

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Mohamed Khider – Biskra  
Faculté des sciences et de la technologie  
Département : Génie Mécanique  
Réf :



جامعة بسكرة  
كلية العلوم و التكنولوجيا  
قسم الهندسة الميكانيكية  
المرجع :

Thèse présentée en vue de l'obtention  
Du diplôme de  
**Doctorat en Sciences**  
Spécialité : Génie mécanique  
Option : Construction mécanique

### Thème

**Formulation des éléments finis à nœuds internes  
pour la modélisation des structures**

Présenté par :

**BOUZIDI Lemmouchi**

Soutenue le : 04/10/2021, Devant le jury composé de :

Mr. BEMEBAREK Sadok	Professeur	Président	Université de Biskra
Mr. BELOUNAR Lamine	Professeur	Rapporteur	Université de Biskra
Mr. BENBOUTA Rachid	Professeur	Examineur	Université de Batna 2
Mr. MOUSSAOUI Mustafa	Maitre de conférences A	Examineur	Université de Djelfa

*Mon père Ahmed, que Dieu lui fasse miséricorde*

*Ma mère Louazna, que Dieu la protège*

*Ma femme Dallal et mes enfants : abdelwahed, abderaouf, taha et tamim abdelbari.*

*et tous mes frères et mes sœurs*

## *Remerciement*

Je remercie en premier lieu Allah tout puissant qui m'a donné le courage et la volonté de pouvoir accomplir ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude envers mon directeur de thèse : **Mr BELOUNAR Lamine**, Professeur à l'université de Biskra pour ses conseils bénéfiques et son soutien qu'il n'a cessés de m'apporter tout au long de ce travail.

Je tiens à remercier le président de jury **Mr BEMEBAREK Sadok** : Professeur à l'université de Biskra d'avoir accepté de présider cette soutenance.

Mes remerciements vont aussi aux membres du jury le professeur **Mr. BENBOUTA Rachid** : Professeur à l'université de Batna 2, **Mr. MOUSSAOUI Mustafa** : Maître de conférences « A » à l'université de Djelfa pour l'intérêt qu'ils ont montré en acceptant de rapporter ce travail et à tous les enseignants du département de génie mécanique et génie civil de l'université de Biskra, ainsi que mes collègues Dr. FARTAS Lahcene, Dr.MESSI a/raouf , et Dr.BOULONAR a/rahim.

## RESUME

Le développement d'éléments finis simples et efficaces constitue l'un des domaines de recherche importants en analyse structurelle. De gros efforts ont été concentrés sur la manière d'améliorer ou de formuler de nouveaux éléments simples. Dans ce contexte, ce travail de recherche vise le développement et la validation de deux éléments finis robustes de type membranaire.

Le premier est un élément fini quadrilatère formulé en utilisant l'approche en déformation pour les analyses statique et dynamique. Cet élément, possédant deux degrés de liberté ( $u$  et  $v$ ) aux quatre nœuds d'angles et au nœud central, est nommé **SBQ5** (Strain Based Quadrilateral element with five nodes). Les trois déformations ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ) ont été enrichies des variations linéaires en termes de  $x$  et  $y$  qui conduisent à une amélioration de la convergence des résultats. Cet élément développé a permis d'obtenir des résultats performants pour tous les exemples traités en statique et en dynamique.

Le deuxième élément développé est un élément secteur quadrilatère à champ de déformation en coordonnées polaire destiné à l'analyse statique pour les structures à une géométrie circulaire. Cet élément, nommé **SBS5** (Strain Based Secteur with five nodes), possède cinq nœuds : quatre nœuds de coin et un dans le milieu de l'élément avec deux degrés de liberté en coordonnées polaires ( $r, \theta$ ). La validation numérique de cet élément est approuvée par une série de tests dans différentes structures courbes.

**Mots clés :** élément fini, approche en déformation, élément membranaire, élasto-plasticité, statique, dynamique.

# Abstract

One of the important areas of research in structural analysis is the development of simple and efficient finite elements. Much effort has been focused on how to improve or formulate new simple elements. In this context, this research work aims at the development and validation of two robust finite elements of membrane type.

The first is a quadrilateral finite element formulated using the strain approach for static and dynamic analysis. This element, having two degrees of freedom ( $u$  and  $v$ ) at the four corner nodes and at the central node, is called SBQ5 (Strain Based Quadrilateral element with five nodes). The three strains ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ) were enriched with linear variations in terms of  $x$  and  $y$  which lead to an improvement in the convergence of the results. This developed element made it possible to obtain powerful results for all the examples treated in statics and dynamics.

The second element developed is a quadrilateral sector element with a polar coordinate strain field intended for static analysis for structures with a circular geometry. This element, named SBS5 (Strain Based Secteur with five nodes), has five nodes: four corner nodes and one in the middle of the element with two degrees of freedom in polar coordinates. The numerical validation of this element is approved by a series of tests in different curved structures.

**Keywords:** finite element, approach in deformation, membrane element, elasto-plasticity, statics, dynamics.

## الملخص

أحد مجالات البحث المهمة في التحليل الهيكلي هو تطوير عناصر محدودة بسيطة وفعالة. تم تركيز الكثير من الجهود على كيفية تحسين أو صياغة عناصر بسيطة جديدة. في هذا السياق ، يهدف هذا العمل البحثي إلى تطوير والتحقق من صحة عنصرين محددتين قويين من نوع الغشاء.

الأول هو عنصر رباعي محدد تمت صياغته باستخدام نهج التشوه للتحليل الثابت والديناميكي. هذا العنصر ، الذي يحتوي على درجتين من الحرية (u و v) في نقاط الزوايا الأربع وفي العقدة المركزية ، يسمى SBQ5 (عنصر رباعي قائم على الإجهاد بخمس عقد). تم إثراء السلالات الثلاثة ( $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ ) بتغيرات خطية من حيث x و y مما أدى إلى تحسن في تقارب النتائج. أتاح هذا العنصر المطور الحصول على نتائج عالية الأداء لجميع الأمثلة التي تمت معالجتها في الإحصائيات والديناميكيات.

العنصر الثاني الذي تم تطويره هو عنصر قطاع رباعي مع مجال إجهاد إحداثيات قطبي مخصص للتحليل الثابت للهياكل ذات الهندسة الدائرية. يحتوي هذا العنصر ، المسمى SBS5 (قطاع قائم على الإجهاد بخمس عقد) ، على خمس عقد: أربع عقد ركنية وواحدة في منتصف العنصر بدرجتين من الحرية في الإحداثيات القطبية. تمت الموافقة على التحقق الرقمي لهذا العنصر من خلال سلسلة من الاختبارات في هياكل منحنية مختلفة.

**الكلمات المفتاحية:** العنصر المحدود ، النهج التشوه ، عنصر الغشاء ، المرونة المرنة ، الساكنة ، الديناميكيات.

## Table des matières

Résumé .....	(i)
Abstract .....	(ii)
المخلص .....	(iii)
Table des matières .....	(iv)
Liste des figures .....	(viii)
Liste des tableaux .....	(x )
Notations .....	(xii )

### Introduction générale

Objectifs de la thèse .....	(3)
Plan de la thèse .....	(3)

### Chapitre 1

#### Étude bibliographique

1.1 Rappels des équations de base d'élasticité .....	(5)
1.1.1 Relations d'élasticité plane en coordonnées cartésiennes .....	(5)
1.1.2 Relations d'élasticité plane en coordonnées polaires .....	(7)
1.2 Étude bibliographique sur les éléments finis basés sur l'approche en déformation.(8)	
1.2.1 Élément fini membranaire.....	(9)
1.3 Avantage de l'approche en déformation.....	(11)
1.4 Procédure de développement des éléments finis à modèle en déformation .....	(11)
1.5 Formulation en déplacement d'un élément fini .....	(14)
1.5.1 Champ de déplacements .....	(14)
1.5.2 Champ des déformations .....	(14)
1.5.3 Champ de contraintes .....	(14)
1.5.4 Forces nodales équivalentes .....	(15)

1.6 Déformations imposées de quelques éléments membranaires existants à nœud interne .....(15)

## **Chapitre 2**

### **Formulation D'un Nouvel Elément Fini SBQ5 Base Sur L'approche En Déformation En 2D**

2.1 Introduction .....(21)

2.2 Considérations théoriques et formulation du présent élément SBQ5 .....(22)

    2.2.1 Considérations théoriques. ....(22)

    2.2.2 Formulation de l'élément développé SBQ5 .....(23)

2.3 Équation matricielle linéaire des éléments finis dans la dynamique .....(29)

    2.3.1 Analyse de la réponse libre .....(30)

    2.3.2 Analyse de la réponse fréquentielle .....(31)

    2.3.3 Analyse de la réponse transitoire .....(32)

2.4 Conclusion .....(32)

## **Chapitre 3**

### **Validation Numérique Du Nouvel Elément SBQ5 Dans l'élasticité plane**

3.1 Introduction .....(33)

3.2 Validation de l'élément SBQ5 en statique .....(33)

    3.2.1 Poutre console élancée de Mac-Neal .....(33)

    3.2.2 Poutre console (Allman) .....(34)

    3.2.3 Test de sensibilité à l'élancement (a/b) .....(35)

    3.2.4 Poutre circulaire épaisse sous cisaillement dans le plan .....(38)

    3.2.5 Mur de cisaillement avec des ouvertures .....(39)

3.2.6	Analyse d'un anneau fuselée de Cook .....	(40)
3.2.7	Cylindre épais sous pression interne .....	(41)
3.3	Validation de l'élément SBQ5 en dynamique.....	(42)
3.3.1	Vibration libre d'une poutre console .....	(42)
3.3.2	Analyse vibratoire d'une poutre console à section variable .....	(45)
3.3.3	Vibration libre d'un mur avec des ouvertures .....	(46)
3.3.4	Vibration forcée d'un solide rectangulaire en élasto-plastique .....	(48)
3.3.5	Vibration forcée d'un solide rectangulaire en déformation plane .....	(49)
3.4	Conclusion .....	(50)

## **Chapitre 04**

### **Développement d'un élément fini secteur SBS5 basé sur l'approche en déformation en 2D**

4.1	Introduction .....	(51)
4.2	Étude bibliographique sur les éléments secteurs .....	(51)
4.3	Les différentes méthodes appliquées pour développer des éléments secteurs .....	(52)
4.3.1	Méthode d'intégration directe .....	(53)
4.3.1.1	Élément de Bouzrira [Bou.87] .....	(53)
4.3.1.2	Élément de Djoudi[Djou.90] .....	(53)
4.3.2	Méthode de Transformation des coordonnées .....	(54)
4.3.2.1	Élément Sabir et Salhi [Sabi.86] .....	(54)
4.3.2.2	Élément Djoudi [Djou.90] .....	(55)
4.3.3	Méthode approche directe .....	(55)

4.3.3.1	Élément de Raju et Rao [Raju.69] .....	(55)
4.3.3.2	Élément de Belarbi et Charif [Bela.98] .....	(56)
4.3.3.3	Élément de Sabir et Sfindji [Sabi.95a].....	(56)
4.3.3.4	Élément de Sabir et Sfindji [Sabi.95b] .....	(57)
4.3.3.5	Élément Secteur Hamadi [Hama.06] .....	(57)
4.4	Élasticité plane en coordonnée polaires .....	(57)
4.5	Formulation d'un nouvel élément secteur SBS5 .....	(60)
4.5.1	Satisfaction des mouvements du corps rigide de l'élément SBQ5 .....	(60)
4.6	Validation numériques de l'élément secteur développé SBS5 .....	(66)
4.6.1	Poutre circulaire épaisse sous une charge de cisaillement dans le plan .....	(66)
4.6.2	Cylindre épais sous pression interne .....	(67)
4.6.3	Ovalisation du cylindre .....	(68)
4.6.4	Anneau soumis à un cisaillement radial .....	(69)
4.6.5	Poutre circulaire mince sous une charge de cisaillement dans le plan .....	(70)
4.7	Conclusion .....	(71)
	Conclusion générale .....	(72)
	ANNEXE .....	(74)
	Références bibliographiques .....	(79)

## LISTE DES FIGURES

### Chapitre 1: Etude bibliographique

<b>Figure 1.1</b> : Corps solide soumis à des forces de volume ( $f_i$ ) et de surfaces ( $\phi_i$ ).....	(5)
<b>Figure 1.2</b> : Etat de contrainte d'un élément en coordonnées polaires .....	(7)
<b>Figure 1.3</b> : Comportement en flexion dans le plan .....	(13)
<b>Figure 1.4</b> : Elément triangulaire à 4 nœuds.....	(16)
<b>Figure 1.5</b> : Elément rectangulaire à 5 nœuds.....	(16)
<b>Figure 1.6</b> : Elément quadrilatérale membrane avec rotation dans le plan. ....	(17)
<b>Figure 1.7</b> : Elément quadrilatérale à neuf nœuds. ....	(17)
<b>Figure 1.8</b> : Elément quadrilatérale à cinq nœuds. ....	(18)
<b>Figure 1.9</b> : Eléments triangulaires à cinq et quatre nœuds .....	(19)
<b>Figure 1.10</b> : Elément triangulaire à sept nœuds. ....	(20)
<b>Figure 1.11</b> : Elément triangulaire à quatre nœuds avec fissure interne .....	(20)

### Chapitre 2 : Formulation D'un Nouvel Elément Fini SBQ5 Base Sur L'approche En Déformation En 2D

<b>Figure 2.1</b> : Elément SBQ5 avec les points nodaux. ....	(23)
---------------------------------------------------------------	------

### Chapitre 3 : Validation Numérique Du Nouvel Elément SBQ5 Dans l'élasticité plane

<b>Figure 3.1</b> : Poutre élancée de Mac-Neal .....	(34)
<b>Figure 3.2</b> : Poutre en porte-à-faux d'Allman; Données et maillages. ....	(35)
<b>Figure 3.3</b> : Test du rapport de forme d'une poutre console soumise à un effort tranchant distribué paraboliquement. ....	(36)
<b>Figure 3.4</b> : Poutres consoles, large, moyennement large et mince. ....	(37)
<b>Figure 3.5</b> : Poutre circulaire épaisse modélisée avec 6x1 éléments quadrilatéraux.....	(39)
<b>Figure 3.6</b> : Murs en cisaillement avec couvertures. ....	(39)

<b>Figure 3.7:</b> plaque trapézoïdale avec un maillage 4x4 .....	(40)
<b>Figure 3.8:</b> Un cylindre à paroi épais sous pression interne .....	(42)
<b>Figure 3.9:</b> poutre console avec les deux maillages (20x2 et 50x5) .....	(43)
<b>Figure 3.10:</b> Poutre cantilever à section variable avec maillage.....	(45)
<b>Figure 3.11:</b> Mur en cisaillement avec quatre ouvertures.....	(46)
<b>Figure 3.12:</b> Maillage quadrilatérale pour un mur avec ouvertures.....	(47)
<b>Figure 3.13:</b> Géométrie et maillage de la poutre cantilever.....	(48)
<b>Figure 3.14:</b> Géométrie et maillage de la poutre console soumise à une vibration forcée. .....	(49)
<b>Figure 3.15:</b> Le déplacement en fonction du temps pour une poutre console.....	(50)
 <b>Chapitre 04: Développement d'un élément fini secteur SBS5 basé sur l'approche en déformation en 2D</b> 	
<b>Figure 4.1:</b> Transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires .....	(54)
<b>Figure 4.2:</b> Élément infinitésimal dans les coordonnées polaires.....	(58)
<b>Figure 4.3:</b> Coordonnées et points nodaux de l'élément SBQ5.....	(60)
<b>Figure 4.4:</b> les modes du corps rigide .....	(61)
<b>Figure 4.5:</b> élément secteur à cinq nœuds.....	(62)
<b>Figure 4.6:</b> Poutre circulaire épaisse sous une charge de cisaillement dans le plan.....	(66)
<b>Figure 4.7:</b> Cylindre épais sous pression interne. ....	(67)
<b>Figure 4.8:</b> Ovalisation du cylinder.....	(68)
<b>Figure 4.9:</b> anneau soumis à un cisaillement radial .....	(69)
<b>Figure 4.10:</b> Poutre circulaire mince modélisée avec 6 x 1 éléments quadrilatéraux .....	(70)

## LISTE DES TABLEAUX

### Chapitre 3 : Validation Numérique Du Nouvel Elément SBQ5 Dans l'élasticité plane

<b>Tableau 3.1</b> : Déplacement normalisé d'une poutre élancée de Mac-Neal.....	(34)
<b>Tableau 3.2</b> : Déplacement vertical normalisée $V_A$ d'une poutre en flexion plane .....	(35)
<b>Tableau 3.3</b> : Flèche normalisée au point A, pour une poutre console soumise aune force de cisaillement à l'extrémité, distribuée paraboliquement.....	(36)
<b>Tableau 3.4</b> : Flèche normalisée pour une poutre console large. ....	(37)
<b>Tableau 3.5</b> : Flèche normalisée pour une poutre console moyennement large .....	(38)
<b>Tableau 3.6</b> : Flèche normalisée pour une poutre console mince .....	(38)
<b>Tableau 3.7</b> : Déplacement vertical normalisé au point A pour poutre épaisse. ....	(39)
<b>Tableau 3.8</b> : Comparaison du déplacement latéral à différents niveau d'étage .....	(40)
<b>Tableau 3.9</b> : Déplacement vertical normalisé pour plaque trapézoïdale sous cisaillement. ....	(41)
<b>Tableau 3.10</b> : Déplacement normalisé du cylindre à paroi épais pour des rapports du coefficient de Poisson variable. ....	(42)
<b>Tableau 3.11</b> : Les six premières fréquences naturelles pour une poutre console (Utilisant une matrice de masse concentré / répartie). ....	(44)
<b>Tableau 3.12</b> : Les quatre premiers fréquences naturelles d'une poutre en porte à faux (masse concentré). ....	(44)
<b>Tableau 3.13</b> : Les quatre premières fréquences d'une poutre en porte-à-faux de section variable .....	(46)
<b>Tableau 3.14</b> : Huit premières fréquences naturelles d'un mur en cisaillement .....	(47)
<b>Tableau 3.15</b> : Déplacement au nœud 19 de la poutre cantilever élasto-plastique. ....	(49)

## Chapitre 04 : Développement d'un élément fini secteur SBS5 basé sur l'approche en déformation en 2D

**Tableau 4.1 :** Le déplacement vertical normalisé au point A pour une poutre circulaire épaisse. ....(66)

**Tableau 4.2:** Déplacements radiaux  $u_r$  pour un cylindre épais sous pression interne. ....(68)

**Tableau 4.3 :** Déplacement radial  $u_r$  .....(69)

**Tableau 4.4 :** Résultats de convergence de la flèche radiale au point A.....(69)

**Tableau.4.5 :** Poutre courbé mince, déplacement vertical normalisé au point A. ....(70)

## ANNEXE A

**Tableau 5.1 :** Fonctions de forme de l'élément SBQ5.....(76)

## Notations

$\nu$  : Coefficient de Poisson

$\rho$  : Densité de matériau

E : Module d'Young

H : Longueur

t : Epaisseur

U, V : Déplacement dans les directions x et y

$a_i$  : Constantes d'interpolation du déplacement

x, y : Système des coordonnées cartésiennes

$r, \theta$  : Système des coordonnées polaires

$U_r$  : Déplacement radial

$V_\theta$  : Déplacement circonférentiel (tangential)

$[K^e]$  : Matrice de rigidité élémentaire

$[M^e]$  : Matrice de masse élémentaire

$[C]$  : Matrice de transformation

$[P]$  : Matrice d'interpolation des déplacements

$[Q]$  : Matrice d'interpolation des déformations

$\{F\}$  : Vecteur des forces nodales global

$\{q\}$  : Déplacements nodaux de la structure

$\{q_e\}$  : Déplacements nodaux élémentaire

$\lambda$  : Fréquence propre

$\omega$  : Fréquence angulaire

# **Introduction générale**

## **Introduction générale**

Le développement d'éléments finis simples et efficaces constitue l'un des domaines de recherche importants en analyse structurelle. Les éléments membranaires d'ordre faible basés sur un modèle de déplacement tel que l'élément quadrilatère Q4 ne fonctionnent pas correctement dans le cas en flexion. De gros efforts ont été concentrés sur la manière d'améliorer ou de formuler de nouveaux éléments simples. De nombreuses méthodes ou techniques ont cédé la place à des éléments robustes tels que les éléments de contraintes hybrides (Pian et Sumihara, 1984[Pian.84]; Xie et Zhou, 2004[Xie.04]; Sze, 2000)[Sze.00], la contrainte supposée ou les éléments de contrainte supposés renforcés (Li et Huang, 2014[Li.14]; Piltner et Taylor, 1999[Pilt.99]), les éléments quasi-conformes (Wang et al., 2014[Wang.14]; Xia et al. 2017)[Xie.17],). Les éléments de conformité généralisés (Chen et al. 2004[Chen.04]; Li et Huang, 2014[Li.14]), les éléments de coordonnées de zones quadrilatérales (Chen et al. 2004[Chen.04]; Li et Huang, 2014 [Li.14] et Cen et al.2015[Cen.15]). D'autres formulations ont été réalisées pour développer des éléments de membrane robustes à rotation dans le plan, telles que (Allman, 1988[Allm.88]; Kugler et al.2010[Kugl.10]; Cen et al. 2011[Cen.11] et Zouari et al. 2016[Zoua16]).

La formulation d'éléments finis utilisant l'approche en déformation a motivé de nombreux chercheurs à développer des éléments robustes dans lesquels les fonctions de forme du déplacement peuvent être obtenues à partir des déformations assumées (par intégration) et non directement à partir des déplacements supposés, comme dans le mode de déplacement classique. Cette approche offre de nombreux avantages, ce qui a motivé les développeurs d'éléments finis, à savoir: satisfaction aisée des critères de convergence, fonctions indépendantes pour les différentes composantes des déformations dans la mesure où cela est permis par les équations de compatibilité et l'enrichissement du champ de déplacements par des valeurs plus élevées, sans introduire de degrés de liberté non essentiels pour avoir une meilleure précision sur les contraintes, les déformations et les déplacements. De même temps, on peut obtenir une convergence plus rapide en comparant les résultats de ces éléments avec les éléments de déplacement correspondants ayant le même nombre total de degrés de liberté.

