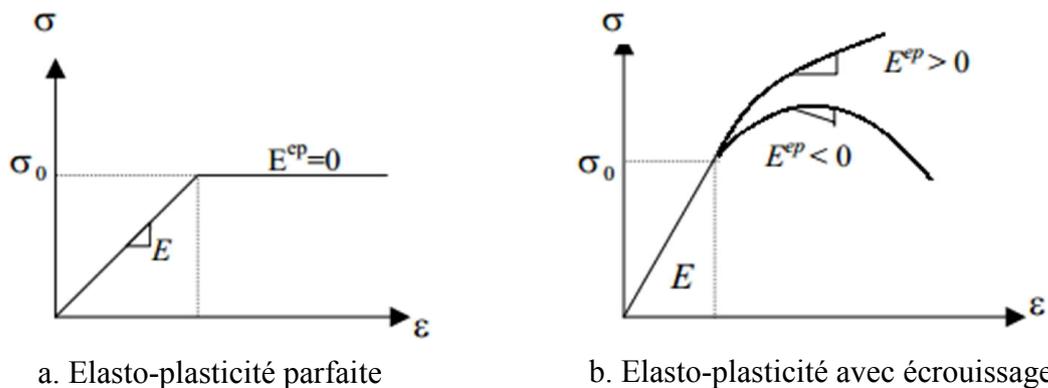


Figure 4.4. Modélisation du comportement élasto-plastique

Au cours de la déformation plastique, le matériau peut s'écouler d'une manière associée, le vecteur de l'incrément de déformation plastique peut être normal à la surface de charge ou d'échec. Alternativement, la normalité peut ne pas exister et l'écoulement peut être non associé.

L'écoulement associé conduit à diverses simplifications mathématiques attrayantes et lorsqu'il est allié aux critères de Von-Mises ou de Tresca, il prédit correctement un changement de volume plastique nul lors de la rupture pour les argiles non drainées. Pour les

matériaux de friction, dont l'état ultime est décrit par le critère de Mohr-coulomb, l'écoulement associé entraîne une expansion volumétrique physiquement irréaliste ou une dilatation durant la rupture. Dans de tels cas, des règles de flux non associés peuvent être préférés dans lesquels la déformation plastique est décrite par une fonction de potentiel plastique appelée Q. Cette fonction, Q, est toujours géométriquement similaire à la fonction de rupture, F, mais avec l'angle de friction ϕ remplacé par l'angle de dilatation ψ .

4.2.2 Invariants de contrainte

Le tenseur de contrainte cartésien est une représentation utilisée en mécanique des milieux continus pour caractériser l'état de contrainte, c'est-à-dire les efforts intérieurs mis en jeu entre les portions déformées du milieu. Ce tenseur de contrainte est donné par :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{zx} \end{bmatrix}^T \quad (4.3)$$

Ce tenseur est équivalent aux trois contraintes principales agissant dans les plans orthogonaux :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{bmatrix}^T \quad (4.4)$$

L'espace des contraintes principales est obtenu en traitant les contraintes principales en coordonnées tridimensionnelles. Ceci représente un moyen utile de définir la contrainte agissant en un point. Il convient de noter que, bien que l'espace des contraintes principales défini d'ampleur des contraintes principales, aucune indication n'est donnée sur leur orientation dans l'espace physique. La définition d'un point dans l'espace des contraintes principales avec les coordonnées $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est donnée par les trois invariants :

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (4.5)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.6)$$

$$\theta = \frac{1}{3} \arcsin \left(\frac{-3\sqrt{6J_3}}{t^3} \right) \quad (4.7)$$

Ou

$$J_3 = S_x S_y S_z - S_x \tau_{yz}^2 - S_y \tau_{zx}^2 - S_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} \quad (4.8)$$

Et

$$\begin{aligned}
 S_x &= (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)/3 \\
 S_y &= (2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x)/3 \\
 S_z &= (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)/3
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Notons ici que dans plusieurs applications de la mécanique des sols l'équation (4.6) est simplifiée car : $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$

La contrainte déviatorique est donnée par :

$$\bar{\sigma} = t\sqrt{3/2} = \frac{\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z + \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2 \right]^{1/2}}{\sqrt{2}}
 \tag{4.10}$$

Ainsi la contrainte moyenne est donnée par :

$$\sigma_M = \frac{s}{\sqrt{3}} = \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}{3}
 \tag{4.11}$$

La relation existante entre les contraintes principales et les invariants de contrainte est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \sigma_M + \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\
 \sigma_2 &= \sigma_M + \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma} \sin\theta \\
 \sigma_3 &= \sigma_M + \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

4.2.3 Critères de plasticité (Rupture)

4.2.3.1 Définitions

Le critère de rupture (plasticité) détermine le niveau de contrainte à une déformation plastique qui commence et peut s'écrire sous la forme générale :

$$f(\sigma_{ij}) = K(k)
 \tag{4.13}$$

Où f est une fonction et k le paramètre du matériau à déterminer expérimentalement.

Les principaux critères sont :

- pour les matériaux homogènes isotropes : Von Mises (1910), Tresca (1870)
- pour les matériaux orthotropes : Hill (1950)
- pour les sols : Mohr-Coulomb, Drucker-Prager (1950)

Ces critères sont anciens, ils restent cependant largement utilisés car les méthodes d'identification des paramètres caractérisant le comportement élasto-plastique ont fait leurs preuves pour ces critères. Depuis, de nombreux travaux ont permis d'élaborer des critères modélisant mieux le comportement des matériaux. Cependant il reste toujours la difficulté de définir des processus expérimentaux simples et fiables permettant d'identifier les paramètres du modèle que l'on veut utiliser.

4.2.3.2 Critère de Von Mises

Dans la mesure où la trace du tenseur des contraintes n'intervient pas, le critère le plus simple est celui qui n'utilise que le second invariant du déviateur de contraintes, ou encore J_2 . Ce critère prend la forme d'un cylindre droit circulaire se trouvant le long de l'espace diagonal.

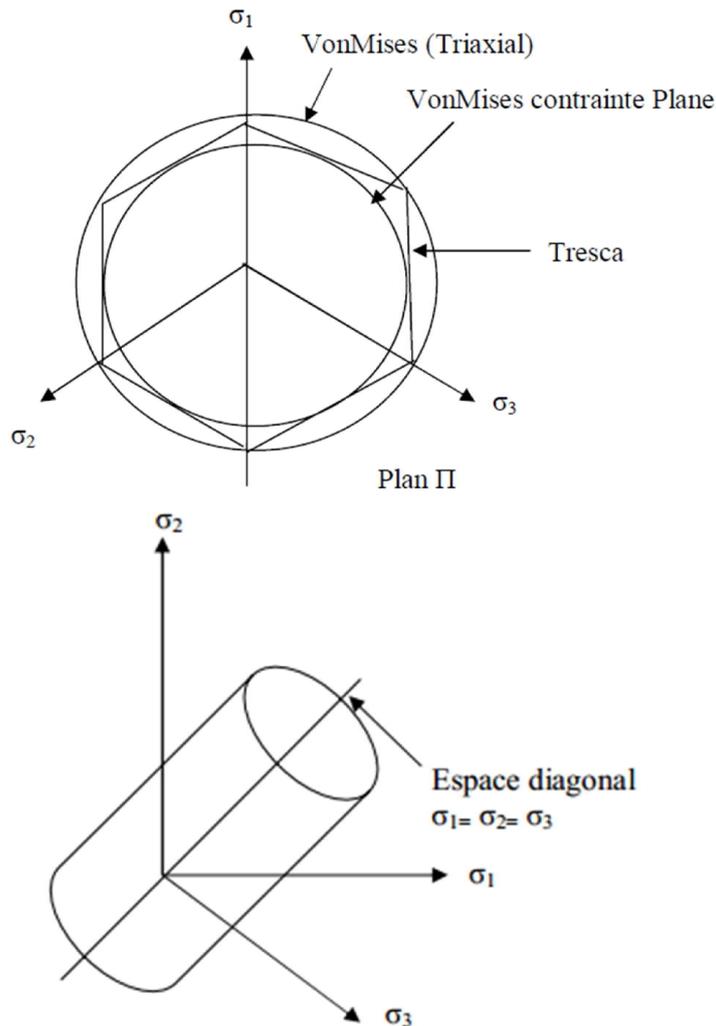


Figure 4.5. Critère de Von Mises et de Tresca

Von Mises suggère que la phase de rupture plastique se produit lorsque t atteint une valeur critique, ou

$$t = K(k) \quad (4.14)$$

Dans lequel k est le paramètre du matériau à déterminer.

Pour les problèmes en déformation plane et pendant la rupture plastique nous avons

$$\sigma_M = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} \quad (4.15)$$

Ainsi le critère de Von Mises s'écrit

$$F_C = \bar{\sigma} - \sigma_y \quad (4.16)$$

Où σ_y est la contrainte limite et $\bar{\sigma}$ est l'invariant de contrainte déviatorique.

Pour le cas du sol

$$F_C = \bar{\sigma} - \sqrt{3c_u} \quad (4.17)$$

Où c_u représente la cohésion non drainée du sol.

Sous conditions triaxiales et lorsque $\sigma_2 = \sigma_3$ on a :

$$F_C = \bar{\sigma} - \sqrt{3c_u} \quad (4.18)$$

4.2.3.3 Critères de Mohr-Coulomb et Tresca

Dans l'espace des contraintes principales ce critère prend la forme d'un cône hexagonal irrégulier comme il est montré dans la figure 4.6.

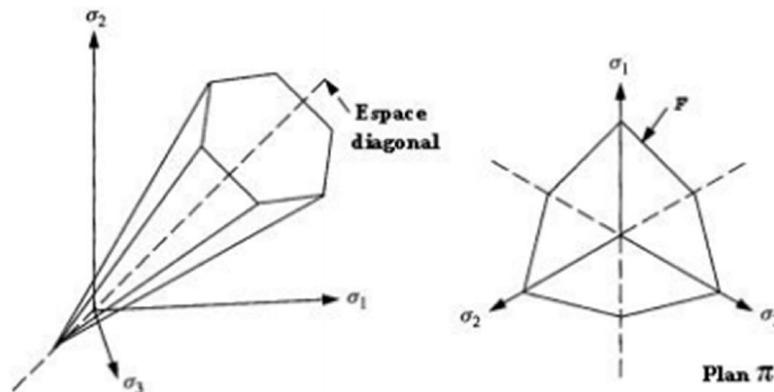


Figure 4.6. Critère de rupture de Mohr-Coulomb

Afin d'en tirer la forme invariante de ce critère, il faut d'abord écrire en termes de contraintes principales et de la géométrie du cercle de Mohr ; ainsi

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \phi - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - c_u \cos \phi = 0 \quad (4.19)$$

ϕ : Angle de frottement interne du sol

La substituons de σ_1 et σ_3 dans les équations (4.10) donne la fonction :

$$F_C = \sigma_m \sin \phi + \bar{\sigma} \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{3}} - \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) - c_u \cos \phi \quad (4.20)$$

En mettant $\phi = 0$ dans l'équation (4.18) on peut obtenir le critère de Tresca ; ainsi

$$F_C = \frac{\bar{\sigma} \cos \theta}{\sqrt{3}} - c_u \quad (4.21)$$

4.2.4 Méthodes pour générer des charges

4.2.4.1 Matrice Constitutive (méthode des contraintes initiales)

La relation incrémentale de la déformation et la contrainte peut être formulée comme suit :

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad (4.22)$$

Où: D_{ep} est la matrice elasto-plastique, $d\sigma$ est le vecteur d'incrément de contrainte, et $d\varepsilon$ est composé de composantes d'incrément élastiques plastiques ou ;

