République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed khider Biskra

Faculté Des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

laboratoire de mathematiques et sciences appliquées université Ghardaia

Thése présentée en vue de l'obtention du

Diplôme de Doctorat

Spécialité : Mathématiques

Option : Équations Différentielles ordinaires

par

Lemkeddem Mouna

Sur l'existence de solutions de certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire

---

Soutenue le :12-07-2021 devant la jury :

Pr.Dr.Zohir MOKHTARI	*Professeur*	U.Biskra	Président
Dr.Tidjani MENASSER	*MCA*	U.Biskra	Examinateur
Dr.Nadjet ABADA	*MCA*	ENS. Constantine	Examinateur
Pr.Dr.Hadda HAMMOUCHE	*Professeur*	U.Ghardaia	Rapporteur

Dédicace

Je dédie ce travail à :

la memoire de mon pére et de ma mére

mon mari et mes enfants Ilyes, Isra, Zakaria

toute la famille

Remerciements

Tout d' abord, je voudrais remercier ma directrice de thèse, Dr. Hadda HAMMOUCHE, pour la confiance qu' elle m' a accordée, ainsi que pour sa disponibilité, et sa patience dans la direction de ce travail ; tous mes remerciements chalereux.

Je remercie Pr.Dr. Zohir MOKHTARI pour avoir accepté de présider le jury.

Dr. Nadjet ABADA, Dr. Tidjani MENASSER, qui m' ont fait l' honneur d' accepter de rapporter sur ma thése, trouvent ici l' expression de toute ma gratitude.

Résumé

Sur l'existence de solutions de certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire

Les équations différentielles fractionnaires ont fait l'objet de plusieurs travaux. L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement de la théorie d'existence des solutions de certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire. Les résultats obtenus dans ce travail sont basés sur la technique de combinaison de la théorie du point fixe et la théorie des familles résolvantes, en donnant des conditions suffisantes qui assurent l'existence de solutions faibles d'équations différentielles d'évolutions impulsives fractionnaires d'ordre $0 < \alpha < 1$ dans les espaces de Banach separable. L'étude de ces équations est faite sous conditions locales et non locales avec un retard fini.

En suite ; on s'intéresse à l'étude de la contrôlabilité de ces équations. Des exemples illustratifs sont donnés pour chaque cas.

Mots-clés : Equation différentielle d'ordre fractionnaire, solution faible, contrôlabilité, théorème de point fixe, famille résolvante.

Abstract

The existence of solutions of certain classes of fractional differential equation

Fractional differential equations have been the subject of several studies. The objective of this thesis is to contribute to the development of the theory of existence of the solutions of some classes of differential equations and inclusions of fractional order. The results in this work are obtained by combining the fixed point theory and the resolvent families, provide sufficient conditions to ensure the existence of weak solutions for some impulsive evolution fractional differential equation of order $0 < \alpha < 1$*, the considered equation are with local and non local conditions and finite delay.*

Also ; We are interested by the controllability of these equations, and we project this study to inclusion. Some examples are given to illustrate previous results.

Key word : *Fractional differential equation, weak solution, controllability, fixed point theorem, resolvent family.*

الملخص

إن المعادلات التفاضلية الكسرية موضوع العديد من الدراسات ، والهدف من هذه الأطروحة هو المساهمة في تطوير نظرية وجود حلول لبعض فئات المعادلات التفاضلية الكسرية $1 > \alpha > 0$ في فضاءات بناخ قابلة للفصل.

تستند النتائج التي تم الحصول عليها إلى طريقة الجمع بين نظرية النقطة الثابتة ، و عائلات الحالات S_α بإعطاء الشروط الكافية التي تضمن وجود حلول ضعيفة لهذه المعادلات.

ندرس هذه المعادلات تحت شروط محلية و غير محلية بتأخير منته ، كما ندرس قابلية التحكم لهذه المعادلات وسنقدم أمثلة توضيحية.

الكلمات المفتاحية : المعادلة التفاضلية الكسرية - الحل الضعيف - قابلية التحكم - نظرية النقطة الثابتة - عائلة الحالات.

Introduction générale

Les origines de la théorie de la dérivation fractionnaire remontent à la fin du 17-ième siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. La première question qui a conduit au calcul fractionnaire était : Est ce que la dérivée d'ordre entier $\frac{d^n f}{dx^n}$ peut être étendue à un ordre fractionnaire ? question à laquelle la réponse était affirmative.

S.F.Lacroix a développé facilement un exercice mathématique simple généralisé à partir d'un cas d'ordre entier, en commençant par $f(x) = x^m$, la dérivée n-ième

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, m \geq n.$$

Grace à l'utilisation du symbole de Legendre pour la factorielle généralisée (la fonction de Gamma), il a obtenu

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}, m \geq n.$$

La première conférence sur le thème de la dérivèe fractionnaire a été organisée en juin 1974 par B.Ross intitulée " First conference on fractional calculus And its application " à l'université de New Haven. Pour la première monographie le mérite revient à K.B.Oldham et J. Spanier, qui ont publié un livre [42] consacré au calcul fractionnaire en 1974 après un travail de collaboration entamé en 1968. Cet ouvrage est le premier du genre qui rassemble les divers résultats sur le calcul fractionnaire. Une synthèse théorique a été proposée dans le livre de K. S. Miller et B. Ross [41] où certains aspects algébriques des équations différentielles d'ordres fractionnaires sont substantiellement développés. Aussi, on cite l'ouvrage russe de S.G.Samko et al [49] paru en 1987, ce livre regroupe un ensemble de résultats et d'applications des dérivées d'ordre fractionnaire. Sans oublier le livvre de I.Podlubny [44] qui fait l'étude générale des équations différentielles fractionnaires.

Le sujet des équations différentielles fractionnaires a fait l'objet d'investigation important avec un intéret croissant. En effet, on peut trouver de nombreuses études dans divers domaines des sciences et d'ingénierie voir les monographies [4],[23],[32],[36],[53].
En outre, les problèmes d'existence, de singularité et d'autres propriétés qualitatives de la solution des équations différentielles semi-linéaires dans les espaces de Banach ont été étudiées dans la littérature voir par exemple [1], [12], [17], [18] , [20],[22], [38].
D'autre part, la littérature consacrée aux équations differentielles impulsives, nous mentionnons, par exemple [5], [9], [14], [15], [33], [37], [50].

Motivés par les travaux des chercheurs M.Benchohra, H.Hammouche, N.Abada, K.Aissani, dans cette thése, nous sommes préocupées par l'existence de solutions faibles de certains classes d'ordre fractionnaire d'équations differentielles semi-linéaires impulsives avec conditions locales et non locales lorsque le retard est fini dans un espace de Banach séparable.
Ainsi, On va proposer un ensemble de résultats contribuant au développement de cette thématique. On commençe l'étude par l'existence de solutions faibles de certaines équations différentielles fonctionnelles d'évolutions d'ordre fractionnaire $0 < \alpha < 1$ avec impulsion im-

pliquant une condition de Lipschitz sur le terme I_k. Aussi, on traite principalement ce genre d'équations avec conditions non locales en utilisant des théorèmes du point fixe : Burton et kirk, krasnoselskii et d'autre théorèmes, combinés avec la théorie des familles résolvantes. On traite également la question de la contrôlabilité de ces équations. Cette thèse se compose de quatre chapitres :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, on présente quelques outils de base : la fonction spécifique Gamma, définition des dérivées et intégrales fractionnaire au sens de Riemann- Liouville, et Caputo et quelques propriétés complémentaire, On présente quelque théorèmes de points fixes et les familles résolvantes, on cite des définitions utiles tout au long de la thèse .

Chapitre 2 : Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions faibles pour certaines équations différentielles fractionnaires fonctionnelles, on s'appuiera sur le théorème du point fixe pour la somme des opérateurs de type complètement continue et contraction dus à Burton et Kirk.

Chapitre 3 : Le chapitre à pour but d'étudier l'existence de solutions faibles d'équation differentielle fractionnaire avec condition non local en utilisant le théorème de krasnoselskii.

Chapitre 4 : Ce chapitre est dédié à la contrôlabilité d'équation différentielle fractionnaire semi linéaire impulsive avec une condition non local dans les espaces de Banach .

Table des matières

1. Hadda Hammouche, Mouna Lemkeddem, Kaddour Guerbati, Khalil Ezzinbi, *Existance results for some impulsive partial functional fractional differential equation*, Asian-European Journal of Mathematics, Vol. 12, No.1 (2019) 2050074 (23 pages)

1. Mouna Lemkeddem, Hadda Hammouche, Kaddour Guerbati, Mouffak Benchohra, *Impulsive partial functional differential equations with non-local conditions*, Mathematics In Engineering, Science And Aerospace, Vol.10, No.2, PP.303-321, 2019

Chapitre 1

Preliminaires

1.1 Fonction spécifique

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma a été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) dans son objectif de généraliser la factorielle des valeurs non entières. Plus tard, en raison de sa grande importance, elle a été étudiée par d'autres mathématiciens comme Adrien Marie Legendre (1752-1833), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Christoph Gudermann (1798-1852), Joseph Liouville (1809-1882), Karl Weierstrass (1815-1897), Charles Hermite (1822-1901) et beaucoup d'autres. Elle apparaît également dans divers domaines, comme les séries asymptotiques, série hypergéométrique, fonction zêta de Riemann, théorie des nombres..., Pour plus de détails sur cette fonction (voir [8] ,[27]).

Définition 1.1 *Pour* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(z) > 0$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe.

1.1.2 Quelque propriétès

▶ Une propriété important de $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z \times \Gamma(z),$$

▶ En particulier

$\forall \in \mathbb{N}^* : \Gamma(n+1) = n!$ (La fonction gamma s'appelle aussi fonction factorielle généralisée).

▶ La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)...(z+n)},$$

▶ Dans de nombreux cas il est plus commode d'employer la fonction Bêta au lieu d'une certaine combainaison des valeurs de la fonction Gamma.

la fonction Bêta est définie par :

$$B(x,y) = \int_0^\infty t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

qui peut être liée avec la fonction gamma $\Gamma(z)$ par la relation suivante :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x) \times \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

▶ La fonction exponentielle exp(z), joue un rôle trés important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre qui généralise la fonction exponentielle a été introduite par Mittag-Leffler en 1993 et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad \textit{pour } Z \in \mathbb{C} \textit{ tel que } Re(Z) > 0,$$

En particulier, si $\alpha = 1$ on trouve la fonction exponentielle

$$E_1(z) = e^z.$$

La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres, a été introduite par Agarwal et Erdelyi et elle est définie par un développement en serie suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

1.2 Intégrales et dérivées fractionnaires

1.2.1 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par

$$\mathscr{I}^n f(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s) ds; \; t > a \text{ et } n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.2.1}$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante :

Définition 1.2 *L'intégrale fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ *d'une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, $-\infty < a < b < +\infty$, *est formellement définie* *par*

$$\mathscr{I}_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \;\; a < t < b.$$

1.2.2 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3 *Pour $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$, la dérivée fractionnaire à gauche au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est formellement définie par*

$$\mathscr{D}_a^\alpha f(t) := \mathscr{D}^n \mathscr{I}_a^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_\alpha^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \;\; a < t < b,$$

où $\mathscr{D}^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

On va présenter maintenant quelques propriétés de l'opérateur de dérivation au sens de Riemann-Liouville.

Lemme 1.1 *Soient $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a, b])$, alors la dérivée fractionnaire $\mathscr{D}_a^\alpha f$ existe presque partout sur $[a, b]$; en plus, elle est donnée par*

$$\mathscr{D}_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(1+k-\alpha)} (t-a)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(s) ds}{(t-s)^{\alpha-n+1}},$$

Où $AC^n([a, b]) := \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; (D^{n-1} f)(x) \in AC[a, b]\}$

Remarque 1.1 *Une fonction possédant une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville n'est pas nécessairement continue.*

La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est linéaire comme c'est le cas de la dérivation usuelle.

Théorème 1.1 *Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existe. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mathscr{D}_a^\alpha(\lambda f + \mu g)$ existe, et l'on a*

$$\mathscr{D}_a^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda \mathscr{D}_a^\alpha f(t) + \mu \mathscr{D}_a^\alpha g(t).$$

Théorème 1.2 *Soient $\alpha, \beta > 0$ tels que $n-1 \leq \alpha < n$, $m-1 < \beta < m$ $(n, m \in \mathbb{N}^*)$, alors on a*

1. *Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour tout $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$ la relation*

$$\mathscr{D}_a^\beta\big(\mathscr{I}_a^\alpha f\big)(t) = \mathscr{I}_a^{\alpha-\beta} f(t),$$

est vraie presque partout sur [a,b].

2. *Si $\beta \geq \alpha > 0$, et si la dérivée fractionnaire $\mathscr{D}_a^{\beta-\alpha}$ existe, alors on a*

$$\mathscr{D}_a^\beta\big(\mathscr{I}_a^\alpha f\big)(t) = \mathscr{D}_a^{\beta-\alpha} f(t).$$

3. *Si $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$ et $\mathscr{I}_a^{n-\alpha} f \in AC^n[a,b]$, alors l'égalité*

$$\mathscr{I}_a^\alpha \mathscr{D}_a^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathscr{D}^{n-k}\big[\mathscr{I}_a^{n-\alpha} f\big](a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(t-a)^{\alpha-k},$$

est vraie presque partout sur [a,b]. *En particulier, pour $0 < \alpha < 1$*

$$\mathscr{I}_a^\alpha \mathscr{D}_a^\alpha f(t) = f(t) - \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathscr{I}_a^{1-\alpha} f(a), \ p.p.\ t \in [a,b]$$

4. *Pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, si les dérivées fractionnaires $\mathscr{D}_a^\alpha f$ et $\mathscr{D}_a^{k+\alpha} f$ existent, alors*

$$\mathscr{D}^k\big(\mathscr{D}_a^\alpha f(t)\big) = \mathscr{D}_a^{k+\alpha} f(t), \ pour\ tout\ t \in [a,b].$$

5. *Pour $f \in \mathbb{L}^1[a,b]$, si $\mathscr{I}_a^{m-\beta} f \in AC^m[a,b]$ et $\alpha + \beta < n$, alors on a*

$$\mathscr{D}_a^\alpha\Big(\mathscr{D}_a^\beta f(t)\Big) = \Big(\mathscr{D}_a^{\alpha+\beta} f\Big)(t) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\mathscr{D}^{m-k}\Big[\mathscr{I}_a^{m-\beta} f\Big](a)}{\Gamma(1-\alpha-k)}(t-a)^{-k-\alpha}, \ pour\ tout\ t \in [a,b].$$

La définition de la différentiation fractionnaire du type Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires et pour son application dans les mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre entier, définition de nouvelles classes de fonctions, sommation des séries...).Cependant, les problèmes appliqués demandent des définitions de dérivées fractionnaires autorisant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, lesquelles contiennent $f(a), f^{'}(a)$, etc... .

1.2.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Beaucoup de problèmes concrets utilisent les dérivés fractionnaires assujetties à des conditions initiales plus au moins naturelles. Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville mène à des conditions initiales contenant des valeurs limites de dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville en la borne inférieure $t = a$. Malgré la possibilité de résoudre mathématiquement avec de telles conditions initiales, leurs solutions ne sont pas encore bien comprises, puisque il n'y a pas d'interprétation physique adéquate de tel type de conditions initiales.

En 1967 M. Caputo [19] proposa un concept modifié de la dérivation fractionnaire, qui prévoit la formulation des conditions initiales sous forme qui fait apparaitre seulement les valeurs limites des dérivées d'ordre entier en la borne inférieure (l'instant initial) $t = a$ comme $f(a), f^{'}(a), f^{"}(a), ...$

La définition formelle de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par :

Définition 1.4 *La dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est donnée par*

$$^{C}\mathscr{D}_a^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \ a < t < b,$$

avec

$$n = [\alpha] + 1 \ si \ \alpha \notin \mathbb{N}; \ n = \alpha \ pour \ \alpha \in \mathbb{N}.$$

La relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et celle de Riemann-Liouville sur l'intervalle [a,b] est décrite par le théorème suivant :

Théorème 1.3 *Soit $\alpha > 0, \ n = [\alpha] + 1$. Si f possède n-1 dérivées en a et si $\mathscr{D}_a^{\alpha} f$ existe, alors*

$$^{C}\mathscr{D}_a^{\alpha} f(t) = \mathscr{D}_a^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right],$$

presque partout sur [a,b].

Remarque 1.2 *On constate que la dérivée au sens de Caputo n'est définie que si celle de Riemann-Liouville existe et que la fonction est (n-1) fois dérivable au sens ordinaire.*

Pour plus de détails du calcul fractinnaire, on renvoie le lecteur interessé à [2, 3, 36, 40, 44, 49, 56]

1.3 Théorèmes de points fixes

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles en mathématique et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales.

En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de point fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

On commence par la définition d'un point fixe

Définition 1.5 *Soit f une application d'une ensemble E dans lui même. On appelle point fixe de f tout point $u \in E$ tel que*

$$f(u) = u.$$

En 1922, Stefan Banach prouva son fameux résultat dit "principe d'application contractante de Banach", ce théorème est le résultat le plus utilisé puisqu'il n'assure pas seulement l'existence d'un point fixe mais aussi son unicité.

Le théorème de point fixe de Banach repose essentiellement sur les définitions suivantes :

Définition 1.6 *Soit (E,d) un espace métrique. Une application $f : E \to E$ est dite Lipschitzienne de constante $L \geq 0$ si elle vérifier*

$$\forall u, v \in E, \quad d\big(f(u), f(v)\big) \leq Ld(u, v).$$

Définition 1.7 *L'application Lipschitzienne f est dite une application contractante si $L = 1$. Dans le cas où $L \in (0,1)$, f est dite une application strictement contractante.*

Théorème 1.4 *(Principe d'application contractante de Banach) Soit (E,d) un espace métrique complet et soit $f : E \to E$ une application strictement contractante, alors f admet unique point fixe.*

Le deuxième résultat de point fixe est le théorème de point fixe de Burton et Kirk [16]

Théorème 1.5 *Soit X un espace de Banach et $A, B : X \to X$ deux opérateurs satisfaisant :*

i) A est une application contractante, et *ii) B est complètement continu*

Alors, non plus :

a) l'équation de l'opérateur $y = A(y) + B(y)$ admet une solution, ou

b) l'ensemble $\Upsilon = \{u \in X : \lambda A(\frac{u}{\lambda}) + \lambda B(u) = u,\ \lambda \in (0,1)\}$ est non borné.

Voici enfin le théorème de point fixe de **Krasnoselskii**

Théorème 1.6 ***(Théorème du point fixe de Krasnoselskii)*** *Soit X un espace de Banach, et soit D un sous-ensemble de X borné, convexe et fermé, et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont deux applications de D dans X telsque $\mathcal{A}x + \mathcal{B}y \in D$ pour tout $(x, y) \in D$. Si $\mathcal{A}$ est une contraction et $\mathcal{B}$ est complétement continu, Alors l'equation $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x = x$ admet une solution x sur D.*

1.4 Définitions et théorèmes

1.4.1 Intégrales au sens de Bochner

Soient E un espace de Banach muni de la norme $\| \,.\, \|$, (a,b) un intervalle de $\mathbb{R}$ et μ une mesure sur (a,b) donnée par $d\mu(t) = \omega(t)dt$ où ω est une fonction positive continue sur (a,b). $\{A_1, ..., A_k\}$ est une collection finie de sous-ensembles mutuellement disjoints de (a,b) avec mesures finies μ et $\{x_1, ..., x_k\}$ est un ensemble d'éléments de E.

Définition 1.8 *Une fonction ϕ définie par*

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{A_i}(t)x_i, \quad a < t < b \tag{1.4.1}$$

est appelée une fonction simple.

On définit l'intégrale de ϕ par rapport à la mesure μ sur (a,b) par

$$\int_a^b \phi(t)d\mu(t) = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_{A_i}(t)x_i d\mu(t) = \sum_{i=1}^{n}(\int_{A_i} \omega(t)dt)x_i. \tag{1.4.2}$$

où $\mathcal{X}_{A_i}$ la fonction caractéristique de A_i.