Cette approche d'abord été utilisée pour formuler des éléments courbes (Ashwell et Sabir, 1971[Ashw.71a, Ashw.71b]), puis étendue aux éléments d'élasticité plane (Sabir et Sfindji, 1995[Sabi.95a]) et aux éléments solides tridimensionnels (Belarbi et Charif, 1999[Bela.99]; Belounar et Guerraiche, 2014[Belo.14]; Guerraiche, 2014[Guer.14]; Messai et al. 2019[Mess.19a] et Messai. 2019[Mess.19b]) pour les plaques en flexion. Ces éléments 3D contenant trois translations ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) par nœud ont été utilisés avec une modification de la loi de comportement à l'aide de constantes de contrainte plane et d'un facteur de correction de cisaillement afin d'analyser les plaques minces et épaisses en flexion.

De nombreuses tentatives ont été faites pour étendre l'approche en déformation aux éléments de plaque de Reissner-Mindlin (Belounar et Guenfoud, 2005[Belo.05]; Belounar et al.,[Belo.19a],[Belo.20a],[Belo.20b]; Boussem et al.2021[Bous.21a] et Boussem.2021 [Bous.21b] ), aux éléments de plaque de Khirchof (Himeur et Guenfoud, 2011[Hime.11])et (Boussem et Belounar, 2020[Bous.20]) et aux coques cylindriques (Djouidi et Bahai, 2003, 2004[Djou.03- Djou.04a], Guenfoud et al.2018[Guen.18]) à la fois pour les comportements géométriques non linéaires et dynamiques. Une attention particulière a été portée aux éléments de membrane avec rotation dans le plan en utilisant une approche de déformation (Rebiai et Belounar, 2013, 2014[Rebi.13- Rebi.14]) où le comportement non linéaire du matériau a été traité (Rebiai et Belounar, 2013, 2014[Rebi.13-Rebi.14]).

Dans ce travail, un élément fini de membrane quadrilatère est formulé en utilisant l'approche de déformation pour les analyses statique et dynamique. Cet élément appelé SBQ5 (élément quadrilatéral basé sur le champ de déformation avec cinq nœuds) possède deux degrés de liberté ( $u$  et  $v$ ) aux quatre nœuds d'angle ainsi qu'un nœud central. Les trois déformations ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ) se sont enrichies d'une variation linéaire en termes de  $x$  et  $y$ , ce qui a permis d'améliorer encore la convergence des résultats. Il est testé et comparé avec d'autres éléments et solutions théoriques au moyen de plusieurs tests numériques d'analyses statiques et dynamiques qui confirment les performances du présent élément. Le champ de déplacements obtenu de l'élément précédent a été utilisé pour avoir un élément secteur SBS5 en transformant le système de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires (une approche directe). Cet élément est développé pour l'analyse des structures courbes.

## **Objectifs de la thèse**

Ce modeste travail a pour objet de développer deux éléments robustes quadrilatères à cinq nœuds afin de résoudre les problèmes d'élasticité plane et d'améliorer la précision élémentaire en résultat et d'obtenir une convergence très rapide pour des maillages grossiers, et d'avoir en plus des éléments riches en flexion et libres de tout blocage en cisaillement transversal (CT).

L'idée consiste à améliorer les éléments rectangulaires membranaires existant déjà par un élément fini de membrane quadrilatère performant basé sur l'approche en déformation pour les analyses statiques et dynamiques appliquées dans les poutres minces, épaisses et dans les structures courbes. La même chose avec les éléments de secteur, nous avons proposé un élément secteur basé sur le modèle en déformation avec une bonne performance et efficacité dans l'analyse des structures circulaires et courbes par rapport aux éléments déjà existants. Donc les objectifs de ce travail de thèse sont résumés aux points suivants :

- Le développement d'un élément fini membrane quadrilatère dans l'élasticité plane sur la base de l'approche en déformation à cinq nœuds, quatre nœuds de coin et le cinquième dans le milieu de l'élément avec deux degrés de liberté ( $u, v$ ) en chaque nœud, nommé **SBQ5** (Strain Based Quadrilateral element with five nodes).
- L'effet de la matrice masse concentrée et répartie sur les valeurs propres des différentes structures en vibration libre à été étudié.
- Le problème de vibration forcée dans l'analyse elasto-plastique des structures est également examiné.
- Le développement d'un élément secteur quadrilatère en élasticité plane basé sur l'approche en déformation. Cet élément nommé SBS5 (Strain Based Secteur with five nodes) a cinq nœuds, quatre nœuds de coin et le cinquième au milieu de l'élément avec deux degrés de liberté en coordonnées polaires. L'élément est proposé pour améliorer les résultats des différents tests proposés dans cette thèse et aussi pour enrichir la bibliothèque d'éléments finis existante.

## **Plan de la thèse**

La thèse est divisée en quatre chapitres :

**Le premier chapitre** : est consacré à l'étude bibliographique en proposant un aperçu des travaux réalisés dans le domaine des éléments finis, basés sur le modèle en déformation plus précis des éléments membranaires en 2D.

**Le deuxième chapitre**: décrit la formulation d'un nouvel élément fini à cinq nœuds développé pour l'élasticité plane des structures, ensuite des connaissances de base sur la dynamique des structures sont également exposées.

**Le troisième chapitre** : est consacré à la validation numérique de l'élément développé SBQ5 en statique et dynamique à travers des tests standards cités dans la littérature.

**Le quatrième chapitre** : est consacré à la formulation et à la validation d'un nouvel élément secteur quadrilatère basé sur l'approche en déformation en coordonnées polaires, cet élément a cinq nœuds et deux degrés de liberté  $(r, \theta)$  par nœud, la validation numérique est approuvée par une série de tests dans différentes structures courbées en élasticité plane.

**Chapitre 01:**  
Étude bibliographique

# Chapitre 1

## Étude bibliographique

Dans ce chapitre, nous présentons tous d'abord quelques équations de base utilisées pour cette étude. Par la suite nous exposons une étude bibliographique sur les éléments finis à champ de déformation et spécifiquement les éléments membranaires

### 1.1 Rappels des équations de base d'élasticité

Le problème de type de la mécanique des solides revient à déterminer les deux champs inconnus : déplacements ( $U_i$ ) et contraintes ( $\sigma_{ij}$ ) sous l'effet des forces appliquées, forces de surface ( $\phi_i$ ) et forces de volume ( $f_i$ ) (figure (1.1)).

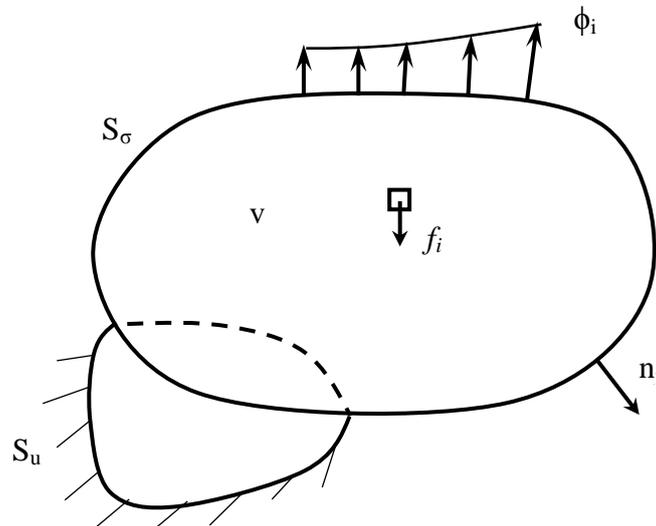


Figure 1.1 : Corps solide soumis à des forces de volume ( $f_i$ ) et de surfaces ( $\phi_i$ ).

Le phénomène de déformation des corps solides est régi par des équations de champ aux dérivées partielles avec des conditions mixtes aux limites. Les équations de champ et conditions aux limites de la théorie de l'élasticité sont rappelées ci-dessous pour le cas à deux dimensions (élasticité 2D)

#### 1.1.1 Relations d'élasticité plane en coordonnées cartésiennes

Dans le cas de la théorie linéaire de l'élasticité plane (petits déplacements et déformations), les relations déformations–déplacements sont :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (1.1)$$

Les équations d'équilibre en 2D sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x^v = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y^v = 0 \end{cases}\quad (1.2)$$

Pour ce cas particulier d'élasticité 2D, l'équation de compatibilité se résume comme suit :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1.3)$$

Dans le cas de matériaux à comportement élastique linéaire, en 2D, la loi de Hooke s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu\varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}\end{aligned}\quad (1.4)$$

➤ Pour le cas en déformation plane

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.5)$$

➤ Pour le cas en contrainte plane

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.6)$$

Avec

$u$  et  $v$  sont des déplacements dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement.

$\varepsilon_x$  et  $\varepsilon_y$  sont les déformations normales dans les directions  $x$  et  $y$ .

$\gamma_{xy}$  est la déformation de cisaillement.

$\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont les contraintes normales dans les directions  $x$  et  $y$ .

$\tau_{xy}$  est la contrainte de cisaillement.

$\nu$  et  $E$  sont coefficient de Poisson et Module d'Young respectivement.

### 1.1.2 Relations d'élasticité plane en coordonnées polaires

Les coordonnées polaires sont employées pour étudier les anneaux et disques circulaires et les barres circulaire courbes à section transversales étroites (figure (1.2)).

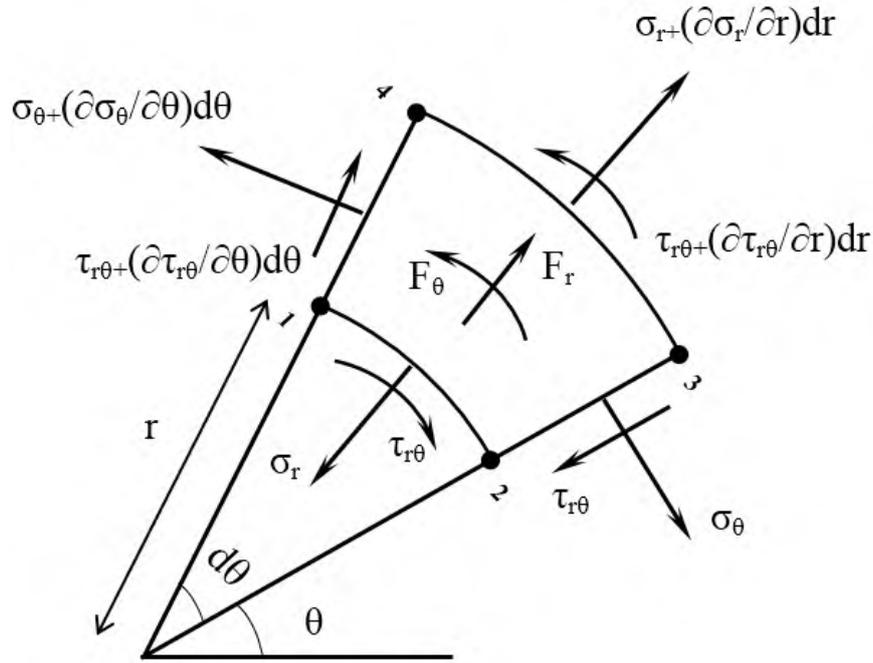


Figure 1.2 : Etat de contrainte d'un élément en coordonnées polaires

Dans le cas de l'élasticité plane en **coordonnées polaires**, les relations déformations–déplacements sont :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\end{aligned}\tag{1.7}$$

Les équations d'équilibre sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + F_r &= 0 \\ \frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta &= 0\end{aligned}\tag{1.8}$$

L'équation de compatibilité est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r,\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - 2 \cdot \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \gamma_{r,\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (1.9)$$

La loi de HOOKE en contrainte plane

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \nu \cdot \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_\theta - \nu \cdot \sigma_r) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_r + \sigma_\theta) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{r\theta} \end{aligned} \quad (1.10)$$

La loi de HOOKE en déformation plane

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1 + \nu}{E} \cdot ((1 - \nu) \sigma_r - \nu \cdot \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1 + \nu}{E} \cdot (-\nu \cdot \sigma_r + (1 - \nu) \sigma_\theta) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{r\theta} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Avec

$u_r$  et  $v_\theta$  sont des déplacements dans les directions radial  $r$  et  $\theta$  circonférentielle respectivement.

$\varepsilon_r$  et  $\varepsilon_\theta$  sont les déformations normales dans les directions  $r$  et  $\theta$ .

$\gamma_{r\theta}$  est la déformation de cisaillement.

$\sigma_r$  et  $\sigma_\theta$  sont les contraintes normales dans les directions  $r$  et  $\theta$ .

$\tau_{r\theta}$  est la contrainte de cisaillement.

## 1.2 Étude bibliographique sur les éléments finis basés sur l'approche en déformation

Les éléments à champ de déformation sont basés sur la formulation en déformation où l'approximation se fait sur le champ de déformation de façon telle que les équations de

compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément. Le champ de déplacements est déduit du champ de déformations qui est continu et différentiable.

Le développement des champs de déplacement par l'utilisation de l'approche en déformation a été appliqué pour la première fois aux structures courbes [Ashw.72]. Les travaux de recherches élaborés à l'université de Cardiff au Royaume Uni ont montré que cette approche ne se limite pas au développement d'éléments courbes mais également aux éléments plans pour l'analyse des problèmes d'élasticité plane Sabir [Sabi.83,85]. Cette approche a été appliquée pour la modélisation des différents types de structure en utilisant des élément plaque ([Belo.05], [Belo.19a,20a,20b]), 3D ([Belo.14], [Guer.18], [Mess.19a],[Mess.19b][Khio.20a] [Khio.20b]) et coque ([Djou.03,04a,04b]).

### **1.2.1 Élément fini membranaire**

La formulation d'une nouvelle classe d'éléments finis en coordonnées cartésiennes basée sur l'approche en déformation pour le problème d'élasticité plane a été effectuée par Sabir [Sabi.83,85]. Le premier élément cité dans la référence [Sabi.83] est rectangulaire à quatre nœuds et deux degrés de liberté par nœud basé sur la variation linéaire des déformations normales et des déformations de cisaillement constantes. Dans la deuxième étude [Sabi.85], deux éléments de forme triangulaire et rectangulaire avec rotation dans le plan (drilling) comme ddl additionnel ont été développés. Des éléments membranaires (rectangulaire et triangulaire) avec un nœud interne ont été formulés par Sabir et Sfeidji [Sabi.95a] ou ces éléments sont utilisés après la condensation statique des degrés de liberté des nœuds interne. Belarbi and Maalam [Bela.05], Hamadi et al [Hama.16] ont proposé d'autres versions des éléments rectangulaires avec un nœud interne dont le dernier élément [Hama.16] satisfait les équations d'équilibre comme condition supplémentaire. Plus tard, Himeur et al. [Hime.15] a développé un élément triangulaire à 4 nœuds avec rotation dans le plan qui satisfait les fonctions d'airy. Pour l'analyse élasto-plastique et dynamique, Rebiai et Belounar [Rebi.13] ont proposé un nouveau champ de déplacement pour obtenir un élément rectangulaire avec rotation (drilling). Des travaux récents ont été effectués pour l'analyse statique et en vibration libre des structures membranaires ([Fort.19],[Fort.20]), [Belo.19b]. Le premier élément est triangulaire à 3 nœuds avec rotation dans le plan en imposant un champ de déformations qui satisfait les équations d'équilibre ([Fort.19] ,[Fort.20]). Tandis que le deuxième [Belo.19b] est quadrilatéral à cinq nœuds contenant trois ddl pour les quatre nœuds de coin et seulement deux translations pour le nœud interne.

RezaieePajand et son équipe de recherche ont développés plusieurs éléments membranaires basés sur l'approche en déformation dont leurs champs de déformations satisfont l'équation de compatibilité et les équations d'équilibre. Le premier élément quadrilatéral généralisé à cinq nœuds a été proposé par RezaieePajand et Yaghoobi [Rezai.12]. Dans une tentative de développer des éléments de second ordre, Rezaiee-Pajand et Yaghoobi [Rezai.15] ont proposé deux éléments quadrilatéraux à cinq et neuf nœuds. Afin d'analyser des structures planes en non linéarité géométrique, Rezaiee-Pajand et Yaghoobi ont modifié leur élément quadrilatéral à cinq nœuds [Rezai.12] par l'approche co-rotationnelle [Rezai.18]. Plusieurs études ont été réalisées pour améliorer les performances des éléments finis à champ de déformation. L'une de ces études les plus récentes, Rezaiee-Pajand et al ont formulé deux éléments triangulaires avec un champ de déformation linéaire [Rezai.19a]. Le premier élément possède cinq nœuds (trois nœuds de coins et deux à mi-coté) avec deux degrés de liberté par nœuds. Le deuxième élément à quatre nœuds contient trois ddl pour les trois nœuds de coins (deux translations et une rotation autour de la normal) et un seul degré de liberté de translation du quatrième nœud central. Dans le même contexte, les mêmes auteurs [Rezai.19b] ont suggéré un élément plan triangulaire d'ordre supérieur en considérant un champ de déformation du second ordre. Cet élément à sept nœuds contient des degrés de liberté de rotation pour les trois nœuds à mi-coté et deux translations pour les autres (trois nœuds de coin et le nœud central).

L'application de l'approche en déformation pour la modélisation des structures membranaires en coordonnées polaires a été établie par Sabir et Salhi [Sabi.86] à l'aide d'un élément secteur plan. Cet élément à quatre nœuds et deux degrés de liberté par nœud est obtenu en utilisant le champ de déplacement de l'élément SBRIE [Sabi.83] en coordonnées cartésiennes  $(x,y)$  qui sont transformés en coordonnées polaires  $(r,\theta)$ . Cet élément a été développé afin d'éviter l'utilisation des éléments 2D d'ordre élevé en coordonnées cartésiennes à modèle en déplacement. Afin d'améliorer la performance des éléments à champ de déformation en coordonnées polaires, plusieurs tentatives ont été effectuées pour la formulation des éléments secteurs contenant la rotation dans le plan (drilling) comme ddl supplémentaire [Bela.98], [Bou.05], et [Bouz.15]. Le champ de déplacement du premier élément [Bela.98] exprimé en coordonnées cartésiennes a été formulé en remplaçant  $(x,y)$  par  $(r,\theta)$ . Tandis que les autres éléments [Bou.05], et [Bouz.15] utilisent l'intégration directe des champs de déformation  $(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta})$  en termes des expressions polynomiales  $(r,\theta)$ . Des tests de validation ont été utilisés pour l'analyse statique et thermique.

### 1.3 Avantage de l'approche en déformation

L'interpolation directe sur les déformations permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs et sur les contraintes et les déplacements (obtenus par intégration) ; contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ choisi des déplacements. Les avantages des éléments à modèle en déformation sont:

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence liés directement aux déformations (mode de déformation constante et mode rigide).
- Découplage plus facile des différentes composantes des déformations (un champ de déplacements engendre des déformations couplées).
- Possibilité d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction de nœuds intermédiaires ni de degrés de liberté supplémentaires (permettant ainsi de traiter le fameux problème de verrouillage (« locking »)).

### 1.4 Procédure de développement des éléments finis à modèle en déformation

Les travaux sur la formulation des éléments à champ déformation montrent qu'il y a deux composantes essentielles pour la représentation pour n'importe quel champ de déplacement. La première composante représente le déplacement des modes rigide par contre la deuxième composante est due à la déformation de l'élément et ceux-ci sont approximativement représenté par des termes polynomiaux imposés pour les différentes composantes de la déformation en assurant la satisfaction des équations de compatibilité.

Pour illustrer la procédure par laquelle les champs de déplacement ont été développés quand le modèle en déformation est utilisé, l'exemple simple d'un élément rectangulaire d'élasticité plane est examiné. En général, pour les problèmes d'élasticité plane, les relations entre les déformations ( $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$ ) et les déplacements de translation ( $u$ ,  $v$ ) sont donnés par l'équation (1.1).

On annule les trois déformations de l'équation (1.1) et on intègre les équations différentielles résultantes, on obtient les expressions suivantes pour les déplacements  $u_R$  et  $v_R$  :

$$\begin{aligned} u_R &= a_1 - a_3 y \\ v_R &= a_2 + a_3 x \end{aligned} \tag{1.12}$$

Les équations ci-dessus représentant les champs de déplacement correspondant au mode de corps rigide (MCR) relative à l'élément. On remarque que les équations (1.12) contiennent trois constantes :  $a_1$  et  $a_2$  représentant les mouvements de translation dans les directions X et Y,  $a_3$  représente la rotation dans le plan.

Si on a besoin d'un élément rectangulaire avec quatre nœuds et chaque nœud possède deux ddl, comme exemple l'élément SBRIE [Sabi.95a], les champs de déplacement finaux doivent contenir huit constantes indépendantes. Nous avons utilisé trois constantes pour la représentation du MCR, il nous reste cinq constantes qu'on peut répartir sur les déformations de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_4 + a_5 y \\ \varepsilon_y &= a_6 + a_7 x \\ \gamma_{xy} &= a_8\end{aligned}\tag{1.13}$$

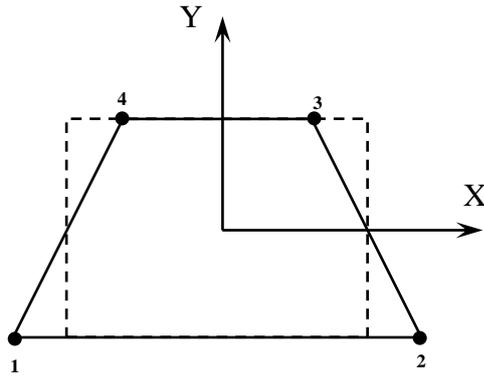
Les équations (1.13) peuvent, maintenant, être intégrées :

$$\begin{aligned}u &= a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} \\ v &= a_6 y - a_5 \frac{x^2}{2} + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2}\end{aligned}\tag{1.14}$$

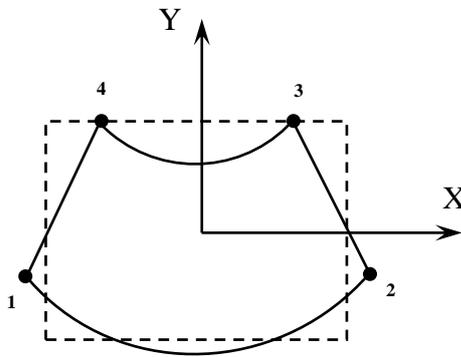
Les déplacements finaux peuvent être obtenus en additionnant les équations (1.12) et (1.14) pour avoir :

$$\begin{aligned}u &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} \\ v &= a_2 + a_3 x + a_6 y - a_5 \frac{x^2}{2} + a_7 xy + a_8 \frac{x}{2}\end{aligned}\tag{1.15}$$

Il est noté que les déformations sont indépendantes entre elles, par conséquent les actions de flexion et de cisaillement sont découplées, d'où un état de flexion pure peut être obtenu. En plus de ça, les fonctions de déplacement contiennent des termes quadratiques pour permettre le changement de courbure, et l'élément se déformé comme montré sur la figure (1.3).