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (4.23)$$

Pendant ce temps, l'augmentation de contrainte peut être déterminée par la loi de Hook en tant que :

$$d\sigma = D_e d\varepsilon^e \quad (4.24)$$

Où D_e est la matrice d'élasticité et l'équation (4.20) peut être réécrite comme :

$$d\sigma = D_e (d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (4.25)$$

La déformation plastique est proportionnelle au gradient de contrainte d'une quantité appelée le potentiel plastique Q ainsi

$$d\varepsilon^p = d\lambda \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) \quad (4.26)$$

Où $d\lambda$ est un scalaire non négatif dans l'histoire de chargement plastique

La substitution de l'équation (4.24) dans l'équation (4.23) donne

$$d\sigma = D_e \left(d\varepsilon - d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) \quad (4.27)$$

Comme le point de contrainte dans la phase plastique est sur la surface de charge, il faut

$$dF_c(\sigma) = \left(\frac{\partial F_c}{\partial \sigma} \right)^T \cdot d\sigma = 0 \quad (4.28)$$

La substitution de l'équation (4.25) dans l'équation (4.26) conduit à

$$D_p = \left[\frac{D_e \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) \cdot \left(\frac{\partial F_c}{\partial \sigma} \right)^T \cdot D_e}{\left(\frac{\partial F_c}{\partial \sigma} \right)^T \cdot D_e \cdot \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right)} \right] \quad (4.29)$$

Où D_p est la matrice plastique

Les chargements du corps 'Fib' dans le processus de redistribution des contraintes sont reformées à chaque itération en additionnant l'intégrale ci-dessous de tous les éléments, ainsi

$$F_b^i = \sum_{elements}^{all} \iint B^T D_p (d\varepsilon)^i dx dy \quad (4.30)$$

4.2.4.2 Méthode visco-plastic (méthode des déformations initiales)

Le chargement des corps 'Fib' accumulés à chaque pas de temps et à chaque étape de charge, en sommant les intégrales suivantes pour tous les éléments :

$$F_b^i = F_b^{i-1} + \sum_{elements}^{all} \iint B^T D_p (d\varepsilon^{vp})^i dx dy \quad (4.31)$$

Où :

B est la matrice de déformation, D_e la matrice d'élasticité et $(d\varepsilon^{vp})^i$ est l'incrément de déformation viscoplastique. Ce dernier est donné par la multiplication du taux de la déformation viscoplastique par un pas de temps comme suit:

$$(d\varepsilon^{vp})^i = dt \left(\dot{\varepsilon}^{vp} \right)^i \quad (4.32)$$

Où dt est donné pour chaque critère comme

Critère de VonMises

$$dt = 4(1 + \nu) / 3E \quad (4.33)$$

Critère de Mohr-Coulomb

$$dt = 4(1 + \nu)(1 - 2\nu) / E(1 - 2\nu + \sin^2 \phi) \quad (4.34)$$

Et $\dot{\varepsilon}^{vp}$ est la déformation viscoplastique donnée par:

$$\left(\dot{\varepsilon}^{vp} \right) = F \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (4.35)$$

Où F est la fonction de rupture (ou de charge) et $\left\{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right\}$ sont les dérivées de la fonction de potentiel plastique Q tout en respectant les contraintes et qui est donnée en référence [Smit.14].

4.3 Validation numérique de l'élément SBTIE en non linéaire

4.3.1 Analyse de la capacité portante d'un sol purement cohérent

Dans ce test, une semelle flexible poinçonnée sur un sol purement cohérent comme indiqué sur la Figure 4.7. Le sol élasto-plastique est décrit par trois paramètres, à savoir les propriétés élastiques : le module de Young $E = 10^5 \text{ kN/m}^2$, le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et la cohésion non drainée $C_u = 100 \text{ kN/m}^2$. La semelle supporte une charge uniformément répartie q , qui est augmentée progressivement jusqu'à la rupture. On a utilisé pour cet exemple qui est en déformation plane, la méthode viscoplastique, et le critère de Von Mises. La rupture dans ce problème se produit lorsque q atteint la charge de Prandtl donnée par :

$$q_{ultime} = (2 + \pi) C_u$$

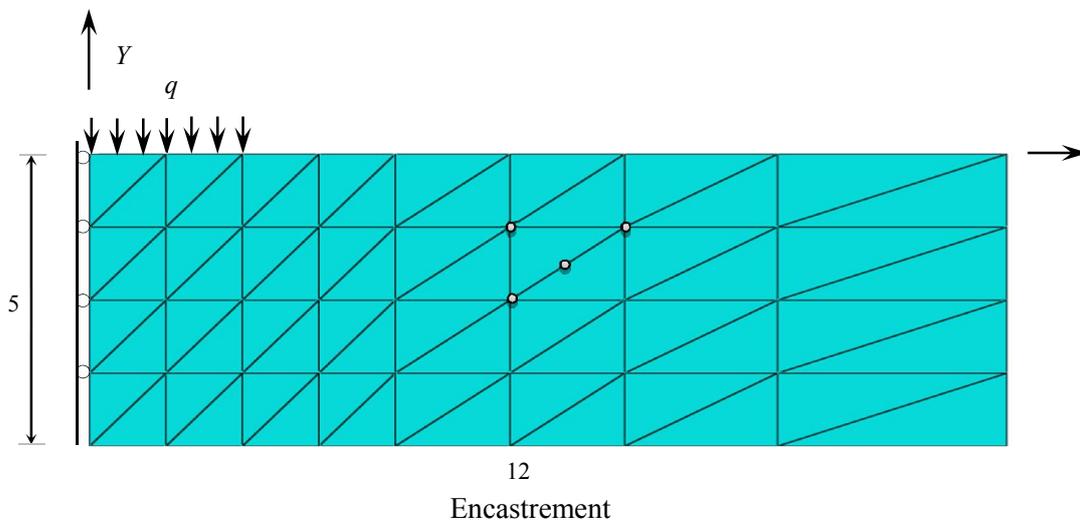


Figure 4.7 Géométrie et maillage de la semelle filante.

Tableau 4.1. Déplacement vertical du nœud chargé de coordonnées (0,0)

Charges (KN)	Déplacement (m)	
	Q8	SBTIE
200	0.006593	0.006586
300	0.01155	0.011340
350	0.01630	0.01629
400	0.02317	0.02311
450	0.03321	0.03396
480	0.04235	0.04333
500	0.05096	0.05097
510	0.05679	0.05581
515	0.06109	0.05925
519	0.07135	0.06621

Ce problème a été traité par Smith et al. [Smit.14] en utilisant l'élément Q8. Les résultats de ce problème sont donnés dans le Tableau 4.1. Ces résultats montrent que :

- L'élément SBTIE a une convergence très rapide vers la solution de référence.
- Le SBTIE avec 8 degrés de liberté et l'élément quadrilatère Q8 avec 16 degrés de liberté ont des résultats similaires, mais ce dernier élément utilise plus de degrés de liberté.

Les résultats montrent que cet élément est robuste et précis pour l'analyse élasto-plastique.

4.3.2 Analyse axisymétrique non drainée

La figure.4.8 représente l'assemblage de deux éléments triangulaire (SBTIE) axisymétrique soumis à des incréments de déplacement vertical de compression le long de sa face supérieure. L'élément Q8 a été utilisé dans ce test par Smith et al. [Smit.14]. L'analyse consiste à un essai triaxial, dans lequel l'échantillon a été consolidé sous une pression de 100kN / m², suivie par une charge axiale non drainée. Deux types d'analyse sont pris en compte dans ce problème. Dans le premier cas (a) où il n'y a pas de changement de volume plastique l'angle de dilatation $\psi = 0$, et dans le second cas (b) qui comprend une règle de flux associée ($\psi = 30^\circ$).

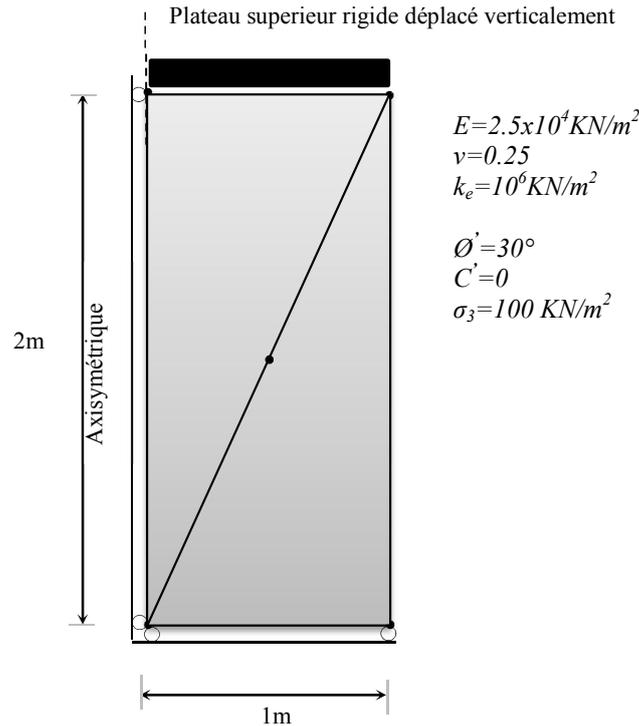


Figure 4.8 Géométrie et maillage du problème axisymétrique.

Les propriétés de l'échantillon pour ce problème sont données dans la figure 4.8. Dans ce problème on a utilisé la méthode viscoplastique et le critère de Mohr Coulomb. Les résultats de la contrainte déviatorique et la pression interstitielle par rapport au déplacement vertical dans les deux cas ($\psi = 0$ et $\psi = 30^\circ$) sont donnés dans les deux tableaux 4.2 et 4.3.

Nous constatons pour le premier cas que la contrainte déviatorique de l'élément SBTIE atteint un pic de 115,19 KN/m² qui est loin par rapport à la solution donnée par [Grif.85] qui est de 120,8 KN/m², par contre l'élément Q8 est en bon accord avec sa valeur de 121 KN/m² [Smit.14].

Pour le deuxième cas, qui comprend une règle d'écoulement associée ($\psi = 30^\circ$), nous remarquons l'absence de tous signe d'échec (rupture) due à la tendance et à la dilatation. Dans ce cas, nous constatons que les pressions interstitielles ont continué à se produire et la contrainte déviatorique continue d'augmenter, et ceci est dû à l'influence de la dilatation sur le comportement des deux éléments

Tableau 4.2. Contrainte déviatorique et pression interstitielle par rapport au déplacement vertical dans le cas ($\psi=0$).

Déplacement	Q8		SBTIE	
	contrainte déviatorique	pression interstitielle	contrainte déviatorique	pression interstitielle
$-0.2000 \cdot 10^{-2}$	29.90	-9.804	29.44	-13.70
$-0.4000 \cdot 10^{-2}$	59.80	-19.61	58.88	-27.41
$-0.6000 \cdot 10^{-2}$	89.71	-29.41	88.32	-41.12
$-0.8000 \cdot 10^{-2}$	119.6	-39.22	97.66	-42.07
$-0.1000 \cdot 10^{-1}$	120.9	-39.65	101.66	-41.79
$-0.1200 \cdot 10^{-1}$	121.0	-39.66	105.91	-41.51
$-0.1400 \cdot 10^{-1}$	121.0	-39.66	110.43	-41.22
$-0.1600 \cdot 10^{-1}$	121.0	-39.66	115.19	-40.93

Tableau 4.3. Contrainte déviatorique et pression interstitielle par rapport au déplacement vertical dans le cas ($\psi=30^\circ$).