Définition 1.9 *Une fonction $f : (a,b) \to E$ est dite mesurable s'il existe une suite de fonctions simples $\{\phi_n\}$ de supports inclus dans (a,b) tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \| f(t) - \phi_n(t) \| = 0, \quad p.p. \ dans \ (a,b).$$

Définition 1.10 *Une fonction $f : (a,b) \to E$ est intégrable au sens de Bochner s'il existe une suite de fonctions simples $\{\phi_n\}$ telles que $\| f - \phi_n \|$ est intégrable au sens de Lebesgue pour tout n, et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \| f(t) - \phi_n(t) \| d\mu(t) = 0,$$

dans ce cas l'intégrale de Bochner sur (a,b) est définie par

$$\int_a^b f(t)d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(t)d\mu(t).$$

$L^1[J,E]$ l'espace de Banach des fonctions mesurables $u : J \longrightarrow E$ qui sont integrable au sens de Bochner avec la norme

$$\|u\|_{L^1} = \int_0^b |u(t)|dt$$

1.4.2 Familles Résolvantes

Les références de cette sous-section sont prises de [25, 26, 43]

Définition 1.11 *La famille $(S_\alpha(t))_{t\geq 0} \subset l(X)$ des opérateurs linéaires bornés dans X est appelé un α-famille résolvante d'opérateurs engendré par A si les conditions suivantes sont satisfaites :*

a) $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$ est fortement continu sur $\mathbb{R}_+$ et $S_\alpha(0) = I$;

b) $S_\alpha(t)D(A) \subset D(A)$ et $AS_\alpha(t)x = S_\alpha(t)Ax$ pour tout $x \in D(A)$ et $t \geqslant 0$;

c) Pour tout $x \in X$,$I_t^\alpha S_\alpha(t)x \in D(A)$ et

$$S_\alpha(t)x = x + AI_t^\alpha S_\alpha(t)x, \qquad t \geqslant 0;$$

d) $x \in D(A)$ et $\quad Ax = y \quad$ si et seulement si

$$S_\alpha(t)x = x + AI_t^\alpha S_\alpha(t)y, \qquad t \geqslant 0;$$

e) A dense et fermé.

Le générateur A de $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$ est définit par :

$$D(A) := \{x \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{S_\alpha(t)x - x}{\psi_{\alpha+1}(t)} \quad exists\}$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S_\alpha(t)x - x}{\psi_{\alpha+1}(t)}, \quad x \in D(A).$$

où $\psi_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $t > 0$ et $\psi_\alpha(t) = 0$ for $t \leq 0$ et $\psi_\alpha(t) \to \delta(t)$ comme $\alpha \to 0$,

où la fonction delta est définit par :

$$\delta_a : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}; \quad \phi \to \phi(a)$$

et

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega); \quad supp\phi \subset \Omega \quad \text{is compact}\}$$

Théorème 1.7 *Soit A engendre $(T(t))_{t\geq 0}$ un semi-groupe analytique et compact, Alors pour tout $\alpha \in (0,1)$, il engendre également une famille résolvante analytique et compact $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$.*

Lemme 1.2 *On suppose que la famille résolvante d'opérateur α-FOR $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$ est compact pour $t > 0$ et analytique de type (ω_0, θ_0). Alors les affirmations suivantes sont vrais :*

(i) $\lim\limits_{h\to 0} ||S_\alpha(t+h) - S_\alpha(t)|| = 0, \quad \textit{pour} \quad t > 0;$

(ii) $\lim\limits_{h\to 0^+} ||S_\alpha(t+h) - S_\alpha(h)S_\alpha(t)|| = 0, \quad \textit{pour} \quad t > 0.$

Définition 1.12 *Une α-FOR $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$ est dite exponentiellement bornée s'il existe des constantes $M \geqslant 1$, $w \geqslant 0$ tels que :*

$$\|S_\alpha(t)\| \leqslant Me^{\omega t} \quad \textit{pour } t \geqslant 0,$$

dans ce cas, on écrit $A \in C_\alpha(M, \omega)$.

Proposition 1.1 *Soit $\alpha > 0$, $A \in C_\alpha(M,\omega)$ si et seulement si $(\omega^\alpha, \infty) \subset \rho(A)$ et il existe une fonction fortement continue $S_\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow B(X)$ tel que $\|S_\alpha(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$, $t \geqslant 0$, et*

$$\int_0^\infty Me^{-\lambda t} S_\alpha(t)xdt = \lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha, A)x, \quad \lambda > \omega \quad \textit{et } x \in X$$

En outre, $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$ est un α-FOR engendré par l'operateur A.

$B(x)$ l'algébre de Banach des opérateurs linéaires bornés dans X ;

$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}/\lambda I - A$ est inversible dans $B(X)\}$ l'ensemble résolvant de $A \in B(X)$;

$R(.,A) : \rho(A) \to B(X)$ telque $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ la résolvante de l'opérateur linéaire A. Pour plus de détails sur la théorie de α-FOR, on réfère l'intéressé à Pazy [43].

1.4.3 Définitions complémentaires

Définition 1.13 *Une application $f : [0, b] \times D \to E$ est dite carathéodory si les conditions suivantes sont vérifiées*

1) La fonction $t \mapsto f(t, x)$ est mesurable pour chaque $x \in D$;

2) La fonction $x \mapsto f(t, x)$ est continu pour presque tous $t \in J_k := (t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..m$.

Définition 1.14 *Soit (E, d) et (E, d') deux espaces métriques et H une partie de $C(E, F)$. On dira que H est équicontinue en x_0 si :*

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que $d(x, x_0) \leqslant \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) \leqslant \epsilon$, pour tout $f \in H$.

On rappelle la version du théorème d'Arzéla-Ascoli :

Théorème 1.8 *Soit K un espace métrique compact et F un espace métrique complet. Soit H une partie de $C(K, F)$. Alors, H est relativement compacte dans $C(K, F)$ si et seulement si H est équicontinue et pour tout $x \in K, H(x) = \{f(x); f \in H\}$ est relativement compacte dans F.*

Puisque dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les parties relativement compacte sont des parties bornées, on a :

Corollaire 1 *Soit K un espace métrique compact et H une partie de $C(K)$. Alors H est relativement compacte dans $C(K)$ si et seulement si H est équicontinue et pour chaque $x \in K, H(x) = \{f(x); f \in H\}$ est bornée.*

Chapitre 2

Équation différentielle fonctionelle fractionnaire impulsive avec conditions locales et retard fini

2.1 Introduction

Il est reconnu que la théorie des systèmes impulsifs présente un cadre naturel pour la modélisation mathématique de beaucoup de phénomènes réels. Par exemple en technologie chimique [21], en biotechnologie [31], en économie [24] etc.

Un système impulsif est en fait une combinaison d'un processus continu décrit par une équation différentielle et une équation aux différences qui représente les sauts instantanés de l'état dit "impulsions".

La théorie des équations différentielles ordinaires impulsives a été initiée en 1960 par V. Milman et A. Myshkis et elle a été développée durant la période de 1960-1975 par certains chercheurs ukraniens et russes. Ensuite, de 1975 à 1990, le mérite du développement de cette théorie et de sa popularisation revient au mathématicien américain V.Lakshmikantham. À partir de 1991, en plus de Lakshmikantham, d'autres mathématiciens comme L.Byszewski, D. Bainov contribuaient à l'enrichissement de la théorie des équations différentielles impulsives où ils lancèrent différentes études sur ce sujet et beaucoup de résultats ont été obtenus dès lors.

Récemment, beaucoup de chercheurs ont étudié les équations différentielles fractionnaires impulsives [7, 11, 12, 20] et les références dedans. Aussi la diversité des travaux étudiés a eu un impact considérable sur l'apparition de divers concepts de solution [13, 15, 29, 39]. Cette théorie a connu un développement considérable en utilisant différentes techniques. Voir Abbas et al. [4] et les papiers de Hammouche et al. [29], Wang et al. [55], Balachandran et al. [12], Shu et et al. [51] et leurs références.

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence de solutions faibles de certaines équations différentielles fonctionnelles fractionnaires semi-linéaires de la forme :

$$ {}^cD^{\alpha}_{t_k} y(t) - Ay(t) = f(t, y_t), \quad t \in J_k := (t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..m, \tag{2.1.1} $$

$$ \Delta y|_{y=y_k} = I_k(y(t_k^-)), \qquad k = 1, ..., m, \tag{2.1.2} $$

$$ y(t) = \phi(t), t \in [-r, 0], \tag{2.1.3} $$

Où $0 < \alpha < 1$, $f : [0, b] \times U \to E$ est une fonction donnée, $I_k : E \to E$ $(k = 0, 1, 2, ..., m)$,$0 = t_0 < t_1 < ..... < t_m < t_{m+1} = b$, $\Delta y|_{y=y_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$, où $y(t_k^+) = \lim\limits_{h\mapsto 0^+} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim\limits_{h\mapsto 0^+} y(t_k - h)$ représentent les limites droites et gauches de y quand $t = t_k$,
$U = \{\psi : [-r, 0] \longrightarrow E$, ψ continu partout sauf pour un nombre fini de points aux quels $\psi(s^-)$ et $\psi(s^+)$ existent et $\psi(s^-) = \psi(s)\}$, $\phi \in U$,
$A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est le générateur d'une $\alpha-$ famille résolvante analytique d'opérateur (α-FOR) S_α , pour toute fonction continue y définie sur $[-r, b]\backslash\{t_1, t_2, ..., t_m\}$ et tout $t \in J := [0, b]$, on définit l'histoire de l'état de $t - r$ jusqu'au présent état par

$$y_t(\theta) = y(t + \theta),\ \ \theta \in [-r, 0].$$

$PC\left([-r, b], E\right) = \{y : [-r, b] \to E : y(t)$ est partout continu sauf pour certains $t_k$aux quels $y(t_k^-)$ et $y(t_k^+), k = 1, ...m$ existent et $\ y(t_k^-) = y(t_k)\}$
qui est un espace Banach équipé de la norme

$$||y|| = \sup\{|y(t)| : t \in [-r, b]\},$$

On suppose comme dans la théorie des équations différentielles impulsives que la solution de $(2.1.1) - (2.1.3)$ est telle qu'au point de discontinuité t_k, elle satisfait $y(t_k) = y(t_k^-)$.

2.2 Resultats [1]

Commençons par donner le sens de la solution faible du problème $(2.1.1) - (2.1.3)$.

1. Hadda Hammouche, Mouna Lemkeddem, Kaddour Guerbati, Khalil Ezzinbi, *Existance results for some impulsive partial functional fractional differential equation*, Asian-European Journal of Mathematics, Vol. 12, No.1 (2019) 2050074 (23 pages)

Définition 2.1 *Une fonction $y \in PC([-r,b],E)$ est une solution faible de* $(2.1.1)-(2.1.3)$ *si $y(t)=\phi(t)$, pour tout $t\in[-r,0]$, $\Delta y|_{y=y_k}=I_k(y(t_k^-))$, $k=1,....,m$ et telque y satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$y(t)=\begin{cases} S_\alpha(t)\phi(0)+\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds \quad si \quad t\in[0,t_1]; \\ S_\alpha(t-t_k)\prod\limits_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})\phi(0) \\ +\sum\limits_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\prod\limits_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)f(s,y(s))ds \\ +\int_{t_k}^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds+\sum\limits_{i=1}^{k} S_\alpha(t-t_k)\prod\limits_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)I_i(y(t_i^-)) \quad si \quad t\in(t_k,t_{k+1}). \end{cases}$$

Le résultat de notre travail se base sur le théorème 1.5 de point fixe de Burton et Kirk.

Pour atteindre notre objectif, on introduit les hypothèses suivantes :

($\mathbf{H_1}$) A engendre $(S_\alpha(t))_{t\geq 0}$ α-FOR compact et analytique qui est exponentiellement borné c'est à dire il existe une constante $M\geqslant 1$, $\omega\geqslant 0$ tel que :

$$\|S_\alpha(t)\|\leqslant Me^{\omega t}, \quad t\geqslant 0;$$

($\mathbf{H_2}$) Les fonctions $I_k : E\longrightarrow E$ sont Lipschitz, ie il existe $M_k>0$, pour $k=1,2,3,....,m$ tel que

$$\|I_k(y)-I_k(x)\|\leqslant M_k\|y-x\| \text{ pour tout } y,x\in E$$

et

$$1-\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}M_i>0;$$

($\mathbf{H_3}$) La fonction $f : J\times U\longrightarrow E$ est Carathéodory ;

($\mathbf{H_4}$) Il existe une fonction $p\in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ et une fonction continue non décroissante $\psi:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ tel que $|f(t,y)|\leqslant p(t)\psi(\|y\|_U)$, pp $t\in J$, pour tout $y\in U$ avec $\int_{C_0}^\infty \dfrac{du}{\psi(u)}=\infty$ et $\int_{C_3}^\infty \dfrac{du}{\psi(u)}=\infty$, où

$$C_0 = Me^{wb}\|\phi(0)\| \quad C_3 = min(C_1, C_2),$$

$$C_1 = \frac{M^{k+1}e^{wb}\|\phi(0)\| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}|I_i(0)| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{w(b-t_{k-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-ws}p(s)\psi(\mu(s))ds}{1 - \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}M_i},$$

$$C_2 = \frac{Me^{wb}}{1 - \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}M_i}.$$

Théorème 2.1 *Suppose que* $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_4})$ *sont satisfaites. Alors le problème* $(2.1.1)-(2.1.3)$ *admet au moins une solution faible sur* $[-r, b]$.

Preuve : On transforme le problème $(2.2.1) - (2.2.3)$ en un problème de point fixe. On considére les deux opérateurs :

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} : PC([-r, b], E) \longrightarrow PC([-r, b], E)$$

défini par

$$\mathcal{A}(y)(t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{si } t \in [-r, 0]; \\ \\ S_\alpha(t)\phi(0), & \text{si } t \in [0, t_1]; \\ \\ S_\alpha(t-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i - t_{i-1})\phi(0) + \\ +\sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)I_i(y(t_i^-)) \\ \qquad\qquad \text{si } t \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

et

$$\mathcal{B}(y)(t)=\begin{cases} 0, & \text{si } t\in[-r,0];\\ \\ \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds, & \text{si } \ t\in[0,t_1];\\ \\ \sum\limits_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\times\prod\limits_{j=i}^{k-1}S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)f(s,y(s))ds \\ \quad +\int_{t_k}^{t} S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds & \text{si } t\in(t_k,t_{k+1}).\end{cases}$$

Alors trouver la solution du (2.1.1) − (2.1.3) revient à trouver la solution de l'équation opérationelle $\mathcal{A}(y)(t)+\mathcal{B}(y)(t)=y(t)$, $t\in[-r,b]$, on doit montrer que les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont toutes les conditions du théorème 1.5. On donne la preuve en plusieurs étapes.

Étape 1 $\mathcal{B}$ est continu

Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite telle que $y_n\longrightarrow y$ dans $PC([-r,b],E)$. Alors

i) Pour $t\in[0,t_1]$, on a

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{B}(y_n)(t)-\mathcal{B}(y)(t)\big| &= \Big|\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,y_n(s))ds-\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds\Big|\\ &\leq \int_0^t \big\|S_\alpha(t-s)\big\|\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\ &\leq Me^{wt}\int_0^t e^{-ws}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds\longrightarrow 0\end{aligned}$$

puisque f est continu et $y_n\longrightarrow y$

ii) Pour $t\in[t_k,t_{k+1}]$ $\quad k\geqslant 1$

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{B}(y_n)(t)-\mathcal{B}(y)(t)\big| &= \Big|\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1}S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)[f(s,y_n(s))-f(s,y(s))]ds\\ &+\int_{t_k}^{t} S_\alpha(t-s)[f(s,y_n(s))-f(s,y(s))]ds\Big|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\big\|S_\alpha(t-t_k)\big\|\prod_{j=i}^{k-1}\big\|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\big\|\big\|S_\alpha(t_i-s)\big\|\big|f(s,y_n(s))\\
&- f(s,y(s))\big|ds+\int_{t_k}^{t}\big\|S_\alpha(t-s)\big\|\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}Me^{w(t-t_k)}\prod_{j=i}^{k-1}Me^{w(t_{j+1}-t_j)}Me^{w(t_i-s)}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&+ \int_{t_k}^{t}Me^{w(t-s)}\times\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}Me^{w(t-t_k)}[Me^{w(t_{i+1}-t_i)}Me^{w(t_{i+2}-t_{i+1})}Me^{w(t_{i+3}-t_{i+2})}\times\\
&\times\ \ldots\times Me^{w(t_k-t_{k-1})}]Me^{w(t_i-s)}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&+ \int_{t_k}^{t}Me^{w(t-s)}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}Me^{wt}[M^{k-1-i+1}]Me^{-ws}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&+ Me^{wt}\int_{t_k}^{t}e^{-ws}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&\leq \sum_{i=1}^{k}M^{k-i+2}e^{wt}\int_{t_{i-1}}^{t_i}e^{-ws}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&+ Me^{wt}\int_{t_k}^{t}e^{-ws}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\longrightarrow 0
\end{aligned}$$

puisque f continu et $y_n \longrightarrow y$,

donc $\|\mathcal{B}(y_n)-\mathcal{B}(y)\|_\infty \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$,

ce qui montre $\mathcal{B}$ est continu.

Étape2 $\mathcal{B}$ borné dans $PC([-r,b],E)$.

L'opérateur linéaire $\mathcal{B} : PC([-r,b],E) \longrightarrow PC([-r,b],E)$ est borné si seulement si il transforme un ensemble borné en ensemble borné ; c'est à dire il suffit de montrer que pour tout $q > 0$ il existe des constantes positives $l_k; k = 1, .., m.$ tel que pour tous $y \in \mathbf{B}_q = \{y \in PC([-r, b], E) : \|y\| \leq q\}$ on a $\|\mathcal{B}(y)\| \leq l_k$.

Soit $y \in \mathbf{B}_q$. alors,

$$|\mathcal{B}(y)(t)| \leqslant \begin{cases} \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\| |f(s, y(s))| ds, & \text{si } t \in [0, t_1]; \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|S_\alpha(t-t_k)\| \times \\ \prod\limits_{j=i}^{k-1} \|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\| \|S_\alpha(t_i - s)\| |f(s, y(s))| ds + \int_{t_k}^t \|S_\alpha(t-s)\| |f(s, y(s))| ds, \\ \qquad \text{si } t \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

Puisque $\|S_\alpha(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ et $|f(t, y)| \leqslant p(t)\psi(\|y\|_U)$ on a :

$$|\mathcal{B}(y)(t)| \leqslant \begin{cases} \int_0^t Me^{\omega(t-s)} p(s)\psi(q) ds, & \text{si } t \in [0, t_1]; \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Me^{\omega(t-t_k)} \times \\ \prod\limits_{j=i}^{k-1} Me^{\omega(t_{j+1}-t_j)} Me^{\omega(t_i - s)} p(s)\psi(q) ds + \int_{t_k}^t Me^{\omega(t-s)} p(s)\psi(q) ds, \\ \qquad \text{si } t \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

Qui donne

$$|\mathcal{B}(y)(t)| \leqslant \begin{cases} Me^{\omega t_1}\psi(q) \int_0^t e^{-\omega s} p(s) ds = l_1, & \text{si } t \in [0, t_1]; \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{k} Me^{\omega(t-t_k)} [Me^{\omega(t_{i+1}-t_i)} Me^{\omega(t_{i+2}-t_{i+1})} \ldots.. Me^{\omega(t_{k-1}-t_{k-2})} Me^{\omega(t_k - t_{k-1})}] Me^{\omega t_i} \\ \times \psi(q) \int_{t_{i-1}}^{t_i} p(s) e^{-\omega s} ds + Me^{\omega t}\psi(q) \int_{t_k}^t p(s) e^{-\omega s} ds, \\ \qquad \text{si } t \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

Alors

$$|\mathcal{B}(y)(t)| \leqslant \begin{cases} Me^{\omega t_1}\psi(q)\int_0^t e^{-\omega s}p(s)ds = l_1, & \text{si } t \in [0,t_1]; \\ \\ \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_k+t_{i+1}-t_i+t_{i+2}-t_{i+1}+....+t_{k-1}-t_{k-2}+t_k-t_{k-1}+t_i)} \\ \times\psi(q)\int_{t_{i-1}}^{t_i} p(s)e^{-\omega(s)}ds + Me^{\omega(t)}\psi(q)\int_{t_k}^{t} p(s)e^{-\omega(s)}ds, & \text{si } t \in (t_k,t_{k+1}). \end{cases}$$

En utilisant la caractéristique de la fonction exponentielle, on obtient

$$|\mathcal{B}(y)(t)| \leqslant \begin{cases} Me^{\omega t_1}\psi(q)\int_0^t e^{-\omega s}p(s)ds = l_1, & \text{si } t \in [0,t_1]; \\ \\ \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_{k-1})}\times \\ \psi(q)\int_{t_{i-1}}^{t_i} p(s)e^{-\omega s}ds + Me^{\omega t}\psi(q)\int_{t_k}^{t} p(s)e^{-\omega s}ds, & \text{si } t \in (t_k,t_{k+1}). \end{cases}$$

Finalement, on obtient

$$|\mathcal{B}(y)(t)| \leqslant \begin{cases} Me^{\omega t_1}\psi(q)\int_0^t e^{-\omega s}p(s)ds = l_1, & \text{si } t \in [0,t_1]; \\ \\ \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t_{k+1}-t_{k-1})}\times \\ \psi(q)\int_{t_{i-1}}^{t_i} p(s)e^{-\omega s}ds + Me^{\omega t_{k+1}}\psi(q)\int_{t_k}^{t} p(s)e^{-\omega s}ds = l_k, \quad k=2,..,m, \\ \qquad \text{si } t \in (t_k,t_{k+1}). \end{cases}$$

Étape3 $\mathcal{B}$ transforme un ensemble borné en un ensemble équicontinu dans $PC([-r,b],E)$.