(a) Élément (Q4) basé sur le modèle en déplacement



(b) Élément (SBRIE) basé sur le modèle en déformation

**Figure 1.3** : Comportement en flexion dans le plan

Il est intéressant de comparer cet élément avec son équivalent basé sur le modèle en déplacement, (élément rectangulaire bilinéaire) dont les fonctions de déplacement sont données par :

$$\begin{aligned} u &= a_1 - a_2x + a_3y + a_4xy \\ v &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \end{aligned} \quad (1.16)$$

Les déformations sont données en dérivant les fonctions de déplacement pour avoir :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_2 + a_4y \\ \varepsilon_y &= a_7 + a_8x \\ \gamma_{xy} &= a_3 + a_4x + a_6 + a_8y \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ces déformations ne sont pas indépendantes, du moment où elles sont liées par les constantes  $a_4$  et  $a_8$ . Il est cependant clair que l'élément bilinéaire ne peut représenter un état de cisaillement indépendant à moins que  $a_4 = a_8 = 0$ , et qui va donner  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$  comme

constantes. D'où un état de flexion pure associé à des déformations linéaires directes et sans déformation de cisaillement ne peut être obtenu avec l'élément bilinéaire.

## 1.5 Formulation en déplacement d'un élément fini

### 1.5.1 Champ de déplacements

Considérons un élément fini donné dont les nœuds sont numérotés de 1 à n. Les fonctions des déplacements d'un point quelconque à l'intérieur de l'élément sont définies en termes des n déplacements nodaux.

$$\{U\} = [N] \{q_e\} \quad (1.18)$$

Dans le cas d'élasticité plane

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (1.19)$$

Où  $\{U\}$  représente les deux composantes de déplacements (u,v) en 2D

$\{q_e\}^T = [u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n]^T$  est le vecteur des déplacements nodaux et la matrice  $[N]^T = [N_1, N_1, \dots, N_n]^T$ .

### 1.5.2 Champ des déformations

Lorsque l'on connaît les déplacements en tout point intérieurs à l'élément, on peut déterminer les déformations en un point quelconque. Cela est traduit en notation matricielle par :

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{q_e\} \quad (1.20)$$

Dans le cas d'élasticité plane  $\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T$  et la matrice [B] est donnée comme suit :

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial y} & \frac{\partial N_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1.21)$$

### 1.5.3 Champ de contraintes

Si l'on suppose que le comportement est élastique, la relation contrainte-déformation est linéaire sous la forme :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{q_e\} \quad (1.22)$$

Où  $[D]$  est la matrice d'élasticité donnée soit en :

Contrainte plane :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Déformation plane

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu).(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

#### 1.5.4 Forces nodales équivalentes

Lorsque la structure est soumise à des charges de volume ou de surface, on doit remplacer ces charges réparties par des forces ponctuelles équivalentes appliquées aux nœuds de l'élément.

➤ Pour le cas des forces volumiques

$$\{F_e\} = \int [N(x, y)]^T \cdot \{f_v(x, y)\} dv \quad (1.25)$$

➤ Pour le cas des forces surfaciques

$$\{F_e\} = \int [N(x, y)]^T \cdot \{f_s(x, y)\} ds \quad (1.26)$$

#### 1.6 Déformations imposées de quelques éléments membranaires existants à nœud interne

- Le champ des déformations de l'élément triangulaire (figure (1.4)) **SBTIE** [Sabi.95a] à quatre nœuds avec deux degrés de liberté par nœud (U, V) est donné par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_5 y \\ \varepsilon_y &= \alpha_6 + \alpha_7 x \\ \gamma_{xy} &= \alpha_8 \end{aligned} \quad (1.27)$$

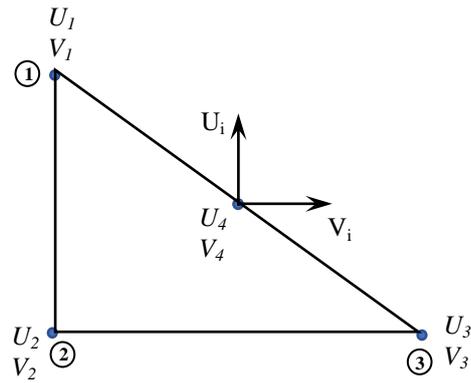


Figure 1.4 : Élément triangulaire à 4 nœuds.

- Les deux éléments rectangulaires **SBRIE1** [Sabi.95a] et **R4BM** [Bela.05] à cinq nœuds avec un nœud central possèdent deux degrés de liberté par nœud ( $u, v$ ) (figure (1.5)).

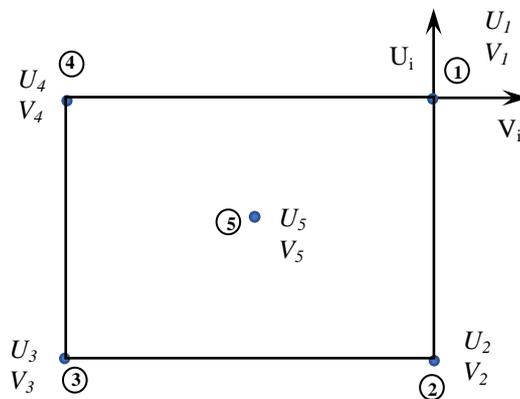


Figure 1.5 : Élément rectangulaire à 5 nœuds.

Les champs des déformations imposés sont :

➤ Pour l'élément **SBRIE1** [Sabi.95a] :

$$\varepsilon_x = \alpha_4 + \alpha_5 y$$

$$\varepsilon_y = \alpha_6 + \alpha_7 x$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_8 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y \quad (1.28)$$

➤ Pour l'élément **R4BM** [Bela.05] :

$$\varepsilon_x = \alpha_4 + \alpha_5 y + \alpha_9 x$$

$$\varepsilon_y = \alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_{10} y$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_8 \quad (1.29)$$

- L'élément quadrilatère avec rotation dans le plan proposé par Belounar Abderahim [Belo.19b] possède le nœud central (figure (1.6)) qui contient seulement les deux translations (u et v) et les autres quatre nœuds de coin ont la rotation dans le plan (drilling) comme ddl additionnel (U, V et  $\Theta_z$ ).

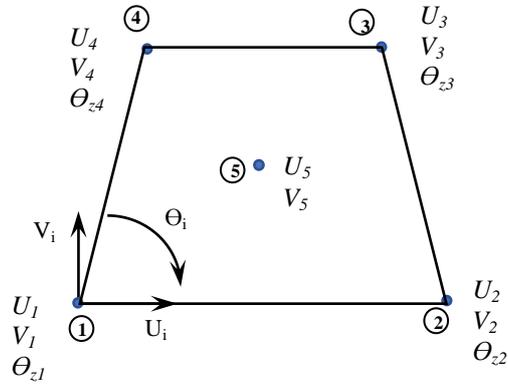


Figure 1.6 : Élément quadrilatère membrane avec rotation dans le plan.

Les déformations imposées pour cet élément sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_7 y + \alpha_{11} y^2 + 2\alpha_{12} xy^3 + \alpha_{13} x \\ \varepsilon_y &= \alpha_5 + \alpha_8 x - \alpha_{11} x^2 - 2\alpha_{12} yx^3 + \alpha_{14} y \\ \gamma_{xy} &= 2\alpha_6 + \alpha_7 x + \alpha_8 y + 2\alpha_9 x + 2\alpha_{10} y \end{aligned} \quad (1.30)$$

- En considérant deux champs de déformation de second ordre, Rezaiee-Pajand et Yaghoobi [Rezai.15] ont proposé deux éléments quadrilatères à cinq et neuf nœuds (figure (1.7) et (1.8)).

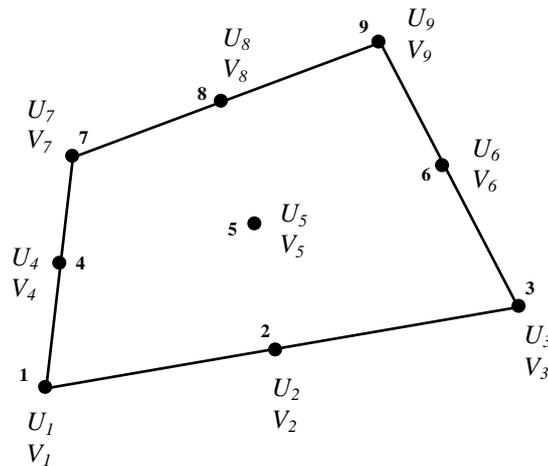
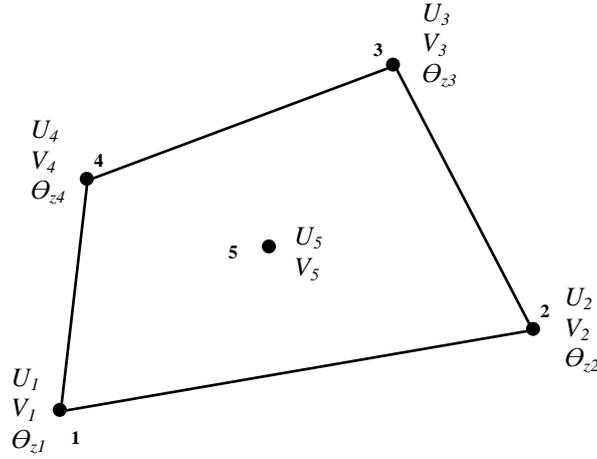


Figure 1.7 : Élément quadrilatère à neuf nœuds.

➤ Pour l'élément quadrilatéral à neuf [Rezai.15] :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_7 x + \alpha_8 y + \alpha_{11} \left( \frac{x^2}{2} \right) + \alpha_{12} (xy) + \alpha_{13} \left( \frac{y^2}{2} \right) \\
 \varepsilon_y &= \alpha_5 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y + \alpha_{14} \left( \frac{x^2}{2} \right) + \alpha_{15} (xy) + \alpha_{16} \left( \frac{y^2}{2} \right) \\
 \gamma_{xy} &= \alpha_6 - \left( \frac{2G + \lambda}{G} \right) \alpha_7 y - \left( \frac{\lambda}{G} \right) \alpha_8 x - \left( \frac{\lambda}{G} \right) \alpha_9 y - \left( \frac{2G + \lambda}{G} \right) \alpha_{10} x + \alpha_{13} (xy) + \alpha_{14} (xy) \\
 &+ \alpha_{17} \left( \frac{x^2}{2} \right) + \alpha_{18} \left( \frac{y^2}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.31}$$



**Figure 1.8 :** Élément quadrilatérale à cinq nœuds.

➤ Pour l'élément quadrilatéral à cinq nœuds [Rezai.15] :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \alpha_4 + \alpha_7 x + \alpha_8 y + (xy) \alpha_{11} + \left( \frac{y^2}{2} - \frac{Gx^2}{(4G + 2\lambda)} \right) \alpha_{12} - \left( \frac{(G + \lambda)x^2}{(4G + 2\lambda)} \right) \alpha_{14} \\
 \varepsilon_y &= \alpha_5 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y - \left( \frac{(G + \lambda)y^2}{(4G + 2\lambda)} \right) \alpha_{12} + (xy) \alpha_{13} + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{Gy^2}{(4G + 2\lambda)} \right) \alpha_{14} \\
 \gamma_{xy} &= \alpha_6 - \left( \frac{2G + \lambda}{G} \right) \alpha_7 y - \left( \frac{\lambda}{G} \right) \alpha_8 x - \left( \frac{\lambda}{G} \right) \alpha_9 y - \left( \frac{2G + \lambda}{G} \right) \alpha_{10} x \\
 &- \left( \frac{\lambda}{2G} x^2 + \frac{(2G + \lambda)}{2G} y^2 \right) \alpha_{11} + (xy) \alpha_{12} - \left( \frac{\lambda}{2G} y^2 + \frac{(2G + \lambda)}{2G} x^2 \right) \alpha_{13} + (xy) \alpha_{14}
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

- En utilisant un champ de déformation linéaire comme présenté dans l'équation (1.33), Rezaiee-Pajand et al [Rezai.19a] ont formulé deux éléments triangulaires (figure (1.9)). Le premier élément possède cinq nœuds avec deux degrés de liberté par nœuds. Le

second élément à quatre nœuds contient trois ddl pour les trois nœuds de coins et un seul degré de liberté de translation du nœud central.

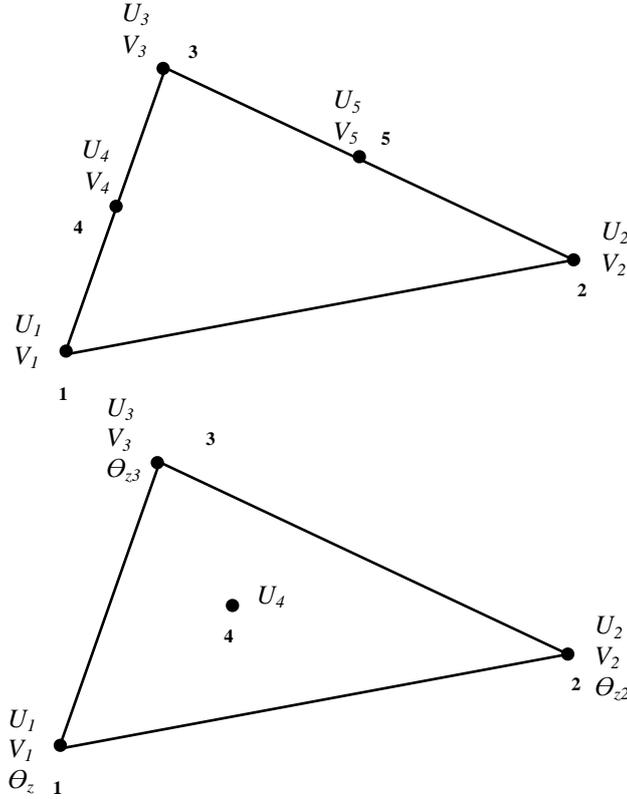


Figure 1.9 : Éléments triangulaires à cinq et quatre nœuds.

$$\varepsilon_x = \alpha_4 + \alpha_7 x + \alpha_8 y$$

$$\varepsilon_y = \alpha_5 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_6 - \left(\frac{2G+\lambda}{G}\right)\alpha_7 y - \left(\frac{\lambda}{G}\right)\alpha_8 x - \left(\frac{\lambda}{G}\right)\alpha_9 y - \left(\frac{2G+\lambda}{G}\right)\alpha_{10} x \quad (1.33)$$

- Rezaiee-Pajand et al [Rezai.19b] ont suggéré un élément triangulaire à sept nœuds (figure (1.10)) d'ordre supérieur en considérant un champ de déformation du second ordre.

$$\varepsilon_x = \alpha_4 + \alpha_7 x + \alpha_8 y + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{\lambda x^2}{2(2G+\lambda)}\right)\alpha_{11}$$

$$\varepsilon_y = \alpha_5 + \alpha_9 x + \alpha_{10} y + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{\lambda y^2}{2(2G+\lambda)}\right)\alpha_{11}$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_6 - \left(\frac{2G+\lambda}{G}\right)\alpha_7 y - \left(\frac{\lambda}{G}\right)\alpha_8 x - \left(\frac{\lambda}{G}\right)\alpha_9 y - \left(\frac{2G+\lambda}{G}\right)\alpha_{10} x \quad (1.34)$$

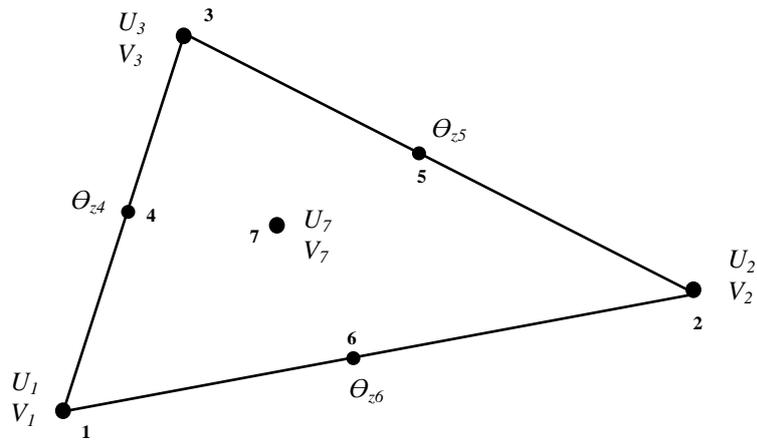


Figure 1.10 : Élément triangulaire à sept nœuds.

- Le champ de déformation de l'élément précédent [Rezai.19b] donné dans l'équation (1.34) a été utilisé pour la formulation d'un élément triangulaire à quatre nœuds comme présenté dans la figure (1.11) [Rezai.20].

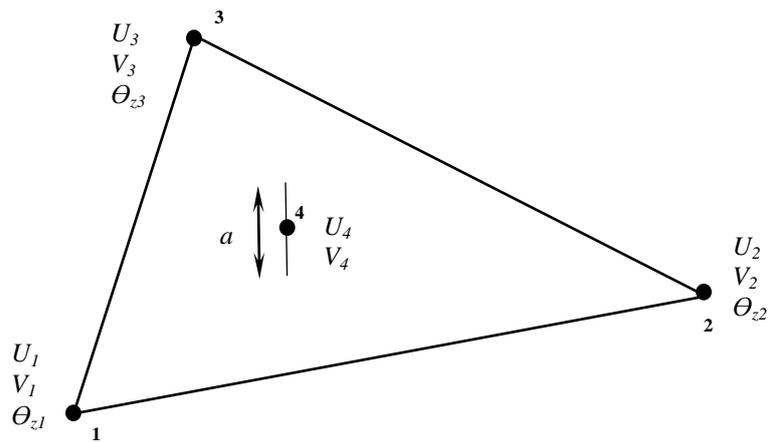


Figure 1.11 : Élément triangulaire à quatre nœuds avec fissure interne.

## **Chapitre 02:**

Formulation d'un nouvel élément fini  
SBQ5 basé sur l'approche en  
déformation En 2D

## Chapitre 2

### Formulation d'un nouvel élément fini SBQ5 basé sur l'approche en déformation En 2D

#### 2.1 Introduction

L'application de l'approche en déformation pour une nouvelle classe d'éléments d'élasticité plane est mise au point à l'université de Cardiff (Grande-Bretagne) par un groupe de chercheurs, dont le premier est Sabir [Sabi.83] qui a développé un élément fini rectangulaire en coordonnées cartésiennes avec deux degrés de liberté essentiels pour satisfaire la représentation des mouvements du corps rigides et l'équation de compatibilité, de même que deux éléments rectangulaires et triangulaires[Sabi.85] en élasticité plane avec rotation dans le plan (drilling rotation) comme ddl supplémentaire.

Le succès de l'approche en déformation pour les problèmes d'élasticité plane en coordonnées cartésiennes a été élargi au développement d'éléments finis secteur en coordonnées polaires par Sabir et Salhi [Sabi.86] qui ont proposé deux éléments ayant deux degrés de liberté. Des éléments secteurs à trois degrés de liberté (en coordonnées polaires) contenant la rotation dans le plan (drilling rotation) comme degré de liberté supplémentaire ont été développés par [Bela.98], [Bou.05] et [Bouz.15]. Deux éléments triangulaires et rectangulaires sont développés par Sabir et Sfindji [Sabi.95a] pour l'élasticité plane avec deux degrés de liberté et un nœud interne qui est éliminé par condensation statique. Il existe également des versions d'éléments rectangulaires avec un nœud interne qui ont été développées par Belarbi et Maalam [Bela.05], Hamadi et al [Hama.16].

Un nouvel élément triangulaire à 4 nœuds avec rotation dans le plan a été formulé par Himeur et al [Hime.15] en satisfaisant les fonctions d'Airy. Des améliorations apportées sur le champ de déformation pour construire des éléments de membrane avec rotation dans le plan ont été proposées par [Belo.05] et [Rebi.13]. Le premier élément est destiné à l'analyse statique linéaire et le second est appliqué à l'analyse élastique, élasto-plastique et dynamique. Rebiai et Belounar [Rebi.14] ont développé un élément triangulaire à trois nœuds avec rotation dans le plan pour l'analyse statique et dynamique des structures membranaires.

Razaiee-Pajand et al ont formulé deux éléments triangulaires avec un champ de déformation linéaire [Rezai.19a], le premier élément contient cinq nœuds (trois nœuds de coin et deux nœuds à mi-côte) avec deux degrés de liberté par nœud. Le deuxième élément avec quatre nœuds contenant trois ddl par nœud (deux translations et une rotation autour de la normale) et un seul degré de liberté de translation du quatrième nœud central. Dans la même ligne de recherche, les mêmes auteurs [Rezai.19b] ont formulé un élément membranaire triangulaire d'ordre supérieur considérant un champ de déformation du second ordre, cet élément à sept nœuds avec deux degrés de liberté de rotation pour les trois nœuds médians et deux translations pour les autres (trois nœuds de coin et le nœud central). Plus récemment, un autre élément fini à quatre nœuds a été développé pour être utilisé dans des problèmes mécaniques de la rupture.