Déplacement	Q8		SBTIE	
	contrainte déviatorique	pression interstitielle	contrainte déviatorique	pression interstitielle
$-0.2000 \cdot 10^{-2}$	29.90	-9.804	29.44	-13.70
$-0.4000 \cdot 10^{-2}$	59.80	-19.61	58.88	-27.41
$-0.6000 \cdot 10^{-2}$	89.71	-29.41	88.32	-41.12
$-0.8000 \cdot 10^{-2}$	119.6	-39.22	105.86	-36.90
$-0.1000 \cdot 10^{-1}$	129.9	-29.60	120.86	-31.00
$-0.1200 \cdot 10^{-1}$	143.9	-23.63	136.41	-25.21
$-0.1400 \cdot 10^{-1}$	157.0	-16.83	152.35	-19.44
$-0.1600 \cdot 10^{-1}$	170.3	-10.22	168.57	-13.68

4.4 Validation numérique de l'élément SBTIE en vibration libre

4.4.1 Vibration libre d'un mur console

Cet exemple étudie les vibrations de flexion dans le plan d'un mur console [Cheu.00] avec un maillage régulier constitué de 32 éléments en prenant les trois premières

fréquences naturelles des modes de flexion . Les propriétés géométriques et matérielles sont données sur la figure 4.9.

Les résultats obtenus par l'élément SBTIE sont moins précis que ceux obtenus par l'élément T6, alors que les fréquences obtenues par les éléments Q4 et T3 sont considérablement plus grandes que celles de la solution analytique.

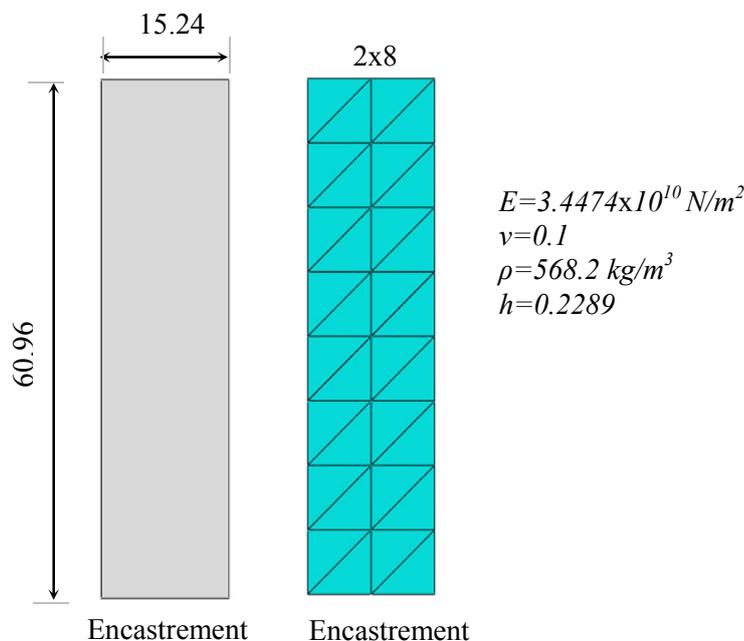


Figure 4.9 Vibrations libres d'un mur en cisaillement.

Tableau 4.4. Trois premières fréquences propres (Hz) d'un mur en cisaillement.

Mode	1	2	3
Q4	5.252	28.028	67.652
T3	6.658	33.759	79.341
T6	4.959	25.772	60.221
SBTIE	4.994	26.598	63.511
Valeur théorique [Cheu.00]	4.973	26.391	62.066

4.4.2 Vibration libre d'une poutre console

Cette analyse a été effectuée dans le cas d'un problème de contrainte plane d'une poutre console, avec ses caractéristiques données dans la figure 4.10. La fréquence fondamentale résultante de la théorie des poutres (Euler-Bernoulli) est considérée comme une solution de référence ($f_1 = 0,08276 \times 10^4 \text{ Hz}$) [Dai.07]. Les résultats numériques des quatre premières fréquences pour l'élément SBTIE ont été comparés avec ceux des éléments (SFEM, SBRIEIR, Q4, QBI et Q9) (Tableau 4.5) pour examiner la précision de l'élément développé. Une

meilleure convergence des résultats est obtenue avec les éléments QBI et Q9 et le nouvel élément SBTIE se comporte mieux que les éléments SBRIEIR ou Q4, et qu'il est en bon accord avec la solution de référence.

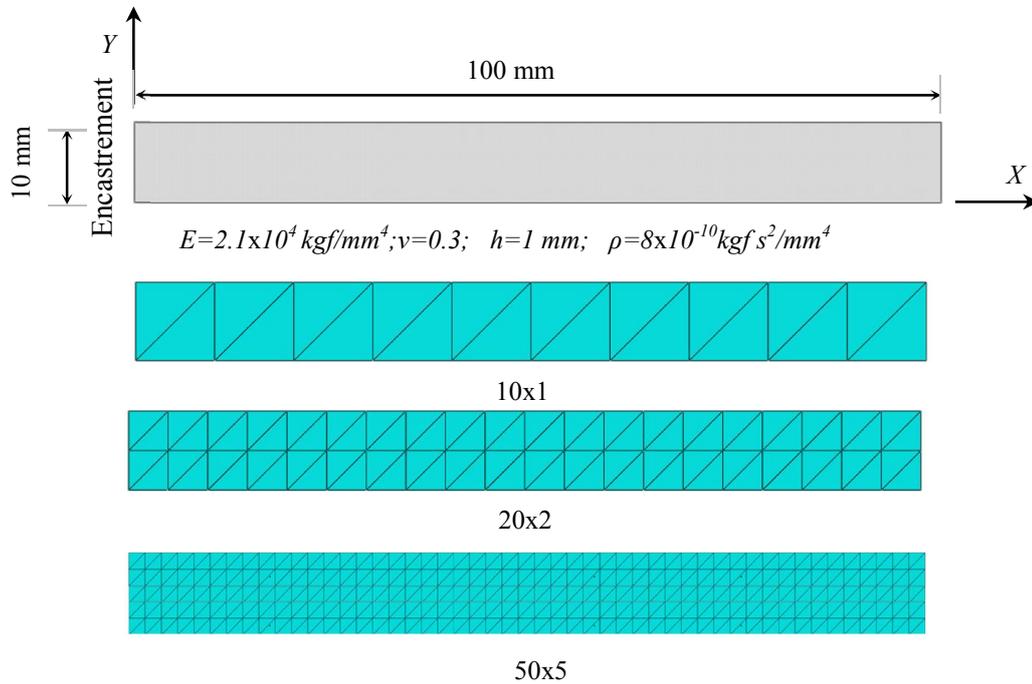


Figure 4.10. Vibration libre d'une poutre console.

Tableau 4.5. Quatre premières fréquences propres ($\times 10^4$ Hz) d'une poutre console ($f_1=0.08276 \times 10^4$ Hz).

Maillages	Modes	SFEM (4 SC) [Dai.07]	FEM (8- node Q9) [Dai.07]	FEM (4-node QBI)[Dai.07]	FEM (4- node Q4) [Dai.07]	SBRIEDR	SBTIE
10x1	1	0.0861	0.0827	0.0817	0.1000	0.0845	0.0842
	2	0.5071	0.4982	0.4824	0.6077	0.5150	0.5008
	3	1.2828	1.2832	1.2526	1.2863	1.2862	1.2777
	4	1.3124	1.3205	1.2826	1.6423	1.3823	1.3143
20x2	1	0.0834	0.0823	0.0822	0.0872	0.0831	0.0829
	2	0.4993	0.4940	0.4928	0.5264	0.5018	0.4976
	3	1.2828	1.2827	1.2827	1.2837	1.2845	1.2825
	4	1.3141	1.3020	1.2982	1.4011	1.3339	1.3136
50x5	1	0.0824	0.0822	0.0822	0.0831	0.0824	0.0823
	2	0.4944	0.4934	0.4934	0.4989	0.4952	0.4941
	3	1.2825	1.2825	1.2825	1.2827	1.2831	1.2825
	4	1.3024	1.2997	1.2998	1.3168	1.3071	1.3023

4.4.3 Vibration libre d'une poutre console à section variable

Dans ce teste, une poutre console à section variable est étudiée, pour laquelle la géométrie et le maillage sont donnés sur la figure 4.11 ($L = 10$; $H(0) = 5$, $H(L) = 3$, $t = 1.0$,

$E = 3,0 \times 10^7$, $\nu = 0,3$ et $\rho = 1,0$). Les résultats calculés des quatre premières fréquences naturelles utilisant l'élément SBTIE sont donnés dans le tableau 4.6. En effet, les résultats obtenus de l'élément SBTIE sont proches à ceux des éléments QBI à 4 nœuds, Q9 à 8 nœuds, SFEM et Q4.

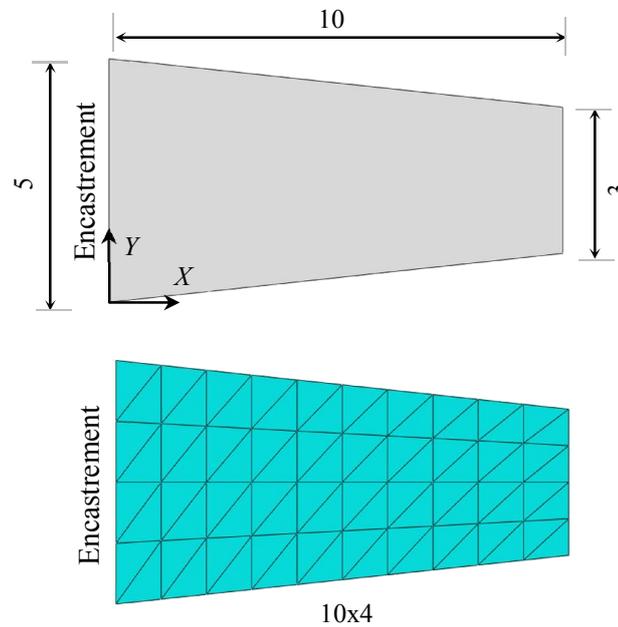


Figure 4.11. Vibration libre d'une poutre console trapézoïdale.

Tableau 4.6. Quatre premières fréquences propres ($\times 10^3 \text{ rad/s}$) d'une console trapézoïdale.

	Modes	SFEM (4 SC) [Dai.07]	FEM (8- node Q9) [Dai.07]	FEM (4- node QBI) [Dai.07]	FEM (4- node Q4) [Dai.07]	SBIEDR	SBTIE
10x4	1	0.2611	0.2618	0.2607	0.2651	0.2638	0.2611
	2	0.9156	0.9188	0.9136	0.9489	0.9490	0.9185
	3	0.9513	0.9522	0.9511	0.9540	0.9541	0.9519
	4	1.8296	1.8557	1.8241	1.9576	1.9390	1.8467
20x10	1	0.2617	0.2616	0.2615	0.2625	0.2617	0.2615
	2	0.9176	0.9178	0.9167	0.9249	0.9176	0.9152
	3	0.9518	0.9520	0.9518	0.9525	0.9518	0.9547
	4	1.8477	1.8526	1.8455	1.8774	1.8477	1.8502
40x10	1	0.2616	-	0.2616	0.2618	0.2616	0.2616
	2	0.9177	-	0.9175	0.9195	0.9177	0.9147
	3	0.9519	-	0.9519	0.9521	0.9519	0.9551
	4	1.8512	-	1.8506	1.8587	1.8512	1.8510

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a montré la bonne convergence ainsi que la bonne précision de l'élément SBTIE à travers une série d'exemples numériques non linéaires et des tests en vibration libre.

En effet, pour les tests non linéaires, l'élément SBTIE est similaire à l'élément Q8 dans tous les tests, mais avec un temps de calcul moins grand. Les résultats du nouvel élément sont en bon accord avec les résultats analytiques, ce qui montre sa robustesse dans l'analyse élasto-plastique.

Concernant l'analyse en vibration libre, Les résultats trouvés montrent l'efficacité du présent élément et ses résultats sont comparables avec ceux des éléments d'ordre élevé.

Chapitre 5

Validation numérique de l'élément SBTIEE

5.1 Introduction

L'élément rectangulaire (SBRIEE) de Sabir [Sabi.75] a été transformé en un élément triangulaire à quatre nœuds nommé (SBTIEE). La figure 5.1 présente l'élément membranaire triangulaire qui possède deux degrés de liberté (u, v) pour chacun des trois nœuds d'angle et au nœud de mi-côte. Cet élément basé sur le champ de déformation et qui satisfait les équations d'équilibre a été validé en statique, vibration libre et élasto plastique. Le champ de déformation de cet élément (SBTIEE) est le même que celui de l'élément rectangulaire (SBRIEE).