Soient $\tau_1,\tau_2 \in J\backslash\{t_1,t_2,...,t_m\}$ avec $\tau_1<\tau_2$, $\mathbf{B}_q$ l'ensemble borné dans $PC([-r,b],E)$ donné dans l'étape2, et soit $y\in\mathbf{B}_q$.

• Si $\tau_1,\tau_2\in[0,t_1]$ on a :

$$\begin{aligned} \big|\mathcal{B}(y(\tau_2)) - \mathcal{B}(y(\tau_1))\big| &= \Big|\int_0^{\tau_2} S_\alpha(\tau_2-s)f(s,y(s))ds \\ &- \int_0^{\tau_1} S_\alpha(\tau_1-s)f(s,y(s))ds\Big| \end{aligned}$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur intégral et l'hypothèse H_4, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{B}(y(\tau_2)) - \mathcal{B}(y(\tau_1))\right| &= |\int_0^{\tau_1} S_\alpha(\tau_2 - s) f(s, y(s)) ds \\
&\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\alpha(\tau_2 - s) f(s, y(s)) ds - \int_0^{\tau_1} S_\alpha(\tau_1 - s) f(s, y(s)) ds| \\
&= |\int_0^{\tau_1} \left(S_\alpha(\tau_2 - s) - S_\alpha(\tau_1 - s)\right) f(s, y(s)) ds \\
&\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\alpha(\tau_2 - s) f(s, y(s)) ds| \\
&\leq \int_0^{\tau_1} \|S_\alpha(\tau_2 - s) - S_\alpha(\tau_1 - s)\| |f(s, y(s))| ds \\
&\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|S_\alpha(\tau_2 - s)\| |f(s, y(s))| ds \\
&\leq \psi(q) \int_0^{\tau_1} \|S_\alpha(\tau_2 - s) - S_\alpha(\tau_1 - s)\| p(s) ds \\
&\quad + M e^{w\tau_2} \psi(q) \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-ws} p(s) ds
\end{aligned}$$

Si $\tau_1 = 0$, la partie droite de l'inégalité précédente tend uniformément à zéro quand $\tau_2 \to 0$ pour $y \in PC$.

Si $0 < \tau_1 < \tau_2$ pour $\epsilon > 0$ avec $\epsilon < \tau_1 < \tau_2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{B}(y(\tau_2)) - \mathcal{B}(y(\tau_1))\right| &\leq \int_0^{\tau_1 - \epsilon} \|S_\alpha(\tau_2 - s) - S_\alpha(\tau_1 - s)\| |f(s, y(s))| ds \\
&\quad + \int_{\tau_1 - \epsilon}^{\tau_1} \|S_\alpha(\tau_2 - s) - S_\alpha(\tau_1 - s)\| |f(s, y(s))| ds \\
&\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|S_\alpha(\tau_2 - s)\| |f(s, y(s))| ds \\
&\leq \psi(q) \int_0^{\tau_1 - \epsilon} \|S_\alpha(\tau_2 - s) - S_\alpha(\tau_1 - s)\| p(s) ds \\
&\quad + \psi(q) \int_{\tau_1 - \epsilon}^{\tau_1} \|S_\alpha(\tau_2 - s) - S_\alpha(\tau_1 - s)\| p(s) ds \\
&\quad + M e^{w\tau_2} \psi(q) \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-ws} p(s) ds.
\end{aligned}$$

D'aprés lemme 1.2, $S_\alpha(t)$ étant uniformément continu pour $t \in [\epsilon, t_1]$, et comme ϵ arbitraire, on faisant tendre $\tau_2 \to \tau_1$, on peut conclure que

$$\lim_{[\tau_1,\tau_2]\to 0} \left|\mathcal{B}(y(\tau_2)) - \mathcal{B}(y(\tau_1))\right| = 0.$$

Ainsi l'opérateur $\mathcal{B}$ est équicontinu on $(0, t_1]$.

- Si $\tau_1, \tau_2 \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{B}(y(\tau_2)) - \mathcal{B}(y(\tau_1))\right| &= \|\sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(\tau_2 - t_k) \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1} - t_j) S_\alpha(t_i - s) f(s, y(s)) ds \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(\tau_1 - t_k) \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1} - t_j) S_\alpha(t_i - s) f(s, y(s)) ds \\
&\quad + \int_{t_k}^{\tau_2} S_\alpha(\tau_2 - s) f(s, y(s)) ds - \int_{t_k}^{\tau_1} S_\alpha(\tau_1 - s) f(s, y(s)) ds\|
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}(y(\tau_2)) - \mathcal{B}(y(\tau_1))| &\leq \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|S_\alpha(\tau_2 - t_k) - S_\alpha(\tau_1 - t_k)\| \prod_{j=i}^{k-1} \|S_\alpha(t_{j+1} - t_j)\| \\
&\quad \times \|S_\alpha(t_i - s)\| |f(s, y(s))| ds + \| \int_{t_k}^{\tau_1} S_\alpha(\tau_2 - s) f(s, y(s)) ds \\
&\quad + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\alpha(\tau_2 - s) f(s, y(s)) ds - \int_{t_k}^{\tau_1} S_\alpha(\tau_1 - s) f(s, y(s)) ds\|
\end{aligned}$$

Qui donne

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}(y(\tau_2)) - \mathcal{B}(y(\tau_1))| &\leq \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|S_\alpha(\tau_2 - t_k) - S_\alpha(\tau_1 - t_k)\| \prod_{j=i}^{k-1} \|S_\alpha(t_{j+1} - t_j)\| \\
&\quad \times \|S_\alpha(t_i - s)\| |f(s, y(s))| ds + \int_{t_k}^{\tau_1} \|S_\alpha(\tau_2 - s) - S_\alpha(\tau_1 - s) \\
&\quad \times \| |f(s, y(s))| ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|S_\alpha(\tau_2 - s)\| |f(s, y(s))| ds.
\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse (H_4), on obtient

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}(y(\tau_2))-\mathcal{B}(y(\tau_1))| &\leq \sum_{i=1}^{k}\psi(q)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|S_\alpha(\tau_2-t_k)-S_\alpha(\tau_1-t_k)\|\prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\|\times\\ &\|S_\alpha(t_i-s)\|p(s)ds+\psi(q)\int_{t_k}^{\tau_1-\epsilon}\|S_\alpha(\tau_2-s)-S_\alpha(\tau_1-s)\|p(s)ds\\ &+\psi(q)\int_{\tau_1-\epsilon}^{\tau_1}\|S_\alpha(\tau_2-s)-S_\alpha(\tau_1-s)\|p(s)ds+M\psi(q)e^{w\tau_2}\\ &\times\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-ws}p(s)ds\end{aligned}$$

Comme $\tau_1 \longrightarrow \tau_2$ et ϵ devient suffisamment petit, la partie droite de l'inégalité ci-dessus tend à zéro, car S_α est un opérateur analytique et la compacité de $S_\alpha(t)$ pour $t>0$ implique la continuité dans la topologie uniforme d'opérateur [25, 26]. Cela prouve l'équicontinuité dans le cas où $t \neq t_i, i=1,....,m+1$.

Reste maintenant à examiner l'équicontinuité quand $t=t_l$. On a pour certains $y \in \mathbf{B}_q$, et pour chaque $t \in J$.

On prouve d'abord l'équicontinuité quand $t=t_l^-$:

On fixe $\delta_1>0$ tel que $\{t_k, k\neq l\}\cap[t_l-\delta_1,t_l+\delta_1]=\emptyset$

Pour $0<h<\delta_1$ on a :

- Si $l=1$ c'est à dire $t_1-h, t_1 \in [0,t_1]$:

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}(y)(t_1-h)-\mathcal{B}(y)(t_1)| &\leqslant \psi(q)\int_0^{t_1-h}\|S_\alpha(t_1-s)-S_\alpha(t_1-h-s)\|p(s)ds\\ &+Me^{wt_1}\psi(q)\int_{t_1-h}^{t_1}e^{-ws}p(s)ds,\end{aligned}$$

qui tend vers zéro comme $h\to 0$ puisque $S_\alpha(t)$ est un opérateur uniformément continu pour $t\in[0,t_1]$, ainsi l'opérateur $\mathcal{B}$ est equicontinu quand $t=t_1^-$

- Si $t_l - h, t_l \in [t_k, t_{k+1}]$:

Alors :

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}(y)(t_l-h)-\mathcal{B}(y)(t_l)| &\leq \sum_{i=1}^{k}\psi(q)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|S_\alpha(t_l-t_k)-S_\alpha(t_l-h-t_k)\| \\ &\times\prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\|\|S_\alpha(t_i-s)\|p(s)ds \\ &+\psi(q)\int_{t_k}^{t_l-h}\|S_\alpha(t_l-s)-S_\alpha(t_l-h-s)\|p(s)ds \\ &+M\psi(q)e^{wt_l}\int_{t_l-h}^{t_l}e^{-ws}p(s)ds\end{aligned}$$

La partie droite de l'inégalité précédente devient nulle quand $h \longrightarrow 0$,

alors l'operateur $\mathcal{B}$ est equicontinu en t_l^-.

Maintenant, on définit :

$$\widehat{B_0}(y)(t) = \mathcal{B}(y)(t), \quad si \;\; t \in [0, t_1]$$

et

$$\widehat{B_i}(y)(t) = \begin{cases} \mathcal{B}(y)(t), & si \;\; t \in (t_i, t_{i+1}], \\ \mathcal{B}(y)(t_i^+), & si \;\; t = t_i. \end{cases}$$

Ensuite, on prouve l'équicontinuité à $t = t_i^+$.

On fixe $\delta_2 > 0$ tel que $\{t_k, k \neq i\} \cap [t_i - \delta_2, t_i + \delta_2] = \emptyset$.

Tout d'abord, on étudie l'équicontinuité à $t = 0^+$.

Si $t \in [0, t_1]$, on a :

$$\widehat{B_0}(y)(t) = \begin{cases} \mathcal{B}(y)(t), & si \;\; t \in [0, t_1] \\ 0, & si \;\; t = 0. \end{cases}$$

Pour $0 < h < \delta_2$, on a :

$$\begin{aligned}
|\widehat{B_0}(y)(h) - \widehat{B_0}(y)(0)| &= |\mathcal{B}(y)(h)| \\
&= \| \int_0^h S_\alpha(h-s) f(s, y(s)) ds \| \\
&\leq \int_0^h \|S_\alpha(h-s)\| |f(s, y(s))| ds \\
&\leq \psi(q) e^{wh} \int_0^h e^{-ws} p(s) ds.
\end{aligned}$$

Le côté droit tend vers zéro quand $h \longrightarrow 0$.

Maintenent, on étudie l'équicontinuité à $t_1^+, t_2^+, ..., t_m^+$(c'est à dire à $t_l^+, 1 \leq l \leq m$)

Pour $0 < h < \delta_2$, on a :

$$\begin{aligned}
|\mathcal{B}(y)(t_l + h) - \mathcal{B}(y)(t_l)| \;\leq\; & \sum_{i=1}^{k} \psi(q) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|S_\alpha(h) - S_\alpha(0)\| \prod_{j=i}^{k-1} \|S_\alpha(t_{j+1} - t_j)\| \|S_\alpha(t_i - s)\| \\
& \times p(s) ds + M\psi(q) e^{w(t_l + h)} \int_{t_l}^{t_l + h} e^{-ws} p(s) ds.
\end{aligned}$$

Il est clair que le côté droit tend vers zéro quand $h \longrightarrow 0$.

Alors $\mathcal{B}$ est équicontinu à $t_l^+, (1 \leq l \leq m)$

l'équicontinuité pour les cas $\tau_1 < \tau_2 \leqslant 0$ et $\tau_1 \leqslant 0 \leqslant \tau_2$ découle de la continuité uniforme de ϕ sur l'intervalle $[-r, 0]$, En conséquence des étapes 1 et 3 avec le théorème d'Arzelà-Ascoli, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ transforme $\mathbf{B}_q$ en un ensemble précompact de E c'est à dire : on montre que l'ensemble $\{\mathcal{B}(y)(t); \quad y \in \mathbf{B}_q\}$ est précompact dans E pour chaque $t \in [0, b]$.

Maintenent, soit $y \in \mathbf{B}_q$ et soit ϵ un nombre réel positif satisfaisant $0 < \epsilon < t \leq b$.

Pour $y \in \mathbf{B}_q$ et $t \in [0, t_1]$:

On a si $t = 0$ l'ensemble $\{\mathcal{B}(y)(0); \quad y \in \mathbf{B}_q\} = \{0\}$ qui est précompact comme un ensemble fini.

Soit $K \subset E$; $\overline{Conv(K)}$ l'enveloppe convexe de l'ensemble K.

Pour $0 < \epsilon < t \leq t_1$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(y)(t) &= \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds \\ &= \int_0^{t-\epsilon} S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds + \int_{t-\epsilon}^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds. \end{aligned}$$

L'ensemble $F_0 = \{S_\alpha(t-\theta)f(\theta,y(\theta)); \quad \theta \in [0,t-\epsilon], \quad y \in \mathbf{B_q}\}$, à partir de la valeur moyenne du théorème de l'intégrale de Bochner, on a :

$$\int_0^{t-\epsilon} S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds \in (t-\epsilon)\overline{Conv(F_0)} \tag{2.2.1}$$

D'autre part, en utilisant les hypothèses $(\mathbf{H_1})$ et $(\mathbf{H_4})$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{t-\epsilon}^t |S_\alpha(t-s)f(s,y(s))|ds &\leq Me^{\omega t}\psi(q)\int_{t-\epsilon}^t e^{-\omega s}p(s)ds \\ &\leq Me^{\omega t}\psi(q)\int_{t-\epsilon}^t e^{-\omega s}p(s)ds \end{aligned}$$

Soit C_ϵ^0 le cercle qui a le diamètre d_ϵ^0 tel que :

$$d_\epsilon^0 \leq Me^{\omega t}\psi(q)\int_{t-\epsilon}^t e^{-\omega s}p(s)ds. \tag{2.2.2}$$

Comme conséquence de (2.2.1) et (2.2.2), on conclu que :

$$\mathcal{B}(y)(t) \in (t-\epsilon)\overline{Conv(F_0)} + C_\epsilon^0, \quad \forall\ 0 < \epsilon < t \leq t_1. \tag{2.2.3}$$

Pour $t_k < \epsilon < t \leq t_{k+1}$ et $y \in \mathbf{B_q}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}y(t) = \sum_{i=1}^k \int_{t_{i-1}}^{t_i} & S_\alpha(t-t_k)\Pi_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)f(s,y(s))ds \\ &+ \int_{t_k}^{t-\epsilon} S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds + \int_{t-\epsilon}^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds \end{aligned}$$

L'ensemble $F_k = \{S_\alpha(t-\theta)f(\theta,y(\theta)); \quad \theta \in [t_k,t-\epsilon], \quad y \in \mathbf{B}\}$, théorème de la valeur moyenne pour l'intégrale de Bochner, on a :

$$\int_{t_k}^{t-\epsilon} S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds \in (t-t_k-\epsilon)\overline{Conv(F_k)}. \tag{2.2.4}$$

D'après $(\mathbf{H_1})$ et $(\mathbf{H_4})$, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\times \Pi_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)ds + \int_{t-\epsilon}^{t} S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds$$
$$\leq \psi(q)\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_{k-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)ds + M\psi(q)e^{\omega t}\int_{t-\epsilon}^{t} e^{-\omega s}p(s)ds$$

Soit C_ϵ^k le cercle qui a le diamètre d_ϵ^k tel que :

$$d_\epsilon^k \leq \psi(q)\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_{k-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)ds + M\psi(q)e^{\omega t}\int_{t-\epsilon}^{t} e^{-\omega s}p(s)ds \tag{2.2.5}$$

Dès (2.2.4) et (2.2.5), il s'ensuit que :

$$\mathcal{B}(y)(t) \in (t-t_k-\epsilon)\overline{Conv(F_k)} + C_\epsilon^k, \quad \forall t_k < \epsilon < t \leq t_{k+1} \tag{2.2.6}$$

Dès (2.2.3) et (2.2.6), on conclu que $\mathcal{B}(y)(t)$ est un précompact dans E. D'après l'étape1-l'étape3, on en déduit que $\mathcal{B} : PC([-r,b],E) \longrightarrow PC([-r,b],E)$ est complètement continu.

Étape4 $\mathcal{A}$ est une contraction

Pour $t \in [-r, t_1]$ on a :

$$|\mathcal{A}(y_1)(t) - \mathcal{A}(y_2)(t)| = 0,$$

ce qui implique que $\mathcal{A}$ est un contractant pour tous $t \in [-r, t_1]$. Il reste à prouver la contraction de l'opérateur $\mathcal{A}$.

Pour $t \in [t_k, t_{k+1}], k \geq 1$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(y_1)(t) - \mathcal{A}(y_2)(t)| &= |\sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)[I_i(y_1(t_i^-)) - I_i(y_2(t_i^-))]| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \|S_\alpha(t-t_k)\| \prod_{j=i}^{k-1} \|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\| |I_i(y_1(t_i^-)) - I_i(y_2(t_i^-))| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{i=1}^{k} M e^{w(t-t_k)} \prod_{j=i}^{k-1} M e^{w(t_{j+1}-t_j)} |I_i(y_1(t_i^-)) - I_i(y_2(t_i^-))| \\
&\le \sum_{i=1}^{k} M e^{w(t-t_k)} \left[e^{w(t_{i+1}-t_i)} M e^{w(t_{i+2}-t_{i+1})} \dots M e^{w(t_{k-1}-t_{k-2})} M e^{w(t_k-t_{k-1})} \right] \\
&\quad \times |I_i(y_1(t_i^-)) - I_i(y_2(t_i^-))| \\
&\le \sum_{i=1}^{k} M e^{wt} e^{-wt_k} [M^{k-i} e^{-wt_i} e^{wt_k}] |I_i(y_1(t_i^-)) - I_i(y_2(t_i^-))| \\
&\le \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1} e^{w(t-t_i)} |I_i(y_1(t_i^-)) - I_i(y_2(t_i^-))|
\end{aligned}
$$

Puisque $t \in J := [0, b]$, et les fonctions $I_k; k = 1, 2, ...m.$ sont Lipschitz ; alors

$$
|\mathcal{A}(y_1)(t) - \mathcal{A}(y_2)(t)| \le \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1} e^{w(b-t_i)} M_i \|y_1 - y_2\|
$$

Ainsi l'opérateur $\mathcal{A}$ est une contraction, puisque

$$
\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1} e^{w(b-t_i)} M_i < 1
$$

Étape5 Estimation à priori.

Maintenant, il reste à montrer que l'ensemble

$\Upsilon = \{y \in PC([-r, b], E) : y = \lambda\mathcal{B}(y) + \lambda\mathcal{A}(\frac{y}{\lambda})$, pour certain $0 < \lambda < 1\}$ est borné.

Soit $y \in \Upsilon$ un élèment arbitraire, alors $y = \lambda\mathcal{B}(y) + \lambda\mathcal{A}(\frac{y}{\lambda})$, pour certain $0 < \lambda < 1$.

Tout d'abord, pour chaque $t \in [0, t_1]$,

$$
\begin{aligned}
\|y(t)\| &= \left\|\lambda \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s, y(s)) ds + \lambda S_\alpha(t)\phi(0)\right\| \\
&\le M e^{wt} \|\phi(0)\| + M e^{wt} \int_0^t e^{-ws} \|f(s, y(s))\| ds \\
&\le M e^{wt} \|\phi(0)\| + M \int_0^t e^{\omega(t-s)} p(s) \psi(\|y_s\|) ds \\
&\le M e^{wt_1} \|\phi(0)\| + M \int_0^{t_1} e^{\omega(t_1-s)} p(s) \psi(\|y_s\|) ds.
\end{aligned}
$$

Dans l'autre côté pour chaque $t \in (t_k, t_{k+1}]$ on a :

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &= \Big\|\lambda\Big(\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)f(s,y(s))ds \\
&\quad + \int_{t_k}^{t} S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds\Big) + \lambda\Big(S_\alpha(t-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})\phi(0) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) I_i(\frac{y}{\lambda}(t_i^-))\Big)\Big\|
\end{aligned}$$

D'aprés $(\mathbf{H_1})$, $(\mathbf{H_2})$ et puisque $\lambda < 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &\leqslant M^{k+1}e^{\omega t}\|\phi(0)\| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_{k-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)\psi(\|y_s\|)ds \\
&\quad + Me^{\omega t}\int_{t_k}^{t} e^{-\omega s}p(s)\psi(\|y_s\|)ds + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(t-t_i)}|I_i(\frac{y}{\lambda}(t_i^-))| \\
&\leqslant M^{k+1}e^{\omega t}\|\phi(0)\| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_{k-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)\psi(\|y_s\|)ds \\
&\quad + Me^{\omega t}\int_{t_k}^{t} e^{-\omega s}p(s)\psi(\|y_s\|)ds + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(t-t_i)}|I_i(\frac{y}{\lambda}(t_i^-)) - I_i(0)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(t-t_i)}|I_i(0)| \\
&\leqslant M^{k+1}e^{\omega t}\|\phi(0)\| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(t-t_i)}|I_i(0)| \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_{k-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)\psi(\|y_s\|)ds \\
&\quad + Me^{\omega t}\int_{t_k}^{t} e^{-\omega s}p(s)\psi(\|y_s\|)ds + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{\omega(t-t_i)}|I_i(\frac{y}{\lambda}(t_i^-)) - I_i(0)|.
\end{aligned}$$

Puisque I_i sont Lipschitz, alors :

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &\leqslant M^{k+1}e^{\omega t}\|\phi(0)\| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(t-t_i)}|I_i(0)| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_{k-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)\times \\
&\quad \psi(\|y_s\|)ds + Me^{\omega t}\int_{t_k}^{t} e^{-\omega s}p(s)\psi(\|y_s\|)ds + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(t-t_i)}M_i|y(t_i^-)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|y(t)\| \leqslant\ & M^{k+1}e^{\omega t}\|\phi(0)\| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(t-t_i)}|I_i(0)| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_{k-1})} \\ & \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)\psi(\|y_s\|)ds + Me^{\omega t}\int_{t_k}^{t} e^{-\omega s}p(s)\psi(\|y_s\|)ds + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(t-t_i)}M_i|y(t_i^-)|.\end{aligned}$$

À présent ; on considére la fonction $\mu(t)$ est definie par :

$$\mu(t) = \sup\{|y(s)| : \quad -r \leq s \leq t\},\ 0 \leq t \leq b.$$

Alors, on a $\|y_s\| \leq \mu(t)$ pour tout $t \in J$, et il y a un point $\xi \in [-r, t]$ tel que $\mu(t) = |y(\xi)|$.