Dans ce chapitre, nous avons proposé un élément membranaire quadrilatère basé sur l'approche en déformation pour l'analyse des structures dans des problèmes statiques et dynamiques. L'élément développé nommé : (Strain Based Quadrilateral element With five nodes) (SBQ5) possède deux degrés de liberté (u,v) aux quatre nœuds d'angle ainsi qu'au nœud central. Cet élément satisfait l'équation de compatibilité et la représentation du mouvement du corps rigide. La performance et la précision de cet élément ont été vérifiées par plusieurs tests. Les résultats obtenus par cet élément sont comparés aux solutions analytiques et à ceux obtenus par d'autres éléments finis précédemment cités.

## **2.2 Considérations théoriques et formulation du présent élément SBQ5**

### **2.2.1 Considérations théoriques**

Pour une analyse linéaire bidimensionnelle en coordonnées cartésiennes (x, y), les trois composantes des déformations ( $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ ) sont données par :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (2.1a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (2.1b)$$

$$\gamma_{xy} = \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (2.1c)$$

U et V sont les déplacements dans les directions x et y respectivement.

$\varepsilon_x$  et  $\varepsilon_y$  sont les déformations normales suivant les directions x et y respectivement.

$\gamma_{xy}$  est la déformation de cisaillement.

Sous forme matricielle, les déformations sont données sous la forme :

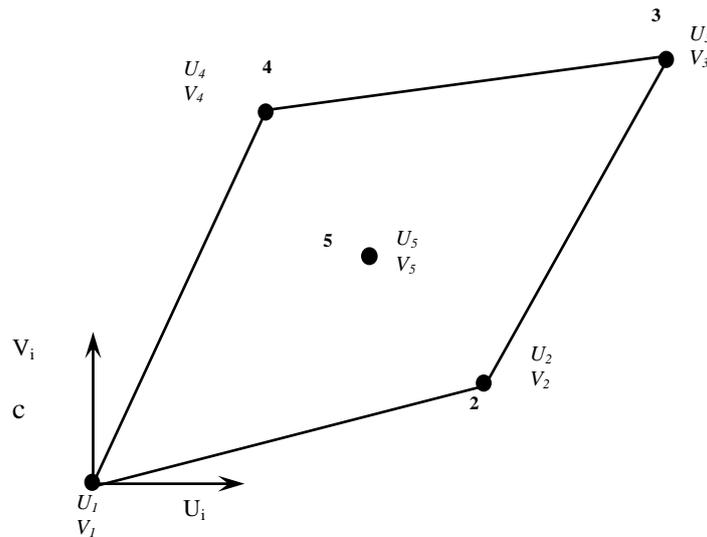
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 \\ 0 & \partial / \partial y \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Les déformations données par l'équation (2.1) doivent satisfaire l'équation de compatibilité qui est donnée par :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.3)$$

### 2.2.2 Formulation de l'élément développé SBQ5

Considérons un élément quadrilatère membranaire basé sur l'approche en déformation **SBQ5** (Strain-based quadrilateral element with five nodes) avec cinq nœuds, quatre nœuds de coin et un nœud centré comme montré dans la figure (2.1). Deux degrés de liberté (déplacements U et V) pour chaque nœud sont considérés.



**Figure 2.1 :** Élément SBQ5 avec les points nodaux.

Le champ de déplacement est composé de deux parties : la première est liée aux modes du corps rigide et la seconde est calculée à partir de la déformation de l'élément.

La partie déplacement représentant les modes du corps rigide est obtenue en intégrant les équations (2.1) avec toutes les déformations égales à zéro :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= 0 \\ \varepsilon_y &= 0 \\ \gamma_{xy} &= 0\end{aligned}\tag{2.4}$$

En intégrant les deux premières équations de (2.4), nous obtenons les expressions de U et V suivantes :

$$\begin{aligned}U &= a_1 + f(y) \\ V &= a_2 + s(x)\end{aligned}\tag{2.5}$$

En remplaçant ces équations dans l'équation (2.1c), nous obtenons :

$$\frac{ds(x)}{dx} + \frac{df(y)}{dy} = 0\tag{2.6}$$

La résolution de l'équation (2.6) donne :

$$\begin{aligned}\frac{df(y)}{dy} &= -a_3 \\ \frac{ds(x)}{dx} &= a_3\end{aligned}\tag{2.7}$$

D'où :

$$\begin{aligned}f(y) &= -a_3 y \\ s(x) &= a_3 x\end{aligned}\tag{2.8}$$

Nous substituons les fonctions f(y) et s(x) dans l'équation (2.5) pour obtenir les déplacements du corps rigides suivants :

$$\begin{aligned}U &= a_1 - a_3 y \\ V &= a_2 + a_3 x\end{aligned}\tag{2.9}$$

Sachant que cet élément développé possède dix degrés de liberté, les déplacements sont approximés en utilisant des fonctions de forme contenant 10 constantes indépendantes. Trois constantes sont déjà utilisées.

Les sept autres constantes sont employées pour exprimer les déplacements correspondant à la déformation de l'élément satisfaisant l'équation de compatibilité donnée par l'équation (2-3). Ceux-ci sont répartis entre les déformations comme suit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_4 + a_5 y + a_7 x - (g a_{10} x) \\ \varepsilon_y &= a_5 y + a_6 + a_7 x - (g a_9 y) \\ \gamma_{xy} &= -(e a_5 x) - (e a_7 y) + a_8 + a_9 x + a_{10} y\end{aligned}\tag{2.10}$$

Où (e) et (g) sont définies par les expressions suivantes :

$$e = \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \quad , \quad g = \frac{1-\nu}{2}$$

En intégrant les deux premières équations de (2.10) on aura :

$$\begin{aligned}U &= a_4 x + a_5 xy + a_7 \frac{x^2}{2} - g a_{10} \frac{x^2}{2} + h(y) \\ V &= a_5 \frac{y^2}{2} + a_6 y + a_7 xy - g a_9 \frac{y^2}{2} + t(x)\end{aligned}\tag{2.11}$$

En dérivant les relations (2.11) par rapport à y et x respectivement et en les substituant dans l'équation (2.1c) il en résulte :

$$\gamma_{xy} = a_5 x + \frac{\partial h(y)}{\partial y} + a_7 y + \frac{\partial t(x)}{\partial x} = -(e a_5 x) - (e a_7 y) + a_8 + a_9 x + a_{10} y\tag{2.12}$$

Le partage des termes en x et y est élaboré pour avoir :

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(y)}{\partial y} &= \frac{1}{2} a_8 - (1+e) a_7 y + a_{10} y \\ \frac{\partial t(x)}{\partial x} &= \frac{1}{2} a_8 - (1+e) a_5 x + a_9 x\end{aligned}\tag{2.13}$$

L'intégration a abouti à :

$$\begin{aligned} h(y) &= \frac{1}{2}a_8y - (1+e)a_7 \frac{y^2}{2} + a_{10} \frac{y^2}{2} \\ t(x) &= \frac{1}{2}a_8x - (1+e)a_5 \frac{x^2}{2} + a_9 \frac{x^2}{2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

En substituant (2.14) dans les fonctions de l'équation (2.11) on aura ce qui suit :

$$\begin{aligned} U &= a_4x + a_5xy + a_7(x^2 - (1-e)y^2)/2 + a_8y/2 + a_{10}(y^2 - gx^2)/2 \\ V &= a_5(y^2 - (1+e)x^2)/2 + a_6y + a_7xy + a_8x/2 + a_9(x^2 - gy^2)/2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Les fonctions de déplacement final de l'élément **SBQ5** sont obtenues par addition des déplacements de corps rigide donnés par (2.9) avec ceux donnés par (2.15) pour obtenir :

$$\begin{aligned} U &= a_1 - a_3y + a_4x + a_5xy + a_7(x^2 - (1-e)y^2)/2 + a_8y/2 + a_{10}(y^2 - gx^2)/2 \\ V &= a_2 + a_3x + a_5(y^2 - (1+e)x^2)/2 + a_6y + a_7xy + a_8x/2 + a_9(x^2 - gy^2)/2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Le champ des déplacements final donné par (2.16) peut être exprimé sous forme matricielle comme suit :

$$\{U_e\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [P]\{a\} \quad (2.17)$$

Avec :

$$\{U_e\} = \{U, V\}^T$$

Considérons le vecteur suivant  $\{q_e\}$  des degrés de liberté nodale total pour un domaine élémentaire générique  $\Omega_e$ :

$$\{q_e\}^T = [U^{(1)}V^{(1)} \dots \dots U^{(5)}V^{(5)}]$$

Le vecteur  $\{q_e\}$  est exprimé en fonction des paramètres constants  $\{a\}$  :

$$\{q_e\} = [C]\{a\} \quad (2.18)$$

$$\text{Avec, } \{a\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}^T$$

Et la matrice de transformation [C] :

$$[C] = \begin{bmatrix} [p(x_1, y_1)] \\ [p(x_2, y_2)] \\ [p(x_3, y_3)] \\ [p(x_4, y_4)] \\ [p(x_5, y_5)] \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

La matrice de transformation [C] (10×10) relie les déplacements nodaux élémentaires {q<sub>e</sub>} aux dix constantes ({a}<sup>T</sup> = (a<sub>1</sub>, ..., a<sub>10</sub>)).

$$\{a\} = [C]^{-1} \{q_e\} \quad (2.20)$$

Les déformations {ε} données par (2.10) peuvent être exprimées sous forme matricielle comme suit :

$$\{\varepsilon\} = [Q] \{a\} \quad (2.21)$$

$$\text{Avec } \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

Les matrices [P] et [Q] sont données par :

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & (x^2 - (1+e)y^2)/2 & y/2 & 0 & (y^2 - gx^2)/2 \\ 0 & 1 & x & 0 & (y^2 - (1+e)x^2)/2 & y & xy & x/2 & (x^2 - gy^2)/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & x & 0 & 0 & -gx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & 1 & x & 0 & -gy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ex & 0 & -ey & 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

En substituant l'équation (2.20) dans (2.17) et (2.21) on obtient :

$$\{U_e\} = [P][C]^{-1} \{q_e\} = [N] \{q_e\} \quad (2.24)$$

$$\{\varepsilon\} = [Q(x, y)][C]^{-1} \{q_e\} = [B] \{q_e\} \quad (2.25)$$

$$\text{Avec } [N] = [P][C]^{-1} ; [B] = [Q(x, y)][C]^{-1} \quad (2.26)$$

Les relations contrainte-déformation sont données par :

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.27)$$

La matrice d'élasticité [D] pour les problèmes d'élasticités planes est donnée par les équations (1.23 et 1.24) présentées dans le chapitre 1.

La forme standard faible pour les cas statique et vibrations libres peut être exprimée respectivement :

$$\int_{V^e} \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \int_{V^e} \delta\{U_e\}^T \{f_v\} dV \quad (2.28)$$

$$\int_{V^e} \delta\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV + \int_{V^e} \delta\{U_e\}^T \{\ddot{U}\} dV = 0 \quad (2.29)$$

En substituant les équations (2.24), (2.25) et (2.27) aux équations (2.28) et (2.29), on obtient :

$$\delta\{q_e\}^T \left( \int_V [B]^T [D][B] dV \right) \{q_e\} = \delta\{q_e\}^T \left( \int_V [N]^T \{f_v\} dV \right) \quad (2.30)$$

$$\delta\{q_e\}^T \left( \int_V [B]^T [D][B] dV \right) \{q_e\} + \delta\{q_e\}^T \left( \int_V \rho [N]^T [N] dV \right) \{\ddot{q}_e\} = 0 \quad (2.31)$$

Où la rigidité  $\{K^e\}$  et de masse  $[M^e]$  sont exprimées respectivement comme suit :

$$[K^e] = \int_{S_e} [B]^T [D][B] dx dy$$

$$[K^e] = [C]^T \left( \int [Q]^T [D][Q] dx dy \right) [C]^{-1} = [C]^T [K_0][C]^{-1} \quad (2.32)$$

$$\text{Avec : } [k_0] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [Q]^T [D][Q] \det(J) d\xi d\eta \quad (2.33)$$

$$[M^e] = \int_{S_e} \rho h [N]^T [N] dx dy \quad (2.34)$$

$$[M^e] = [C]^T \left( \int \rho h [P]^T [P] dx dy \right) [C]^{-1} = [C]^T [M_0][C]^{-1} \quad (2.35)$$

$$\text{Avec : } [M_0] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho h [P]^T [P] \det(J) d\xi d\eta \quad (2.36)$$

Le vecteur des forces nodales dû à la force volumique  $\{f_v\}$  est :

$$\{F_b\} = \int_{V_e} [N]^T \{f_v\} dV = [C]^{-T} \left( \int_{V_e} [P]^T \{f_v\} dV \right) \quad (2.37)$$

L'équation d'équilibre global pour le cas statique et le cas des vibrations libres est réécrite comme suit :

$$[K] \{q\} = [F] \quad (2.38)$$

$$[K] - \omega_k^2 [M] \{q\} = 0 \quad (2.39)$$

### 2.3 Équation matricielle linéaire des éléments finis dans la dynamique

En dynamique des structures, l'équation du mouvement est formulée par le principe d'équilibre dynamique des forces élastiques, d'inertie et d'amortissement d'une part, et des forces dues aux sollicitations extérieures agissantes d'autre part. En effet, l'équation générale du mouvement d'un système à plusieurs degrés de liberté (n-ddl) s'écrit comme suit :

$$[M] \left\{ \ddot{q}(t) \right\} + [T] \left\{ \dot{q}(t) \right\} + [K] \{q(t)\} = \{F(t)\} \quad (2.40)$$

Dont :

$$[M] = \int_{\Omega} \rho [N]^T [N] d\Omega \quad (2.41a)$$

$$[T] = \int_{\Omega} \eta_1 [N]^T [N] d\Omega + \int_{\Omega} \eta_2 [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (2.41b)$$

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (2.41c)$$

Où  $\rho$  représente la masse volumique,  $\eta_1$  et  $\eta_2$  dans ce cas sont respectivement les coefficients d'amortissement externe et interne respectivement,  $[B]$  est la matrice de passage des déplacements aux déformations et  $[D]$  représente la matrice d'élasticité.

Les matrices symétriques  $[M]$ ,  $[T]$  et  $[K]$  sont respectivement les matrices de masse, amortissement et de rigidité élastique. Le vecteur  $[F]$  est le vecteur des excitations.

La matrice d'amortissement  $[T]$  est définie généralement comme une combinaison linéaire de deux matrices  $[K]$  et  $[M]$  afin de permettre un découplage complet de l'équation lors de la projection du système linéaire sur la base modèle du problème

D'un point de vue pratique, on distingue trois types de problèmes à résoudre :

- Détermination d'une réponse libre (amorties ou non) : dans ce cas, la sollicitation est nulle  $F=0$  ;
- Détermination d'une réponse périodique : dans ce cas, la sollicitation  $F$  est périodique;
- Détermination d'une réponse transitoire : dans ce cas, la sollicitation  $F$  est quelconque.

### **2.3.1 Analyse de la réponse libre**

#### **a) Vibrations libres non amorties**

Pour la plupart des cas des structures, le calcul des modes propres est effectué par cette approche, dont les structures sont faiblement dissipatives. Dans ce cas, les modes propres réels sont peu différents des modes propres physiques [Gira.97]. c'est pour cette raison que le calcul des modes propres par l'approche réelle en utilisant l'équation des vibrations libres pour les structures non amorties est utilisée en analyse modale. Donc la première étape de résolution de l'équation (2.40) par cette approche consiste à omettre le terme d'amortissement et le vecteur force, le système se réduit à :

$$M \ddot{q} + Kq = 0 \quad (2.42)$$

L'équation (2.42) accepte une solution harmonique sous la forme suivant :

$$q(\omega t) = \{x\} e^{-i\omega t} \quad (2.43)$$

À laquelle tous les degrés de liberté meuvent en même phase ( $\omega$ ). Cela signifie, en conséquence, que tous les points atteignent leur maximum en même temps. En portant la

solution (2.43) dans l'équation (2.42), la résolution va aboutir au problème aux valeurs propres linéaire suivant :

$$(K - \omega^2 M) \{x_i\} = 0 \quad (2.44)$$

Ce système admet N valeurs propres réelles  $\omega_i$  et N vecteurs propres  $\varphi_i$  où N est le nombre de degré de liberté dynamique. La pulsation  $\omega_i$  et le vecteur propre  $\{ \varphi_i \}$  définissent le mode propre (i). Les vecteurs propres sont linéairement indépendants et vérifient le principe d'orthogonalité qui découle de la symétrie des matrices K et M :

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [m_i] \\ [\Phi]^T [K] [\Phi] &= [m_i \omega_i^2] \end{aligned} \quad (2.45)$$

### **b) Vibrations libres amorties**

Après avoir déterminé les modes propres, la matrice d'amortissement sera réintroduite par un rapport linéaire avec la matrice de rigidité et la matrice de masse, soit :

$$T = \alpha_1 M + \alpha_2 K \quad (2.46)$$

$\alpha_1$  : Coefficient uniforme d'amortissement de masse

$\alpha_2$  : Coefficient uniforme d'amortissement de rigidité

Dans le cas général ( $[M] \neq [0]$ ), on doit donc résoudre l'équation de la dynamique sans sollicitation :

$$[M] \{\ddot{q}\} + [T] \{\dot{q}\} + [K] \{q\} = \{0\} \quad (2.47)$$

Dont on cherche une solution générale sous la forme :

$$\{q\} = \{\bar{q}\} e^{-\alpha t} \quad (2.48)$$

### **2.3.2 Analyse de la réponse fréquentielle**

Ce type d'analyse est intéressant, lorsque la réponse en état stable d'une structure à l'excitation d'une force harmonique pour une fréquence donnée est exigée. La réponse peut être nécessaire pour une série de fréquences.

Dans une analyse de la réponse fréquentielle, la fréquence de la réponse à une excitation harmonique est semblable et se produit à la même fréquence.

Dans l'analyse de la réponse fréquentielle, l'amortissement peut être ignoré puisque la plupart des structures sont légèrement amorties et cela simplifie la solution.

### **2.3.3 Analyse de la réponse transitoire**

Si la fonction d'excitation n'est pas harmonique, mais une fonction arbitrairement dépendante du temps, alors une « *Analyse de la réponse transitoire* » doit être utilisée.

Ce type d'analyse est employé pour déterminer les déplacements, déformations et contraintes qui varient avec le temps, dans une structure soumise à une charge transitoire.

Il y a deux approches de base pour l'analyse transitoire :

La première approche est connue sous le nom de la méthode «*Superposition modale*» qui admet que la réponse de la structure peut être représentée par des fréquences inférieures naturelles de la structure. Donc la réponse complète est obtenue par l'addition des fractions correctes des formes modales des fréquences inférieures. Mathématiquement, cela implique une transformation de l'équation à partir de coordonnées des déplacements nodaux en une série de coordonnées modales.

La deuxième approche implique la résolution des systèmes d'équations par intégration directe qui implique la totalité des systèmes d'équations et exige beaucoup de pas de temps avec une solution complète dans chaque pas de temps.

## **2.4 Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons formulé un nouvel élément fini à cinq nœuds avec deux degrés de liberté dans chaque nœud (U, V) (deux Translation) nommé SBQ5 qui est utilisé pour l'analyse des structures membranaires en statique et en dynamique. Sa formulation est relativement simple et basé sur des variations linéaires des trois composantes du champ de la déformation.

## **Chapitre 03:**

Validation numérique du nouvel  
élément SBQ5

## Chapitre 3

### Validation numérique du nouvel élément SBQ5

#### 3.1 Introduction

Un élément fini membranaire quadrilatère SBQ5 à cinq nœuds est développé pour analyser les problèmes statiques et dynamiques. Le champ de déplacement du nouvel élément est basé sur des fonctions supposées pour les différentes déformations satisfaisant les équations de compatibilité. Cet élément est basé sur des variations linéaires des trois composantes de la déformation. L'élément proposé possède les deux degrés de liberté externes essentiels (U et V) à chacun des cinq nœuds. Plusieurs tests numériques utilisés dans des publications précédentes sont présentés pour évaluer les performances du nouvel élément.

#### 3.2 Validation de l'élément SBQ5 en statique

##### 3.2.1 Poutre console élancée de Mac-Neal

Le problème d'une poutre console a été traité par Mac-Neal et Harder [MacN.85], il s'agit d'un problème standard pour tester la sensibilité à la distorsion du maillage des éléments de membrane quadrilatéraux. La poutre est soumise à une force concentrée de cisaillement ( $P=1$ ) à l'extrémité libre et à un moment de flexion pure ( $M=10$ ). Le maillage utilisé, la géométrie et le matériau de la poutre sont présentés dans la figure (3.1).

Les résultats du déplacement vertical normalisé sont listés dans le tableau (3.1). Pour le maillage régulier et distordu, tous les résultats de SBQ5 sont en bon accord avec la solution exacte en cisaillement et en flexion. D'après les résultats de la déflexion linéaire, nous pouvons voir que l'élément développé est insensible à la distorsion du maillage.

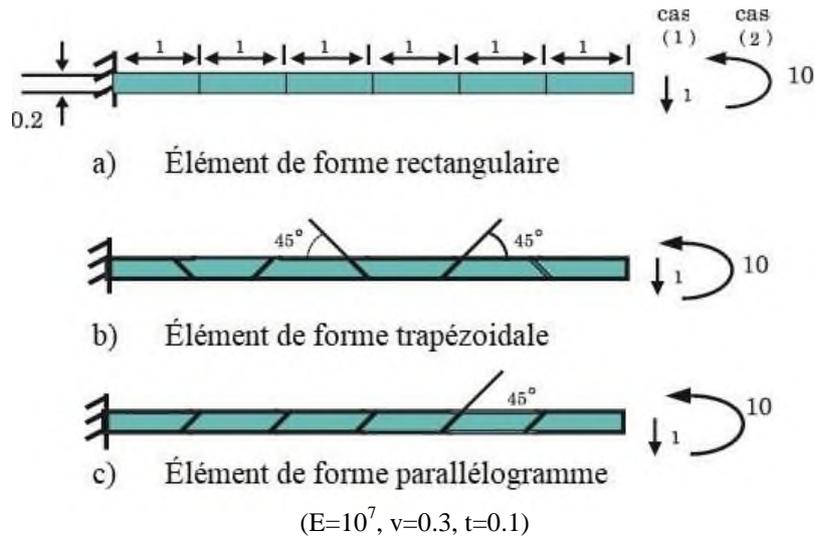


Figure 3.1 : Poutre élancée de Mac-Neal

Tableau 3.1 : Déplacement normalisé d'une poutre élancée de Mac-Neal.