Les fonctions de déformation et le champ de déplacement sont donnés respectivement par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y - \alpha_7 vx \\ \varepsilon_y &= -\alpha_5 vy + \alpha_6 + \alpha_7 x \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}U &= \alpha_1 - \alpha_3 y + \alpha_4 x + \alpha_5 xy - \alpha_7 \frac{(vx^2 + y^2)}{2} + \alpha_8 \frac{y}{2} \\ V &= \alpha_2 + \alpha_3 x - \alpha_5 \frac{(vy^2 + x^2)}{2} + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 \frac{x}{2}\end{aligned}\tag{5.2}$$

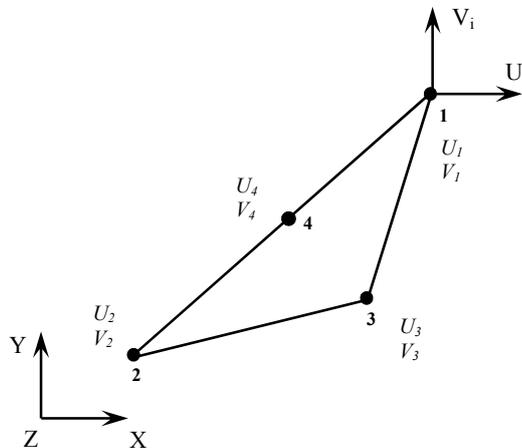


Figure 5.1 Elément triangulaire membranaire (SBTIEE).

5.2 Validation de l'élément SBTIEE en statique

5.2.1 Poutre console élançée de MacNeal

Ce problème de la poutre élançée [MacN.85] a été traité pour évaluer l'efficacité de l'élément développé. Les caractéristiques géométriques et matérielles sont données dans la figure. 5.2.

Les résultats obtenus (Tableau 5.1) montrent que l'élément développé est libre de tout phénomène de blocage et ses résultats sont en bon accord avec la solution exacte. En outre, il convient de noter que l'élément développé **SBTIEE** est plus précis que l'élément basé sur le champ de déformation (SBTIEIR) pour les deux cas de charge.

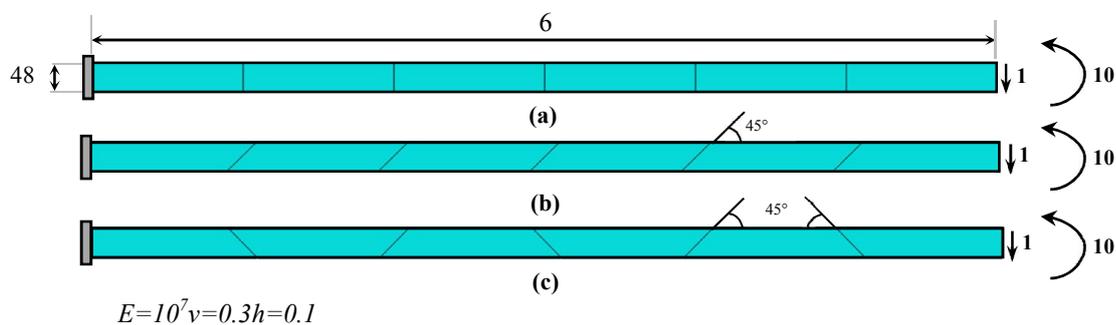


Figure 5.2. Poutre console élançée de MacNeal (Données et maillages).

Tableau 5.1. Déplacement vertical normalisé à l'extrémité libre de la poutre de MacNeal.

Element	Flexion pure			Cisaillement		
	Maillage (a)	Maillage (b)	Maillage (c)	Maillage (a)	Maillage (b)	Maillage (c)
Q4	0,093	0,022	0,031	0,093	0,027	0,034
PS5β	1,000	0,046	0,726	0,993	0,052	0,632
AQ	0,910	0,817	0,881	0,904	0,806	0,873
MAQ	0,910	0,886	0,890	0,904	0,872	0,884
Q4S	-	-	-	0,993	0,986	0,988
07β	1,000	0,998	0,992	0,993	0,988	0,985
SBTIEIR	0.437	0.015	0.374	0.435	0.005	0.333
SBTIEE	1.000	1.000	1.000	0.993	0.993	0.993
Solution de référence [MacN.85]		1,000 (0,270)			1,000 (0,1081)	

5.2.2 Poutre console soumise à un moment de flexion

La figure 5.3 représente une poutre console en flexion pure dont les caractéristiques mécaniques et géométriques sont données dans la figure 5.3. Cet exemple est une référence reconnue pour tester la distorsion des éléments. L'excentricité, e , varie entre (0 et 4.9) comme

proposé par Piltner et Taylor [Piltner.95]. Les résultats donnés dans le tableau 5.2 concernent le déplacement vertical à l'extrémité libre (point A).

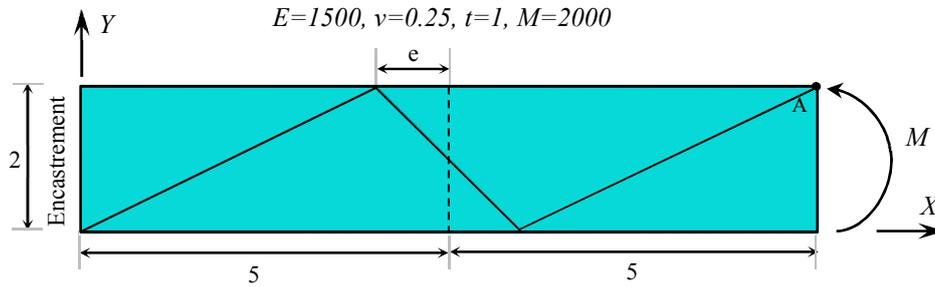


Figure 5.3. Poutre console modélisée avec deux éléments quadrilatéraux.

Tableau 5.2. Déplacement vertical normalisé au point A ($V_A^{ref}=100$) de la poutre console.

e	CPS4 [Zoua.16]	CPS8 [Zoua.16]	HTD [Zoua.16]	HT [Zoua.16]	AQ [Zoua.16]	PFR4 [Zoua.16]	PFR4I [Zoua.16]	SBRIEIR	SBTIEE
0	0.280	0.984	1.000	0.315	0.938	0.937	1.000	0.965	1.000
0.5	0.205	0.987	0.992	0.245	0.950	0.928	0.975	0.964	1.000
1	0.137	0.989	0.996	0.175	0.907	0.890	0.914	0.961	1.000
2	0.096	0.783	1.009	0.136	0.567	0.724	0.744	0.966	1.000
3	0.083	0.417	0.836	0.137	0.318	0.536	0.549	0.972	1.000
4	0.071	0.274	0.578	0.145	0.179	0.395	0.404	0.976	1.000
4.9	0.062	0.173	0.414	0.142	0.112	0.310	0.318	0.979	1.000

Il est remarqué que, pour toutes les valeurs de e considérées, le nouvel élément SBTIEE donne d'excellents résultats dans tous les cas.

5.2.3 Poutre console courte d'Allman

Dans ce test, une poutre console courte soumise à une charge verticale uniforme (avec résultante W), les caractéristiques géométriques et matérielles sont données dans la figure 5.4. Quatre types de maillage sont considérés pour analyser cette poutre. Les résultats obtenus pour les différents cas de maillages sont répertoriés dans le tableau 5.3.

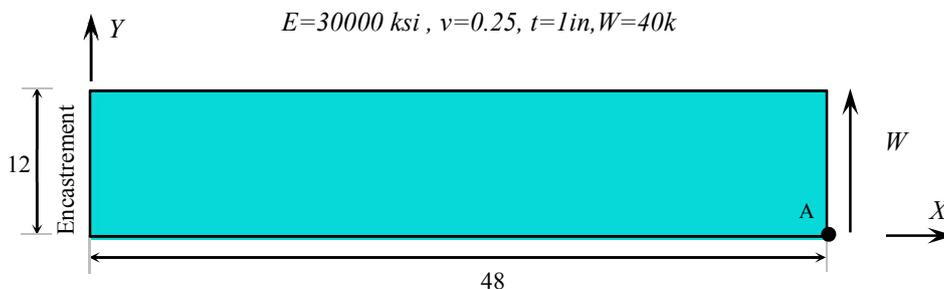


Figure 5.4. Poutre console courte d'Allman.

Tableau 5.3. Déplacement vertical normalisé au point A.

Element	Maillages			
	2x2	4x4	8x8	16x16
MEAS [Yeo.96]	17.94	43.92	75.05	92.17
Allman [Allm.84]	52.25	66.61	87.91	96.44
CSTHybrid [Feli.03]	74.34	91.49	97.38	99.22
OPT [Feli.03]	91.06	96.00	98.23	99.27
SM3 [Eom.09]	92.76	97.14	98.89	99.60
SBTIEE	91.96	97.52	99.32	99.97
Solution de référence [Feli.03]	100 (0.35601)			

5.2.4 Poutre console circulaire mince sous un chargement de cisaillement

Ce test permet d'analyser une poutre mince circulaire encastrée à une extrémité et soumise à une charge de cisaillement unitaire à l'extrémité libre (figure. 5.5). Deux maillages réguliers de 6x1 et 12x2 sont considérés. Les résultats obtenus du déplacement vertical à l'extrémité libre (point A) sont donnés dans le tableau 5.4. Il convient de noter que l'élément **SBTIEE** offre une meilleure convergence vers la solution exacte que les autres éléments.

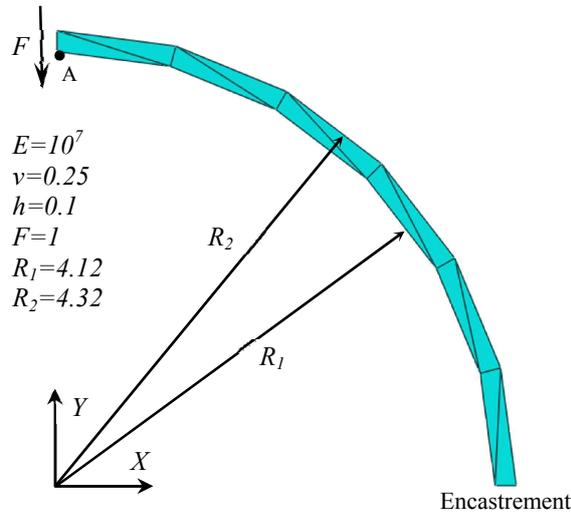


Figure 5.5. Poutre console circulaire mince modélisée avec (6x1).

Tableau 5.4. Déplacement vertical normalisé au point A d'une poutre console circulaire mince.

Maillage	CPS4	HT	SBTIEE
6x1	0.073	0.075	0.306
12x2	0.247	0.251	0.533
Erreur (%) (12x2)	75.3	74.9	46.7
Reference solution [Choo.06]	0.08734		

5.3 Validation de l'élément SBTIEE en vibration libre

5.3.1 Vibration libre d'un mur console

Cet exemple étudie les vibrations de flexion dans le plan d'un mur console [Cheu.00] avec un maillage régulier constitué de 32 éléments en prenant les trois premières fréquences naturelles des modes de flexion. Les propriétés géométriques et matérielles sont données dans la figure. 5.6.

Les résultats obtenus par l'élément **SBTIEE** sont moins précis que ceux obtenus par l'élément T6, alors que les fréquences obtenues par les éléments Q4 et T3 sont considérablement plus grandes que celles de la solution analytique.