Si $\xi \in [0, b]$, par l'inégalité précédente qu'on a pour $t \in [0, b]$ (note $\xi < t$)

► Si $t \in [0, t_1]$:

$$\begin{aligned}\mu(t) &\leqslant Me^{wb}\|\phi(0)\| + Me^{wb}\int_0^t e^{-ws}p(s)\psi(\mu(s))ds \\ &\leqslant C_0 + Me^{wb}\int_0^t e^{-ws}p(s)\psi(\mu(s))ds\end{aligned}$$

où $C_0 = Me^{wb}\|\phi(0)\|$.

► Si $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$\begin{aligned}\mu(t) \leqslant\ & M^{k+1}e^{\omega b}\|\phi(0)\| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}|I_i(0)| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(b-t_{k-1})} \times \\ & \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)\psi(\mu(s))ds + Me^{\omega b}\int_{t_k}^{t} e^{-\omega s}p(s)\psi(\mu(s))ds + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}M_i\mu(t)\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\left[1 - \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}M_i\right]\mu(t) \leqslant\ & M^{k+1}e^{\omega b}\|\phi(0)\| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}|I_i(0)| \\ & + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(b-t_{k-1})} \times \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)\psi(\mu(s))ds \\ & + Me^{\omega b}\int_{t_k}^{t} e^{-\omega s}p(s)\psi(\mu(s))ds\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\mu(t) &\leqslant \frac{M^{k+1}e^{\omega b}\|\phi(0)\| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}|I_i(0)| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(b-t_{k-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)\psi(\mu(s))ds}{[1-\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}M_i]} \\ &+\frac{Me^{\omega b}}{[1-\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}M_i]}\int_{t_k}^{t} e^{-\omega s}p(s)\psi(\mu(s))ds \\ &\leqslant C_1 + C_2\int_{t_k}^{t} e^{-\omega s}p(s)\psi(\mu(s))ds\end{aligned}$$

où

– $C_1 = \dfrac{M^{k+1}e^{\omega b}\|\phi(0)\| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}|I_i(0)| + \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(b-t_{k-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)\psi(\mu(s))ds}{[1-\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}M_i]}$

– $C_2 = \dfrac{Me^{\omega b}}{[1-\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(b-t_i)}M_i]}$

Il s'ensuit que

$$\begin{cases} \mu(t) \leqslant C_0 + Me^{wb}\int_0^t e^{-ws}p(s)\psi(\mu(s))ds, & si\ t\in[0,t_1], \\ \mu(t) \leqslant C_1 + C_2\int_{t_k}^t e^{-\omega s}p(s)\psi(\mu(s))ds, & si\ \ t\in(t_k,t_{k+1}]. \end{cases}$$

On prend le côté droit de l'inégalité ci-dessus comme $\vartheta(t)$.

Alors on a pour tout $t \in J$:

$$\mu(t) \leq \vartheta(t)$$

et

$$\begin{cases} \vartheta(t) = C_0 + Me^{wb}\int_0^t e^{-ws}p(s)\psi(\mu(s))ds, & si\ t\in[0,t_1], \\ \vartheta(t) = C_1 + C_2\int_{t_k}^t e^{-\omega s}p(s)\psi(\mu(s))ds, & si\ \ t\in(t_k,t_{k+1}]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta(0) = C_0 \\ \vartheta(t_k) = C_1, \quad k=1,...,m. \end{cases}$$

Et en différenciant les deux côtés de l'égalité ci-dessus, on obtient :

$$\begin{cases} \vartheta'(t) = Me^{w(b-t)}p(t)\psi(\mu(t)); & si \ t \in [0, t_1] \\ \vartheta'(t) = C_2 e^{-\omega t}p(t)\psi(\mu(t)); & si \ \ t \in (t_k, t_{k+1}]. \end{cases}$$

On utilise le caractère de la non décroissance de la fonction ψ, c'est à dire $(\mu(t) \leq \vartheta(t) \Rightarrow \psi(\mu(t)) \leq \psi(\vartheta(t))$, on a :

$$\begin{cases} \vartheta'(t) \leq Me^{w(b-t)}p(t)\psi(\vartheta(t)), & si \ t \in [0, t_1], \\ \vartheta'(t) \leq C_2 e^{-\omega t}p(t)\psi(\vartheta(t)), & si \ \ t \in (t_k, t_{k+1}]. \end{cases}$$

Cela donne :

$$\begin{cases} \dfrac{\vartheta'(t)}{\psi(\vartheta(t))} \leq Me^{w(b-t)}p(t), & si \ t \in [0, t_1], \\ \dfrac{\vartheta'(t)}{\psi(\vartheta(t))} \leq C_2 e^{-\omega t}p(t)), & si \ \ t \in (t_k, t_{k+1}]. \end{cases}$$

◀ On intégre de 0 à t si $t \in [0, t_1]$, on trouve :

$$\int_0^t \frac{\vartheta'(s)}{\psi(\vartheta(s))} ds \leq Me^{wb} \int_0^t e^{-ws} p(s) ds$$

Par un changement de variable ($\vartheta(s) = u$) $(s : 0 \to t; u : \vartheta(0) = C_0 \to \vartheta(t))$:

$$\int_{C_0}^{\vartheta(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leq Me^{wb} \int_0^t e^{-ws} p(s) ds \leq \int_{C_0}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)}$$

Par conséquent, il existe une constante η_1 tel que

$$\mu(t) \leq \vartheta(t) \leq \eta_1 \quad t \in [0, t_1].$$

◀ Maintenant, intégrant de t_k de t si $t \in [t_k, t_{k+1}]$, on trouve :

$$\int_{t_k}^t \frac{\vartheta'(s)}{\psi(\vartheta(s))} ds \leq C_2 \int_{t_k}^t e^{-\omega s} p(s) ds.$$

Par un changement de variable ($\vartheta(s) = u$) $(s : t_k \to t; u : \vartheta(t_k) = C_1 \to \vartheta(t))$:

$$\int_{C_1}^{\vartheta(t)} \frac{du}{\psi(u)} \leq C_2 \int_{t_k}^t e^{-ws} p(s) ds \leq \int_{C_3}^{\infty} \frac{du}{\psi(u)},$$

où $C_3 = min(C_1, C_2)$. Par conséquent, il existe une constante η_2 tel que

$$\mu(t) \leq \vartheta(t) \leq \eta_2 \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

En conclusion, il existe $\eta = min(\eta_1, \eta_2)$ tel que

$$\mu(t) \leq \vartheta(t) \leq \eta \quad pour \quad tout \quad t \in J$$

Maintenant, de la définition de μ il s'ensuit que :

$$\|y\| = sup\{|y(t)| : t \in J\} \leq \mu(b) \leq \eta, \quad \text{pour tout} \quad y \in \Upsilon$$

Cela montre que l'ensemble Υ est bornè.

En conséquence du théorème 1.5, on déduit que $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ admet un point fixe qui est la solution faible du problème $(2.1.1) - (2.1.3)$.

2.3 Application

On donne un exemple pour illustrer le résultat obtenu. On considére l'équation différentielle fractionnaire impulsive suivante :

$$^cD_t^\alpha z(t,x) = \frac{\partial^2 z(t,x)}{\partial x^2} + Q(t, z(t-r,x)), \quad x \in [0,\pi], \; t \in [0,b] \neq \{t_1, .., t_m\} \tag{2.3.1}$$

$$z(t_k^+, x) - z(t_k^-, x) = b_k z(t_k, x), \qquad x \in [0,\pi], \quad k = 1, \ldots, m \tag{2.3.2}$$

$$z(t,0) = z(t,\pi) = 0, \qquad t \in [0,b] \tag{2.3.3}$$

$$z(t,x) = \phi(t,x), \qquad t \in [-r,0], \quad x \in [0,\pi] \tag{2.3.4}$$

où $r > 0$, $b_k > 0, k = 1, \ldots, m$, $Q : [0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $\phi \in \mathcal{D}$ où $\mathcal{D} = \{\psi : [-r, 0] \times t \in [0, \pi] \to \mathbb{R}\}$; tel que ψ est continue partout sauf pour un nombre dénombrable de points où $\psi(s^-), \psi(s^+)$ existent avec $\psi(s^-) = \psi(s)$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m < t_{m+1} = b$, $z(t_k^+, x) = \lim_{h\to 0^+} z(t_k + h, x)$, $z(t_k^-, x) = \lim_{h\to 0^-} z(t_k + h, x)$.

Soit

$$\begin{aligned} y(t)(x) &= z(t,x), && t \in [0,b] \neq \{t_1, t_2 \ldots, t_m\} \\ I_k(y(t_k^-))(x) &= b_k z(t_k, x), && x \in [0,\pi], \quad k = 1, \ldots, m \\ f(t,\phi)(x) &= Q(t, \phi(\theta, x)), && x \in [0,\pi], \quad \theta \in [-r, 0] \\ \phi(\theta)(x) &= \phi(\theta, x), && x \in [0,\pi], \quad \theta \in [-r, 0] \end{aligned}$$

Soit $E = L^2[0, \pi]$ et on définit l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ par :

$$D(A) = \{u \in E, u, u' \text{sont absolument continus}, u'' \in E, u(0) = u(\pi) = 0\}$$

et

$$Au = u''$$

C'est bien connu de [43] que A engendre un semigroupe analytique compact $(T(t))$ pour $t > 0$ dans E donné par

$$T(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle w, w_n \rangle w_n, \qquad w \in E,$$

où $\langle , \rangle$ est le produit intérieur dans L^2 et $w_n(s) = \sqrt[2]{\pi} \sin ns$, $n = 1, 2, \ldots$ est l'ensemble orthogonal des vecteurs propres de A. D'aprés le Thèoréme 1.7 l'opérateur A engendre également une famille α-resolvante compacte pour $t > 0$, et il existe une constante $M \geq 1$ tel que $\|S_\alpha(t)\| \leq M$.

On suppose également qu'il existe une fonction intégrable $\sigma[0, b] \to \mathbb{R}^+$ tel que

$$|Q(t, g(t - r))| \leq \sigma(t)\Gamma(|g|)$$

où $\Gamma : [0, \infty) \to [0, \infty)$ est continu et non décroissant avec

$$\int_1^\infty \frac{ds}{s + \Gamma(s)} = +\infty.$$

On utilise le changement de variables précédent, on peut voir que le problème $(2.1.1) - (2.1.3)$ est la formulation abstraite du problème $(2.3.1) - (2.3.4)$. Par conséquent, sous des conditions appropriées sur $\phi(\theta)$, pour satisfaire les hypothéses du théorème 2.1 le probléme $(2.3.1) - (2.3.4)$ admet une faible solution.

Chapitre 3

Existence de solutions d'une équation différentielle fractionnaire avec conditions non-locales

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne quelques conditions suffisantes qui garantissent l'existence d'une solution faible de quelques équations différentielles fonctionelles semi-linéaires impulsives fractionnaires avec condition non-locale de la forme :

$$ {}^{c}D_{t_k}^{\alpha} y(t) = Ay(t) + f(t, y_t), t \in J_k := (t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..m \tag{3.1.1} $$

$$ \Delta y|_{y=y_k} = I_k(y(t_k^-)) \quad k = 1, ..., m \tag{3.1.2} $$

$$ y(t) + g_t(y) = \phi(t), t \in [-r, 0] \tag{3.1.3} $$

Où $0 < \alpha < 1$, $f : J \times U \rightarrow E$ est une fontion donnée, tel que $U = \{\psi : [-r, 0] \longrightarrow E$, ψ continue partout sauf pour un nombre fini de points auxquels $\psi(s^-)$ et $\psi(s^+)$ existent et $\psi(s^-) = \psi(s)\}$, $\phi \in U$, avec $||\phi||_U = \sup\{|\phi(\theta)|; \theta \in [-r, 0]\}$, $J = [0, b]$, $I_k : E \rightarrow E$ $k = 1, 2...., m$, $0 = t_0 < t_1 < ..... < t_m < t_{m+1} = b$, $\Delta y|_{y=y_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$, où $y(t_k^+) = \lim\limits_{h \mapsto 0^+} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim\limits_{h \mapsto 0^+} y(t_k - h)$ représentent les limites droites et gauches de $y(t)$ en $t = t_k$, $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est le générateur d'une α-famille résolvante d'opérateurs (α-FOR) S_α, $g_t : PC([-r, b], E) \rightarrow E$ est une fonction donnée, où

$PC([-r, b], E) = \{y : [-r, b] \rightarrow E : y(t)$ est partout continu sauf pour certains $t_k$aux quels $y(t_k^-)$ et $y(t_k^+), k = 1, ...m$ existent et $y(t_k^-) = y(t_k)\}$ qui est un espace Banach équipé de la norme

$$||y|| = \sup\{|y(t)| : t \in [-r, b]\},$$

On note que le concept de conditions non-locales a été initié par L.Byzewski , il a prouvé dans ce travail [17] que les conditions non-locales peut être plus utile pour décrire certains phénomènes physiques. Depuis, une série d'études de problèmes de conditions non- locales a commencé à apparaître, K.Deng dans [22] a utilisé la condition non locale pour décrire le phénomène de diffusion d'une petite quantité de gaz dans un tube transparent où $g_t(y) = \sum\limits_{i=1}^{p} c_i y(t_i)$ avec $c_i, i = 1, ..., p$ sont des constantes données et $0 < t_1 < ... < t_p < b$. Le lecteur intéressé peut consulter les articles [1, 13, 15, 22].

3.2 Résultats [1]

Maintenant, on présente la définition de la solution faible du problème (3.1.1) – (3.1.3) :

Définition 3.1 *Une fonction $y \in PC([-r,b],E)$ est une solution faible de l'équation différentielle fractionnaire* (3.1.1) *si $y(t) = \phi(t) - g_t(y)$, pour tout $t \in [-r,0]$, $\Delta y|_{y=y_k} = I_k(y(t_k^-))$, $k = 1,....,m$ et tel que y satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$y(t) = \begin{cases} S_\alpha(t)[\phi(0) - g_0(y)] + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds \qquad t \in [0,t_1]; \\ S_\alpha(t-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i - t_{i-1})[\phi(0) - g_0(y)] \\ +\sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i - s)f(s,y(s))ds + \\ \int_{t_k}^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds + \sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)I_i(y(t_i^-)) \qquad t \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

Le premier résultat est basé sur le théorème de point fixe de Banach. Pour celà, on introduit les hypothèses suivantes :

($\mathbf{H_1}$) A engendre un compact α-FOR $(S_\alpha(t))$ pour $t > 0$ exponentiellement borné ; c'est à dire il existe une constante $M \geqslant 1$, $\omega \geqslant 0$ tel que :

$$\|S_\alpha(t)\| \leqslant Me^{\omega t}, \quad t \geqslant 0$$

($\mathbf{H_2}$) La fonction $f : J \times U \longrightarrow E$ est continue et il existe une constante $N > 0$ tel que

$$\|f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))\| \leqslant N\|y_1 - y_2\|, \quad pour \quad tout \quad y_1, y_2 \in U.$$

($\mathbf{H_3}$) Les fonctions $I_k : E \longrightarrow E$ sont continues et il existe une constante $L > 0$, tel que

$$\|I_k(y_1) - I_k(y_2)\| \leqslant L\|y_1 - y_2\|, \quad pour \quad tout \quad y_1, y_2 \in E \quad k = 1,2,...,m.$$

1. Mouna Lemkeddem, Hadda Hammouche, Kaddour Guerbati, Mouffak Benchohra, *Impulsive partial functional differential equations with non-local conditions*, Mathematics In Engineering, Science And Aerospace, Vol.10, No.2, PP.303-321, 2019

$(\mathbf{H_4})$ La fonction $g_t : PC([-r,b],E) \longrightarrow E$ est continue par rapport à t, et il existe une constante $G > 0$, tel que

$$\|g_t(y_1) - g_t(y_2)\| \leqslant G\|y_1 - y_2\|, \quad pour \quad tout \quad y_1, y_2 \in PC([-r,b],E);$$

avec

$$G + MN\left(\frac{1}{w}e^{wt_1} - \frac{1}{w}\right) < 1$$

et

$$M^{k+1}e^{\omega b}G + \left[\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega b}(\tfrac{-1}{\omega}e^{\omega t_i} + \tfrac{1}{\omega}e^{\omega t_{i-1}}) + M\left(\tfrac{-1}{\omega} + \tfrac{1}{w}e^{\omega(b-t_k)}\right)\right]N$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{\omega b}L < 1$$

Théorème 3.1 *Sous les hypothèses* $(H_1) - (H_4)$ *le problème* $(3.1.1) - (3.1.3)$ *posséde une unique solution faible.*

Preuve On transforme le problème $(3.1.1) - (3.1.3)$ en un problème de point fixe. Pour celà, on considére l'opérateur $\Psi : PC([-r,b],E) \longrightarrow PC([-r,b],E)$ donné par

$$\Psi y(t) = \begin{cases} \phi(t) - g_t(y) \qquad t \in [-r,0]; \\ S_\alpha(t)[\phi(0) - g_0(y)] + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds \qquad t \in [0,t_1]; \\ S_\alpha(t-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i - t_{i-1})[\phi(0) - g_0(y)] \\ +\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i - s)f(s,y(s))ds + \\ \int_{t_k}^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds + \sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)I_i(y(t_i^-)) \qquad t \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

On doit montrer que Ψ a un point fixe. De toute évidence, ce point fixe est une solution faible du problème $(3.1.1) - (3.1.3)$.

Puisque f, g et I_k sont continues, l'opérateur Ψ est continu. On va montrer que Ψ est un opérateur contractant. En effet, soit $y_1, y_2 \in PC([-r,b],E)$, donc pour chaque $t \in [-r,0]$ on a :

$$\begin{aligned}
\|\Psi y_2(t) - \Psi y_1(t)\| &= \|g_t(y_1) - g_t(y_2)\| \\
&\leq G\|y_1 - y_2\|.
\end{aligned}$$

puisque $G \leq G + MN\left(\frac{1}{\omega}e^{\omega t_1} - \frac{1}{\omega}\right) < 1$, alors Ψ est une contraction sur l'interval $[-r,0]$.