Éléments	Moment flexion $M=10$			Force cisaillement $P=1$		
	Régulier	Trapézoïdal	Parallèle	Régulier	Trapézoïdal	Parallèle
Q4	0,093	0,022	0,03	0,093	0,027	0,034
PS5β[Pian.84]	1,000	0,046	0,726	0,993	0,052	0,632
AQ[Cook.86]	0,910	0,817	0,881	0,904	0,804	0,873
MAQ [Yunu.89]	0,910	0,886	0,890	0,904	0,872	0,884
Q4[MacN.88]	--	--	--	0,993	0,986	0,988
07β[Sze.92]	1,000	0,998	0,992	0,993	0,988	0,985
<b>SBQ5</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>1,000</b>	<b>0,993</b>	<b>0,994</b>	<b>0,993</b>
Solution de référence [Timo.70]	1,000 (0,270)			1,000 (0,1081)		

### 3.2.2 Poutre console (Allman)

Dans cet exemple, une poutre console soumise à une charge verticale est analysée afin d'évaluer la sensibilité de l'élément développé au maillage distordu. L'exemple a été traité par Allman's [Allm.88]. Il s'agit de déterminer le déplacement vertical à l'extrémité libre de la poutre au point A pour les deux cas de maillage (régulière et distordu). Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont illustrées dans la figure (3.2). La solution de référence donnée par la théorie des poutres de Timoshenko [Timo.70] est égale à :

$$V_c^{ref} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{4+5\nu}{2EH} PL = 0.3553$$

On peut constater que les résultats obtenus du présent élément SBQ5 pour les deux cas de maillage régulier et distordu (tableau (3.2)) montrent que cet élément fournit des résultats plus précis que ceux des éléments (Allman, PS5 $\beta$ , AQ, MAQ, QR4 $\beta$ , 07 $\beta$ , Q4) et similaire à ceux de l'élément robuste Q8.

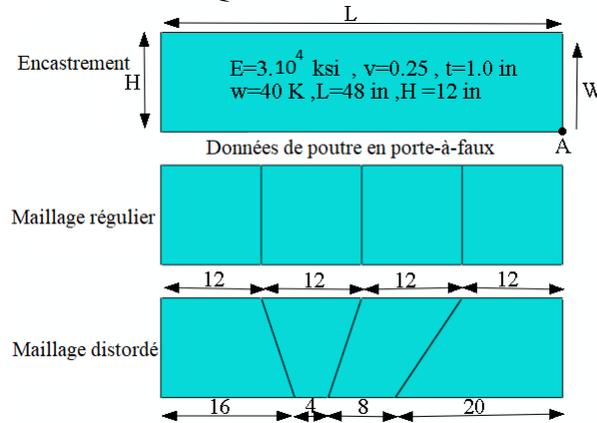


Figure 3.2 : Poutre en porte-à-faux d'Allman ; Données et maillages.

Tableau 3.2 : Déplacement vertical normalisée  $V_A$  d'une poutre en flexion plane.

Formulation / Élément	Maillage	Déplacement vertical dans le point A
Allman[Allm.88]	Reg.	0,852
Allman[Allm.88]	Dist.	--
PS5 $\beta$ [Pian.84]	Reg.	0,978
PS5 $\beta$ [Pian.84]	Dist.	0,925
AQ [Cook.86]	Reg.	0,918
AQ [Cook.86]	Dist.	0,947
MAQ [Yunu.89]	Reg.	0,918
MAQ ([Yunu.89]	Dist.	0,958
QR4 $\beta$ [Lin.90]	Reg.	0,978
QR4 $\beta$ [Lin.90]	Dist.	0,977
07 $\beta$ [Sze.92]	Reg.	0,978
07 $\beta$ [Sze.92]	Dist.	0,978
Q4	Reg.	0,679
Q4	Dist.	0,596
Q8 [MacN.88]	Reg.	0,985
Q8 [MacN.88]	Dist.	0,994
<b>SBQ5</b>	<b>Reg.</b>	<b>0,983</b>
<b>SBQ5</b>	<b>Dist.</b>	<b>0,994</b>
Solution de référence [Timo.70]		1,000 (0,3553)

### 3.2.3 Test de sensibilité à l'élanement (a/b) :

Dans ce test, on va étudier deux cas : le premier cas on fixe les dimensions de la poutre et on fait varier les rapports de forme de l'élément, dans le deuxième cas on fait varier le rapport de forme de la poutre, en gardant le même maillage.

1. cas

Ce problème a été étudié par Allman [Allm.88] pour évaluer le comportement de l'élément proposé par rapport à la variation de la forme de l'élément. On considère une poutre console soumise à une force de cisaillement répartie de façon parabolique. Les caractéristiques mécaniques, géométriques et le maillage sont présentés dans la figure. (3.3).

D'après les résultats indiqués dans le tableau (3.3), on constate que l'élément (Q4) basé sur le modèle en déplacement donne de mauvais résultats. L'élément développé SBQ5 donne une meilleure convergence vers la solution de référence.

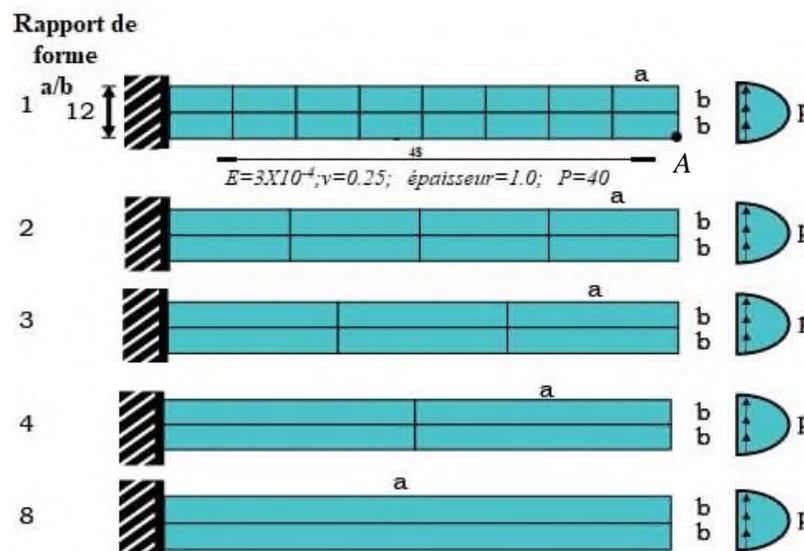


Figure 3.3 : Test du rapport de forme d'une poutre console soumise à un effort tranchant distribué paraboliquement.

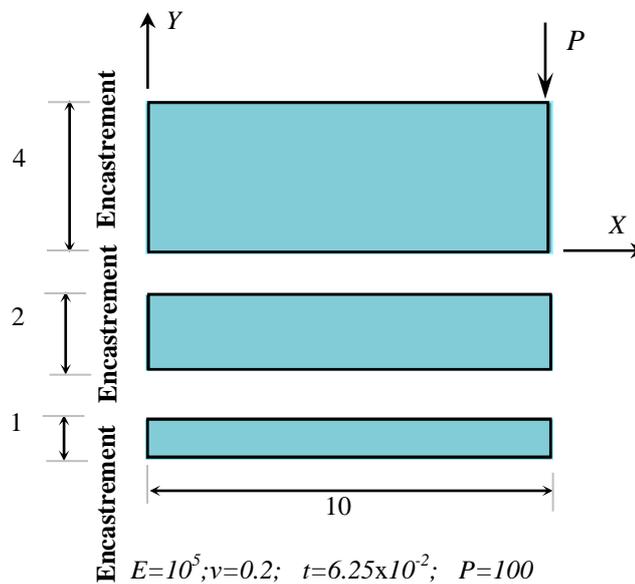
Tableau 3.3 : Flèche normalisée au point A, pour une poutre console soumise à une force de cisaillement à l'extrémité, distribuée paraboliquement.

Rapport de forme de l'élément a/b	Flèche normalisée à l'extrémité				
	1.0	2.0	3.0	4.0	8.0
Maillage	2 × 8	2 × 4	2 × 3	2 × 2	2 × 1
SBRIE [Sabi.95a]	0,972	0,957	0,943	0,905	0,738
Q4	0,888	0,699	0,573	0,378	0,134
SBRIE2 [Sabi.95a]	0,970	0,922	-	0,836	0,666
<b>SBQ5</b>	<b>0,988</b>	<b>0,973</b>	<b>0,959</b>	<b>0,920</b>	<b>0,751</b>
Solution de référence [Timo.70]	1,000		(0,3558)		

**2.cas**

Le deuxième problème (figure (3.4)) proposé par Sabir [Sabi.95a] montre trois poutres consoles : large, moyennement large et mince qui sont étudiées pour déterminer la flèche à l'extrémité libre. Les dimensions des poutres sont identiques dont l'épaisseur  $t=0.0625m$  et la longueur  $L=10m$ , les propriétés mécaniques du matériau utilisé sont : le module de Young  $E = 10^5 N / mm^2$  et le coefficient de poisson  $\nu = 0.2$ .

Les résultats (tableaux (3.4), (3.5) et (3.6)) montrent que l'élément développé SBQ5 présente une excellente convergence vers la solution analytique par rapport aux autres éléments de la littérature.



**Figure 3.4 :** Poutres consoles, large, moyennement large et mince.

**Tableau 3.4 :** Flèche normalisée pour une poutre console large.

Maillage	SBRIE [Sabi.95a]	SBRIE1 [Sabi.95a]	Q4	SBQ5
2x2	0.913	0.913	0.591	<b>0.925</b>
2x4	0.929	0.929	0.597	<b>0.935</b>
6x6	0.988	0.988	0.926	<b>0.996</b>
8x8	0.992	0.992	0.956	<b>1.000</b>
12x12	0.995	0.995	0.979	<b>0.996</b>
10x16	0.995	0.995	0.971	<b>1.004</b>
Solution analytique	1.000 (1.105)			

**Tableau 3.5** : Flèche normalisée pour une poutre console moyennement large.

Maillage	SBRIE [Sabi.95a]	SBRIE1 [Sabi.95a]	Q4	SBQ5
2x2	0.916	0.916	0.275	<b>0.926</b>
2x4	0.923	0.923	0.275	<b>0.926</b>
6x6	0.988	0.988	0.771	<b>0.990</b>
8x8	0.992	0.992	0.856	<b>0.994</b>
12x12	0.996	0.996	0.930	<b>0.986</b>
10x16	0.995	0.995	0.903	<b>0.996</b>
Solution analytique		1.000 (8.21)		

**Tableau 3.6** : Flèche normalisée pour une poutre console mince.

Maillage	SBRIE [Sabi.95a]	SBRIE1 [Sabi.95a]	Q4	SBQ5
2x2	0.915	0.915	0.087	<b>0.925</b>
2x4	0.920	0.920	0.087	<b>0.923</b>
6x6	0.985	0.985	0.461	<b>0.987</b>
8x8	0.990	0.990	0.602	<b>0.991</b>
12x12	0.994	0.994	0.772	<b>0.984</b>
10x16	0.992	0.992	0.703	<b>0.993</b>
Solution analytique		1.000(64.52)		

### 3.2.4 Poutre circulaire épaisse sous cisaillement dans le plan

Dans ce test, une poutre circulaire épaisse soumise à une force de cisaillement  $F=600$  à son extrémité libre est considérée. La poutre est modélisée avec 4 maillages  $2 \times 1$ ,  $4 \times 1$ ,  $6 \times 1$  et  $8 \times 1$  [Zoua.16]. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont illustrées dans la figure (3.5).

Les résultats obtenus du déplacement vertical normalisé au point A du présent élément SBQ5 sont listés dans le tableau (3.7). On voit clairement que l'élément développé SBQ5 donne une précision supérieure à celle de l'élément CPS4 et il est en bon accord avec les autres éléments (CPS8, HS-A7 et QACM4).

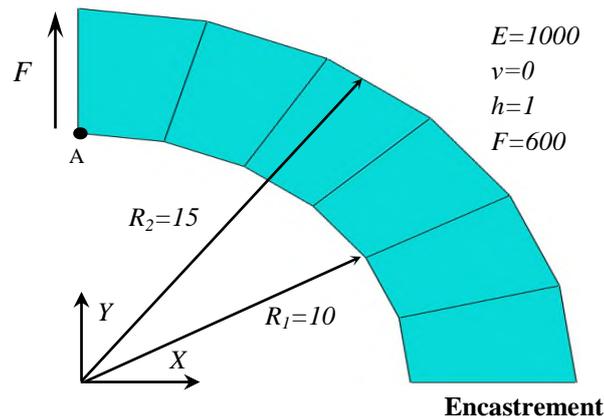


Figure 3.5 : Poutre circulaire épaisse modélisée avec 6x1 éléments quadrilatéraux.

Tableau 3.7 : Déplacement vertical normalisé au point A pour poutre épaisse.

Maillage	CPS4 [Zoua.16]	CPS8 [Zoua.16]	HS-A7 [Rezai.13]	QACM4 [Cen.07]	<b>SBQ5</b>
2x1	0.251	0.857	0.987	-	<b>1.003</b>
4x1	0.643	0.982	0.994	0.938	<b>0.964</b>
6x1	0.811	0.991	-	0.979	<b>0.956</b>
8x1	0.887	0.992	-	0.991	<b>0.954</b>

### 3.2.5 Mur de cisaillement avec des ouvertures

Dans ce test, un mur à huit étages avec des ouvertures a été analysé pour déterminer l'efficacité et la précision du présent élément SBQ5. Les propriétés géométriques et mécaniques sont illustrées dans la figure (3.6). Les déplacements latéraux du modèle aux niveaux 2, 4, 6 et 8 ont été calculés et présentés dans le tableau (3.8). Ces résultats avec le présent élément SBQ5 sont en bon accord avec ceux obtenus en utilisant l'élément OPT et les logiciels commerciaux SAP-2000 et STAADPRO.

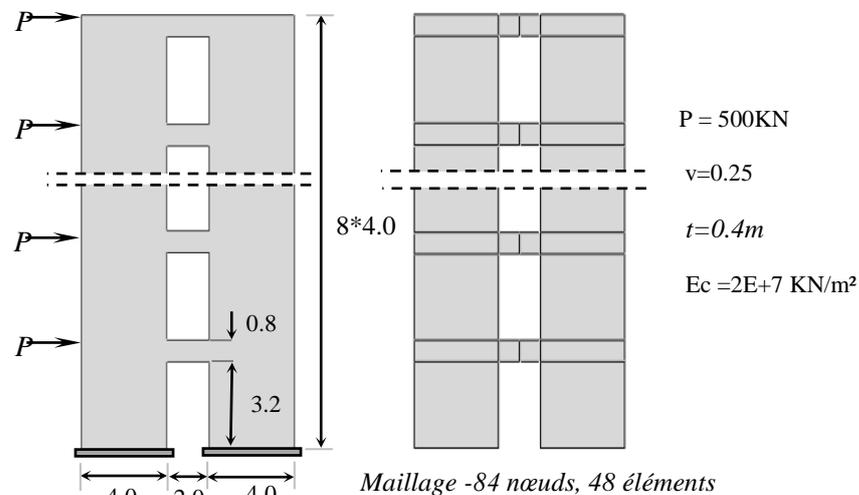


Figure 3.6 : Murs en cisaillement avec ouvertures.

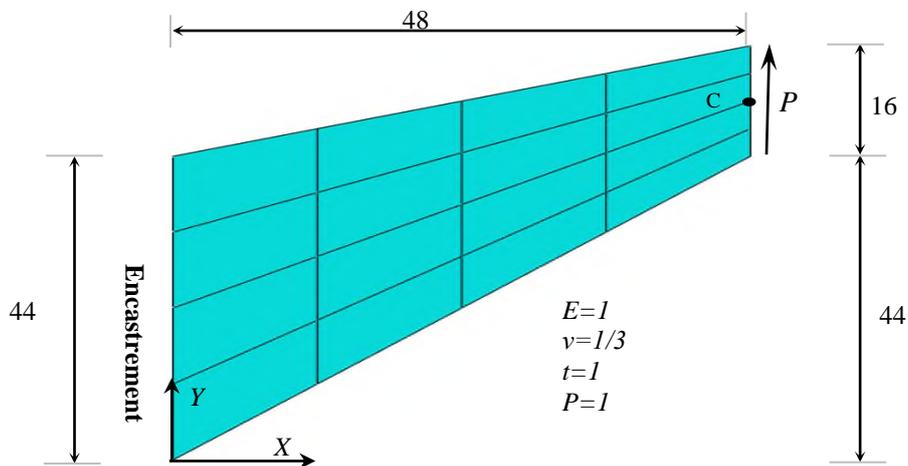
**Tableau 3.8** : Comparaison du déplacement latéral à différents niveau d'étage.

Etage	2	4	6	8
SAP 2000[Pakn.07]	0.55	1.48	2.54	3.62
STAAD-PRO[Pakn.07]	0.68	1.68	2.78	3.86
OPT element[Pakn.07]	0.71	1.91	3.19	4.43
<b>SBQ5</b>	<b>0.77</b>	<b>2.06</b>	<b>3.40</b>	<b>4.70</b>

### 3.2.6 Analyse d'un anneau fuselée de Cook

Un panneau encastré sur le bord gauche et soumis à une charge de cisaillement uniformément répartie ( $P=1$ ) à l'extrémité libre a été traité par Long et Xu [Long.94]. Les propriétés géométriques et mécaniques sont données dans la figure (3.7). Le panneau est modélisé par un maillage de  $4 \times 4$ . Il s'agit de calculer le déplacement vertical normalisé au point C à l'extrémité libre.

Les résultats obtenus de l'élément SBQ5 sont illustrés dans le tableau (3.9). On peut voir que cet élément donne une meilleure précision et une bonne convergence vers la solution de référence par rapport aux autres éléments (QM6, HQ4-9 $\beta$ , Q6, HS-A7, QE-2, HL, P-S et HSF-Q40-7b).



**Figure 3.7** : plaque trapézoïdale avec un maillage 4x4

**Tableau 3.9 :** Déplacement vertical normalisé pour plaque trapézoïdale sous cisaillement.

Model éléments	Maillage				Erreur (%) (maillage 16×16)
	2x2	4×4	8×8	16×16	
	$V_C$	$V_C$	$V_C$	$V_C$	
QM6 [Tayl.76]	0.878	0.961	-	-	-
HQ4-9β[Made.12]	0.924	0.975	0.991	0.997	0.3
Q6	0.957	0.980	0.993	0.998	0.2
HS-A7[Rezaï.13]	0.941	0.978	0.993	0.997	0.3
QE-2 [Pilt.95]	0.891	0.962	-	0.997	0.3
HL	0.758	0.919	0.976	-	-
HSF-Q40-7b[Cen.11]	0.941	0.978	0.993	0.997	0.3
P-S[Pian.84]	0.882	0.961	-	0.997	0.3
<b>SBQ5</b>	<b>1.070</b>	<b>1.013</b>	<b>1.001</b>	<b>1.000</b>	<b>0.0</b>
Solution de référence [Long.94]			1.000(23.96)		

### 3.2.7 Cylindre épais sous pression interne

Un cylindre épais en déformation plane soumis à une pression interne unitaire  $P$  uniformément répartie [Sze.92]. Ce test permet d'étudier l'effet du verrouillage coefficient de Poisson sur l'élément développé. À cause de la symétrie, on va analyser uniquement le quart du cylindre qui a été modélisé en 45 éléments. La géométrie et les propriétés mécaniques sont présentées dans la figure (3.8). Le coefficient de Poisson varie entre 0.3 à 0.9. Les déplacements radiaux internes sont présentés dans le tableau (3.10).

Les résultats montrent que l'élément proposé SBQ5 est libre de tous blocage de Poisson, tout comme les autres éléments (QM6, P-S, RQ6 et HS-A7), contrairement à l'élément Q4 qui souffre d'un blocage de Poisson.