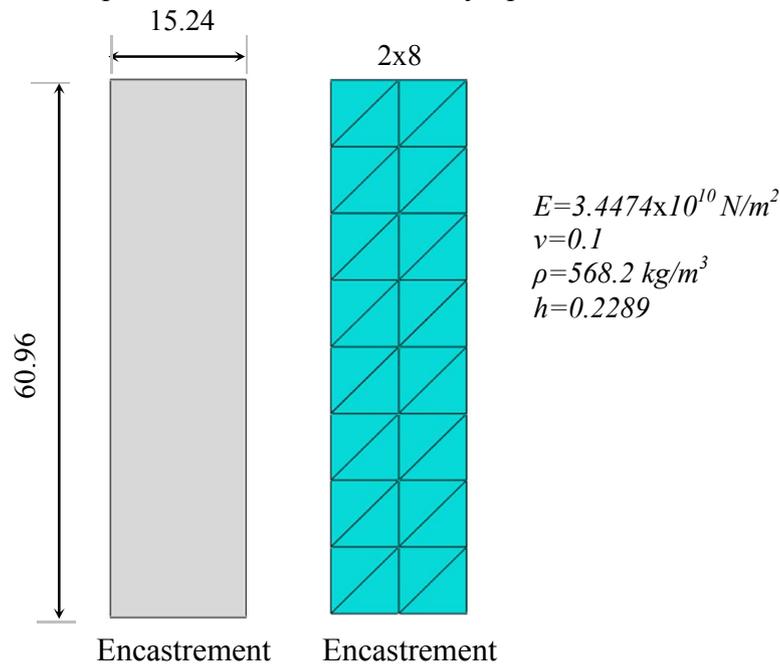


Figure 5.6. Vibration libre d'un mur en cisaillement.

Tableau 5.5. Trois premières fréquences propres (Hz) d'un mur en cisaillement.

Mode	1	2	3
Q4	5.252	28.028	67.652
T3	6.658	33.759	79.341
T6	4.959	25.772	60.221
SBTIEE	4.991	26.557	63.330
Valeur théorique [Cheu.00]	4.973	26.391	62.066

5.3.2 Vibration libre d'une poutre console

Cette analyse a été effectuée dans le cas d'un problème de contrainte plane d'une poutre console, avec ses caractéristiques données dans la figure 5.7. La fréquence fondamentale

résultante de la théorie des poutres (Euler-Bernoulli) est considérée comme une solution de référence ($f_1 = 0,08276 \times 10^4$ Hz) [Dai.07]. Les résultats numériques des quatre premières fréquences pour l'élément SBTIEE ont été comparés avec ceux des éléments (SFEM, **SBRIEIR**, **Q4**, **QBI** et **Q9**) (Tableau 5.6) pour examiner la précision de l'élément développé. Une meilleure convergence des résultats est obtenue avec les éléments QBI et Q9. Le nouvel élément **SBTIEE** se comporte mieux que les éléments **SBRIEIR** ou Q4, et est en bon accord avec la solution de référence.

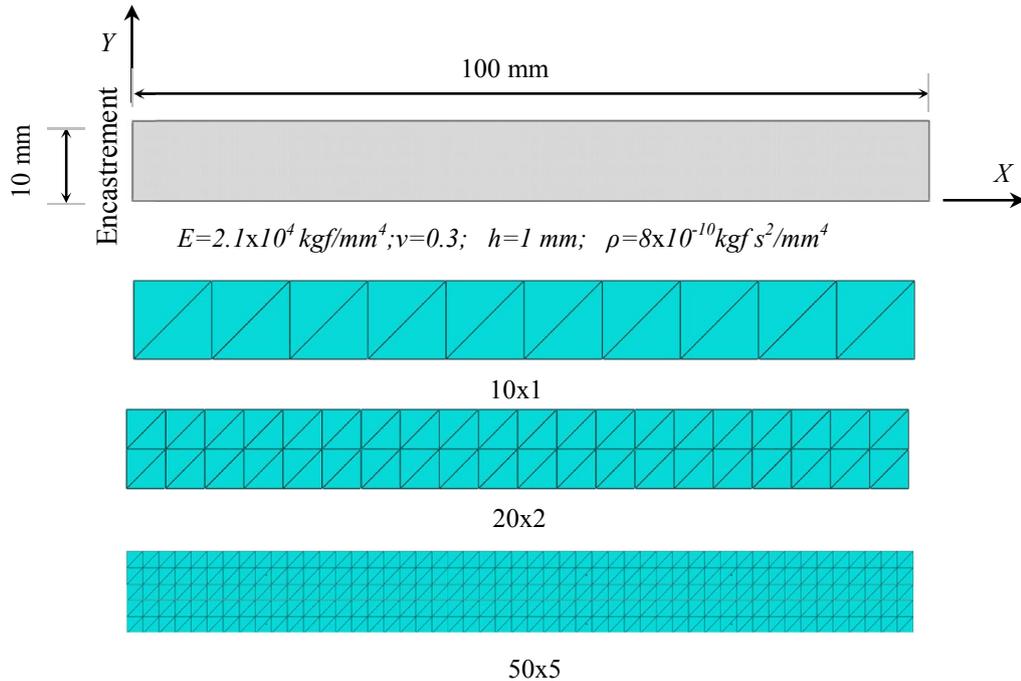


Figure 5.7. Vibration libre d'une poutre console.

Tableau 5.6. Quatre premières fréquences propres ($\times 10^4$ Hz) d'une poutre console ($f_1 = 0.08276 \times 10^4$ Hz).

Maillages	Modes	SFEM (4 SC) [Dai.07]	FEM (8- node Q9) [Dai.07]	FEM (4-node QBI) [Dai.07]	FEM (4- node Q4) [Dai.07]	SBRIEDR	SBTIEE
10x1	1	0.0861	0.0827	0.0817	0.1000	0.0845	0.0819
	2	0.5071	0.4982	0.4824	0.6077	0.5150	0.4874
	3	1.2828	1.2832	1.2526	1.2863	1.2862	1.2658
	4	1.3124	1.3205	1.2826	1.6423	1.3823	1.2926
20x2	1	0.0834	0.0823	0.0822	0.0872	0.0831	0.0823
	2	0.4993	0.4940	0.4928	0.5264	0.5018	0.4942
	3	1.2828	1.2827	1.2827	1.2837	1.2845	1.2051
	4	1.3141	1.3020	1.2982	1.4011	1.3339	1.3212
50x5	1	0.0824	0.0822	0.0822	0.0831	0.0824	0.0822
	2	0.4944	0.4934	0.4934	0.4989	0.4952	0.4935
	3	1.2825	1.2825	1.2825	1.2827	1.2831	1.2825
	4	1.3024	1.2997	1.2998	1.3168	1.3071	1.3008

5.3.3 Vibration libre d'une poutre console à section variable

Dans cette partie, une poutre console à section variable est étudiée, pour laquelle la géométrie et le maillage sont présentés sur la figure 5.7 ($L = 10$; $H(0) = 5$, $H(L) = 3$, $t = 1.0$, $E = 3,0 \times 10^7$, $\nu = 0,3$ et $\rho = 1,0$). Les résultats des quatre premières fréquences naturelles de l'élément **SBTIEE** sont donnés dans le tableau 5.7. En effet, les résultats obtenus de l'élément **SBTIEE** sont légèrement inférieurs à ceux des éléments QBI à 4 nœuds, Q9 à 8 nœuds, SFEM et Q4.

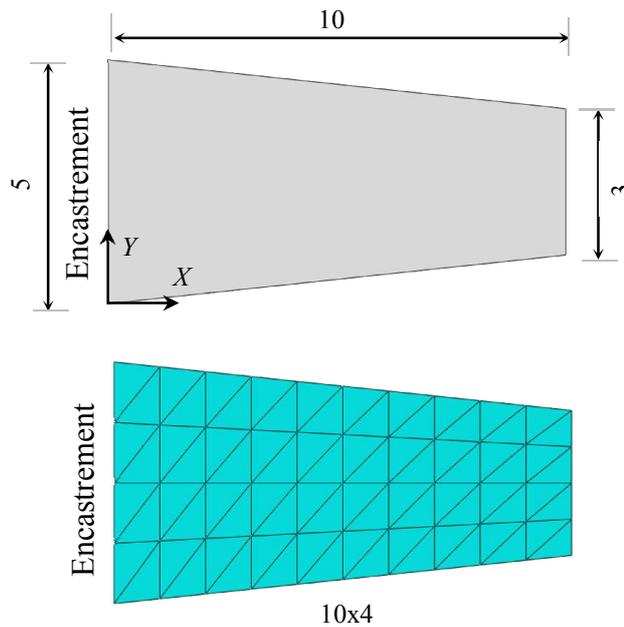


Figure 5.8. Vibration libre d'une poutre console trapézoïdale.

Tableau 5.7. Quatre premières fréquences propres ($\times 10^3$ rad/s) d'une console trapézoïdale.

Maillages	Modes	SFEM (4 SC) [Dai.07]	FEM (8- node Q9) [Dai.07]	FEM (4- node QBI) [Dai.07]	FEM (4- node Q4) [Dai.07]	SBTIEE
10x4	1	0.2611	0.2618	0.2607	0.2651	0.2609
	2	0.9156	0.9188	0.9136	0.9489	0.9176
	3	0.9513	0.9522	0.9511	0.9540	0.9518
	4	1.8296	1.8557	1.8241	1.9576	1.8440
20x10	1	0.2617	0.2616	0.2615	0.2625	0.2615
	2	0.9176	0.9178	0.9167	0.9249	0.9151
	3	0.9518	0.9520	0.9518	0.9525	0.9547
	4	1.8477	1.8526	1.8455	1.8774	1.8498
40x10	1	0.2616	-	0.2616	0.2618	0.2615
	2	0.9177	-	0.9175	0.9195	0.9147
	3	0.9519	-	0.9519	0.9521	0.9551
	4	1.8512	-	1.8506	1.8587	1.8509

5.4 Validation de l'élément SBTIEE en non linéaire

5.4.1 Analyse de la capacité portante d'un sol purement cohérent

Dans ce test, semelle flexible poinçonnée sur un sol purement cohérent comme indiqué sur la Figure (5.8). Le sol élasto-plastique est décrit par trois paramètres, à savoir les propriétés élastiques : le module de Young $E = 10^5 \text{ kN/m}^2$, le coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et la cohésion non drainée $C_u = 100 \text{ kN/m}^2$. La semelle supporte une charge uniformément répartie q , qui est augmentée progressivement jusqu'à la rupture. Pour cet exemple qui est en déformation plane, la méthode viscoplastique et le critère de Von Mises sont utilisés. La rupture dans ce cas se produit lorsque $q=5.14$ atteint la charge de Prandtl donnée par :

$$q_{ultime} = (2 + \pi) C_u$$

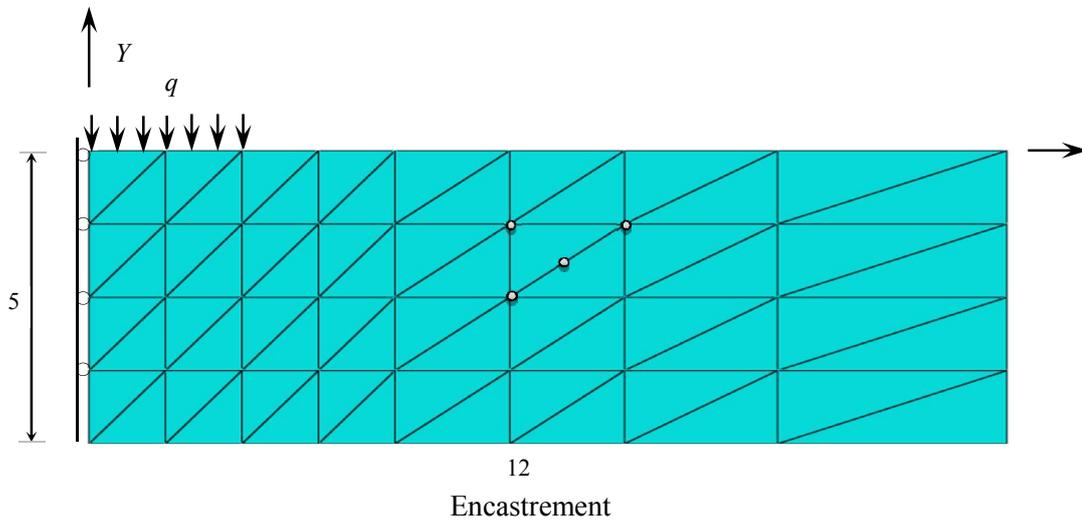


Figure 5.9 Géométrie et maillage de la semelle filante.