Pour chaque $t \in [0,t_1]$ on a :

$$\begin{aligned}
\|\Psi y_2(t) - \Psi y_1(t)\| &\leqslant \|g_0(y_2) - g_0(y_1)\| + \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|\|f(s,y_2(s)) - f(s,y_1(s))\|ds \\
&\leqslant G\|y_2 - y_1\| + Me^{wt}\int_0^t e^{-ws}dsN\|y_2 - y_1\| \\
&\leqslant \left[G + Me^{wt}(\frac{1}{-w}e^{-wt} + \frac{1}{w}e^{-w0})N\right]\|y_2 - y_1\| \\
&\leqslant \left[G + MN(\frac{1}{w}e^{wt} - \frac{1}{w})\right]\|y_2 - y_1\| \\
&\leqslant \left[G + MN(\frac{1}{w}e^{wt_1} - \frac{1}{w})\right]\|y_2 - y_1\|.
\end{aligned}$$

D'autre part pour chaque $t \in [t_k, t_{k+1}]$ on a :

$$\begin{aligned}
&\|\Psi y_2(t) - \Psi y_1(t)\| \\
&\leqslant \|S_\alpha(t-t_k)\|\prod_{i=1}^{k}\|S_\alpha(t_i - t_{i-1})\|\|g_0(y_1) - g_0(y_2)\| + \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|S_\alpha(t-t_k)\| \\
&\quad \prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1} - t_j)\|\|S_\alpha(t_i - s)\|\|f(s,y_2(s)) - f(s,y_1(s))\|ds \\
&\quad + \int_{t_k}^{t}\|S_\alpha(t-s)\|\|f(s,y_2(s)) - f(s,y_1(s))\|ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k}\|S_\alpha(t-t_k)\|\prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1} - t_j)\|\|I_i(y_2(t_i^-)) - I_i(y_1(t_i^-))\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \; Me^{\omega(t-t_k)}\prod_{i=1}^{k}Me^{\omega(t_i-t_{i-1})}\|g_0(y_1)-g_0(y_2)\|\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}Me^{\omega(t-t_k)}\prod_{j=i}^{k-1}Me^{\omega(t_{j+1}-t_j)}Me^{\omega(t_i-s)}ds\|f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))\|\\
&\quad+\int_{t_k}^{t}Me^{\omega(t-s)}ds\|f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))\|\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k}Me^{\omega(t-t_k)}\prod_{j=i}^{k-1}Me^{\omega(t_{j+1}-t_j)}\|I_i(y_2(t_i^-))-I_i(y_1(t_i^-))\|\\
&\leqslant \; M^{k+1}e^{\omega t}G||y_1-y_2||+\left[\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+2}e^{\omega t}(\frac{-1}{\omega}e^{-\omega t_i}+\frac{1}{w}e^{-\omega t_{i-1}})\right.\\
&\quad\left.+Me^{\omega t}(\frac{-1}{\omega}e^{-\omega t}+\frac{1}{\omega}e^{-\omega t_k})\right]\|f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))\|\\
&\quad+\left(\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+1}e^{\omega t}\right)\|I_i(y_2(t_i^-))-I_i(y_1(t_i^-))\|\\
&\leqslant \; \left(M^{k+1}e^{\omega b}G+\left[\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+2}e^{\omega b}(\frac{-1}{\omega}e^{\omega t_i}+\frac{1}{\omega}e^{\omega t_{i-1}})+M(\frac{-1}{\omega}+\frac{1}{\omega}e^{\omega(b-t_k)})\right]N\right.\\
&\quad\left.+\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+1}e^{\omega b}L\right)\|y_2-y_1\|
\end{aligned}$$

De l'hypothèse (H_4), l'operateur Ψ est contractant sur $[-r,b]$, en conséquence du théorème du point fixe de Banach, on déduit que Ψ a un point fixe unique qui est la solution du problème $(3.1.1)-(3.1.3)$.

Le deuxième résultat est basé sur le théorème 1.6 de point fixe de Krasnoselskii. Pour cet objectif, on introduit les hypothéses suivantes :

(H_5) La fonction f est carathéodory, en plus : il existe une fonction $p\in L^1(J,\mathbb{R}_+)$ et une fonction non-décroissante continue $\psi:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ tel que

$|f(t,y)|\leqslant p(t)\psi(\|y\|_D)$, a.e $t\in J$, pour tout $y\in U$

(H_6) Les fonctions $I_k : E \longrightarrow E$ sont continues et il existe une constante $M^* > 0$ tel que $|I_k(y)| \leq M^*$,$k = 1, 2..., m$ avec

$$GM^{k+1}e^{\omega t_k} + M^*M^{k+2}\sum_{i=1}^{k} e^{\omega(t_k - t_i)} < 1$$

(H_7) L'ensemble $\Gamma = \{\phi(0) - g_t(y), ||y|| \leq q\}$ est borné, et pour $k = 1, \ldots m$

$$M^{k+1}e^{\omega b}R + M^*M^k e^{\omega b}\sum_{i=1}^{k} e^{-\omega t_i} + \psi(q)M^{k+2}e^{\omega b}\int_0^{t_k} e^{-\omega s}p(s)ds$$
$$+ M\psi(q)e^{\omega b}\int_{t_k}^{t} e^{-\omega s}p(s)ds \leq q$$

où $R = \sup\{|\phi(0) - g_t(y)|; y \in \Gamma\}$.

Théorème 3.2 *Sous les hypothéses* $(H_1), (H_2), (H_5), (H_6)$ *et* (H_7) *le problème impulsif* (3.1.1)$-$(3.1.3) *admet au moins une solution faible.*

Preuve Soit q dans l'hypothèse (H_7) et on considére $\mathbf{B}_q = \{y \in PC([-r, b], E) : \|y\| \leq q\}$ qui est borné, fermé et convexe dans $PC([-r, b], E)$, on définit sur $\mathbf{B}_q$ les opérateurs

$$\mathcal{A}, \mathcal{B} : \mathbf{B}_q \longrightarrow \mathbf{B}_q$$

comme suit

$$\mathcal{A}(y)(t) = \begin{cases} \phi(t) - g_0(y), & \text{si } t \in [-r, 0]; \\ S_\alpha(t)\left(\phi(0) - g_0(y)\right), & \text{si } t \in [0, t_1]; \\ S_\alpha(t - t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i - t_{i-1})\left(\phi(0) - g_0(y)\right) + \\ +\sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t - t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1} - t_j)I_i(y(t_i^-)) \\ \qquad \text{si } t \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

et

$$\mathcal{B}(y)(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \in [-r, 0]; \\ \\ \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s, y(s)) ds, & \text{si } t \in [0, t_1]; \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k) \prod\limits_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) S_\alpha(t_i - s) f(s, y(s)) ds \\ \quad + \int_{t_k}^t S_\alpha(t-s) f(s, y(s)) ds & \text{si } t \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

Alors, trouver la solution du problème $(3.1.1)-(3.1.3)$ se réduit à trouver la solution de l'équation d'opérateurs $\mathcal{A}(y)(t) + \mathcal{B}(y)(t) = y(t)$, $t \in [-r, b]$, donc on doit montrer que les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ satisfont toutes les conditions du théorème 1.6. La démonstration va être donnée sous une suite d'étapes.

Étape 1 : On doit prouver que pour tout y_1, y_2 dans $\mathbf{B}_q$; on a $\mathcal{A}(y_1) + \mathcal{B}(y_2) \in \mathbf{B}_q$:

• Pour $t \in [-r, 0]$, on a :

$$\begin{aligned} ||\mathcal{A}(y_1) + \mathcal{B}(y_2)|| &= ||\phi(0) - g_0(y_1)|| \\ &\leq R \\ &\leq q. \end{aligned}$$

• Pour $t \in [0, t_1]$, on a :

$$\begin{aligned} ||\mathcal{A}(y_1) + \mathcal{B}(y_2)|| &\leq \|S_\alpha(t)\|(\|\phi(0)\| - \|g_0(y_1)\|) + \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|\|f(s, y_2(s))\| ds \\ &\leq M e^{\omega t_1} R + M e^{\omega t_1} \psi(q) \int_0^{t_1} e^{-\omega s} p(s) ds \\ &\leq q. \end{aligned}$$

• Pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}(y_1)+\mathcal{B}(y_2)\| &= \|S_\alpha(t-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})\,(\phi(0)-g_0(y_1))\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)I_i(y_1(t_i^-))\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\times\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)f(s,y_2(s))ds\\
&\quad+\int_{t_k}^{t} S_\alpha(t-s)f(s,y_2(s))ds\|\\
&\leq \|S_\alpha(t-t_k)\|\prod_{i=1}^{k}\|S_\alpha(t_i-t_{i-1})\|\,[\|\phi(0)-g_0t(y_1)\|]\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k}\|S_\alpha(t-t_k)\|\prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\|\|I_i(y_1(t_i^-))\|\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|S_\alpha(t-t_k)\|\prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\|\|S_\alpha(t_i-s)\|\|f(s,y_2(s))\|ds\\
&\quad+\int_{t_k}^{t}\|S_\alpha(t-s)\|\|f(s,y_2(s))\|ds.\\
&\leq M^{k+1}e^{\omega b}R+\sum_{i=1}^{k} Me^{\omega(t-t_k)}\left[Me^{\omega(t_{i+1}-t_i)}Me^{\omega(t_{i+2}-t_{i+1})}\dots Me^{\omega(t_k-t_{k-1})}\right]M^*\\
&\quad+\sum_{i=1}^{k} Me^{\omega(t-t_k)}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\prod_{j=i}^{k-1} Me^{\omega(t_{j+1}-t_j})Me^{\omega(t_i-s)}p(s)\psi(q)ds\\
&\quad+M\psi(q)\int_{t_k}^{t} e^{\omega(t-s)}p(s)ds\\
&\leq M^{k+1}e^{\omega b}R+\sum_{i=1}^{k} M^{k-i}e^{\omega(t-t_i)}M^*\\
&\quad+\psi(q)M^{k+2}\sum_{i=1}^{k} M^{-i}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{\omega(t_k-s)}p(s)ds++M\psi(q)\int_{t_k}^{t} e^{\omega(t-s)}p(s)ds
\end{aligned}$$

puisque $M \geq 1$, alors :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}(y_1)+\mathcal{B}(y_2)\| &\leq M^{k+1}e^{\omega b}R+M^*M^k e^{\omega b}\sum_{i=1}^{k} e^{-\omega t_i}\\
&\quad+\psi(q)M^{k+2}\int_0^{t_k} e^{\omega(t_k-s)}p(s)ds+M\psi(q)\int_{t_k}^{t} e^{\omega(t-s)}p(s)ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M^{k+1}e^{\omega b}R + M^{*}M^{k}e^{\omega b}\sum_{i=1}^{k}e^{-\omega t_i}\\
&+\psi(q)M^{k+2}e^{\omega b}\int_0^{t_k}e^{-\omega s}p(s)ds + M\psi(q)e^{\omega b}\int_{t_k}^{t}e^{-\omega s}p(s)ds.
\end{aligned}
$$

De (H_7), on déduit que $\mathcal{A}(y_1)+\mathcal{B}(y_2)\in \mathbf{B}_q$.

Étape2 : $\mathcal{B}$ est continu

Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une séquence telle que $y_n \longrightarrow y$ dans $\mathbf{B}_q$, alors :

i) Pour $t\in[0,t_1]$:

$$
\begin{aligned}
\big|\mathcal{B}(y_n)(t)-\mathcal{B}(y)(t)\big| &= \Big|\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,y_n(s))ds - \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds\Big|\\
&\leq \int_0^t \|S_\alpha(t-s)\|\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&\leq Me^{\omega t}\int_0^t e^{-\omega s}|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))|ds \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

ii) Pour $t\in[t_k,t_{k+1}]$:

$$
\begin{aligned}
\big|\mathcal{B}(y_n)(t)-\mathcal{B}(y)(t)\big| &= \Big|\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1}S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)[f(s,y_n(s))\\
&- f(s,y(s))]ds + \int_{t_k}^{t}S_\alpha(t-s)[f(s,y_n(s))-f(s,y(s))]ds\Big|\\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|S_\alpha(t-t_k)\|\prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\|\|S_\alpha(t_i-s)\|\big|f(s,y_n(s))\\
&- f(s,y(s))\big|ds + \int_{t_k}^{t}\|S_\alpha(t-s)\|\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}Me^{\omega(t-t_k)}\prod_{j=i}^{k-1}Me^{\omega(t_{j+1}-t_j)}Me^{\omega(t_i-s)}\big|f(s,y_n(s))\\
&- f(s,y(s))\big|ds + \int_{t_k}^{t}Me^{\omega(t-s)}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} Me^{\omega(t-t_k)}[Me^{\omega(t_{i+1}-t_i)}Me^{w(t_{i+2}-t_{i+1})}Me^{\omega(t_{i+3}-t_{i+2})}\times\\
&\times \ldots\times Me^{\omega(t_k-t_{k-1})}]Me^{\omega(t_i-s)}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&+ \int_{t_k}^{t} Me^{\omega(t-s)}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} Me^{\omega t}[M^{k-1-i+1}]Me^{-\omega s}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&+ Me^{\omega t}\int_{t_k}^{t} e^{-\omega s}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&\leq \sum_{i=1}^{k}M^{k-i+2}e^{\omega t}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds\\
&+ Me^{\omega t}\int_{t_k}^{t} e^{-\omega s}\big|f(s,y_n(s))-f(s,y(s))\big|ds \longrightarrow 0
\end{aligned}
$$

Étape 3 : $\mathcal{B}$ est borné dans $PC([-r,b],E)$

L'opérateur linéaire $\mathcal{B} : PC([-r,b],E) \longrightarrow PC([-r,b],E)$ est borné si et seulement s'il transforme tout borné en borné dans $PC([-r,b],E)$; c'est à dire qu'il suffit de montrer que pour tout $q>0$, il existe des constantes positives $l_k; k=1,..,m$ tels que pour chaque $y\in \mathbf{B}_q=\{y\in PC([-r,b],E) : \|y\|\leq q\}$, on a $\|\mathcal{B}(y)\|\leq l_k$.

Soit $y\in\mathbf{B}_q$, alors :

$$
|\mathcal{B}(y)(t)| \leqslant \begin{cases}
\int_0^t \|S_\alpha(t-s)\||f(s,y(s))|ds, & \text{si } t\in[0,t_1];\\
\\
\sum\limits_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|S_\alpha(t-t_k)\|\times & \\
\prod\limits_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\|\|S_\alpha(t_i-s)\||f(s,y(s))|ds & \\
+\int_{t_k}^{t}\|S_\alpha(t-s)\||f(s,y(s))|ds, & \text{si } t\in(t_k,t_{k+1}).
\end{cases}
$$

Puisque $\|S_\alpha(t)\| \leqslant Me^{\omega t}$ et $|f(t,y)| \leqslant p(t)\psi(\|y\|)$, on a :

$$|\mathcal{B}(y)(t)| \leqslant \begin{cases} \int_0^t Me^{\omega(t-s)}p(s)\psi(q)ds, & \text{si } t \in [0,t_1]; \\ \\ \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Me^{\omega(t-t_k)} \times \\ \times \prod_{j=i}^{k-1} Me^{\omega(t_{j+1}-t_j)} Me^{\omega(t_i-s)}p(s)\psi(q)ds + \int_{t_k}^t Me^{\omega(t-s)}p(s)\psi(q)ds \\ & \text{si } t \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

Qui donne

$$|\mathcal{B}(y)(t)| \leqslant \begin{cases} Me^{\omega t}\psi(q)\int_0^t e^{-\omega s}p(s)ds, & \text{si } t \in [0,t_1]; \\ \\ \sum_{i=1}^{k} Me^{\omega(t-t_k)}[Me^{\omega(t_{i+1}-t_i)}Me^{\omega(t_{i+2}-t_{i+1})}\dots Me^{\omega(t_{k-1}-t_{k-2})}Me^{\omega(t_k-t_{k-1})}]Me^{\omega t_i} \times \\ \times\psi(q)\int_{t_{i-1}}^{t_i} p(s)e^{-\omega(s)}ds + Me^{\omega t}\psi(q)\int_{t_k}^t p(s)e^{-\omega s}ds \\ & \text{si } t \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

Alors

$$|\mathcal{B}(y)(t)| \leqslant \begin{cases} Me^{\omega t}\psi(q)\int_0^t e^{-\omega s}p(s)ds, & \text{si } t \in [0,t_1]; \\ \\ \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_k+t_{i+1}-t_i+t_{i+2}-t_{i+1}+\dots+t_{k-1}-t_{k-2}+t_k-t_{k-1}+t_i)} \times \\ \psi(q)\int_{t_{i-1}}^{t_i} p(s)e^{-\omega(s)}ds + Me^{\omega t}\psi(q)\int_{t_k}^t p(s)e^{-\omega s}ds & \text{si } t \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

Celà donne

$$|\mathcal{B}(y)(t)| \leqslant \begin{cases} Me^{\omega t}\psi(q)\int_0^t e^{-\omega s}p(s)ds, & \text{si } t \in [0,t_1]; \\ \\ \sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_i)} \times \\ \psi(q)\int_{t_{i-1}}^{t_i} p(s)e^{-\omega s}ds + Me^{\omega t}\psi(q)\int_{t_k}^t p(s)e^{-\omega s}ds & \text{si } t \in (t_k, t_{k+1}). \end{cases}$$

En utilisant la propriété de la fonction exponentielle, on obtient :

$$|\mathcal{B}(y)(t)| \leqslant \begin{cases} Me^{\omega t_1}\psi(q)\int_0^t e^{-\omega s}p(s)ds = l_1, & \text{si } t\in[0,t_1]; \\ \sum\limits_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t_{k+1}-t_i)}\times & \\ \times\psi(q)\int_{t_{i-1}}^{t_i} p(s)e^{-\omega s}ds + Me^{\omega t_{k+1}}\psi(q)\int_{t_k}^{t} p(s)e^{-\omega s}ds = l_k, k=2,..,m & \\ & \text{si } t\in(t_k,t_{k+1}). \end{cases}$$

Étape 4 : $\mathcal{B}$ transforme un borné en un ensemble équicontinu de $PC([-r,b],E)$.

Soient $\tau_1,\tau_2\in J\backslash\{t_1,t_2,...,t_m\}$ avec $\tau_1<\tau_2$, soit $\mathbf{B}_q$ un ensemble borné dans $PC([-r,b],E)$, donné dans l'étape précédente, et soit $y\in\mathbf{B}_q$.

• Si $\tau_1,\tau_2\in[0,t_1]$, on a :

$$\begin{aligned} &\left|\mathcal{B}(y(\tau_2))-\mathcal{B}(y(\tau_1))\right| \\ &\qquad = \|\int_0^{\tau_2} S_\alpha(\tau_2-s)f(s,y(s))ds-\int_0^{\tau_1} S_\alpha(\tau_1-s)f(s,y(s))ds\| \end{aligned}$$

L'utilisation de la linéarité de l'opérateur intégral et de l'hypothèse H_5, donnent :

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{B}(y(\tau_2))-\mathcal{B}(y(\tau_1))\right| &= \|\int_0^{\tau_1} S_\alpha(\tau_2-s)f(s,y(s))ds \\ &\quad+\int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\alpha(\tau_2-s)f(s,y(s))ds-\int_0^{\tau_1} S_\alpha(\tau_1-s)f(s,y(s))ds\| \\ &= \|\int_0^{\tau_1}\left(S_\alpha(\tau_2-s)-S_\alpha(\tau_1-s)\right)f(s,y(s))ds \\ &\quad+\int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\alpha(\tau_2-s)f(s,y(s))ds\| \\ &\leq \int_0^{\tau_1}\|S_\alpha(\tau_2-s)-S_\alpha(\tau_1-s)\||f(s,y(s))|ds \\ &\quad+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\|S_\alpha(\tau_2-s)\||f(s,y(s))|ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \psi(q)\int_0^{\tau_1}\|S_\alpha(\tau_2-s)-S_\alpha(\tau_1-s)\|p(s)ds \\
&+Me^{\omega\tau_2}\psi(q)\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-\omega s}p(s)ds.
\end{aligned}$$

Si $\tau_1=0$, la partie droite de l'inégalité précédente tend à zéro quand $\tau_2\to 0$ uniformément pour $y\in PC$.

Si $0<\tau_1<\tau_2$, pour $\epsilon>0$ avec $\epsilon<\tau_1<\tau_2$, on a :

$$\begin{aligned}
\big|\mathcal{B}(y(\tau_2))-\mathcal{B}(y(\tau_1))\big| &\leq \int_0^{\tau_1-\epsilon}\|S_\alpha(\tau_2-s)-S_\alpha(\tau_1-s)\||f(s,y(s))|ds \\
&+\int_{\tau_1-\epsilon}^{\tau_1}\|S_\alpha(\tau_2-s)-S_\alpha(\tau_1-s)\||f(s,y(s))|ds \\
&+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\|S_\alpha(\tau_2-s)\||f(s,y(s))|ds \\
&\leq \psi(q)\int_0^{\tau_1-\epsilon}\|S_\alpha(\tau_2-s)-S_\alpha(\tau_1-s)\|p(s)ds \\
&+\psi(q)\int_{\tau_1-\epsilon}^{\tau_1}\|S_\alpha(\tau_2-s)-S_\alpha(\tau_1-s)\|p(s)ds \\
&+Me^{\omega\tau_2}\psi(q)\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-\omega s}p(s)ds.
\end{aligned}$$

De lemme 1.2, l'opérateur $S_\alpha(t)$ est uniformement continu pour $t\in[\epsilon,t_1]$ et ϵ arbitraire, alors :

$$\lim_{[\tau_1,\tau_2]\to 0}\big|\mathcal{B}(y(\tau_2))-\mathcal{B}(y(\tau_1))\big|=0.$$

Ainsi l'opérateur $\mathcal{B}$ est équicontinu sur $[0,t_1]$.