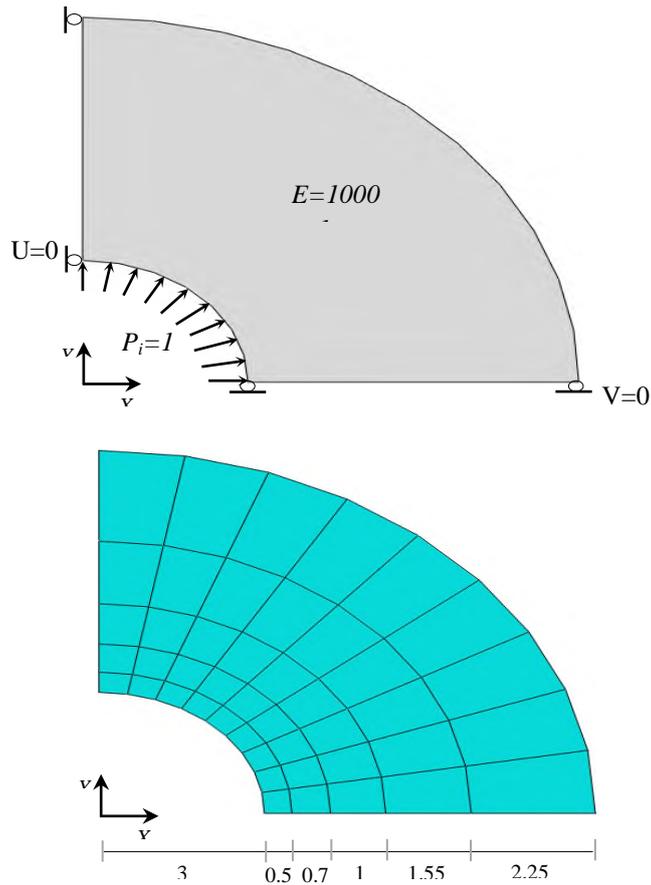


Figure 3.8 : Un cylindre à paroi épais sous pression interne

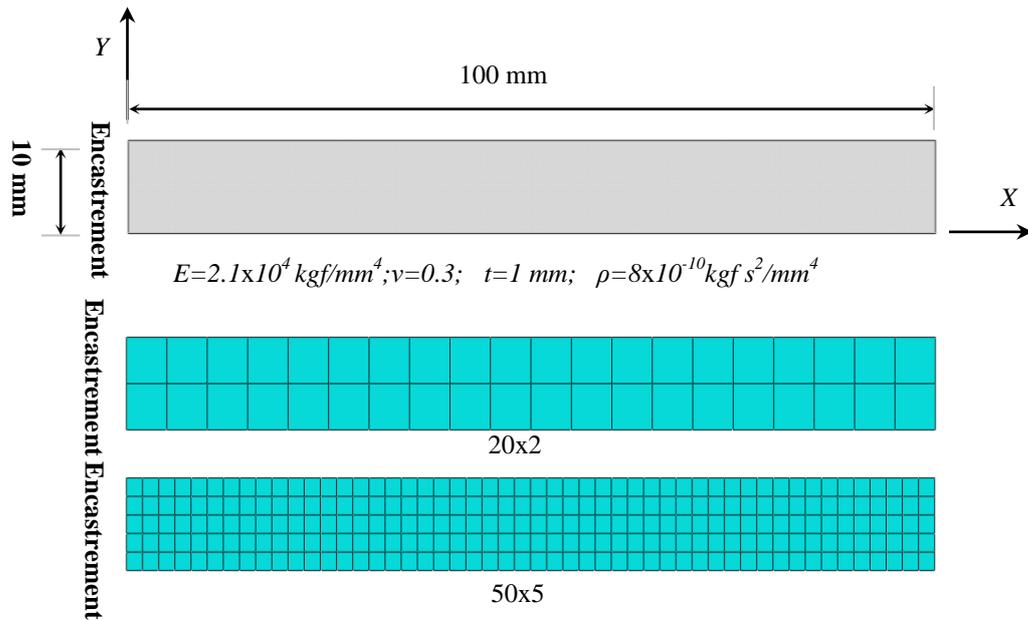
Tableau 3.10 : Déplacement normalisé du cylindre à paroi épais pour des rapports du coefficient de Poisson variable.

Coefficient de Poisson	0.3	0.49	0.499	0.4999
Q4[Cheu.00]	0.986	0.845	0.398	0.053
QM6[Tayl.76],P-S[Pian.84]	0.990	0.986	0.991	0.990
RQ6[Cheu.00]	0.993	0.990	0.991	0.992
HS-A7[Rezai.13]	1.013	1.034	1.035	1.035
SBQ5	<b>0.990</b>	<b>1.009</b>	<b>1.011</b>	<b>1.011</b>
Solution exact( $\times 10^{-3}$ )	4.5825	5.0399	5.0602	5.0623

### 3.3 Validation de l'élément SBQ5 en dynamique

#### 3.3.1 Vibration libre d'une poutre console

Cet exemple étudie les vibrations libre d'une poutre console [Dai.07] dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont illustrées dans la figure (3.9). Les analyses effectuées dans le cas de contrainte plane incluent deux tests :



**Figure 3.9 :** poutre console avec les deux maillages (20x2 et 50x5)

**Test 1 :**

L'influence de la matrice de masse concentrée et de la matrice de masse répartie sur les six premières fréquences naturelles est étudiée pour l'élément SBQ5, la poutre étant modélisée en deux maillages (20x2) et (50x5). Nous présentons dans le tableau (3.11) les résultats numériques du présent élément qui sont en bon accord avec ceux trouvés par les autres éléments SFEM et Q4 [Dai.07].

**Test 2 :**

Dans ce deuxième test, on va étudier l'influence de la matrice de masse concentrée sur les quatre premières fréquences naturelles. La même poutre est modélisée en quatre formes de maillages (10x1), (20x2), (50x2) et (100x10). La solution de référence [Dai.07] est basée sur la fréquence fondamentale donnée par la théorie des poutres (Euler-Bernoulli). Les résultats de présent élément SBQ5 sont comparés à ceux trouvés avec les autres éléments (tableau (3.12)), donc nous voyons que cet élément et l'élément SFEM donnent une convergence satisfaisante vers la solution de référence.

**Tableau 3.11 :** Les six premières fréquences naturelles ( $\times 10^4$  Hz) pour une poutre console (En utilisant la matrice de masse concentré/ répartie).

Maillage	Mode	Q4 [Dai.07]		SFEM (4 SC) [Dai.07]		SBQ5		Solution de référence [Naga.99]
		concentré	Répartie	concentré	Répartie	concentré	Répartie	
20×2	1	0.0870	0.0872	0.0834	0.0824	<b>0.0823</b>	<b>0.0824</b>	0.0926
	2	0.5199	0.5264	0.4993	0.4990	<b>0.4942</b>	<b>0.4973</b>	0.5484
	3	1.2830	1.2837	1.2828	1.2834	<b>1.2828</b>	<b>1.2829</b>	1.2832
	4	1.3640	1.4011	1.3141	1.3395	<b>1.3046</b>	<b>1.3200</b>	1.4201
	5	2.4685	2.5816	2.3859	2.4697	<b>2.3772</b>	<b>2.4200</b>	2.5290
	6	3.7477	3.8574	3.6333	3.8444	<b>3.6335</b>	<b>3.7245</b>	3.7350
50×5	1	0.0830	0.0831	0.0824	0.0823	<b>0.0822</b>	<b>0.0823</b>	0.0844
	2	0.4979	0.4989	0.4944	0.4943	<b>0.4935</b>	<b>0.4941</b>	0.5051
	3	1.2826	1.2827	1.2825	1.2826	<b>1.2825</b>	<b>1.2825</b>	1.2828
	4	1.3111	1.3168	1.3024	1.3054	<b>1.3008</b>	<b>1.3032</b>	1.3258
	5	2.3816	2.3993	2.3670	2.3799	<b>2.3654</b>	<b>2.3720</b>	2.3993
	6	3.6308	3.6701	3.6095	6.6421	<b>3.6092</b>	<b>3.6232</b>	3.6432

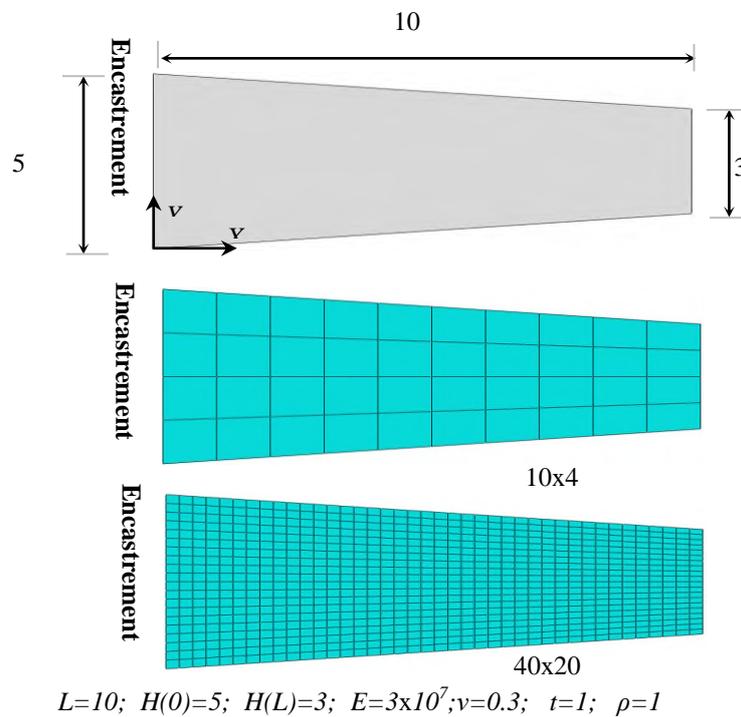
**Tableau 3.12 :** Les quatre premiers fréquences naturelles ( $\times 10^4$  Hz) d'une poutre en porte à-faux (masse concentré)

Maillage	SFEM(4SC) [Dai.07]	FEM(4nodeQ4) [Dai.07]	FEM(8nodeQ9) [Dai.07]	FEM(4nodeQBI) [Dai.07]	SBQ5
10×1	0.0861	0.1000	0.0827	0.0817	<b>0.0819</b>
	0.5071	0.6077	0.4982	0.4824	<b>0.4875</b>
	1.2828	1.2863	1.2832	1.2526	<b>1.2757</b>
	1.3124	1.6423	1.3205	1.2826	<b>1.2831</b>
20×2	0.0834	0.0872	0.0823	0.0822	<b>0.0823</b>
	0.4993	0.5264	0.4940	0.4928	<b>0.4942</b>
	1.2828	1.2837	1.2827	1.2827	<b>1.2828</b>
	1.3141	1.4011	1.3020	1.2982	<b>1.3046</b>
50×5	0.0824	0.0831	0.0822	0.0822	<b>0.0822</b>
	0.4944	0.4989	0.4934	0.4934	<b>0.4935</b>
	1.2825	1.2827	1.2825	1.2825	<b>1.2825</b>
	1.3024	1.3168	1.2997	1.2998	<b>1.3008</b>
100×10	0.0823	0.0824	-	0.8222	<b>0.0822</b>
	0.4935	0.4947	-	0.4933	<b>0.4933</b>
	1.2824	1.2825	-	1.2824	<b>1.2824</b>
	1.3000	1.3037	-	1.2993	<b>1.2996</b>

Solution de référence (théorie Euler-Bernoulli :  $f_1 = 0.08276 \times 10^4$  Hz)

### 3.3.2 Analyse vibratoire d'une poutre console à section variable

On considère une poutre console trapézoïdale dont les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées dans la figure (3.10). La poutre console est modélisée par quatre formes de maillages  $10 \times 4$ ,  $20 \times 10$  et  $40 \times 20$ . Les résultats de calcul pour les quatre premières fréquences naturelles sont illustrés dans le tableau (3.13) et ils montrent que le présent élément SBQ5 à le même comportement que les autres éléments Q9 (8 nœuds), SFEM (4SC), FEM (4-noeudsQ4) et QBI (4 nœuds) [Dai.07].



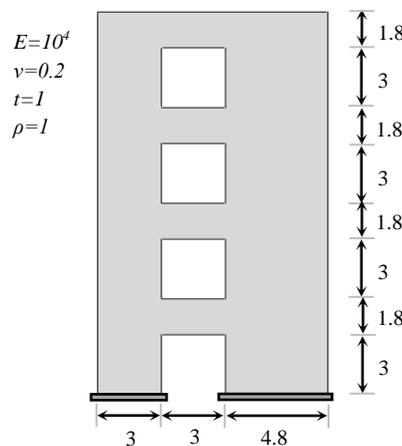
**Figure 3.10 :** Poutre cantilever à section variable avec maillage.

**Tableau 3.13** : Les quatre premières fréquences ( $\times 10^3$  rad/s) d'une poutre en porte-à-faux de section variable

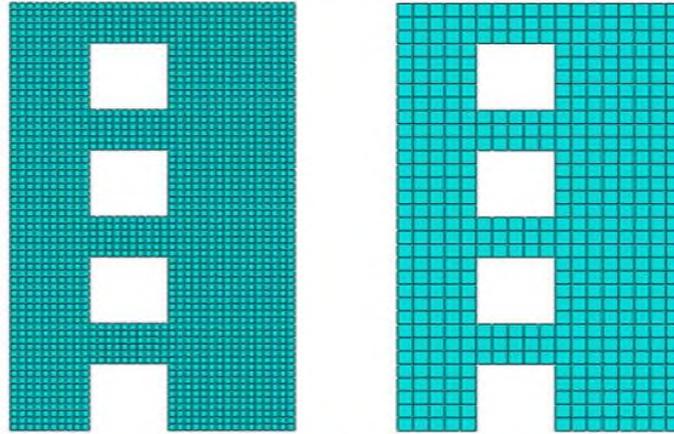
Maillage	Mode	SFEM (4SC) [Dai.07]	FEM (4-nodeQ4) [Dai.07]	FEM (8-nodeQ9) [Dai.07]	FEM (4-nodeQBI) [Dai.07]	<b>SBQ5</b>
10×1	1	0.0861	0.1000	0.0827	0.0817	<b>0.0819</b>
	2	0.5071	0.6077	0.4982	0.4824	<b>0.4875</b>
	3	1.2828	1.2863	1.2832	1.2526	<b>1.2757</b>
	4	1.3124	1.6423	1.3205	1.2826	<b>1.2831</b>
20×2	1	0.0834	0.0872	0.0823	0.0822	<b>0.0823</b>
	2	0.4993	0.5264	0.4940	0.4928	<b>0.4942</b>
	3	1.2828	1.2837	1.2827	1.2827	<b>1.2828</b>
	4	1.3141	1.4011	1.3020	1.2982	<b>1.3046</b>
50×5	1	0.0824	0.0831	0.0822	0.0822	<b>0.0822</b>
	2	0.4944	0.4989	0.4934	0.4934	<b>0.4935</b>
	3	1.2825	1.2827	1.2825	1.2825	<b>1.2825</b>
	4	1.3024	1.3168	1.2997	1.2998	<b>1.3008</b>
100×10	1	0.0823	0.0824	–	0.8222	<b>0.0822</b>
	2	0.4935	0.4947	–	0.4933	<b>0.4933</b>
	3	1.2824	1.2825	–	1.2824	<b>1.2824</b>
	4	1.3000	1.3037	–	1.2993	<b>1.2996</b>

### 3.3.3 Vibration libre d'un mur avec des ouvertures

Dans cette partie, on considère un mur avec ouvertures en cisaillement traité par Berbbia et al [Berb.84] dont l'analyse est effectuée dans le cas de contrainte plane et le bord inférieur du mur est parfaitement encasté. Les caractéristiques géométriques et mécaniques sont présentées dans la figure (3.11). Les nombres des éléments utilisés dans les deux cas (a) et (b) sont indiqués dans la figure (3.12). Les huit premières fréquences naturelles calculées pour le présent élément sont illustrées dans le tableau (3.14) et comparées à ceux d'autres éléments (ES-FEM, NS-FEM, FEM-T3, FEM-Q4 et FEM-Q8). Nous constatons que les éléments SBQ5 et ES-FEM se comportent de la même manière et convergent vers la solution de référence [Berb.84].



**Figure 3.11** : Mur en cisaillement avec quatre ouvertures.



Maillage quadrilatérale  
(1904 éléments)

a) (1904 éléments)

Maillage quadrilatérale (476 éléments)

b) (476 éléments)

**Figure 3.12 :** Maillage quadrilatérale pour un mur avec ouvertures.

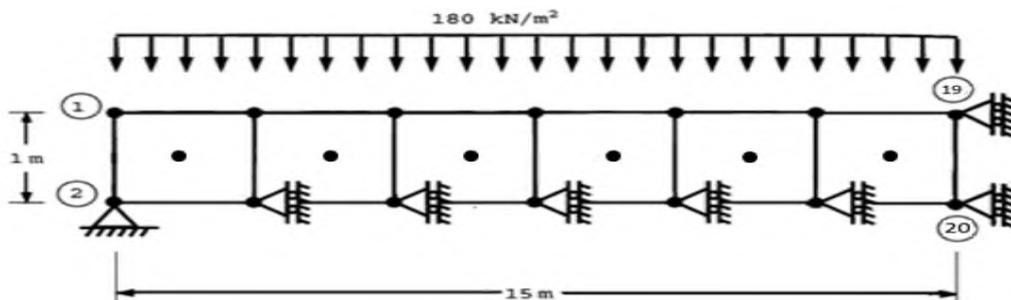
**Tableau 3.14 :** Huit premières fréquences naturelles ( $\times 10^4$  Hz) d'un mur en cisaillement.

Elément	Modes	NS-FEM [Dai.07]	FEM-T3 [Dai.07]	FEM-Q4 [Dai.07]	ES-FEM [Dai.07]	FEMQ8 [Dai.07]	<b>SBQ5</b>	Solution de référence [Berb.84]
476	1	1.8271	2.1444	2.0731	2.0499	2.0106	<b>2.0565</b>	2.0791
	2	6.5113	7.3183	7.0956	7.0378	6.9517	<b>7.0617</b>	7.1810
	3	7.5147	7.6507	7.6252	7.6202	7.600	<b>7.6190</b>	7.6441
	4	10.1828	12.5535	11.9377	11.7433	11.470	<b>11.8237</b>	11.8331
	5	13.7335	15.9433	15.3407	15.1434	14.971	<b>15.2744</b>	15.9470
	6	14.7086	18.7625	18.3447	18.2137	18.066	<b>18.2847</b>	18.6441
	7	17.0318	20.3820	19.8759	19.7138	19.580	<b>19.8128</b>	20.2680
	8	17.1034	22.6763	22.2098	21.9939	21.871	<b>22.1576</b>	22.7649
1904	1	1.9352	2.0631	2.0317	2.0219	2.0106	<b>2.0249</b>	2.0791
	2	6.7761	7.0865	0.9988	6.9762	6.9517	<b>6.9850</b>	7.1810
	3	7.5659	7.6199	7.6089	7.6061	7.6001	<b>7.6064</b>	7.6441
	4	10.8947	11.8796	11.6248	11.5507	11.470	<b>11.5774</b>	11.8331
	5	14.4677	15.3218	15.0922	15.0190	14.971	<b>15.0608</b>	15.9470
	6	15.3241	18.3170	18.1578	18.1081	18.066	<b>18.1326</b>	18.6441
	7	17.5527	19.8617	19.6770	19.6186	19.580	<b>19.6513</b>	20.2680
	8	17.8335	22.1973	21.9867	21.9076	21.871	<b>21.9597</b>	22.7649

### 3.3.4 Vibration forcée d'un solide rectangulaire en élasto-plastique

Dans cet exemple, une poutre simplement appuyée sous l'effet d'une charge uniformément répartie égale à  $180 \text{ kN/m}^2$  a été traitée par Smith et Griffith [Smit.04]. Ce test est effectué pour valider le présent élément en vibration forcée en utilisant la méthode d'intégration explicite et en considérant que la masse est localisée. La poutre est modélisée en six éléments comme indiqué sur la figure (3.13). La symétrie a été supposée au centre de la poutre et le long de l'axe neutre, ou seul le mouvement vertical est autorisé. L'analyse est réalisée dans le cas d'un problème en déformation plane. La contrainte maximale de Von Mises  $\sigma_{\max} = 50.000$ , le module de Young  $E=3 \times 10^7$ , le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ , la masse par unité de surface  $\rho = 0.7333 \cdot 10^{-3}$  et le nombre de pas de temps  $I_{\text{step}} = 700$ .

Les résultats du déplacement au nœud 19 du présent élément illustrés dans le tableau (3.15) montrent que l'élément SBQ5 et les deux éléments Q8 et SBRIE se comportent de la même manière.



Von Mises  $\sigma_{\max} = 50.000$ ;  $E=3 \times 10^7$ ;  $\nu = 0.3$ ;  $\rho = 0.7333 \cdot 10^{-3}$ ;  $I_{\text{step}} = 700$

Figure 3.13 : Géométrie et maillage de la poutre cantilever

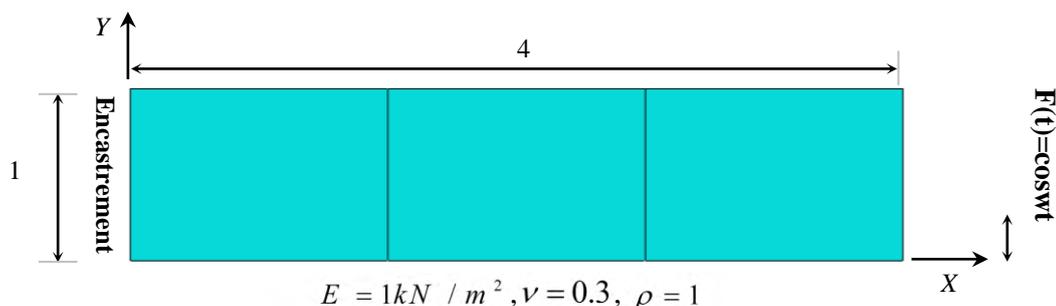
**Tableau 3.15** : Déplacement au nœud 19 de la poutre cantilever élasto-plastique.

Temps	Déplacement au nœud 19		
	Q8	SBRIE	SBQ5
0	0	0	0
$0.5000 \cdot 10^{-4}$	$-0.2995 \cdot 10^{-3}$	$-0.3087 \cdot 10^{-3}$	<b><math>-0.3035 \cdot 10^{-3}</math></b>
$0.1000 \cdot 10^{-3}$	$-0.1214 \cdot 10^{-2}$	$-0.1222 \cdot 10^{-2}$	<b><math>-0.1216 \cdot 10^{-2}</math></b>
$0.1500 \cdot 10^{-3}$	$-0.2684 \cdot 10^{-2}$	$-0.2697 \cdot 10^{-2}$	<b><math>-0.2684 \cdot 10^{-2}</math></b>
$0.2000 \cdot 10^{-3}$	$-0.4867 \cdot 10^{-2}$	$-0.4977 \cdot 10^{-2}$	<b><math>-0.4946 \cdot 10^{-2}</math></b>
$0.2500 \cdot 10^{-3}$	$-0.8084 \cdot 10^{-2}$	$-0.8259 \cdot 10^{-2}$	<b><math>-0.8202 \cdot 10^{-2}</math></b>
$0.3000 \cdot 10^{-3}$	$-0.1231 \cdot 10^{-1}$	$-0.1251 \cdot 10^{-1}$	<b><math>-0.1241 \cdot 10^{-1}</math></b>
$0.3500 \cdot 10^{-3}$	$-0.1742 \cdot 10^{-1}$	$-0.1759 \cdot 10^{-1}$	<b><math>-0.1748 \cdot 10^{-1}</math></b>
$0.4000 \cdot 10^{-3}$	$-0.2231 \cdot 10^{-1}$	$-0.2342 \cdot 10^{-1}$	<b><math>-0.2332 \cdot 10^{-1}</math></b>
$0.4500 \cdot 10^{-3}$	$-0.2991 \cdot 10^{-1}$	$-0.3004 \cdot 10^{-1}$	<b><math>-0.2993 \cdot 10^{-1}</math></b>
$0.5000 \cdot 10^{-3}$	$-0.3724 \cdot 10^{-1}$	$-0.3715 \cdot 10^{-1}$	<b><math>-0.3710 \cdot 10^{-1}</math></b>
$0.5500 \cdot 10^{-3}$	$-0.4494 \cdot 10^{-1}$	$-0.4457 \cdot 10^{-1}$	<b><math>-0.4459 \cdot 10^{-1}</math></b>
$0.6000 \cdot 10^{-3}$	$-0.5287 \cdot 10^{-1}$	$-0.5229 \cdot 10^{-1}$	<b><math>-0.5238 \cdot 10^{-1}</math></b>
$0.6500 \cdot 10^{-3}$	$-0.6113 \cdot 10^{-1}$	$-0.6047 \cdot 10^{-1}$	<b><math>-0.6061 \cdot 10^{-1}</math></b>
$0.7000 \cdot 10^{-3}$	$-0.6982 \cdot 10^{-1}$	$-0.6917 \cdot 10^{-1}$	<b><math>-0.6934 \cdot 10^{-1}</math></b>

### 3.3.5 Vibration forcée d'un solide rectangulaire en déformation plane

Une poutre console rectangulaire en contrainte plane étudiée par Smith et Griffith [Smit.88] a été traitée à l'aide de l'élément proposé SBQ5 pour l'analyse des vibrations forcées. Cette poutre est divisée en trois éléments, la géométrie est indiquée sur la figure (3.14). Le module de Young est  $E = 1 \text{ kN} / \text{m}^2$ , le coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$  et la densité de la masse par unité de volume  $\rho = 1$ . Une force verticale harmonique ( $\cos \omega t$ ) est appliquée à l'extrémité libre de la poutre ou la fréquence forcée  $\omega = 0.3$ , le pas de temps est égal à  $1 / 20$  de la période ( $2\pi / \omega$ ) et le rapport d'amortissement est 5 %.