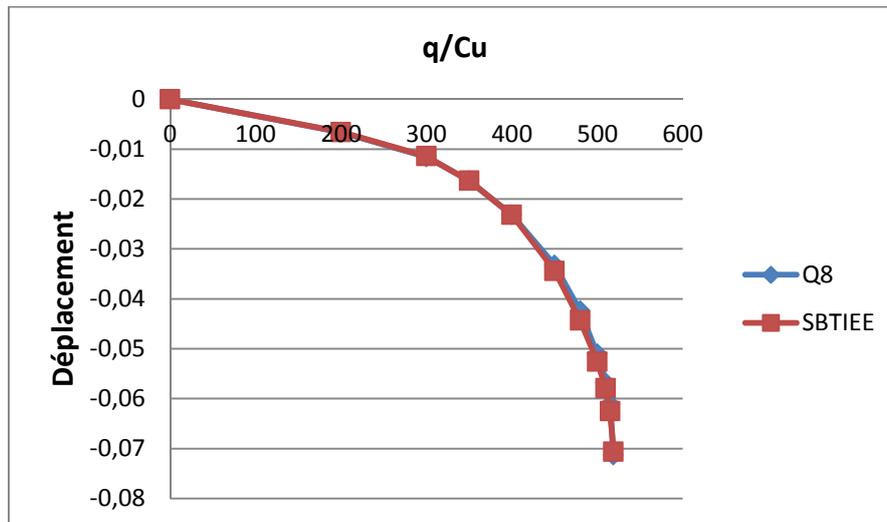


Figure 5.10 Capacité portante par rapport au déplacement central.

Tableau 5.8. Déplacements vertical du nœud chargé.

Charges (KN)	Déplacement (m)	
	Q8	SBTIEE
200	0.006593	0.006581
300	0.01155	0.01141
350	0.01630	0.01633
400	0.02317	0.02316
450	0.03321	0.03439
480	0.04235	0.04436
500	0.05096	0.05258
510	0.05679	0.05791
515	0.06109	0.06248
519	0.07135	0.07064

5.4.2 Analyse axisymétrique non drainée

La figure 5.10 représente l'assemblage de deux éléments triangulaire (SBTIEE) axisymétrique soumis à des incréments de déplacement vertical de compression le long de sa face supérieure. L'élément Q8 a été utilisé dans ce test par Smith et al. [Smit.14]. L'analyse consiste à un essai triaxial, dans lequel l'échantillon a été consolidé sous une pression de 100kN / m², suivie par une charge axiale non drainée. Deux types d'analyse sont pris en compte dans ce problème. Dans le premier cas (a) où il n'y a pas de changement de volume plastique l'angle de dilatation $\psi = 0$, et dans le second cas (b) qui comprend une règle de flux associée ($\psi = 30^\circ$).

Les propriétés de l'échantillon pour ce problème sont données dans la figure 5.10. Dans ce problème la méthode viscoplastique et le critère de Mohr Coulomb ont été utilisés. Les résultats de la contrainte déviatorique et la pression interstitielle par rapport au déplacement vertical dans les deux cas ($\psi = 0$ et $\psi = 30^\circ$) sont donnés dans les deux Tableaux 5.9 et 5.10.

Nous constatons pour le premier cas que la contrainte déviatorique de l'élément SBTIEE atteint un pic de 118,82 KN/m² qui est loin par rapport à la solution donnée par [Grif.85] qui est égale à 120,8 KN/m², par contre l'élément Q8 est en bon accord avec sa valeur de 121 KN/m² [Smi.14].

Pour le deuxième cas, qui comprend une règle d'écoulement associée ($\psi = 30^\circ$), Il est remarqué l'absence de tous signe d'échec (rupture) due à la tendance et à la dilatation. Dans ce cas, il est constaté que les pressions interstitielles continuent à se produire et la contrainte

déviatorique continue d'augmenter, et ceci est dû à l'influence de la dilatation sur le comportement des deux éléments.

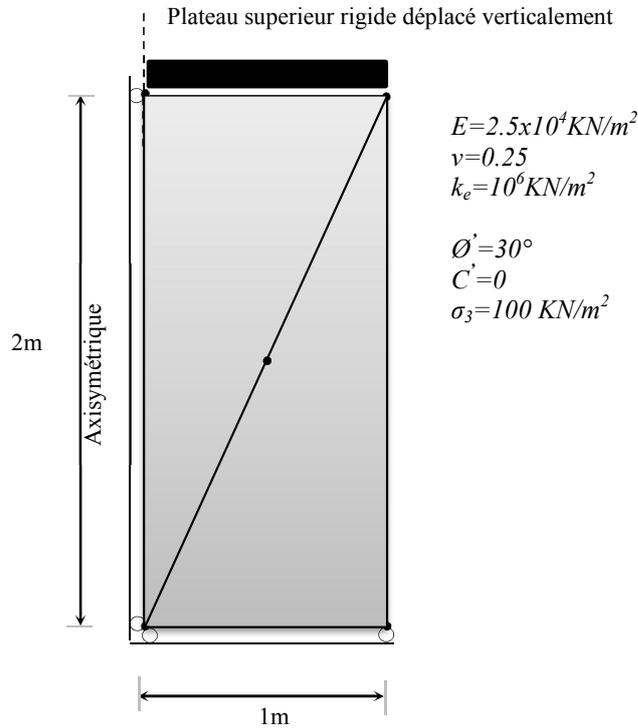


Figure 5.11 Géométrie et maillage du problème axisymétrique.

Tableau 5.9. Contrainte déviatorique et pression interstitielle par rapport au déplacement vertical dans le cas ($\psi = 0$).

Déplacement	Q8		SBTIEE	
	contrainte déviatorique	pression interstitielle	contrainte déviatorique	pression interstitielle
$-0.2000 \cdot 10^{-2}$	29.90	-9.804	29.59	-13.29
$-0.4000 \cdot 10^{-2}$	59.80	-19.61	59.19	-26.59
$-0.6000 \cdot 10^{-2}$	89.71	-29.41	88.78	39.88
$-0.8000 \cdot 10^{-2}$	119.6	-39.22	100.56	-40.55
$-0.1000 \cdot 10^{-1}$	120.9	-39.65	104.89	-40.40
$-0.1200 \cdot 10^{-1}$	121.0	-39.66	109.33	-40.26
$-0.1400 \cdot 10^{-1}$	121.0	-39.66	114.00	-40.12
$-0.1600 \cdot 10^{-1}$	121.0	-39.66	118.82	-39.99

Tableau 5.10. Contrainte déviatorique et pression interstitielle par rapport au déplacement vertical dans le cas ($\psi= 30^\circ$).

Déplacement	Q8		SBTIEE	
	contrainte déviatorique	pression interstitielle	contrainte déviatorique	pression interstitielle
$-0.2000.10^{-2}$	29.90	-9.804	29.59	-13.29
$-0.4000.10^{-2}$	59.80	-19.61	59.19	-26.59
$-0.6000.10^{-2}$	89.71	-29.41	88.78	-39.88
$-0.8000.10^{-2}$	119.6	-39.22	107.60	-35.08
$-0.1000.10^{-1}$	129.9	-29.60	122.78	-29.26
$-0.1200.10^{-1}$	143.9	-23.63	138.33	-23.58
$-0.1400.10^{-1}$	157.0	-16.83	154.22	-17.93
$-0.1600.10^{-1}$	170.3	-10.22	170.37	-12.28

5.5 Conclusion

En se basant sur l'approche en déformation, un nouvel élément triangulaire à 4 nœuds a été formulé et validé par divers problèmes (statique, vibration libre et non-linéaire) des structures membranaires. Cet élément possède deux degrés de liberté pour chacun des nœuds de coin et au nœud de mi-côte.

Cet élément satisfait les équations de compatibilité et la bonne représentation du mouvement du corps rigide. La convergence ainsi que la performance de l'élément SBTIEE ont été testés à travers plusieurs tests de la littérature. Les résultats trouvés dévoilent l'efficacité du présent élément dans l'analyse statique, vibration libre et non-linéaire et ses résultats sont comparables avec d'autres éléments.

Conclusion générale

Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre général de la formulation et la validation de trois éléments triangulaires non conforme basés sur l'approche en déformation pour l'analyse des structures membranaire en statique, vibration libre et élastoplastique.

Nous avons développé un nouvel élément fini triangulaire membranaire à trois nœuds et trois degrés de liberté par nœud (deux translations U , V et une rotation dans le plan θ_z) nommé SBTDR (strain-based triangular with drilling rotation). La validation numérique en analyse linéaire et en vibration libre de cet élément a montré que les résultats obtenus sont en bon accord avec les résultats analytiques et l'efficacité de l'approche en déformation a été démontrée.

Deux éléments triangulaires à quatre nœuds et deux degrés de liberté par nœud (deux translations U , V) ont été validés. Le premier élément triangulaire à quatre nœuds SBTIE cité dans la référence [Sabi.95] a été testé pour l'analyse élastoplastique et en vibration libre. Tandis que le deuxième élément triangulaire nommé SBTIEE a été formulé en utilisant le champ de déplacement de l'élément rectangulaire (SBRIEE) de la littérature [Sabi.75]. Cet élément qui satisfait les équations d'équilibre a été validé en statique, en vibration libre et en élastoplasticité. Les résultats trouvés montrent l'efficacité des deux éléments et les résultats sont comparables avec ceux des éléments d'ordre élevé.

Les principaux avantages liés à la formulation des trois éléments (SBTDR, SBTIE et SBTIEE) à champ de déformation peuvent être cités comme suit :

- L'amélioration de l'analyse du comportement en membrane des structures.
- Le développement d'éléments d'ordre élevé avec des degrés de liberté minimums.
- L'atteinte d'une efficacité et d'une performance certaines grâce à l'approche en déformation. Il est à noter que les éléments développés sont simples et contiennent des termes polynomiaux aux degrés élevés.
- La similarité numérique d'éléments formulés avec les éléments Q8 et T6 a été trouvée tout en signalant que ces derniers utilisent plus de degrés de liberté.
- Le gain de temps de calcul s'est avéré considérable avec une meilleure précision dans quelques cas et un gain en coût et ce pour les deux analyses (statique et vibration libre).

- Le taux de convergence a été trouvé assez rapide vers les solutions de référence pour tous les tests effectués.

Les extensions possibles à ce travail pour l'application de l'approche en déformation sont les suivantes :

- Implémentation des éléments formulés dans le code de calcul ABAQUS.
- Extension de ce travail qui consiste à examiner ces éléments dans l'étude dynamique forcée et en non-linéarité géométrique.