- Si $\tau_1,\tau_2\in[t_k,t_{k+1}]$:

$$\begin{aligned}
\big|\mathcal{B}(y(\tau_2))-\mathcal{B}(y(\tau_1))\big| &= \Big\|\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}S_\alpha(\tau_2-t_k)\prod_{j=i}^{k-1}S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)f(s,y(s))ds \\
&-\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}S_\alpha(\tau_1-t_k)\prod_{j=i}^{k-1}S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)f(s,y(s))ds \\
&+\int_{t_k}^{\tau_2}S_\alpha(\tau_2-s)f(s,y(s))ds-\int_{t_k}^{\tau_1}S_\alpha(\tau_1-s)f(s,y(s))ds\Big\|.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}(y(\tau_2))-\mathcal{B}(y(\tau_1))| &\leq \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|S_\alpha(\tau_2-t_k)-S_\alpha(\tau_1-t_k)\|\prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\|\times\\ &\times\|S_\alpha(t_i-s)\||f(s,y(s))|ds+\|\int_{t_k}^{\tau_1}S_\alpha(\tau_2-s)f(s,y(s))ds\\ &+\int_{\tau_1}^{\tau_2}S_\alpha(\tau_2-s)f(s,y(s))ds-\int_{t_k}^{\tau_1}S_\alpha(\tau_1-s)f(s,y(s))ds\|.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}(y(\tau_2))-\mathcal{B}(y(\tau_1))| &\leq \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|S_\alpha(\tau_2-t_k)-S_\alpha(\tau_1-t_k)\|\prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\|\\ &\times\|S_\alpha(t_i-s)\||f(s,y(s))|ds+\int_{t_k}^{\tau_1}\|S_\alpha(\tau_2-s)-S_\alpha(\tau_1-s)\|\\ &|f(s,y(s))|ds+\int_{\tau_1}^{\tau_2}\|S_\alpha(\tau_2-s)\||f(s,y(s))|ds.\end{aligned}$$

Sous l'hypothèse (H_5), on obtient :

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}(y(\tau_2))-\mathcal{B}(y(\tau_1))| &\leq \sum_{i=1}^{k}\psi(q)\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|S_\alpha(\tau_2-t_k)-S_\alpha(\tau_1-t_k)\|\prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\|\times\\ &\|S_\alpha(t_i-s)\|p(s)ds+\psi(q)\int_{t_k}^{\tau_1-\epsilon}\|S_\alpha(\tau_2-s)-S_\alpha(\tau_1-s)\|p(s)ds\\ &+\psi(q)\int_{\tau_1-\epsilon}^{\tau_1}\|S_\alpha(\tau_2-s)-S_\alpha(\tau_1-s)\|p(s)ds+M\psi(q)e^{\omega\tau_2}\\ &\times\int_{\tau_1}^{\tau_2}e^{-\omega s}p(s)ds.\end{aligned}$$

Si $\tau_1\longrightarrow\tau_2$ et ϵ devient suffisamment petit, la partie droite de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro, puisque S_α est un opérateur analytique et la compacité de $S_\alpha(t)$ pour $t>0$ implique la continuité dans la topologie uniforme d'opérateur [25, 26]. Cela prouve l'équicontinuité dans le cas où $t\neq t_i, i=1,....,m+1$.

Maintenant, il reste à examiner l'équicontinuité à $t=t_l$, pour certains $y\in\mathbf{B}_q$, pour chaque $t\in J$.

En premier, on prouve l'équicontinuité à $t = t_l^-$. On fixe $\delta_1 > 0$ tel que $\{t_k, k \neq l\} \cap [t_l - \delta_1, t_l + \delta_1] = \{\}$. Pour $0 < h < \delta_1$, on a :

- Si $l = 1$ c'est à dire $t_1 - h, t_1 \in [0, t_1]$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(y)(t_1 - h) - \mathcal{B}(y)(t_1)| &\leqslant \psi(q)\int_0^{t_1-h} \|S_\alpha(t_1 - s) - S_\alpha(t_1 - h - s)\|p(s)ds \\ &\quad + Me^{\omega t_1}\psi(q)\int_{t_1-h}^{t_1} e^{-\omega s}p(s)ds, \end{aligned}$$

qui tend à zéro quand $h \to 0$ puisque $S_\alpha(t)$ est un opérateur uniformément continu pour $t \in [0, t_1]$ ainsi l'opérateur $\mathcal{B}$ est équicontinu à $t = t_1^-$.

- Si $t_l - h, t_l \in [t_k, t_{k+1}]$, alors

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(y)(t_l - h) - \mathcal{B}(y)(t_l)| &\leq \sum_{i=1}^{k}\psi(q)\int_{t_{i-1}}^{t_i} \|S_\alpha(t_l - t_k) - S_\alpha(t_l - h - t_k)\| \times \\ &\quad \prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1} - t_j)\|\|S_\alpha(t_i - s)\|p(s)ds + \psi(q) \times \\ &\quad \int_{t_k}^{t_l-h} \|S_\alpha(t_l - s) - S_\alpha(t_l - h - s)\|p(s)ds + \\ &\quad M\psi(q)e^{\omega t_l}\int_{t_l-h}^{t_l} e^{-\omega s}p(s)ds. \end{aligned}$$

la partie droite de l'inégalité précédente tend à zéro quand $h \longrightarrow 0$, alors l'opérateur $\mathcal{B}$ est équicontinu à t_l^-.

Maintenant, on définit

$$\widehat{B_0}(y)(t) = \mathcal{B}(y)(t), \quad si \quad t \in [0, t_1].$$

et

$$\widehat{B_i}(y)(t) = \begin{cases} \mathcal{B}(y)(t), \text{ si } \ t \in (t_i, t_{i+1}] \\ \\ \mathcal{B}(y)(t_i^+), \quad \text{si } \ t = t_i. \end{cases}$$

Ensuite, on prouve l'équicontinuité quand $t = t_i^+$. Pour cela, on fixe $\delta_2 > 0$ tel que $\{t_k, k \neq i\} \cap [t_i - \delta_2, t_i + \delta_2] = \emptyset$. En premier, on étudie l'équicontinuité à $t = 0^+$.

Si $t \in [0, t_1]$, on a

$$\widehat{B_0}(y)(t) = \begin{cases} \mathcal{B}(y)(t), \quad si \ \ t \in [0, t_1] \\ \\ 0, \quad si \ \ t = 0. \end{cases}$$

Pour $0 < h < \delta_2$, on a

$$\begin{aligned} |\widehat{B_0}(y)(h) - \widehat{B_0}(y)(0)| & \\ &= |\mathcal{B}(y)(h)| \\ &= \| \int_0^h S_\alpha(h-s) f(s, y(s)) ds \| \\ &\leq \int_0^h \|S_\alpha(h-s)\| |f(s, y(s))| ds \\ &\leq \psi(q) e^{\omega h} \int_0^h e^{-\omega s} p(s) ds. \end{aligned}$$

Le côté droit tend à zéro quand $h \longrightarrow 0$.

Maintenant, on étudie l'équicontinuité à $t_1^+, t_2^+, \ldots, t_m^+$(c'est à dire à $t_l^+, 1 \leq l \leq m$)

Pour $0 < h < \delta_2$, on a :

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(y)(t_l + h) - \mathcal{B}(y)(t_l)| \ \leq \ & \sum_{i=1}^{k} \psi(q) \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|S_\alpha(h) - S_\alpha(0)\| \prod_{j=i}^{k-1} \|S_\alpha(t_{j+1} - t_j)\| \times \\ & \|S_\alpha(t_i - s)\| p(s) ds + M\psi(q) e^{\omega(t_l + h)} \int_{t_l}^{t_l + h} e^{-\omega s} p(s) ds. \end{aligned}$$

Il est clair que le côté droit a pour limite zéro quand $h \longrightarrow 0$.

En conclusion, l'opérateur $\mathcal{B}$ est équicontinu en $t_l^+, 1 \leq l \leq m)$.

L'équicontinuité pour les cas $\tau_1 < \tau_2 \leqslant 0$ et $\tau_1 \leqslant 0 \leqslant \tau_2$ découle de la continuité uniforme de ϕ sur l'intervalle $[-r, 0]$. En conséquence les étapes 1 et 3 associées au théorème d'Arzelà-Ascoli, il suffit de montrer que $\mathcal{B}$ transforme $\mathbf{B}_q$ en un ensemble précompact dans E c'est à dire : on montre que l'ensemble $\{\mathcal{B}(y)(t); \quad y \in \mathbf{B}_q\}$ est un précompact dans E pour chaque $t \in [0, b]$.

Maintenant, soit $x \in \mathbf{B}_q$ et soit ϵ un nombre réel positif satisfaisant $0 < \epsilon < t \leq b$.

Pour $y \in \mathbf{B}_q$ et $t \in [0, t_1]$, on a : si $t = 0$ l'ensemble $\{\mathcal{B}(y)(0); \quad y \in \mathbf{B}_q\} = \{0\}$ qui est un precompact comme un ensemble fini.

Soit $K \subset E$; $\overline{Conv(K)}$ l'enveloppe convexe de l'ensemble K, pour $0 < \epsilon < t \leq t_1$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(y)(t) &= \int_0^t S_\alpha(t-s) f(s, y(s)) ds \\
&= \int_0^{t-\epsilon} S_\alpha(t-s) f(s, y(s)) ds + \int_{t-\epsilon}^t S_\alpha(t-s) f(s, y(s)) ds.
\end{aligned}$$

L'ensemble $F_0 = \{S_\alpha(t-\theta) f(\theta, y(\theta)); \quad \theta \in [0, t-\epsilon], \quad y \in \mathbf{B_q}\}$, du théorème de la valeur moyenne pour l'intégrale de Bochner, on a :

$$\int_0^{t-\epsilon} S_\alpha(t-s) f(s, y(s)) ds \in (t-\epsilon)\overline{Conv(F_0)}. \tag{3.2.1}$$

D'autre part, en utilisant des hypothèses (H_1) et (H_4), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{t-\epsilon}^t S_\alpha(t-s) f(s, y(s)) ds &\leq Me^{\omega t} \psi(q) \int_{t-\epsilon}^t e^{-\omega s} p(s) ds \\
&\leq Me^{\omega t} \psi(q) \int_{t-\epsilon}^t e^{-\omega s} p(s) ds.
\end{aligned}$$

Soit C_ϵ^0 le cercle de diamètre d_ϵ^0 tel que :

$$d_\epsilon^0 \leq Me^{\omega t} \psi(q) \int_{t-\epsilon}^t e^{-\omega s} p(s) ds. \tag{3.2.2}$$

En conséquence de (3.2.2) et(3.2.3), on conclu que

$$\mathcal{B}(y)(t) \in (t-\epsilon)\overline{Conv(F_0)} + C_\epsilon^0, \forall 0 < \epsilon < t \leq t_1. \tag{3.2.3}$$

Pour $t_k < \epsilon < t \leq t_{k+1}$ et $y \in \mathbf{B_q}$ on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}y(t) &= \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\times \Pi_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)ds \\ &+ \int_{t_k}^{t-\epsilon} S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds + \int_{t-\epsilon}^{t} S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds\end{aligned}$$

L'ensemble $F_k = \{S_\alpha(t-\theta)f(\theta,y(\theta)); \quad \theta \in [t_k, t-\epsilon], \quad y \in \mathbf{B_q}\}$, du théorème de la valeur moyenne pour l'intégrale de Bochner, on a :

$$\int_{t_k}^{t-\epsilon} S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds \in (t-t_k-\epsilon)\overline{Conv(F_k)}. \tag{3.2.4}$$

De (H_1), (H_5), on obtient :

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\Pi_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)ds + \int_{t-\epsilon}^{t} S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds \\ &\leq \psi(q)\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_{k-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)ds + M\psi(q)e^{\omega t}\int_{t-\epsilon}^{t} e^{-\omega s}p(s)ds.\end{aligned}$$

Soit C_ϵ^k le cercle qui a le diamètre d_ϵ^k tel que

$$d_\epsilon^k \leq \psi(q)\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{\omega(t-t_{k-1})}\int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\omega s}p(s)ds + M\psi(q)e^{\omega t}\int_{t-\epsilon}^{t} e^{-\omega s}p(s)ds. \tag{3.2.5}$$

De (3.2.5) et (3.2.6), il s'ensuit que

$$\mathcal{B}(y)(t) \in (t-t_k-\epsilon)\overline{Conv(F_k)} + C_\epsilon^k, \quad \forall t_k < \epsilon < t \leq t_{k+1}. \tag{3.2.6}$$

De (3.2.4) et (3.2.7), on conclut que $\{\mathcal{B}(y)(t)\}$ est un précompact dans E. Par conséquent l'opérateur $\mathcal{B} : PC([-r,b],E) \longrightarrow PC([-r,b],E)$ est complètement continu.

Étape 4 : $\mathcal{A}$ est une application contractante.

Soient $y_1, y_2 \in B_q$. Pour $t \in [-r,0]$, on a :

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}(y_1)(t) - \mathcal{A}(y_2)(t)| &= \|g_0(y_1) - g_0(y_2)\| \\ &\leq G\|y_1 - y_2\|.\end{aligned}$$

De l'hypothèse (H_6), l'inégalité précédente implique que $\mathcal{A}$ est une application contractante sur $t \in [-r, 0]$.

Pour $t \in [0, t_1]$, on a :

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(y_1)(t) - \mathcal{A}(y_2)(t)| &= |S_\alpha(t)\,(g_0(y_1) - g_0(y_2))\,\| \\ &\leq MGe^{\omega t_1}\|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

De l'hypothèse (H_6), on a $MGe^{\omega t_1} < 1$, il s'ensuit que $\mathcal{A}$ est une application contractante quand $t \in [0, t_1]$. Il reste à prouver que $\mathcal{A}$ est une application contractante pour $t \in [t_k, t_{k+1}], k \geq 1$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(y_1)(t) - \mathcal{A}(y_2)(t)| &= \|S_\alpha(t - t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i - t_{i-1})\,(g_0(y_1) - g_0(y_2)) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t - t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1} - t_j)\left(I_i(y_1(t_i^-)) - I_i(y_2(t_i^-))\right)\| \\ &\leq GMe^{\omega(t-t_k)}\prod_{i=1}^{k} Me^{\omega(t_i - t_{i-1})}\|y_1 - y_2\| \\ &+ M^*\sum_{i=1}^{k} Me^{\omega(t-t_k)}\prod_{j=i}^{k-1} Me^{\omega(t_{j+1}-t_j)}\|y_1 - y_2\| \\ &\leq \left[GM^{k+1}e^{\omega t_k} + M^*M^{k+2}\sum_{i=1}^{k} e^{\omega(t_k - t_i)}\right]\|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

Utilisant l'hypothèse (H_6), l'opérateur $\mathcal{A}$ est une application contractante.

Alors, en conséquence du théorème 1.6 , on déduit que $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ admet un point fixe qui est la solution faible du problème $(3.1.1) - (3.1.3)$.

3.3 Exemple

On considère l'équation différentielle partielle fractionnaire de la forme suivante :

$$^{c}D_t^{\alpha} y(t, x) = -\frac{\partial^2 z(t, x)}{\partial x^2} + Q(t, z(t - r, x)), x \in [0, \pi], t \in [0, b], t \neq t_k \tag{3.3.1}$$

$$z(t_k^+, x) - z(t_k^-, x) = b_k z(t_k, x), x \in [0, \pi], k = 1, ..., m \tag{3.3.2}$$

$$z(t, 0) = z(t, \pi) = 0, t \in [0, b] \tag{3.3.3}$$

$$z(t, x) + \sum_{i=1}^{m+1} \int_0^{t_i} h_i(s) z(s, x) ds = \phi(t, s), t \in [-r, 0], x \in [0, \pi], \tag{3.3.4}$$

où $r > 0, b_k > 0, k = 1, .., m, Q : [0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $\phi \in \mathbb{D}$ et $\mathbb{D} = \{\psi : [-r, 0] \times t \in [0, \pi] \to \mathbb{R}\}$; tel que ψ est continu partout sauf pour un nombre dénombrable de points où $\psi(s^-), \psi(s^+)$ existent avec $\psi(s^-) = \psi(s^+), 0 = t_0 < t_1 < .... < t_m < t_{m+1} = b$, $\quad z(t_k^+, x) = \lim_{h \to 0^+} z(t_k + h, x), \quad z(t_k^-, x) = \lim_{h \to 0^-} z(t_k + h, x)$, $h_i \in L^2([0, b]; \mathbb{R})$; pour tout $i = 1, ..., m + 1$.

Soit $E = L^2[0, \pi]$, on définit l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ par :

$$D(A) = \{u \in E, u, u' \text{sont absolument continus}, u'' \in E, u(0) = u(\pi) = 0\}$$

et

$$Au = u''$$

Il est bien connu de [43] que A engendre un semigroupe analytique compact $(T(t))$ pour $t > 0$ dans E donné par

$$T(t)w = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle w, w_n \rangle w_n, \qquad w \in E$$

où $\langle , \rangle$ est le produit scalaire dans L^2 et $w_n(s) = \sqrt[2]{\pi} \sin ns, \quad n = 1, 2, \ldots$ est l'ensemble orthogonal des vecteurs propres de A. Et du théorème 1.7, l' opérateur A engendre également une α- famille résolvante qui est compacte pour $t > 0$

$$S_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\theta} e^{\lambda t} (\lambda^\alpha - A)^{-1}, & t > 0 \\ I, & t = 0. \end{cases}$$

Où $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ et Γ_θ est le contour $\{re^{i\theta}; \quad r \geq 0\} \bigcup \{re^{i\theta}; \quad r \geq 0\}$.

aussi il existe des constantes $M \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m+1} \|h_i\|_{L^2([0,t_i])}$ tel que $\|S_\alpha(t)\| \leq M$ et

$$\|g_t(y_1) - g_t(y_2)\| \leq \|y_1 - y_2\|.$$

On suppose qu'il existe une fonction intégrable $\sigma[0, b] \to \mathbb{R}^+$ tel que :

$$|Q(t, g(t-r))| \leq \sigma(t)\Gamma(|g|),$$

où $\Gamma : [0, \infty) \to [0, \infty)$ est continu et non décroissant.

En faisant les changements de variables

$$\begin{aligned}
y(t)(x) &= z(t, x), & & t \in [0, b] \neq \{t_1, t_2 \ldots, t_m\} \\
I_k(y(t_k^-))(x) &= b_k z(t_k, x), & & x \in [0, \pi], \quad k = 1, \ldots, m \\
f(t, \phi)(x) &= Q(t, \phi(\theta, x)), & & x \in [0, \pi], \quad \theta \in [-r, 0] \\
\phi(\theta)(x) &= \phi(\theta, x), & & x \in [0, \pi], \quad \theta \in [-r, 0] \\
g_t(x) &= \sum_{i=1}^{m+1} \int_0^{t_i} h_i(s) z(s, x) ds.
\end{aligned}$$

On peut reformuler le problème différentiel partiel fractionnaire $(3.3.1)-(3.3.4)$ sous la forme du problème abstrait $(3.1.1) - (3.1.3)$. Par conséquent, sous des conditions appropriées sur $\phi(\theta)$, les hypothèses du théorème 3.2 sont satisfaites, alors le problème $(3.3.1) - (3.3.4)$ admet au mois une solution faible.

Chapitre 4

Contrôlabilité de certaines équations différentielles fractionnaires semi-linéaires impulsives avec conditions non-locales

4.1 Introduction

La contrôlabilité joue un rôle important dans l'analyse et la conception des systèmes de contrôle. Récemment, les résultats de la contrôlabilité pour l'équation fractionnaire impulsive dans l'espace de Banach a été étudiée par de nombreux auteurs [10],[47],[48] ,[54].
Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'existence de solutions faibles pour l'équation différentielle semi linéaire fractionnaire de la forme

$$^{c}D^{\alpha}_{t_k}y(t) - Ay(t) = f(t, y_t) + Bu(t), t \in J_k := (t_k, t_{k+1}], k = 0, 1, ..m \tag{4.1.1}$$

$$\Delta y\diagdown_{y=y_k} = I_k(y(t_k^-)) \quad k = 1, ..., m \tag{4.1.2}$$

$$y(t) + g_t(y) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0] \tag{4.1.3}$$

Où $^{c}D^{\alpha}_{t_k}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de caputo $0 < \alpha < 1$, $A : D(A) \subset E \to E$ est l'opérateur linéaire borné de famille α - résolvante $S_\alpha(t) : t \geq 0$ est définit sur l'espace de Banach E, $B : U \to E$ est un opérateur linéaire borné et la fonction de contrôle $u(.)$ est donnée sur $L^2[J, U]$, avec U est un espace de Banach, $I_k : E \to E$, $(k = 0, 1, ..., m+1), 0 = t_0 < t_1 < ..... < t_m < t_{m+1} = b$, $\Delta y\diagdown_{y=y_k} = y(t_k^+) - y(t_k^-)$, ou $y(t_k^+) = \lim_{h\to 0^+} y(t_k + h)$ et $y(t_k^-) = \lim_{h\to 0^+} y(t_k - h)$ reprèsentent les limites droites et gauches de $y(t)$ quand $t = t_k$, respectueusement, $g_t : PC([-r, b], E) \to E$ est une fonction donnée, où

$PC = \{y : [-r, b] \to E; y \in C(t_k, t_{k+1}], E); k = 0, 1, 2, ..., m \quad \text{tel que} \quad y(t_k^-), y(t_k^+) \ \text{existent}$

$\text{avec} \quad y(t_k^-) = y(t_k^+), k = 1, 2, ..., m\}$

qui est un espace de Banach avec la norme

$$\|y\| = max\{\|y_k\|_\infty; k = 1, 2, .., m\}.$$

$f : [0, b] \times D \to E$ est une fonction donnée ;

$D = \{\psi : [-r, 0] \longrightarrow E$,ψ continue partout sauf pour un nombre fini de points où $\psi(s^-)$ et $\psi(s^+)$ existent et $\psi(s^-) = \psi(s)\}$.