Les résultats obtenus du déplacement au bout de la poutre en fonction du pas de temps présenté dans la figure (3.15) démontrent que l'élément développé SBQ5 est en bon accord avec les deux éléments Q8 et SBRIE.



**Figure 3.14** : Géométrie et maillage de la poutre console soumise à une vibration forcée.

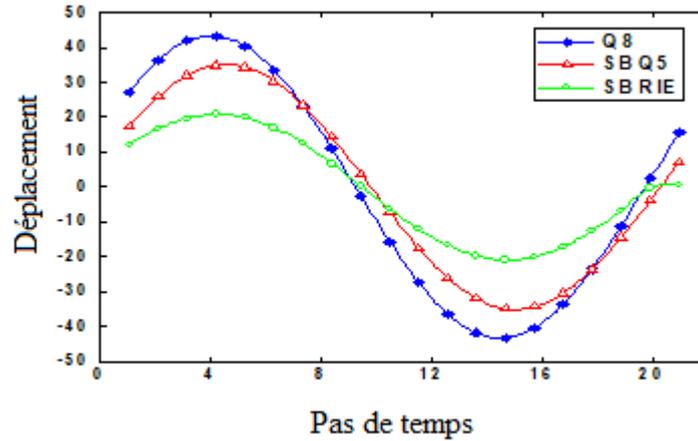


Figure 3.15 : Le déplacement en fonction du temps pour une poutre console.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, l'approche en déformations est utilisée pour analyser le comportement linéaire et dynamique des structures membranaires à l'aide d'un nouvel élément (SBQ5) avec cinq nœuds. Ce nouvel élément possède quatre nœuds de coin ainsi que le nœud central avec les deux degrés de liberté externes essentiels (U, V) à chaque nœud. Plusieurs tests de référence ont démontré la performance de l'élément proposé. Les résultats obtenus par l'élément (SBQ5) sont très supérieurs à ceux obtenus par l'élément standard Q4, et sont comparables à ceux donnés par l'élément robuste Q8. L'élément (SBQ5) s'est avéré donner une précision bien supérieure avec un petit nombre de degré de liberté. Les valeurs de fréquence ont également été calculées pour différents tests. Ces valeurs sont comparables et parfois sont très précises par rapport à ceux obtenus par d'autres éléments.

## **Chapitre 04:**

Développement d'un élément fini  
secteur SBS5 basé sur l'approche  
en déformation en 2D

## Chapitre 04

### Développement d'un élément fini secteur SBS5 basé sur l'approche en déformation en 2D

#### 4.1 Introduction

L'analyse des éléments finis pour les structures courbées avec l'approche en déplacement est simplifiée en utilisant des éléments ayant une géométrie simple. Par exemple, Argyris et Kelsey [Argy.60] ont proposé des éléments rectilignes triangulaires, rectangulaires et quadrilatéraux pour évaluer et analyser des structures courbées. Ashwell et Sabir [Ashw.71b] ont constaté que pour obtenir des résultats satisfaisants et qui convergent rapidement, les éléments basés sur le modèle en déplacement nécessitent généralement la division des structures courbées en un grand nombre d'éléments. Ce qui montre le besoin de développer d'éléments avec des frontières courbes (**des éléments secteurs**).

En plus, la réussite de l'application de l'approche en déformation pour les problèmes d'élasticité plane a favorisé l'extension des recherches pour le développement des éléments finis secteurs notamment les travaux de Sabir [Sabi.86], Djoudi [Djou.90], Belarbi [Bela.00], Belarbi [Bela.05] et Hamadi [Hama.06].

Dans ce chapitre on s'intéressera à la formulation et la validation numérique d'un nouvel élément secteur quadrilatère membranaire en coordonnées polaires basé sur le modèle en déformation destiné pour l'analyse des structures courbée en statique.

#### 4.2 Étude bibliographique sur les éléments secteurs

En utilisant le modèle en déplacement, les premiers travaux sur la modélisation des structures à contour circulaire ont été réalisés par Ergatoudis, Irons et Zienkiewicz [Ergat.68], qui ont développé des éléments finis isopramétriques dont les côtés peuvent être courbés.

En 1969, Raju et Rao [Raju.69] ont présenté un élément secteur membranaire en contrainte plane avec deux degrés de liberté à chaque nœud. Le développement des éléments secteurs a été enrichi par Olson et Undberg [Olson.70] qui ont proposé deux

éléments finis en coordonnées polaires pour les problèmes de flexion de plaques. Ces éléments peuvent être assemblés dans diverses combinaisons avec des éléments rectangulaires pour s'adapter à un grand nombre de conditions aux limites, ces éléments sont basés sur le modèle en déplacement, le premier élément se présente sous la forme d'une plaque circulaire, possédant neuf degrés de liberté, répartis sur chacun des trois nœuds. Tandis que le second se présente sous la forme d'une plaque annulaire avec douze degrés de liberté et quatre nœuds. Un peu plus tard, Sawko et Merriman [Sawk.71] ont développé un élément secteur basé sur le modèle en déplacement, cet élément possède quatre degrés de liberté au niveau de chacun des quatre nœuds de coin. L'élément développé est adapté à l'analyse de la flexion des plaques annulaires. Par la suite, Raju et al [Raju.73] ont développé trois éléments secteurs, deux pour les problèmes en contrainte plane et le troisième pour la flexion des plaques. Afin d'analyser les plaques annulaires en comportements linéaire et non linéaire Der Avernession [Der.84] a proposé un élément secteur de plaque basé sur le modèle en déplacement.

Les recherches menées à l'université de Gardiff (Grande Bretagne) concernant le développement des éléments finis pour les structures courbées basés sur l'approche en déformation, ont montré leurs succès aux problèmes d'élasticité plane ce qui a encouragé les chercheurs à l'application de cette approche pour le développement des éléments secteurs en coordonnées polaires. En 1986, Sabir et Salhi ont développé un élément secteur à deux degrés de liberté par nœud [Sabi.86]. Une année après, Bouzerira [Bou.87] a présenté un élément secteur basé sur l'approche en déformation avec une rotation dans le plan comme ddl additionnel. Cependant les résultats obtenus en analysant des problèmes en élasticité plane (cas de flexion pure) ont été non concluants à cause du mauvais choix du champ de déformations. Djoudi [Djou.90] a développé deux éléments secteurs qui améliorent la qualité des résultats, mais ils restent sensibles au rapport d'aspect.

Afin de pallier ces inconvénients, Belarbi [Bela.00] a présenté un élément secteur à quatre nœuds avec trois degrés de libertés par nœud qui démontre une meilleure convergence, en comparaison avec d'autres éléments. Plus récemment Belarbi [Bela.05] a développé un élément rectangulaire avec quatre nœuds de coin et un nœud au centre de l'élément, chaque nœud à deux degrés de liberté, le champ de déformation de cet élément a été utilisé par Hamadi [Hama.06] pour développer un élément secteur.

### 4.3 Les différentes méthodes appliquées pour développer des éléments secteurs

Trois approches distinctes ont été utilisées pour développer des éléments finis secteurs basés sur le modèle en déformation à savoir :

#### 4.3.1 Méthode d'intégration directe

Elle consiste d'exprimer les variables cinématiques directement en coordonnées polaires par intégration des équations reliant les déformations aux déplacements (exprimées en coordonnées polaires).

##### 4.3.1.1 Élément de Bouzrira [Bou.87]

Bouzrira a développé un élément secteur à 12 degré de liberté basé sur l'approche en déformation en utilisant la méthode d'intégration directe, le champ de déformation proposé est :

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= a_4 + a_5\theta + a_6r \\ \varepsilon_\theta &= a_7 + a_8\theta + a_9/r + (a_6r) \\ \gamma_{r\theta} &= a_{10} + a_{11}\theta/r + (a_6r\theta/2)\end{aligned}\tag{4.1}$$

On constate que les trois termes sont couplés entre eux, ainsi que les termes entre parenthèse associés à la constante  $a_6$  dans l'équation (4.1) sont ajoutés afin de vérifier l'équation de compatibilité des déformations pour l'élasticité plane, exprimé en coordonnées polaires donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial \gamma_{r,\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - 2 \cdot \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \gamma_{r,\theta}}{\partial \theta} = 0\tag{4.2}$$

Les résultats obtenus (cas de flexion pure) à travers cet élément sont jugés non satisfaisant due au couplage inutile des termes des déformations.

##### 4.3.1.2 Élément de Djoudi [Djou.90]

Djoudi a développé un élément secteur basé sur l'approche en déformation en utilisant les fonctions de formes de Bouzrira [Bou.87] dont le champ de déformation est comme suit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ra} &= a_4 + a_5\theta + (a_6r) \\ \varepsilon_{\theta} &= a_7 + a_8\theta + \frac{a_9}{r} + \left(\frac{a_6r}{2}\right) \\ \gamma_{r\theta} &= a_{10} + \frac{a_{11}\theta}{r} + a_{12}r + \left(a_6 \frac{r\theta}{2}\right)\end{aligned}\tag{4.3}$$

On peut noter ici que cet élément a amélioré les résultats qui sont restés sensibles au rapport hauteur/largeur.

### 4.3.2 Méthode de Transformation des coordonnées :

Cette méthode consiste à développer les variables cinématiques en coordonnées cartésiennes  $\{X,Y\}$ , puis les transformées en coordonnées polaires  $(r,\theta)$ . Cette méthode a été utilisée par Sabir et Salhi [Sabi.86]

#### 4.3.2.1 Élément Sabir et Salhi [Sabi.86]

L'élément secteur développé par Sabir et Salhi [Sabi.86] possède deux degré de liberté pour chaque nœud. Les systèmes de coordonnées et les déplacements sont indiqués sur la figure (4.1).

Les fonctions de déplacement sont données par les équations suivantes:

$$\bar{U} = a_1 - a_3y + a_4x + a_5xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2}\tag{4.4}$$

$$\bar{V} = a_2 + a_3x - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6y + a_7xy + a_8 \frac{x}{2}$$

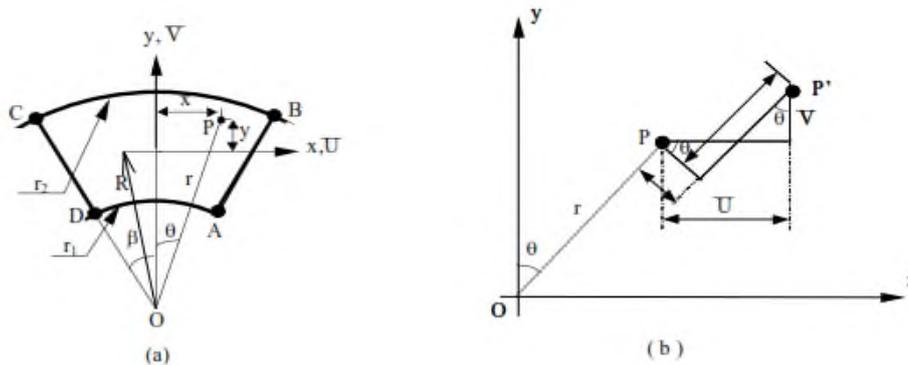


Figure 4.1 : Transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires.

Pour convertir les deux équations ci-dessus en termes de système de coordonnées polaires, on utilise les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \\ y &= r \cos\theta - R \end{aligned} \quad (4.5)$$

Où R est le rayon de courbure de la ligne circonférentielle centrale de l'élément et les coordonnées polaires r et  $\theta$  sont représentées sur la figure (4.1).

U et V sont les déplacements en translation donnés par :

$$\begin{aligned} U &= \bar{U} \sin\theta + \bar{V} \cos\theta \\ V &= \bar{U} \cos\theta - \bar{V} \sin\theta \end{aligned}$$

La forme finale du champ de déplacement est donnée en coordonnées polaires comme suit:

$$\begin{aligned} U &= a_1 \sin\theta + a_2 \cos\theta + a_3 R \sin\theta + a_4 r \sin^2\theta + a_5 r \sin^2\theta (r \cos\theta / 2 - R) + a_6 \cos\theta (r \cos\theta - R) \\ &\quad + a_7 \sin\theta (r^2 \cos^2\theta - R^2) / 2 + a_8 \sin\theta (r \cos\theta - R / 2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} V &= a_1 \cos\theta - a_2 \sin\theta + a_3 (R \cos\theta - r) + a_4 r \sin\theta \cos\theta + a_5 r \sin\theta (r \cos^2\theta + r \sin^2\theta / 2) + a_6 \sin\theta (R - r \cos\theta) \\ &\quad - a_7 (r^2 \cos^3\theta - R^2 \cos\theta + 2r^2 \sin^2\theta \cos\theta - 2rR) / 2 + a_8 (\cos 2\theta - R \cos\theta) / 2 \end{aligned}$$

#### **4.3.2.2 Élément Djoudi [Djou.90]**

Un élément secteur est développé par Djoudi [Djou.90] en utilisant la méthode de transformation des coordonnées et en exploitant les fonctions des déformations de l'élément SBRIEIR formulé et développé par Sabir [Sabi.86], dont le champ de déformation est comme suit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_4 + a_6 y + a_{10} y^2 + 2a_{11} xy^3 \\ \varepsilon_y &= a_7 + a_8 x - a_{10} x^2 - 2a_{11} yx^3 \\ \gamma_{xy} &= 2a_5 + a_6 x + a_8 y + 2a_9 y + 2a_{12} x \end{aligned} \quad (4.7)$$

#### **4.3.3 Méthode approche directe**

Cette troisième approche consiste à interpoler sur les variables polaires r et  $\theta$  de la même manière qu'on le fait sur les variables cartésiennes x et y, tout en satisfaisant l'équation de compatibilité en coordonnées polaires. Cette approche a été utilisée la première fois par Raju et Rao [Raju.69] et elle a été utilisée aussi par Sabir et Salhi [Sabi.86], Belarbi [Bela.00], Belarbi et Charif [Bela.98], Sabir et Sfindji [Sabi.95a et Sabi.95b] et Hamadi [Hama.06].

#### 4.3.3.1 Élément de Raju et Rao [Raju.69]

L'un des éléments finis les plus utilisés pour les problèmes d'élasticité plane en coordonnées cartésiennes est l'élément quadratique bilinéaire, où les fonctions de déplacement est donné par :

$$U = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (4.8)$$

$$V = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy$$

A partir de ces fonctions de déplacement Raju et Rao [Raju.69] a développé un élément secteur PSL (Sector element with linear displacement variation) en remplaçant x et y par r et  $\theta$  d'où le champ de déplacement devient comme suit :

$$\begin{aligned} U_r &= a_1 + a_2r + a_3\theta + a_4r\theta \\ V_\theta &= a_5 + a_6r + a_7\theta + a_8r\theta \end{aligned} \quad (4.9)$$

#### 4.3.3.2 Élément de Belarbi et Charif [Bela.98]

L'élément secteur développé par Belarbi et Charif [Bela.98] possède quatre nœuds et trois degré de liberté par nœud  $(U_r, V_\theta, \theta_z)$ , le champ de déplacement en coordonnées cartésiennes est :

$$\begin{aligned} U &= a_1 - a_3y + a_4x + a_5y + a_6xy + a_8 \frac{y^2}{2} + a_9y^2 + a_{10}xy^2 + a_{11}x^2y^3 \\ V &= a_2 + a_3x + a_5x + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7y + a_8xy + a_{10}x^2y - a_{11}y^2x^3 \\ \theta_z &= a_3 - a_9y - 2a_{10}xy - 3a_{11}x^2y^2 + a_{12}x \end{aligned} \quad (4.10)$$

En remplaceant x et y par r et  $\theta$  ; le champ de déplacement serait :

$$\begin{aligned} U_r &= a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5\theta + a_6r\theta + a_8 \frac{\theta^2}{2} + a_9\theta^2 + a_{10}r\theta^2 + a_{11}r^2\theta^3 \\ V_\theta &= a_2 + a_3r + a_5r + a_6 \frac{r^2}{2} + a_7\theta + a_8r\theta - a_{10}\theta^2\theta - a_{11}\theta^2r^3 \\ \theta_z &= a_3 - a_9\theta - 2a_{10}r\theta - 3a_{11}r^2\theta^2 + a_{12}r \end{aligned} \quad (4.11)$$

#### 4.3.3.3 Élément de Sabir et Sfindji [Sabi.95a]

Sabir et Sfindji ont également appliqués l'approche directe sur le champ de déplacement de l'élément (SBRIE1) [Sabi.95a], soit :

$$\begin{aligned}
 U &= a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5r\theta - \frac{a_7\theta^2}{2} + \frac{a_8\theta}{2} + \frac{a_{10}\theta^2}{2} \\
 V &= a_2 + a_3r - \frac{a_5r^2}{2} + a_6\theta + a_7r\theta + \frac{a_8r}{2} + \frac{a_9r^2}{2}
 \end{aligned}
 \tag{4.12}$$

#### **4.3.3.4 Élément de Sabir et Sfindji [Sabi.95b]**

La même procédure sur le champ de déplacement de l'élément (SBRIE2) [Sabi.95b], le champ de déplacement en coordonné polaire est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
 U &= a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5r\theta - a_7 \frac{(r^2 + \theta^2)}{2} + a_8 \frac{\theta}{2} + a_{10}(150r^2 + \theta^2) \\
 V &= a_2 + a_3r - a_5 \frac{(r^2 + \theta^2)}{2} + a_6\theta + a_7r\theta + a_8 \frac{r}{2} + a_9 \frac{(r^2 - 150\theta^2)}{2}
 \end{aligned}
 \tag{4.13}$$

#### **4.3.3.5 Élément Secteur Hamadi [Hama.06]**

Hamadi a développé un élément secteur SBMS-BH [Hama.06] en utilisant le champ de déformation de l'élément fini membranaire d'élasticité plane de Belarbi [Bela.05], qui est un élément rectangulaire avec quatre nœuds de coin et un nœud dans le centre, chaque nœud a deux degrés de liberté, le champ de déplacement est donné par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 U &= a_1 - a_3y + a_4x + a_5xy - 0.5a_7y^2 + 0.5a_8y + 0.5a_9x^2 \\
 V &= a_2 + a_3x - 0.5a_5x^2 + a_6y + a_7xy + 0.5a_8x + 0.5a_{10}y^2
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Alors, les fonctions de déplacement en coordonnées polaire pour l'élément secteur SBMS –BH, en remplaçant x et y par r et  $\theta$ , est comme suit :

$$\begin{aligned}
 U &= a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5r\theta - 0.5a_7\theta^2 + 0.5a_8\theta + 0.5a_9r^2 \\
 V &= a_2 + a_3r - 0.5a_5r^2 + a_6\theta + a_7r\theta + 0.5a_8r + 0.5a_{10}\theta^2
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

L'existence de nœud interne dans l'élément secteur développé SBMS-BH rend les résultats obtenus meilleurs et convergent vers la solution analytique.

## **4.4 Elasticité plane en coordonnée polaires**

Les contraintes agissant sur un petit élément de matériau dans le système de coordonnées cylindriques sont représentées comme indiqué sur la figure (4.2) (les contraintes normales et les contraintes de cisaillement).

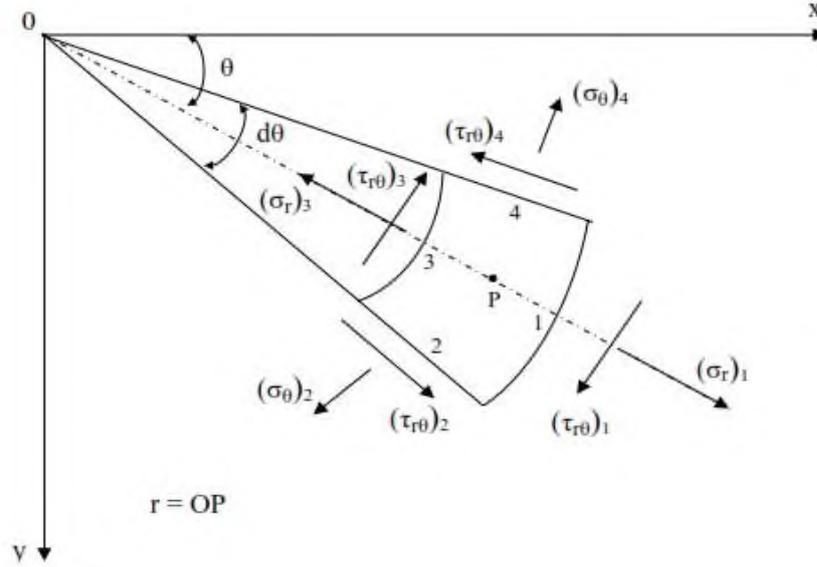


Figure 4.2 : Élément infinitésimal dans les coordonnées polaires.