Liste des References

- [Achc.19] Achchab B., Agouzal A., Guessab A. and Zaim Y., An extended family of nonconforming quasi-Wilson elements for solving elasticity problem, *Appl. Math. Comput.*, 1-19, 344-345, 2019.
- [Achc.14] Achchab B., Agouzal A. and Bouihat K., A simple nonconforming quadrilateral finite element, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.* 352, 529-533, 2014.
- [Achc.15a] Achchab B., Bouihat K., Guessab A. and Schmeisser G., A general approach to the construction of nonconforming finite elements on convex polytopes, *Appl. Math. Comput.* 268, 3, 916-923, 2015.
- [Achc.15b] Achchab B, Guessab A and Zaim Y., A new class of nonconforming finite element for enrichment of Q1element on convex polytope, *Appl. Math. Comput.*, 271, (2015), 657-668.
- [Allm.84] Allman D. J., A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis, *Comput Struct*, vol. 19, pp. 1–8, 1984.
- [Allm.88a] Allman D. J., Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26(12):2645–2655, 1988.
- [Allm.88b] Allman D. J., A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis, *Int J Numer Meth Eng*, vol. 26, pp. 717–730, 1988.
- [Argy.60] Argyris , J. and S. Kelsey. , *Energy Theorems and structural analysis* Butterwoth Scientific publication London , 1960.
- [Arbo.95] Arbogast T., and Zhangxin Chen., On the implementation of mixed methods as nonconforming methods for second-order elliptic problems *Math. Comp.* 64, 211, , 943-972, 1995.
- [Arno.02] Arnold D. N, Boffi D, and Falk R. S., Approximation by quadrilateral finite elements, *Math. Comp.*, 71, , 909-922, 2002.
- [Ashw.72] Ashwell ,D. G. and Sabir A. B. A new cylindrical shell finite element based on single independent strain functions. *Int. J .Mech.Sci.*14, 171-183, 1972.
- [Ashw.71a] Ashwell D. G., Sabir A. B., Limitation of certain curved finite elements applied to arches, *IJMS Vol. 13*, pp. 133-139, 1971.
- [Ashw.71b] Ashwell, D. G., Sabir A. B. and Roberts, T. M., “Limitations of certain finite elements when applied to arches”, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 13, 1971.
- [Ayad.13] Ayad R., Zouari W., Meftah K., Ben Zineb T and Benjeddou A., “Enrichment of Linear Hexahedral Finite Elements using Rotations of a Virtual Space

- Fiber”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95 (1), 46-70 , 2013.
- [Bach.16] Bachar M. and Guessab A., A simple necessary and sufficient condition for the enrichment of the Crouzeix-Raviart element *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, Vol. 10, no. 2, 378–393, 2016.
- [Berg.85] Bergan P. G. and Felippa C. A., A triangular membrane element with rotational degrees of freedom, *Comput Meth Appl Mech Eng*, vol. 50, pp. 25–69, 1985.
- [Bela.99] Belarbi M. T. and Charif A., Développement d’un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l’étude des plaques minces et épaisses, *Revue européenne des éléments finis*, vol. 8, pp. 135–57, 1999.
- [Bela.05a] Belarbi M. T. and Bourezane M., On improved Sabir triangular element with drilling rotation, *Revue Européenne de Génie Civil*, vol. 9, pp. 1151-1175, 2005.
- [Bela.05b] Belarbi M. T. and Maalem T. ,On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis, *Revue Européenne des Éléments*, 14:8, 985-997,2005.
- [Bel.05] Belounar, L. and Guenfoud, M., A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending, *Thin-Walled Structures*, 43(1), 47–63, 2005.
- [Bel.06] Belounar L., Benmebarek S. and Hamadi D., "Plate bending with a solid strain-based element that satisfies the equilibrium equations", 6th European Solid Mechanics Conference, ESMC2006, Budapest 28 August-1 September 2006.
- [Bel.08] Belounar L. and Benmebarek S., “Analysis of skew rhombic plates using a strain based solid finite element”, 8th International congress on advances in civil engineering, North Cyprus, 15-17 September 2008.
- [Bel.11] Belounar L. and Benmebarek S., “A rectangular strain based finite element for plate bending analysis”, CMM-2011 – Computer Methods in Mechanics 9–12 May 2011, Warsaw, Poland. Editors, A. Borkowski, T. Lewinski, G. Dzierzanowski.
- [Bel.14a] Belounar L. and Guerraiche K., “A new strain based brick element for plate bending”, *Alexandria Engineering Journal*, 53: 95–105, 2014.
- [Bel.14b] Belounar L., Gueraiche K., Rebiai C. and Benmebarek S., A 3D eight nodes brick finite element based on the strain approach, *International Conference on Civil Engineering and Applied Mechanics (ICCEAM 2014)*, Dubai UAE, December 25-26, 2014.
- [Bel.16] Belounar L., Messai A., Fortas L. and Merzouki T., A comparative study of membrane finite elements based on the strain approach, *Academic Journal of Civil Engineering*, vol. 34, N° 1, pp. 66-72, 2016.
- [Bel.17] Belounar L., Belounar A. and Houhou M. N., Plate bending with strain based Mindlin triangular finite element, 3rd Conference On Advances In Mechanical Engineering Istanbul 2017-ICAME 2017, 19-21 December 2017, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey.

- [Belo.17a] Belounar A., Belounar L., Fortas L. and Houhou M. N., Analysis of circular plate bending with a quadrilateral strain based finite element, 3rd Conference On Advances In Mechanical Engineering Istanbul 2017-ICAME 2017, 19-21 December 2017, Yildiz Technical University, Istanbul, Turkey.
- [Belo.17b] Belounar A., Houhou M. N. and Belounar L., Numerical Study with Membrane Strain Based finite elements, International Symposium On Construction Management And Civil Engineering (ISCMCE-2017) 15-16 November 2017, SKIKDA-ALGERIA.
- [Belo.19a] Belounar A., Benmebarek S., Houhou M.N. and Belounar L., Static, free vibration, and buckling analysis of plates using strain-based Reissner–Mindlin elements, International Journal of Advanced Structural Engineering, vol. 11, N° 2, pp. 211-230, 2019.
- [Belo.19b] Belounar A., Eléments finis membranaires et flexionnels à champ de déformation pour l’analyse des structures, thèse de Doctorat, Université de Mohamed Khider – Biskra. 2019.
- [Belo.19c] Belounar A., Belounar L., Fortas L. and Houhou M. N., Free vibration of plates with square openings using triangular Mindlin element, 5th International Conference On Advances In Mechanical Engineering Istanbul 2019, 17-19 December 2019.
- [Belo.20a] Belounar A., Benmebarek S. and Belounar L., Strain based triangular finite element for plate bending analysis, Mechanics of Advanced Materials and Structures, vol. 27 (8), pp.620-632, 2020.
- [Belo.20b] Belounar A., Benmebarek S., Houhou M.N. and Belounar L., Free Vibration with Mindlin Plate Finite Element Based on the Strain Approach, Journal of The Institution of Engineers (India): Series C 101 (2), pp.331-346, 2020.
- [Bou.17] Bouzidi L., Messai A, Fortas L., Belounar A. and Merzouki T., Etude comparative des éléments tridimensionnels basés sur l’approche en déformation pour l’analyse des plaques, 2ème Congrès International sur les Ingénieries Civile, Mécanique et Electrique pour l’Energie CMEEE 2017 – Marrakech 14, 15 et 16, Novembre 2017.
- [Bou.19] Bouzidi, L., Belounar, L. and Guerraiche, K., ‘Presentation of a new membrane strain-based finite element for static and dynamic analysis’, International Journal of Structural Engineering, Vol. 10, No. 1, pp.40–60, 2019.
- [Bouz.86] Bouzrira C., Strain based sector with drilling rotation Master degree, University college of Cardiff (U.K), 1986.
- [Bren.92] Brenner S. and Sung L., Linear finite element methods for planar elasticity. Mathematics of Computation; 59:321–338, 1992.
- [Brend.79] Brendel B. and Ramm E. , "Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells. Internat". Conf. on Engineering Application of Finite Element Method, Hovik, Norway, May 9-11, 1979.

- [Cai.00] Cai Z., Douglas Jr. J, Santos JE, Sheen D and Ye X. Nonconforming quadrilateral finite elements: a correction. *CALCOLO*; 37(4):253–254, 2000.
- [Cen.07] Cen S., Chen X. M. and Fu X. R., Quadrilateral membrane element family formulated by the quadrilateral area coordinate method. *Comput Meth Appl Mech Engrg* 196(41-44):4337-4353, 2007.
- [Choi.96] Choi C. K. and Chung G .T. A gap element for three-dimensional elasto-plastic contact problems. *Computers & Structures* ;61:1155-67, 1996.
- [Choi.95] Choi C. K. and Chung G.T., Elasto-plastic nonconforming solid element with variable nodes. *Structural Engineering and Mechanics*; 3:325-40, 1995.
- [Cheu.00] Cheung Y. K., Zhang Y. X and Chen W. J., A refined non-conforming plane quadrilateral element. *Comput Struct* 78(5):699–709, 2000.
- [Choo.06] Choo Y. S., Choi N. and Lee B. C., Quadrilateral and triangular plane elements with rotational degrees of freedom based on the hybrid Trefftz method. *Finite Elem Anal Des* 42(11):1002-1008, 2006.
- [Clou.60] Clough R.W., “The finite element method in plane stress analysis” *Proceedings, Second ASCE Conference On Electronic Computation, Pittsburgh, PA, pp. 345-378 september 1960.*
- [Cook.74] Cook R. D., Improved two-dimensional finite element, *Journal of the Structural Division*, vol. 100, pp. 1851–1863, 1974.
- [Cook.86] Cook R. D., On the Allman triangle and a related quadrilateral element. *Comput Struct* 22(6):1065-1067, 1986.
- [Cour.43] Courant R. L., *Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration. Bulletin of the American Mathematical Society*, 49 :1–23, 1943.
- [Crou.73] Crouzeix M. and Raviart P-A. Conforming and non-conforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. *RAIRO Mathematical Modelling and Numerical Analysis*; 3:33–75, 1973.
- [Dai.07] Dai K. Y. and Liu G. R., Free and forced vibration analysis using the smoothed finite element method (SFEM) *Journal of Sound and Vibration* 301(3–5):803-820, 2007.
- [Djou.04] Djoudi M.S. and Bahai H., Strain based finite element for the vibration of cylindrical panels with opening. *Thin-Walled structures* 42 575 – 588, 2004.
- [Djou.90] Djoudi M. S., Strain based finite elements for linear and geometrical nonlinear analysis of structure, PhD thesis University of Wales College of Cardiff (U.K), 1990.
- [Djou.03] Djoudi M. S. and Bahai H., A shallow shell finite element for the linear and non – linear analysis of cylindrical shells. *Engineering Structures* 25,769-778, 2003.

- [Doug.99] Douglas Jr. J., Santos J.E., Sheen D. and Ye X., Nonconforming Galerkin methods based on quadrilateral elements for second order elliptic problems. *RAIRO Mathematical Modelling and Numerical Analysis*; 33(4):747–770, 1999.
- [Doug.00] Douglas Jr. J., Santos J. E. and Sheen D., A nonconforming mixed finite element methods for Maxwell’s equations, *Math. Models Meth. Appl. Sci.* 10(4) 593–613, 2000.
- [Doug.01] Douglas Jr. J., Santos J. E. and Sheen D., Nonconforming Galerkin methods for the Helmholtz problem, *Numer. Methods Partial Differential Equations* 17: 475–494, 2001.
- [Eom.09] Eom, J., Ko J. and Lee, B. C., A macro plane triangle element from the individual element test. *Finite Elements in Analysis and Design* 45: 422–430, 2009.
- [Ern.04] Ern A., and Guermond J.-L., *theory and Practice of Finite Elements*. Appl. Math. Sci. 159, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [Feli.03] Felippa, C. A., A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192: 2125–2168, 2003.
- [For.16a] Fortas L., Belounar L., Messai A. and Marzouki T., The implementation of membrane finite elements based on the strain approach in the ABAQUS code, 2nd International Conference on Material and Structural Mechanics (MSM 2016) Marrakech, 23-25 November 2016.
- [For.16b] Fortas L., Belounar L., Messai A. and Marzouki T., Application d’un élément fini membranaire à champ de déformation pour l’analyse élasto-plastique, Séminaire International sur les Matériaux Locaux et la Construction Durable (SIMaLoCoD) Adrar, le 04 et 05 décembre 2016.
- [Fort.19] Fortas L., Belounar L. and Merzouki T., Formulation of a new finite element based on assumed strains for membrane structures, *International Journal of Advanced Structural Engineering* 11, Suppl N° 1, pp. 9–18, 2019.
- [Fran.91] François D., Pineau A. and Zaoui A., *Comportement mécanique des matériaux*. Hermès, Paris, 1991.
- [Frey.01] Frey François et Jaroslav Jirousek, *Analyse des structures et milieux continus , Méthode des éléments finis , Volume 6 , Presses polytechniques et Universitaires Romandes , Lausanne , 2001.*
- [Gauz.01] Gauzellino P. M., Santos J. E. and Sheen D., Frequency domain wave propagation modelling in exploration seismology, *J. Comput. Acoust.* 9(3) 941–955, 2001.
- [Gira.79] Girault V. and Raviart P. A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Spring Verlag, 1979.
- [Grif.85] Griffith D. V., The effect of pore fluid compressibility on failure loads in elastic plastic soil, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 9, 253–259 , 1985.