Pour $\psi \in D$, $\|\psi\|_D = sup\{|\psi\theta(\theta)| : \theta \in [-r, 0]\}$. et pour toute fonction continue y définie sur $[-r, b]\diagdown\{t_1, ..., t_m\}$ et tout $t \in J : [0, b]$, on définit l'histoire de l'état de $t - r$ jusqu'à le temps présent par

$$y_t(\theta) = y(t + \theta), \ \theta \in [-r, 0].$$

4.2 Résultats

Inspirer par les travaux [6, 30, 54], on fait l'étude du problème $(4.1.1)-(4.1.3)$.

La définition de la solution faible du problème est comme suite :

Définition 4.1 *La fonction $y \in PC([-r,b],E)$ est appelée une solution faible du problème $(4.1.1)-(4.1.3)$ si $y(t)=\phi(t)-g_t(y)$, pour tout $t \in [-r,0], \Delta y\searrow_{y=y_k} = I_k(y(t_k^-)), k = 1,2,...,m.$ et tel que y satisfait l'équation intégrale suivante :*

$$y(t) = \begin{cases} S_\alpha(t)[\phi(0)-g_0(y)] + \int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds + \int_0^t S_\alpha(t-s)Bu(s)ds \quad t \in [0,t_1]; \\ S_\alpha(t-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})[\phi(0)-g_0(y)]+ \\ \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)[f(s,y(s))+Bu(s)]ds+ \\ \int_{t_k}^t S_\alpha(t-s)[f(s,y(s))+Bu(s)]ds + \sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)I_i(y(t_i^-)) \quad t \in (t_k,t_{k+1}). \end{cases}$$

Définition 4.2 *Le problème $(4.1.1)-(4.1.3)$ est dit contrôlable sur l'intervalle J si pour toute condition non local $\phi \in E$, et $y_1 \in E$ il existe un conrôle $u \in L^2(J,U)$ tel que la solution faible $y(t)$ du $(4.1.1)-(4.1.3)$ satisfait $y(b)=y_1$.*

Notre résultat est basé sur le principe d'application contractante de Banach. Pour prouver la contrôlabilité du systéme $(4.1.1)-(4.1.3)$, on introduit les hypothèses suivantes :

$(\mathbf{H_1})$ A engendre un compact α-FOR $(S_{\alpha)})_{t\geqslant 0}$ borné de manière exponentielle c'est à dire qu'il existe une constante $M \geqslant 1$, $w \geqslant 0$ tel que :

$$\|S_\alpha(t)\| \leqslant Me^{wt} \quad t \geqslant 0.$$

$(\mathbf{H_2})$ La fonction $f : J \times D \longrightarrow E$ est continue et il existe une constante $N > 0$, tel que

$$\|f(t,y_1(t)) - f(t,y_2(t))\| \leqslant N\|y_1-y_2\|, \text{ pour tout } y_1,y_2 \in D.$$

$(\mathbf{H_3})$ La fonction f est carathéodory.

$(\mathbf{H_4})$ Les fonctions $I_k : E \longrightarrow E$ sont continues et il existe une constante $L > 0$, tel que

$$\|I_k(y_1) - I_k(y_2)\| \leqslant L\|y_1 - y_2\|, \text{ pour tout } y_1, y_2 \in E, \quad k = 1, 2, ..., m.$$

$(\mathbf{H_5})$ La fonction $g_t : PC\left([-r, b], E\right) \longrightarrow E$ est continue par rapport à t, et il existe une constante $G > 0$, tel que

$$\|g_t(y_1) - g_t(y_2)\| \leqslant G\|y_1 - y_2\|, \text{ pour tout } y_1, y_2 \in PC\left([-r, b], E\right).$$

$(\mathbf{H_6})$ Les opérateurs linéaires $W_k : L^2([t_k, t_{k+1}), U) \longrightarrow E$ sont définis :

- $t \in [0, t_1]$:

$$W_1 u = \int_0^{t_1} S_\alpha(t - s)Bu(s)ds;$$

W_1 admet un opérateur inversible W_1^{-1} prend des valeurs dans $L^2([0, t_1), E)\diagup KerW_1$ et il existe une constante positive M_1 tel que $\|BW_1^{-1}\|_{L(E)} \leq M_1$.

- $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$W_{k+1}u = \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t - t_k) \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1} - t_j)S_\alpha(t_i - s)Bu(s)ds + \int_{t_k}^{t} S_\alpha(t - s)Bu(s)ds;$$

W_{k+1} admettent des opérateurs inversibles W_{k+1}^{-1} qui prennent leurs valeurs dans $L^2([t_k, t_{k+1}), E)\diagup KerW_{k+1}$ et il existe des constantes positives M_{k+1} tels que $\|BW_{k+1}^{-1}\|_{L(E)} \leq M_{k+1}$.

Pour la construction de l'opérateur W et son inverse, voir M. D. Quinn and N. Carmichael [46].

Lemme 4.1 *Le contrôle $u(t)$ est défini par*

$$u(t) = W_1^{-1}[Z(t_1) - S_\alpha(t_1)(\phi(0) - g_0(y)) - \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s)f(s, y(s))ds](t),$$

pour $t \in [0, t_1]$ et $Z \in PC(J, E)$.

Preuve. Soit $Z \in PC(J, E)$ une fonction arbitraire, le systeme $(4.1.1) - (4.1.3)$ est contrôlable dans $[0, t_1]$ au temps terminal t_1 par la fonction $Z(t_1)$:

$$Z(t_1) = S_\alpha(t_1)(\phi(0) - g_0(y)) + \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s)f(s, y(s))ds + \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s)Bu(s)ds$$

D'aprés (H_5), on obtient

$$Z(t_1) = S_\alpha(t_1)(\phi(0) - g_0(y) + \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s)f(s, y(s))ds + W_1 u$$

Par la suite

$$W_1 u = Z(t_1) - S_\alpha(t_1)(\phi(0) - g_0(y)) - \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s)f(s, y(s))ds$$

Alors

$$u(t) = W_1^{-1}[Z(t_1) - S_\alpha(t_1)(\phi(0) - g_0(y)) - \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s)f(s, y(s))ds](t).$$

Lemme 4.2 *Le contrôle $u(t)$ est défini par*

$$u(t) = \left\{ \begin{array}{c} W_{k+1}^{-1}[Z(t_{k+1}) - S_\alpha(t_{k+1} - t_k)\prod\limits_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i - t_{i-1})(\phi(0) - g_0(y)) - \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1} - s)f(s, y(s))ds - \sum\limits_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t_{k+1} - t_k)\prod\limits_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1} - t_j)S_\alpha(t_i - s) \\ f(s, y(s))ds - \sum\limits_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1} - t_k)\prod\limits_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1} - t_j)I_i(y(t_i^-))](t), \end{array} \right.$$

pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$ et $Z \in PC(J, E)$.

Preuve. Soit $Z \in PC(J,E)$ une fonction arbitraire ; Le systeme $(4.1.1)-(4.1.3)$ est contrôlable dans $[t_k, t_{k+1}]$ au temps terminal t_{k+1} par la fonction $Z(t_{k+1})$:

$$Z(t_{k+1}) = \begin{cases} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})(\phi(0)-g_0(y)) + \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) \\ S_\alpha(t_i-s)[f(s,y(s))+Bu(s)]ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s)[f(s,y(s))+Bu(s)]ds \\ +\sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) I_i(y(t_i^-)) \end{cases}$$

$$Z(t_{k+1}) = \begin{cases} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})(\phi(0)-g_0(y)) + \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) \\ S_\alpha(t_i-s)Bu(s)ds + \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) S_\alpha(t_i-s)f(s,y(s))ds \\ +\int_{t_k}^{t} S_\alpha(t_{k+1}-s)Bu(s)ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s)f(s,y(s))ds \\ +\sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) I_i(y(t_i^-)) \end{cases}$$

D'aprés (H_5), on obtient :

$$Z(t_{k+1}) = \begin{cases} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})(\phi(0)-g_0(y)) + W_{k+1}u \\ +\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) S_\alpha(t_i-s)f(s,y(s))ds + \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s) \\ \times f(s,y(s))ds + \sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) I_i(y(t_i^-)) \end{cases}$$

$$W_{k+1}u = \begin{cases} Z(t_{k+1}) - S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})(\phi(0)-g_0(y)) - \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t_{k+1}-t_k) \\ \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) S_\alpha(t_i-s)f(s,y(s))ds - \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s)f(s,y(s))ds \\ -\sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) I_i(y(t_i^-)) \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} W_{k+1}^{-1}[Z(t_{k+1}) - S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})(\phi(0)-g_0(y)) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s) \\ f(s,y(s))ds - \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) S_\alpha(t_i-s)f(s,y(s))ds \\ -\sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) I_i(y(t_i^-))](t) \end{cases}$$

Théorème 4.1 *On suppose que les hypothèses* $(H_1)-(H_6)$ *sont satisfaites avec*

$$(Me^{wt_1}G+M(N+\theta_1)(\frac{-1}{w}+\frac{1}{w}e^{wt_1}))<1,$$

et

$$[M^{k+1}e^{wt_{k+1}}G+(N+\theta_{k+1})\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+2}e^{wt_{k+1}}(\frac{-1}{w}e^{-wt_i}+\frac{1}{w}e^{-wt_{i-1}})+$$

$$M(N+\theta_{k+1})e^{wt_{k+1}}(\frac{-1}{w}e^{-wt_{k+1}}+\frac{1}{w}e^{-wt_k})+L\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+1}e^{w(t_{k+1}-t_i)}]<1,$$

alors le système $(4.1.1)-(4.1.3)$ *est contrôlable sur* J.

Preuve. Soit $Z\in PC(J,E)$ une fonction arbitraire, maintenant pour transférer l'équation (4.1.1) de l'état initial à $Z(t)$, on considére le contrôle

$$u(t)=\begin{cases} W_1^{-1}[Z(t_1)-S_\alpha(t_1)(\phi(0)-g_0(y))-\int_0^{t_1}S_\alpha(t_1-s)f(s,y(s))ds](t), \quad t\in[0,t_1]; \\ W_{k+1}^{-1}[Z(t_{k+1})-S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k}S_\alpha(t_i-t_{i-1})((\phi(0)-g_0(y))-\int_{t_k}^{t_{k+1}}S_\alpha(t_{k+1}-s) \\ \times f(s,y(s))ds-\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1}S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)f(s,y(s))ds \\ -\sum_{i=1}^{k}S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1}S_\alpha(t_{j+1}-t_j)I_i(y(t_i^-))](t), \qquad t\in(t_k,t_{k+1}). \end{cases}$$

On définit une application Ψ à partir $PC([-r,b],E)$ en soi même par :

$t\in[0,t_1]$:

$$\Psi y(t)=\begin{cases} S_\alpha(t)[\phi(0)-g_0(y)]+\int_0^t S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds+\int_0^t S_\alpha(t-s) \\ \times BW_1^{-1}[Z(t_1)-S_\alpha(t_1)(\phi(0)-g_0(y))-\int_0^{t_1}S_\alpha(t_1-s)f(s,y(s))ds](s)ds; \end{cases}$$

$t \in (t_k, t_{k+1})$:

$$\Psi y(t) = \begin{cases} S_\alpha(t-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i - t_{i-1})[\phi(0) - g_0(y)] + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) \\ S_\alpha(t_i - s)f(s,y(s))ds + \sum_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i - s) \\ \times BW_{k+1}^{-1}[Z(t_{k+1}) - S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i - t_{i-1})(\phi(0) - g_0(y)) - \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s)f(s,y(s))ds - \sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k) \times \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j) \\ \times I_i(y(t_i^-))](s)ds + \int_{t_k}^{t} S_\alpha(t-s)f(s,y(s))ds + \int_{t_k}^{t} S_\alpha(t-s)BW_{k+1}^{-1}[Z(t_{k+1}) - \\ S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i - t_{i-1})(\phi(0) - g_0(y)) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s)f(s,y(s))ds \\ -\sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)I_i(y(t_i^-))](s)ds + \sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)I_i(y(t_i^-)) \end{cases}$$

On note que Ψ est bien défini sur $PC[J,E]$.

Pour une bonne commodité de calcul, on prend :

Pour $t \in [0, t_1]$

$$C(s,y) = BW_1^{-1}[Z(t_1) - S_\alpha(t_1)(\phi(0) - g_0(y)) - \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s)f(s,y(s))ds](s)$$

Depuis nos hypothèses, on a : si $y_1, y_2 \in PC[J,E]$:

$$\|C(s,y_1) - C(s,y_2)\| = \begin{cases} \|BW_1^{-1}[Z(t_1) - S_\alpha(t_1)(\phi(0) - g_0(y_1)) - \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s)f(s,y_1(s))ds](s) \\ -BW_1^{-1}[Z(t_1) - S_\alpha(t_1)(\phi(0) - g_0(y_2)) - \int_0^{t_1} S_\alpha(t_1 - s)f(s,y_2(s))ds](s)\| \end{cases}$$

$$\|C(s,y_1) - C(s,y_2)\| \leq \begin{cases} \|BW_1^{-1}\|(\|S_\alpha(t_1)\|\|g_0(y_1) - g_0(y_2)\| + \int_0^{t_1} \|S_\alpha(t_1 - s)\| \times \\ \|f(s,y_2(s) - f(s,y_1(s))\|ds) \end{cases}$$

$$\|C(s,y_1) - C(s,y_2)\| \leq M_1[Me^{wt_1}G + NM\int_0^{t_1} e^{w(t_1 - s)}ds]\|y_1 - y_2\|$$

$$\|C(s,y_1) - C(s,y_2)\| \leq M_1[Me^{wt_1}G + NMe^{wt_1}\int_0^{t_1} e^{-ws}ds]\|y_1 - y_2\|$$

$$\|C(s,y_1)-C(s,y_2)\| \leq M_1Me^{wt_1}(G-\frac{N}{w}\int_0^{t_1}(-w)e^{-ws}ds)\|y_1-y_2\|$$

$$\|C(s,y_1)-C(s,y_2)\| \leq M_1Me^{wt_1}(G-\frac{N}{w}(e^{-wt_1}-1))\|y_1-y_2\|$$

Alors

$$\|C(s,y_1)-C(s,y_2)\| \leq \theta_1\|y_1-y_2\|$$

tel que $\theta_1 = M_1Me^{wt_1}(G-\frac{N}{w}(e^{-wt_1}-1)), \quad \theta_1 > 0.$

Et encore, on prend pour : $k = 2, 3, ..., m$

$$D_{k+1}(s,y) = \begin{cases} BW_{k+1}^{-1}[Z(t_{k+1}) - S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})((\phi(0)-g_0(y)) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s) \\ f(s,y(s))ds - \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)f(s,y(s))ds \\ -\sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\times\prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)I_i(y(t_i^-))](s) \end{cases}$$

Dés les hypothèses proposées, on a :

$$\|D_{k+1}(s,y_1)-D_{k+1}(s,y_2)\| = \begin{cases} \|BW_{k+1}^{-1}[Z(t_{k+1}) - S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})((\phi(0) \\ -g_0(y_1)) - \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s)f(s,y_1(s))ds - \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t_{k+1}-t_k) \\ \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)f(s,y_1(s))ds - \sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k) \\ \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)I_i(y_1(t_i^-))](s) - \\ BW_{k+1}^{-1}[Z(t_{k+1}) - S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\prod_{i=1}^{k} S_\alpha(t_i-t_{i-1})((\phi(0) \\ -g_0(y_2)) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} S_\alpha(t_{k+1}-s)f(s,y_2(s))ds + \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i} S_\alpha(t_{k+1}-t_k) \\ \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)S_\alpha(t_i-s)f(s,y_2(s))ds + \sum_{i=1}^{k} S_\alpha(t_{k+1}-t_k) \\ \prod_{j=i}^{k-1} S_\alpha(t_{j+1}-t_j)I_i(y_2(t_i^-))](s)\| \end{cases}$$

$$\|D_{k+1}(s,y_1)-D_{k+1}(s,y_2)\| \leq \begin{cases} \|BW_{k+1}^{-1}\|(\|S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\|\prod_{i=1}^{k}\|S_\alpha(t_i-t_{i-1})\|\|g_0(y_1)-g_0(y_2)\|+ \\ \int_{t_k}^{t_{k+1}}\|S_\alpha(t_{k+1}-s)\|\|f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))\|ds+ \\ \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\|S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\|\prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\| \\ \|S_\alpha(t_i-s)\|\|f(s,y_2(s))-f(s,y_1(s))\|ds+\sum_{i=1}^{k}\|S_\alpha(t_{k+1}-t_k)\| \\ \times\prod_{j=i}^{k-1}\|S_\alpha(t_{j+1}-t_j)\|\|I_i(y_2(t_i^-))-I_i(y_1(t_i^-))\|) \end{cases}$$

$$\|D_{k+1}(s,y_1)-D_{k+1}(s,y_2)\| \leq \begin{cases} M_{k+1}(Me^{w(t_{k+1}-t_k)}\prod_{i=1}^{k}Me^{w(t_i-t_{i-1})}G\|y_1-y_2\|+\int_{t_k}^{t_{k+1}}Me^{w(t_{k+1}-s)}N \\ \times\|y_1-y_2\|ds+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}Me^{w(t_{k+1}-t_k)}\prod_{j=i}^{k-1}Me^{w(t_{j+1}-t_j)}Me^{w(t_i-s)}N \\ \times\|y_1-y_2\|ds+\sum_{i=1}^{k}Me^{w(t_{k+1}-t_k)}\prod_{j=i}^{k-1}Me^{w(t_{j+1}-t_j)}L\|y_1-y_2\|) \end{cases}$$

$$\|D_{k+1}(s,y_1)-D_{k+1}(s,y_2)\| \leq \begin{cases} M_{k+1}(Me^{w(t_{k+1}-t_k)}[Me^{wt_1}.Me^{w(t_2-t_1)}.Me^{w(t_3-t_2)}...... \\ .Me^{w(t_{k-1}-t_{k-2})}.Me^{w(t_k-t_{k-1})}]G\|y_1-y_2\|+ \\ MNe^{wt_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}e^{-ws}ds\|y_1-y_2\|+\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}Me^{w(t_{k+1}-t_k)}[Me^{w(t_{i+1}-t_i)} \\ .Me^{w(t_{i+2}-t_{i+1})}.Me^{w(t_{i+3}-t_{i+2})}.....Me^{w(t_{k-1}-t_{k-2})}.Me^{w(t_k-t_{k-1})}] \\ \times Me^{w(t_i-s)}N\|y_1-y_2\|ds\sum_{i=1}^{k}Me^{w(t_{k+1}-t_k)}[Me^{w(t_{i+1}-t_i)}.Me^{w(t_{i+2}-t_{i+1})} \\ .Me^{w(t_{i+3}-t_{i+2})}.....Me^{w(t_{k-1}-t_{k-2})}.Me^{w(t_k-t_{k-1})}]L\|y_1-y_2\|) \end{cases}$$

$$\|D_{k+1}(s,y_1)-D_{k+1}(s,y_2)\| \leq \begin{cases} M_{k+1}(M^{k+1}e^{wt_{k+1}}G+MNe^{wt_{k+1}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}e^{-ws}ds+ \\ \sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}M^{k-i+2}e^{w(t_{k+1}-s)}Nds+\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+1}e^{w(t_{k+1}-t_i)}L) \\ \times\|y_1-y_2\| \end{cases}$$

$$\|D_{k+1}(s,y_1)-D_{k+1}(s,y_2)\| \leq \begin{cases} M_{k+1}(M^{k+1}e^{wt_{k+1}}G+MNe^{wt_{k+1}}(\frac{-1}{w}e^{-wt_{k+1}}+\frac{1}{w}e^{-wt_k})+ \\ \sum_{i=1}^{k}M^{k-i+2}e^{wt_{k+1}}N(\frac{-1}{w}e^{-wt_i}+\frac{1}{w}e^{-wt_{i-1}})+\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+1}e^{w(t_{k+1}-t_i)}L) \\ \times\|y_1-y_2\| \end{cases}$$

Alors

$$\|D_{k+1}(s,y_1)-D_{k+1}(s,y_2)\| \leq \theta_{k+1}\|y_1-y_2\|$$

tel que $\theta_{k+1} = M_{k+1}(M^{k+1}e^{wt_{k+1}}G+MNe^{wt_{k+1}}(\frac{-1}{w}e^{-wt_{k+1}}+\frac{1}{w}e^{-wt_k})+\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+2}e^{wt_{k+1}}\times N(\frac{-1}{w}e^{-wt_i}+\frac{1}{w}e^{-wt_{i-1}})+\sum_{i=1}^{k}M^{k-i+1}e^{w(t_{k+1}-t_i)}L), \quad \theta_{k+1}>1.$

Maintenant on montre que Ψ est une application contractante sur $PC(J,E)$:

Pour $t\in[0,t_1]$, on a :

$$\|\psi y_2-\psi y_1\| \leq \begin{cases} \|S_\alpha(t)\|\|g_0(y_2)-g_0(y_1)\|+\int_0^t\|S_\alpha(t-s)\|\|f(s,y_2(s))-f(s,y_2(s))\|ds+ \\ \int_0^t\|S_\alpha(t-s)\|\|C(s,y_1)-C(s,y_2)\|ds \end{cases}$$

$$\|\psi y_2-\psi y_1\| \leq \; Me^{wt}G\|y_2-y_1\|+\int_0^t Me^{w(t-s)}N\|y_2-y_1\|ds+\int_0^t Me^{w(t-s)}ds\theta_1\|y_2-y_1\|$$

$$\|\psi y_2-\psi y_1\| \leq \; (Me^{wt}G+MNe^{wt}(\frac{-1}{w}e^{-wt}+\frac{1}{w}e^{0})+M\theta_1e^{wt}(\frac{-1}{w}e^{-wt}+\frac{1}{w}e^{0}))\|y_2-y_1\|$$

$$\|\psi y_2-\psi y_1\| \leq \; (Me^{wt}G+M(N+\theta_1)(\frac{-1}{w}+\frac{1}{w}e^{wt}))\|y_2-y_1\|$$

Alors pour $t \in [0, t_1]$

$$\|\psi y_2 - \psi y_1\| \leq \ (Me^{wt_1}G + M(N+\theta_1)(\frac{-1}{w} + \frac{1}{w}e^{wt_1}))\|y_2 - y_1\|$$

On prend $Me^{wt_1}G + M(N+\theta_1)(\frac{-1}{w} + \frac{1}{w}e^{wt_1}) < 1....(1)$

Pour chaque $t \in [t_k, t_{k+1}]$, on a :

$$\|\psi y_2 - \psi y_1\| \leq \begin{cases} \|S_\alpha(t-t_k)\| \prod\limits_{i=1}^{k} \|S_\alpha(t_i - t_{i-1})\| \|g_0(y_2) - g_0(y_1)\| + \\ \sum\limits_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|S_\alpha(t-t_k)\| \prod\limits_{j=i}^{k-1} \|S_\alpha(t_{j+1} - t_j)\| \|S_\alpha(t_i - s)\| \times \\ \|f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))\| ds + \sum\limits_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|S_\alpha(t-t_k)\| \prod\limits_{j=i}^{k-1} \|S_\alpha(t_{j+1} - t_j)\| \|S_\alpha(t_i - s)\| \\ \times \|D_{k+1}(s, y_2) - D_{k+1}(s, y_1)\| ds + \int_{t_k}^{t} \|S_\alpha(t-s)\| \|f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))\| ds + \\ \int_{t_k}^{t} \|S_\alpha(t-s)\| \|D_{k+1}(s, y_2) - D_{k+1}(s, y_1)\| ds + \sum\limits_{i=1}^{k} \|S_\alpha(t-t_k)\| \prod\limits_{j=i}^{k-1} \|S_\alpha(t_{j+1} - t_j)\| \\ \times \|I_i(y_2(t_i^-)) - I_i(y_1(t_i^-))\| \end{cases}$$

$$\|\psi y_2 - \psi y_1\| \leq \begin{cases} Me^{w(t-t_k)} \prod\limits_{i=1}^{k} Me^{w(t_i - t_{i-1})} G \|y_2 - y_1\| + \sum\limits_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Me^{w(t-t_k)} \\ \prod\limits_{j=i}^{k-1} Me^{w(t_{j+1} - t_j)} Me^{w(t_i - s)} ds N \|y_2 - y_1\| + \sum\limits_{i=1}^{k} \int_{t_{i-1}}^{t_i} Me^{w(t-t_k)} \\ \prod\limits_{j=i}^{k-1} Me^{w(t_{j+1} - t_j)} Me^{w(t_i - s)} ds \theta_{k+1} \|y_2 - y_1\| + \\ \int_{t_k}^{t} Me^{w(t-s)} ds N \|y_2 - y_1\| + \int_{t_k}^{t} Me^{w(t-s)} ds \theta_{k+1} \|y_2 - y_1\| + \\ \sum\limits_{i=1}^{k} Me^{w(t-t_k)} \prod\limits_{j=i}^{k-1} Me^{w(t_{j+1} - t_j)} L \|y_2 - y_1\| \end{cases}$$

$$\|\psi y_2 - \psi y_1\| \leq \begin{cases} [M^{k+1} e^{wt} G + (N + \theta_{k+1}) \sum\limits_{i=1}^{k} M^{k-i+2} e^{wt} (\frac{-1}{w} e^{-wt_i} + \frac{1}{w} e^{-wt_{i-1}}) + \\ M(N + \theta_{k+1}) e^{wt} (\frac{-1}{w} e^{-wt} + \frac{1}{w} e^{-wt_k}) + L \sum\limits_{i=1}^{k} M^{k-i+1} e^{w(t-t_i)}] \|y_2 - y_1\| \end{cases}$$

Alors pour $t \in [t_k, t_{k+1}]$

$$\|\psi y_2 - \psi y_1\| \leq \begin{cases} [M^{k+1}e^{wt_{k+1}}G + (N+\theta_{k+1})\sum\limits_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{wt_{k+1}}(\frac{-1}{w}e^{-wt_i} + \frac{1}{w}e^{-wt_{i-1}}) + \\ M(N+\theta_{k+1})e^{wt_{k+1}}(\frac{-1}{w}e^{-wt_{k+1}} + \frac{1}{w}e^{-wt_k}) + L\sum\limits_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(t_{k+1}-t_i)}]\|y_2 - y_1\| \end{cases}$$

On a

$$[M^{k+1}e^{wt_{k+1}}G + (N+\theta_{k+1})\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+2}e^{wt_{k+1}}(\frac{-1}{w}e^{-wt_i} + \frac{1}{w}e^{-wt_{i-1}}) +$$
$$M(N+\theta_{k+1})e^{wt_{k+1}}(\frac{-1}{w}e^{-wt_{k+1}} + \frac{1}{w}e^{-wt_k}) + L\sum_{i=1}^{k} M^{k-i+1}e^{w(t_{k+1}-t_i)}] < 1....(2)$$

Puisque (1) et (2) sont satisfaites, Par conséquent Ψ est une application contractante . Donc, Ψ admet un point fixe unique y tel que $\Psi y(t) = y(t)$. Alors ce point fixe est alors une solution du système $(4.1.1) - (4.1.3)$, et clairement $y(b) = Z(b)$, ce qui implique que le système est contrôlable sur J, ceci termine la preuve du théorème.

4.3 Exemple

Pout illustrer l'application de la théorie, on considére l'équation différentielle partielle suivante avec une dérivée fractionnaire de la forme :

$$D_t^\alpha y(t,x) = -\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} + f(t, y(t,x)) + Bu(t), (t,x) \in [0,b] \times (0,\pi), t \neq \frac{b}{2},$$

$$y(t,0) = y(t,\pi), t \in [0,b],$$

$$y(0,x) + g(y) = y_0,$$

$$\Delta y\searrow_{t=\frac{b}{2}} = I_1(\frac{b^-}{2}).$$

où $b > 0, 0 < \alpha < 1; y(t,.), y_0 \in L^2([0,\pi])$

(1) $E = L^2([0,\pi])$ un espace de banach

$$y(t,.) = \{y(t,x) : 0 \leq x \leq \pi\}$$

(2) La trajectoire $u(t,.) \in U$ est un contrôle, où U est un space de Banach quelconque.

(3) $A : D(A) \subset L^2([0,\pi]) \longrightarrow L^2([0,\pi])$ un opérateur défini par $Az = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ avec le domain $D(A) = \{z \in L^2([0,\pi]) : z, z'$ sont absolument continus $, z'' \in L^2([0,\pi]), z(0) = z(\pi) = 0\}$,

alors

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(z, z_n)z_n, z \in D(A)$$

ou $z_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} sin(nx), n \in \mathbb{N}$ est l'ensemble orthogonal de vecteurs propres de A.

A est le générateur en finitésimal d'un $\alpha-$ famille résolvante S_α.

$S_\alpha : \mathbb{R}_+ \longrightarrow L(E)$ such that $\lambda^\alpha : Re\lambda > \omega \subset \rho(A)$ et

$$(\lambda^\alpha I - A)^{-1}x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S_\alpha(t)x(t)dt, Re\lambda > \omega, x \in E.$$

(4)$B : U \longrightarrow E$est un opérateur linéaire borné.

(5) $g : E \longrightarrow E$ est n'importe quel fonction Lipschitz qui satisfait (H_4), par exemple; on prend :

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n} c_i y(b_i), \quad \text{for} \quad y \in E$$

où $c_i(i = 1, ..., n)$ sont des constantes données et $b_i(i = 1, ..., n)$ sont des nombres réels tels que $0 < b_1 < .... < b_n \leqslant b$.

(6) $I_1 : E \longrightarrow E$ est une fonction défini comme suite :$I_1(y) = \dfrac{|y|}{3 + |y|}$ qui satisfait (H_3).

(7) $f : [-r, b] \times E \longrightarrow E, b > 0$ est une fonction quelconque qui satisfait (H_2), donc on peut appliquer les résultats de théorème 4.1 à cet exemple.

Conclusion génèrale et perspectives

Notre étude réalisée s'intéresse à l'existence de solutions de certaines classes d'équations différentielles d'ordre fractionnaire.

Le **Chapitre 1** présente les principaux notions et définitions préliminaires qui sont utiles pour la bonne compréhension et relatif au théme abordé du présent travail.

Dans le **Chapitre 2**, intégralement consacré à l'étude d'une équation différentielle fonctionelle fractionnaire impulsive avec conditions locales et retard fini basée sur le théorème de point fixe dus à Burton et Kirk où on transforme le probléme fractionnaire en probléme du point fixe pour la somme des opérateurs du type complétement continue.

Le **Chapitre 3** est dédié à l'existence de solutions faibles d'équation différentielle fractionnaire avec une condition nonlocale en utilisant le théorème Krasnoselski ; une technique de point fixe combinée avec un certain processus de continuation.

Dans le **Chapitre 4**, nous nous sommes contentés de décrire certaines équations différentielles fractionnaires semi-linéaires impulsives avec conditions non-locales, ceux qui ont été utilisés dans nos travaux et faire une étude rigouseuse de contrôlabilité de ce type d'équations, et pour la résolution nous nous somme limités à l'utilisation du principe d'application contractante de Banach.

Enfin, au terme de cette thése, nous estimons que les résultats présentés contribuerons au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires, en ouvrant de nouveaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente.

Á l'issue de ce travail, nous pouvons notamment présenter quelques perspectives :

• La démarche enployée dans cette thése peut être valable au divers équations différentielles fractionnaires.

• Il serait intéressant de prolonger l'étude aux inclusions différentielles fractionnaires.

• Chercher la résolution numérique correspondant aux problémes présentés dans ce travail ayant un cadre naturel(les divers problémes du monde réel en sciences physiques ;en ingénierie ;..), moins couteuses et plus présises.

• Pour des travaux futures qui constituent de orientations possibles, nous avons l'intérêt d'étudier la contrôlabilité approchée pour différentes classes d'équations et d'inclusions différentielles fractionnaires.

Bibliographie

[1] N. Abada, M. Benchohra and H. Hammouche, *Existence Results for Semilinear Differential Evolution Equations with Impulses and Delay*, Cubo A Mathematical Journal Vol. 12,N 02, (1-17).June 2010.

[2] S. Abbas, M. Benchohra, J. Graef and J. Henderson, *Implicit Fractional Differential and Integral Equations*, Existence and Stability, De Gruyter, Berlin, 2018.

[3] S. Abbas, M. Benchohra and G. M. N'Guérékata, *Advanced Fractional Differential and Integral Equations*, Nova Science Publishers, New York, 2015.

[4] S.Abbas, M.Benchohra and G.M.N'guérékata *Topic in Fractional Differential Equations* Developent in Mathematics 27(2012).

[5] H.Acka, A.Boucherif and V.Covachev, *Impulsive functional differential equations with nonlocal conditions*, Int. J. Math. Math. Sci. 29(2002).

[6] K.Aissani and M.Benchohra, *Controllability of Impulsive Fractional Differential Equations with Infinite Delay*, Libertas Mathematica, Volume 34 (2014),No.1, 47-64.

[7] A.Al-Omari, M.H.M.Rashid, *Existence of solutions of fractional abstract integro-differential equation with impulsive nonlocal conditions*, Differental Equatios and Control Processes, N3,2012,Electronic Journal, reg.Nc77-39410 at 15-04-2010,ISSN 1817-2171.

[8] E.Artin, *The Gamma Function*, New York, Holt, Rinehart and Winston, (1964).

[9] D.D.Bainov, P.S.Simeonov, *Systems with Impulse Effect*, Ellis Horwood Ltd., Chichister, 1989.

[10] K.Balachandran and R.Sakthivel, *Controllability of Semilinear Functional Integrodifferential Systems In Banach Spaces*, Kybernetika-Volume 96 (2000), Number4, pages 465-476.

[11] K.Balachandran, S.Kiruthika and J.J.Trujillo,*On fractional impulsive equations of Sobolev type with nonlocal condition in Banach spaces*, Computers and Mathematics with Applications 62(2011)1157-1165.

[12] K.Balachandran and S.Kiruthika, *Existence of Solutions of Abstract Fractional Impulsive Semilinear Evolution Equations*, Electronic Journal Qualitative Theory of Differential Equation, 2010, No. 4,1-12.

[13] M.Benchohra, D.Seba, *Impulsive Fractional Differential Equations in Banach Spaces*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, Spec.Ed. 1,2009, No.8, 1-14.

[14] M.Benchohra, J.Henderson, S.K.Ntouyas, *Impulsive Differential Equations and Inclusions*, Hindawi Publishing Corporation, Vol 2, New York, 2006.

[15] M.Benchohra, B.A.Slimani, *Existence and Uniqueness of Solutions to Impulsive Fractional Differential Equations*, EJDE, Vol 2009(2009),No 10, 1-11.

[16] T.A.Burton and C.Kirk, *A Fixed Point Theorem of Krasnoselskiii-Schaefer Type*, Math. Nachr. 189(1998), 23-31.

[17] L.Byszewski, *Theorems about existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem*, J.Math.Anal.Appl.162(1991),494-505.

[18] L.Byszewski, H.Akca *On mild solution of a semilinear functional differential evolution nonlocal problem*, J. Appl. Math. Stoch. Anal., 10(3)(1997), 265-271.

[19] M. Caputo, *Linear model of dissipation whose $\mathbb{Q}$ is almost frequency independent*, Part II. Geophysical Journal of Royal Astronomical Society, 1967 ; 13 : 529-39.

[20] A. Chauhan, J. Dabas, *Existence of mild solutions for impulsive fractional-order semilinear evolution equations with nonlocal conditions*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2011(2011), No. 107, pp.1-10. ISSN :1072-6691.

[21] Y. Chou, K. T. Jih. *Robust control of a class of time-delay nonlinear processes*, Industrial and Engineering Chemistry Research, 45(26), pp.8963-8972, 2006.

[22] K.Deng,*Exponential decay of solutions of semilinear parabolic equation with nonlocal initial conditions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 179,(1993),630-637.

[23] K.Diethelm, *The Analysis of Fractional Differential Equations*, Springer, Berlin, 2010.

[24] J.Eastham, K. Hastings, *Optimal impulse control of portfolios*, Mathematics of Operations Research, 4 :pp.588-605, 1988.

[25] Z.Fan and G.Mophou, *Nonlocal Problems for Fractional differential equation via Resolvent Operatoars*, International Journal of Differential Equations (2013)1-10.

[26] Z. Fan, *Characterization of compactness for resolvents and its applications*, Applied mathematics and Computation 232(2014)60-67.

[27] M. Goderfroy, *La fonction Gamma* ; Théorie, Histoire, Bibliographie, Gauthier-Villars, Paris, (1901).

[28] L. Gorniewicz, S.K. Ntouyas and D. O'Regan, *Controllability of semilinear differential equations and inclusions via semigroup theory in Banach spaces*, Rep. Math. Phys. 56(3) (2005), 437-470.

[29] H. Hammouche, K. Guerbati, M. Benchohra and N. Abada, *Existence Results for Impulsive Semilinear Fractional Differential Inclusions with Delay in Banach Spaces*, Discussiones Mathematicae, Differential Inclusions, Control and Optimization 33(2013) 149-170,doi :10.7151/dmdico.1149.

[30] H.Hammouche, M.Lemkeddem, K.Guerbati, K.Ezzinbi, *Existence results for some impulsive partial functional fractional differential equations*, Asian-European Journal of Mathematics Vol.13, No.1 (2020) 2050074 (23 pages) DOI : 10.1142/S1793557120500746

[31] Z.Y He, Y.F Zhang, L.X Yang, Y.H Shi, *Control chaos in nonautonomous cellular neural networks using impulsive control methods*, International Joint Conference on Neural Networks, 1 :pp.262-267 , 1999.

[32] R.Hilfer, *Applications of fractional calculus in physics*, Singapore, World Scienti

c, 2000.

[33] S.C.Ji and S.Wen, *Nonlocal Cauchy problem for impulsive differential equations in Banach spaces*, Int. J. Nonlinear Sci. 10 (2010).

[34] A.A.Kilbas and S.A.Marzan, *Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions*, Differential Equations **41** (2005), 84-89.DOI : 10.1007/s10625-005-0137-y.

[35] A.A.Kilbas and S.A.Marzan, *Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions*, Differ. Equ.

41(2005), 84-89.

[36] A.A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier. Amsterdam (2006).

[37] V.Lakshmikantham, D.D.Bainov, P.S.Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, NJ, 1989.

[38] Y.Lin and J.H.Liu, *Semilinear integrodifferential equations with nonlocal Cauchy problem*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and appl., 26(1996), 1023-1033.

[39] L.Mahto, S.Abbas and A.Favini, *Analysis of Caputo Impulsive Fractional order Differential Equations*, International Journal of Differential Equations, Vol. 2013, Article ID 70457, 11 pages, 2013 doi : 10.1155/2013/704547.

[40] K. S. Miller and B. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Differential equations*, John Wiley, New York, 1993.

[41] K.S.Miller, B.Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, John Wiley and Sons Inc, New York, 1993.

[42] K.B.Oldham, J.Spanier, *The Fractional Calculs*, Acadimic Press, New York, 1974.

[43] A.Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[44] I.Podlubny, *Fractional Differential Equations,* Acadmic press, New York, NY, USA, 1993.

[45] J. Prüss, *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Monographs Math. 87, Bikhäuser Verlag, 1993.

[46] M.D.Quinn and N.Carmichael, *An approach to nonlinear control problems using fixed-point methods, degree theory and pseudo-inverses*, Numerical Functional Analysis and Optimization, vol.7,no.2-3,pp.197219,1985.

[47] C.Ravichandran and J.J.Trujillo, *Controllability of Impulsive Fractional Functional Integro-Differential Equations in Banach Spaces*, Journal of Function Spaces and Applications Volume 2013, Article ID 812501,8 pages.

[48] R.Sakthivel and Q.Choi, *A Study on Controllability of Semilinear Integrodifferential Systems in Banach Spaces.* Computers and Mathematics with Applications 47(2004) 519-527.

[49] S.G.Samko, A.A.Kilbas, O.I.Marichev, *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Longhorne, PA, 1993.

[50] A.M.Samoilenko, N.A.Perestyuk, *Impulsive Differential Equations*, World Scientifc, Singapore, 1995.

[51] X.B.Shu and F.Xu, *The Existence of Impulsive Fractional Partial Neutral Differential Equations*, Preprint submitted to Journal of Mathematics, 27 october 2012.

[52] D.R. Smart, *Fixed Point theorems*, Cambridge Univ. Press 1974.

[53] V.E.Tarasov, *Fractional Dynamics : Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles*, Fields and Media, Springer, Heidelberg ; Higher Education Press, Beijing, 2010.

[54] N.k.Tomar and J.Dabas, *Controllability of Impulsive Fractional Order Semilinear Evolution Equations with Nonlocal Conditions.* Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications, Volume 5, Number 2012,pp.57-67(july 2012)

[55] J.Wang, W.Wei and Y.Yang, *On Some Impulsive Fractional Differential Equations in Banach Spaces*, Opuscula Matthematica. Vol.30 No.4, 2010.

[56] Y.Zhou, *Fractional Evolution Equations and Inclusions*, Analysis and Control, Academic Press Elsevier, 2016.

PUBLICATION