- [Guer.18] Guerraiche K., Belounar L. and Bouzidi L., A new eight nodes brick finite element based on the strain approach, *Journal of Solid Mechanics*, vol. 10, N°1, pp. 186–199, 2018.
- [Ha.02] Ha T., Santos J. E. and Sheen D., Nonconforming finite element methods for the simulation of waves in viscoelastic solids, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191(49) 5647-5670, 2002.
- [Halp.87] Halphen B. et Salençon J., *Élastoplasticité*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1987.
- [Hama.10] Hamadi D. and Maalem T., Presentation of an Efficient Parallelepiped Finite Element Based on the Strain Approach SBP8C, *Proceedings of the World Congress on Engineering*, 2010.
- [Han.84a] Han H., Nonconforming elements in the mixed finite element method. *Journal of Computational Mathematics*; 2(3):223–233, 1984.
- [Han.84b] HAN H., A finite element approximation of Navier-Stokes equations using non-conforming elements, *J. Comput. Math.*, 2, 1, 77-88, 1984.
- [Jun.05] Jun Hu and Zhong Ci Shi., Constrained quadrilateral nonconforming rotated Q1-element, *J. Comp. Math.*, 23, 561-586, 2005.
- [Khio.17] Khiouani H. E., Houhou M.N., Belounar L. and Guerraiche K., Contribution of Strain Based Finite Elements for Circular Curved Structures Analysis, *International Symposium on Construction Management and Civil Engineering (ISCMCE-2017)* 15-16 November 2017, SKIKDA-ALGERIA.
- [Khio.20] Khiouani H. E., Belounar L. and Houhou M. N., A New Three-Dimensional Sector Element for Circular Curved Structures Analysis, *Journal of Solid Mechanics* Vol. 12, No. 1, pp. 165-174, 2020.
- [Lee.03] Lee CO, Lee J. and Sheen D., A locking-free non-conforming finite element method for planar linear elasticity. *Advances in Computational Mathematics*; 19(1–3):277–291, 2003.
- [Maal.02] Maalem T., *Investigation numérique des problèmes de flexion de plaque par un élément fini parallélépipédique basé sur le modèle en déformation*, mémoire de Magistère, Université de Constantine. 2002.
- [MacN.88] MacNeal R. H. and Harder R. L., A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom, *Comput Struct*, vol. 28, pp. 75–84, 1988.
- [MacN.88] MacNeal R. H. and Harder R. L., A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom. *Comput Struct* 28(1):75-84, 1988.
- [MacN.85] MacNeal R. H. and Harder R. L., A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Element Anal. Des* 1(1):3-20, 1985.
- [Mess.19a] Messai A., Belounar L. and Merzouki T., Static and free vibration of plates with a strain-based brick element, *European Journal of Computational Mechanics*, DOI:

10.1080/17797179.2018.1560845, 2019.

- [Mess.19b] Messai A., Contribution de l'approche en déformation dans l'analyse statique et dynamique des structures, Thèse de Doctorat, Université de Mohamed Khider – Biskra, 2019.
- [Owen.80] Owen J. and Hinton E., Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice. Pineridge Press, New York, 1980.
- [Pakn.07] Paknahad M., Noorzai J. and Jaafar M. S., Thanoon Waleed A., Analysis of shear wall structure using optimal membrane triangle element. Finite Elements in Analysis and Design 43(11-12):861-869, 2007.
- [Park.03] Park C. and Sheen D., P1-nonconforming quadrilateral finite element methods for second-order elliptic problems, SIAM. J. Numer. Anal., 41, 624-640, 2003.
- [Pian.84] Pian T. H. and Sumihara K., Rational approach for assumed stress finite elements. Int J Numer Methods Eng 20(9):1685-1695, 1984.
- [Pilt.95] Piltner R. and Taylor R. L., A quadrilateral mixed finite element with two enhanced strain modes. Int J Numer Meth Eng, vol. 38, pp. 1783–1808, 1995.
- [Rann.92] Rannacher R. and Turek S., Simple non-conforming quadrilateral Stokes element. Numerical Methods for Partial Differential Equations; 8:97–111, 1992.
- [Rebi.13] Rebiai C. and Belounar L., "A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and nonlinear analysis", Archives of Civil and Mechanical Engineering, vol. 13, pp. 72–81, 2013.
- [Rebi.14] Rebiai C. and Belounar L., An effective quadrilateral membrane finite element based on the strain approach, Measurement, vol. 50, pp. 263–269, 2014.
- [Reza.13] Rezaiee-Pajand M. and Karkon M., An effective membrane element based on analytical solution. European Journal of Mechanics A/Solids 39:268-279, 2013.
- [Sabi.72] Sabir A.B. and Lock A.C., A curved cylindrical shell finite element, IJMS. Vol.14, pp. 125-135, 1972.
- [Sabi.75] Sabir A. B., Stiffness matrices for general deformation (out of plane and in plane) of curved beam members based on independent strain functions. The Math. Finite Elements and Appl. 11, 34 411-21, 1975.
- [Sabi.78] Sabir A. B. and Ashwell D. G., Diffusion of concentrated loads into thin cylindrical shells, The Mathematics of Finite Elements and Application III. Editor J.R.Whiteman, Academic Press, 1978.
- [Sabi.82] Sabir A. B. and Charchafchi T. A., Curved rectangular and quadrilateral shell elements for cylindrical shells. The Mathematics of Finite Elements and Application IV. Editor J.R. Whiteman, 231-239, Academic Press, 1982.
- [Sabi.85] Sabir A. B., A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom, Chapter 9 in Proceeding of the 2nd International Conference on Variational Methods in Engineering, Southampton University, Springer-Verlag,

- Berlin, pp. 17-25, 1985.
- [Sabi.86] Sabir A. B. and Salhi H. Y., A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates, *Res. Mechanica* 19, pp. 1-16, 1986.
- [Sabi.95] Sabir A. B. and Sfindji A., Triangular and Rectangular Plane Elasticity Finite Elements. *Thin-Walled Structures*, vol. 21, pp. 225-232, 1995.
- [Salh.86] Salhi H. Y. and Sabir A. B., A strain based finite element for general plane elasticity problems in polar coordinates. *Res Mechanica* 19, 1-16, 1986.
- [Smit.14] Smith I. M, Griffith D.V. and Margetts L. *Programming the Finite Element Method*, 5th ed., John Wiley & Sons, Ltd, UK, 2014.
- [Stra.73] Strang G. and Fix G., *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [Sze.92] Sze K. Y., Chen W. and Cheung Y. K., An efficient quadrilateral plane element with drilling degrees of freedom using orthogonal stress modes. *Comput Struct* 42(5):695–705, 1992.
- [Turn.56] Turner, M. J., Clough R. W., Martin H. C. and Topp L. C., Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23 :805–882, 1956.
- [Yeo.96] Yeo, S. T. and Lee B. C., Equivalence between enhanced assumed strain method and assumed stress hybrid based on the Hellinger–Reissner principle. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39: 3083–3099, 1996.
- [Yunu.91] Yunus S. M., Pawlak T.P. and Cook R. D., "Solid elements with rotational degrees of freedom: Part 1—hexahedron elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:573-92, 1991.
- [Yanu.89] Yanus S. M., Saigal S. and Cook R. D., On improved hybrid finite element with rotational degrees of freedom. *Int J Numer Methods Eng* 28(4):785-800, 1989.
- [Zhan.97] Zhang Z., Analysis of some quadrilateral nonconforming elements for incompressible elasticity, *SIAM J. Numer. Anal.* 34(2) 640–663, 1997.
- [Zoua.16] Zouari W., Hammadi F. and Ayad R., Quadrilateral membrane finite elements with rotational DOFs for the analysis of geometrically linear and nonlinear plane problems. *Computers and Structures* 173:139–149, 2016.

Annexe

Construction des matrices

✓ La matrice de transformation [A] (9x9) de l'élément **SBTDR** est donnée comme suit :

$$[C] = \begin{bmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ [C_3] \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Où la matrice [C_i] (3x9) avec les coordonnées (x_i, y_i) du nœud i (i=1,2,3) est :

$$[C_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_i & x_i & x_i y_i & 0 & -(vx_i^2 + y_i^2)/2 & y_i/2 & (-\frac{R}{2}x_i^2 y_i + \frac{R}{6}y_i^3 - \frac{y_i^3}{3}) \\ 0 & 1 & x_i & 0 & -(y_i^2 + x_i^2)/2 & y_i & x_i y_i & x_i/2 & (-\frac{R}{2}y_i^2 x_i + \frac{R}{6}x_i^3 - \frac{x_i^3}{3}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x_i & 0 & y_i & 0 & (x_i^2 - y_i^2)k \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

✓ Les matrices [Q] et [P] sont données respectivement comme suit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & -vx & 0 & -\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -vy & 1 & x & 0 & -\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}yx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (x^2 + y^2) \end{bmatrix} \quad (A.3)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -(vx^2 + y^2)/2 & y/2 & (-\frac{R}{2}x^2 y + \frac{R}{6}y^3 - \frac{y^3}{3}) \\ 0 & 1 & x & 0 & -(y^2 + x^2)/2 & y & xy & x/2 & (-\frac{R}{2}y^2 x + \frac{R}{6}x^3 - \frac{x^3}{3}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -x & 0 & y & 0 & (x^2 - y^2)k \end{bmatrix} \quad (A.4)$$

✓ La matrice de déformation axisymétrique $[Q^*]$ de l'élément SBTDR

$$[Q^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & -vr & 0 & -\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}rz \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -vz & 1 & r & 0 & -\frac{(1-\nu)}{(1+\nu)}zr \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (r^2 + z^2) \\ \frac{1}{r} & 0 & \frac{z}{r} & 1 & z & 0 & -\frac{(vr^2 + z^2)}{2r} & \frac{z}{r} & \left(-\frac{R}{2r}r^2z + \frac{R}{6r}z^3 - \frac{z^3}{3r}\right) \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

✓ Les matrices $[Q]$ et $[P]$ de l'élément SBTIE sont données respectivement comme suit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.6)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -\frac{y^2}{2} & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & x & 0 & -\frac{x^2}{2} & y & xy & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (A.7)$$

✓ La matrice de déformation axisymétrique $[Q^*]$ de l'élément SBTIE

$$[Q^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{z}{r} & 1 & z & 0 & -\frac{z^2}{2r} & \frac{z}{2r} \end{bmatrix} \quad (A.8)$$

✓ Les matrices $[Q]$ et $[P]$ de l'élément SBTIEE sont données respectivement comme

suit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & -vx & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -vy & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (A.9)$$

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & -\frac{vx^2 + y^2}{2} & \frac{y}{2} \\ 0 & 1 & x & 0 & -\frac{vy^2 + x^2}{2} & y & xy & \frac{x}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

✓ La matrice de déformation axisymétrique $[Q^*]$ de l'élément SBTIEE

$$[Q^*] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & z & 0 & -vr & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -vz & 1 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{z}{r} & 1 & z & 0 & -\frac{vr^2 + z^2}{2r} & \frac{z}{2r} \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$