Les équations d'équilibre en coordonnées cylindriques sont comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + F_1 &= 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + F_2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

$F_1$  et  $F_2$  sont les composantes de forces de volumes.

Afin de résoudre ces deux équations qui comportent trois inconnus, il nous faut une troisième équation de déformation définie par les composantes suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial U}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{U}{r} + \frac{\partial V}{r \partial \theta} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial U}{r \partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Les trois composantes des déformations données par l'équation (4.17) ne peuvent pas être considérées comme indépendantes, car elles sont exprimées par deux fonctions de déplacements  $U$  et  $V$ .

Ces mêmes composantes doivent aussi vérifier l'équation de compatibilité des déformations, donnée par l'équation suivante :

$$\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} - r \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} - 2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (4.18)$$

Les déformations en fonctions des contraintes à travers les équations de Hooke généralisées est donnée par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_r - \nu \cdot \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} \cdot (\sigma_\theta - \nu \cdot \sigma_r) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} \cdot (\sigma_r + \sigma_\theta) \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \tau_{r\theta} \end{aligned} \quad (4.19)$$

En remplaçant l'équation (4.19) dans l'équation (4.18) on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) = 2 \cdot (1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} \quad (4.20)$$

A travers la dérivée des équations d'équilibre (4.16), puis en les additionnant terme à terme on obtient par substitution dans l'équation précédente l'expression suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sigma_\theta + \sigma_r) = -(1 + \nu) \frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \quad (4.21)$$

Pour une structure soumise uniquement à son poids, on aura l'expression suivante :

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sigma_\theta + \sigma_r) = 0 \quad (4.22)$$

Ou bien s'écrit sous la forme suivante :

$$\nabla^2 (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (4.23)$$

Donc l'équation (4.23) est appelée **l'équation de compatibilité en terme de contraintes**.

## 4.5 Formulation d'un nouvel élément secteur SBS5

### 4.5.1 Satisfaction des mouvements du corps rigide de l'élément SBQ5

Considérons l'élément rectangulaire à cinq nœuds illustré sur la figure (4.3) : les trois composantes des déformations en tous point du repère cartésien  $x$  et  $y$  sont données par :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\end{aligned}\tag{4.24}$$

Où  $\varepsilon_x$  et  $\varepsilon_y$  sont les déformations directes,  $\gamma_{xy}$  est la déformation de cisaillement, et  $U$  et  $V$  sont les déplacements de translation dans la direction  $x$  et  $y$  respectivement.

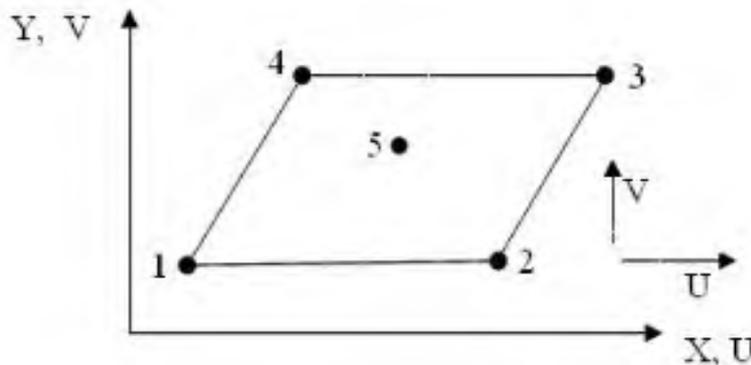


Figure 4.3 : Coordonnées et points nœuds de l'élément SBQ5

L'élément formulé possède cinq nœuds et deux ddl par nœud ( $U, V$ ). Le champ de déplacement de l'élément doit contenir dix constantes indépendantes. La partie de déplacement représentant les modes du corps rigides sont obtenues en intégrant les équations (4.24) avec l'ensemble des déformations égales à zéro:

$$U = a_1 - a_3 y\tag{4.25a}$$

$$V = a_2 + a_3 x\tag{4.25b}$$

L'équation (4.25) représente le champ de déplacement de corps rigide (MCR) de l'élément proposé SBS5. Les trois constantes  $a_1, a_2$  et  $a_3$  représentent les mouvements de translations respectivement dans les directions x et y, et  $a_3$  représente la rotation dans le plan (Figure (4.4))

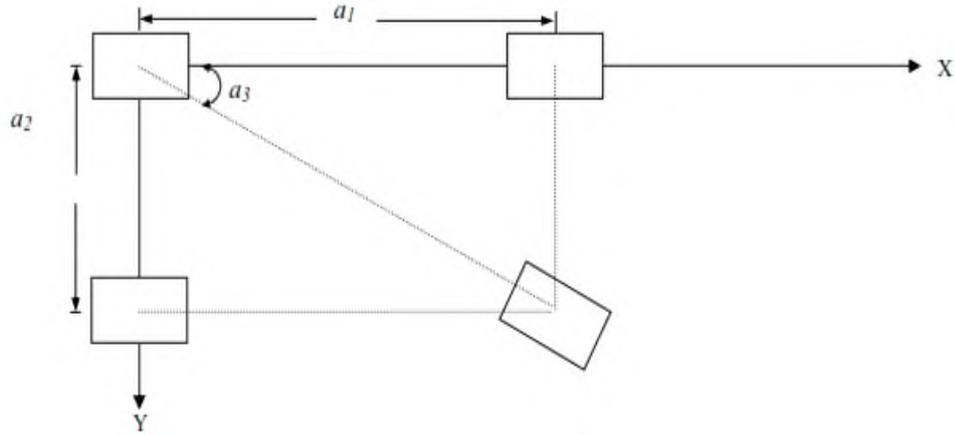


Figure 4.4 : les modes du corps rigide

Les sept autres constantes sont utilisées pour exprimer les déplacements correspondant à la déformation de l'élément. Ceux-ci sont répartis entre les déformations comme suit :

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_4 + a_5 y + a_7 x - (g a_{10} x) \\ \varepsilon_y &= a_5 y + a_6 + a_7 x + (g a_9 y) \\ \gamma_{xy} &= -(e a_5 x) - (e a_7 y) + a_8 + a_9 x + a_{10} y\end{aligned}\tag{4.26}$$

$$e = \frac{2(1+\mu)}{1-\mu} ; g = \frac{1-\mu}{2}$$

Donc le champ de déplacement final est :

$$\begin{aligned}U_x &= a_1 - a_3 y + a_4 x + a_5 xy + a_7 (x^2 - (1+e)y^2) / 2 + a_8 y / 2 + a_{10} (y^2 - g x^2) / 2 \\ V_y &= a_2 + a_3 x + a_5 (y^2 - (1+e)x^2) / 2 + a_6 y + a_7 xy + a_8 x / 2 + a_9 (x^2 - g y^2) / 2\end{aligned}\tag{4.27}$$

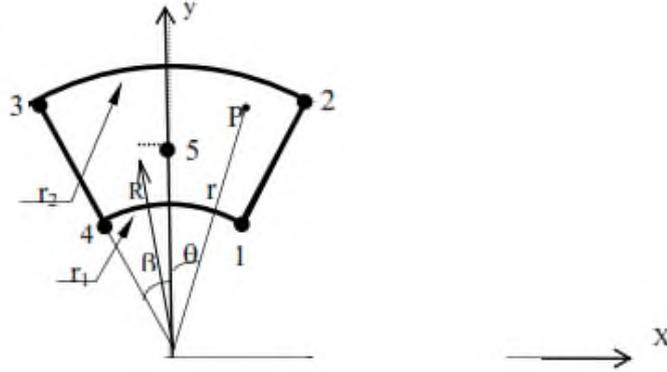
En utilisant l'approche directe (approche de Raju et Rao) [Raju.69] dans cette étude, en remplaçant les variables x et y par r et  $\theta$  pour définir le champ de déplacements en coordonnées polaire du présent élément secteur SBS5, illustré sur la figure (4.5).

Le champ de déplacement de l'élément proposé SBS5 est défini comme suit :

$$\begin{aligned} U_r &= a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5r\theta + a_7(r^2 - (1+e)\theta^2)/2 + a_8\theta/2 + a_{10}(\theta^2 - gr^2)/2 \\ V_\theta &= a_2 + a_3r + a_5(\theta^2 - (1+e)r^2)/2 + a_6\theta + a_7r\theta + a_8r/2 + a_9(r^2 - g^2\theta)/2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

$U_r$  : Déplacement radial

$V_\theta$  : Déplacement circonférentiel (tangentiell)



**Figure 4.5** : élément secteur à cinq nœuds.

Les fonctions du champ de déplacement en coordonnées polaire de l'élément secteur développé SBS5 données par l'équation (4.28) peut être écrites sous la forme matricielle comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ v_\theta \end{Bmatrix} = [p]\{a\} \quad (4.29)$$

Dans le cas d'élasticité plane en coordonnées polaires, les relations déformations-déplacements (petits déplacements et petits déformations) sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{u_r}{r} + \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Où  $\varepsilon_r$  et  $\varepsilon_\theta$  sont les déformations radiales et circonférentielles directes et  $\gamma_{r\theta}$  est la déformation de cisaillement.

En remplaçant les équations de champ de déplacement ( $U_r, V_\theta$ ) (4.28) dans l'équation (4.30) on obtient le champ de déformation en coordonnées polaires pour l'élément développé (SBS5) qui est :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial(a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5\theta r + a_7(r^2 - (1+e)\theta^2)0.5 + a_8 0.5\theta + a_{10}(\theta^2 - (g)r^2)r^2)}{\partial r}$$

D'où :

$$\varepsilon_r = a_4 + \theta a_5 + r a_7 - g r a_{10}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial v_\theta}{r \partial \theta} = \frac{a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5\theta r + a_7(r^2 - (1+e)\theta^2)0.5 + a_8 0.5\theta + a_{10}(\theta^2 - (g)r^2)r^2}{r} +$$

$$\frac{\partial(a_2 + a_3r + a_5(\theta^2 - (1+e)r^2)0.5 + a_6\theta + a_7r\theta + a_8 0.5\theta + a_9(r^2 - (g)\theta^2)0.5)}{r \partial \theta}$$

D'où :

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} a_1 - \frac{\theta}{r} a_3 + a_4 + (\theta + \frac{\theta}{r}) a_5 + \frac{1}{r} a_6 + (\frac{1}{r} (\frac{r^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} (e+1) + 1)) a_7 + \frac{\theta}{2r} a_8 + (-\frac{g\theta}{r}) a_9 + \frac{1}{2r} (\theta^2 - r^2) a_{10}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} =$$

$$\frac{\partial(a_1 - a_3\theta + a_4r + a_5\theta r + a_7(r^2 - (1+e)\theta^2)0.5 + a_8 0.5\theta + a_{10}(\theta^2 - (g)r^2)r^2)}{r \partial \theta} +$$

$$\frac{\partial(a_2 + a_3r + a_5(\theta^2 - (1+e)r^2)0.5 + a_6\theta + a_7r\theta + a_8 0.5\theta + a_9(r^2 - (g)\theta^2)0.5)}{\partial r} -$$

$$\frac{a_2 + a_3r + a_5(\theta^2 - (1+e)r^2)0.5 + a_6\theta + a_7r\theta + a_8 0.5\theta + a_9(r^2 - (g)\theta^2)0.5}{r}$$

D'où :

$$\gamma_{r\theta} = -\frac{1}{r} a_2 - \frac{1}{r} a_3 + (1 - r(e+1)) - \frac{1}{2r} (\theta^2 - r^2 (e+1)) a_5 - \frac{\theta}{r} a_6 - \frac{\theta}{r} (e+1) a_7 + \frac{1}{2r} a_8 +$$

$$(r - \frac{1}{2r} (r^2 - g\theta^2)) a_9 + \frac{\theta}{r} a_{10}$$

Donc le champ de déformation final en coordonnées polaire pour l'élément proposé SBS5 est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_r = a_4 + \theta a_5 + r a_7 - g r a_{10} \\ \varepsilon_\theta = \frac{1}{r} a_1 - \frac{\theta}{r} a_3 + a_4 + \left(\theta + \frac{\theta}{r}\right) a_5 + \frac{1}{r} a_6 + \left(\frac{1}{r} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{\theta^2}{2} (e+1)\right) + 1\right) a_7 + \frac{\theta}{2r} a_8 - \frac{g\theta}{r} a_9 + \\ \frac{1}{2r} (\theta^2 - r^2) a_{10} \\ \gamma_{r\theta} = -\frac{1}{r} a_2 - \frac{1}{r} a_3 + (1 - r(e+1)) - \frac{1}{2r} (\theta^2 - r^2(e+1)) a_5 - \frac{\theta}{r} a_6 - \frac{\theta}{r} (e+1) a_7 + \frac{1}{2r} a_8 + \\ \left(r - \frac{1}{2r} (r^2 - g\theta^2) a_9 + \frac{\theta}{r} a_{10} \right) \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Les fonctions de déformations  $\{\varepsilon\}$  en coordonnées polaire données par l'équation (4.31) peuvent s'écrire sous la forme matricielle comme suit :

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = [Q] \{a\} \quad (4.32)$$

Les matrices [p] et [Q] pour l'élément secteur développé SBS5 en coordonnées polaire sont données respectivement comme suit :

$$[p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\theta & r & r\theta & 0 & (r^2 - (1+e))\frac{\theta}{2} & \frac{\theta}{2} & 0 & (\theta^2 - gr^2)0.5 \\ 0 & 1 & r & 0 & (\theta^2 - (1+e)r^2)/2 & \theta & r\theta & r/2 & (r^2 - g\theta^2)/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \theta & 0 & r & 0 & 0 & -gr \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{1}{\theta} & 1 & \theta + \frac{\theta}{r} & \frac{1}{r} & \frac{1}{r} (-0.5r^2 - 0.5\theta^2(e+1) + 1) & 0.5\frac{\theta}{r} & -\frac{g\theta}{r} & \frac{1}{r} (0.5\theta^2 - 0.5r^2) \\ 0 & -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & (1 - r(e+1)) - \frac{1}{r} (0.5\theta^2 - 0.5r^2(e+1)) & -\frac{1}{r} & -\frac{\theta}{r} (e+1) & \frac{0.5}{r} & (r - \frac{1}{r} (0.5\theta^2 - 0.5g\theta^2)) & \frac{\theta}{r} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

La matrice de rigidité  $[K^e]$  de l'élément secteur développé peut être calculée à partir de l'expression suivante :

$$[K^e] = [C]^T \left[ \int_{S_e} [Q]^T [D] [Q] r dr d\theta \right] [C]^{-1} \quad (4.35)$$

$$[K^e] = [C^{-1}]^T [K_0] [C^{-1}] \quad (4.36)$$

$$\text{Avec } [K_0] = \int_{-\beta}^{\beta} \int_r^{r_2} [Q]^T [D] [Q] r dr d\theta \quad (4.37)$$

Dont  $[D]$  est la matrice de rigidité,  $[C]$  est la matrice de transformation et  $[Q]$  est la matrice de déformation.

Pour un matériau élastique homogène et isotrope en contraintes planes la matrice  $[D]$  s'écrit :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Pour les problèmes en déformation plane la matrice d'élasticité est donnée par :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

La transformation de l'élément réel à l'élément de référence est assurée par la transformation suivante :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

Le déterminant de la matrice Jacobéenne est défini par l'expression suivant :

$$\iint dr d\theta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \det [J] d\xi d\eta \quad (4.41)$$

La déformation à l'intérieur de l'élément doit vérifier l'équation de compatibilité en coordonnées polaire qui est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial^2 \theta} - r \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial^2 r} - 2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} = 0 \quad (4.42)$$

#### 4.6 Validation numériques de l'élément secteur développé SBS5

##### 4.6.1 Poutre circulaire épaisse sous une charge de cisaillement dans le plan

Dans ce test, une poutre circulaire épaisse soumise à une force de cisaillement  $F=600$  à son extrémité libre est analysé dont les caractéristiques mécaniques et géométriques sont présentées dans la figure (4.6). Cette poutre est modélisée avec différent type de maillages  $2 \times 1$ ,  $4 \times 1$ ,  $6 \times 1$  et  $8 \times 1$  et  $12 \times 4$  avec des éléments quadrilatéraux. L'analyse a été effectuée dans le cas d'un problème de contrainte plane.

Les résultats du déplacement vertical normalisé au point A sont indiqués dans le tableau (4.1) et comparés avec d'autre solutions numériques. L'élément proposé converge vers la solution de référence surtout lorsqu'on raffine le maillage.

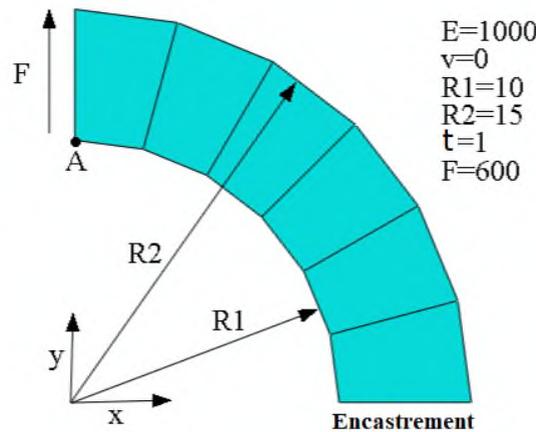


Figure 4.6 : Poutre circulaire épaisse sous une charge de cisaillement dans le plan.

Tableau 4.1 : Le déplacement vertical normalisé au point A pour une poutre circulaire épaisse.

Maillage	CPS4 [Zoua.16]	CPS8 [Zoua.16]	HS-A7 [Rezai.13]	QACM4 [Cen.07]	SBQ5	<b>SBS5</b>
2x1	0.251	0.857	0.987	-	1.003	<b>0.225</b>
4x1	0.643	0.982	0.994	0.938	0.964	<b>0.519</b>
6x1	0.811	0.991	-	0.979	0.956	<b>0.701</b>
8x1	0.887	0.992	-	0.991	0.954	<b>0.802</b>
12x4	-	-	-	-	-	<b>1.004</b>
Solution de référence $V_r=90.1$						

### 4.6.2 Cylindre épais sous pression interne

Considérons un cylindre, à paroi épaisse de rayon interne  $a = 20$  et de rayon externe  $b = 40$ , soumis à une pression interne uniforme, comme indiqué sur la figure (4.7), ayant les caractéristiques mécaniques mentionnées sur la figure (4.7). Pour des raisons de symétrie, on considère le quart du cylindre pour la modélisation. Les résultats obtenus du déplacement radial ( $u_r$ ) sont reportés dans le tableau (4.2) pour le présent élément SBS5.

Nous constatons que les résultats sont très précis avec une meilleure convergence vers la solution analytique donnée par Rekatch [Reka80], soit pour le gros maillage ou bien lorsque le maillage est raffiné.

Les résultats trouvés pour les déplacements radiaux sont comparés avec la solution de référence donnée par Rekatch [Reka80] :

$$U_r = \frac{(1+\nu)}{E(b^2-a^2)} \left[ (1-2\nu)(a^2 p_i^2 - b^2 p_e^2) r + \frac{a^2}{b^2} (p_i - p_e) \right], V_\theta = 0$$

Dans ce cas :  $p_i = q, p_e = 0$ ,  $U_r$  est calculé à partir du point E ( $r=30\text{mm}$ ) comme montré sur la figure (4.7).

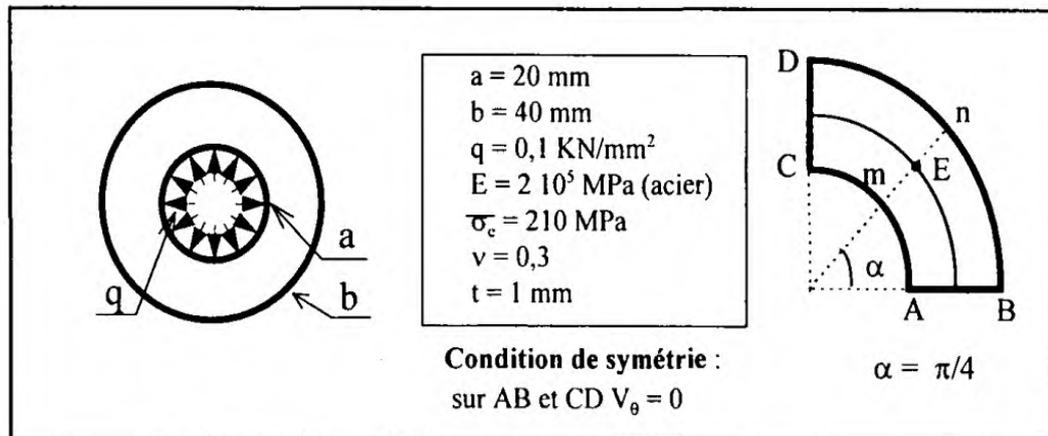


Figure 4.7 : Cylindre épais sous pression interne.

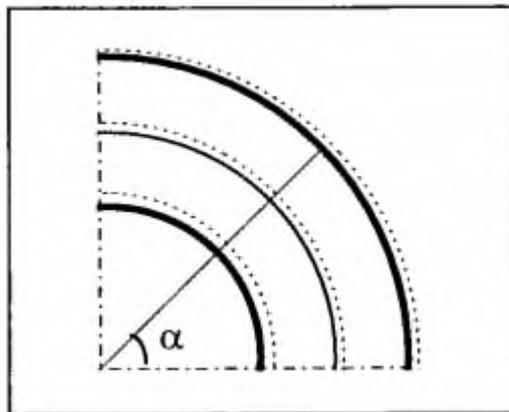
**Tableau 4.2 :** Déplacements radiaux  $u_r$  pour un cylindre épais sous pression interne.

Maillage	SBMS-BH [Hama.06]	SBS4 [Bela.98]	SBS5
2x2	1.4146	1.3718	1.4146
4x2	1.4155	1.4036	1.4155
6x2	1.4155	1.4101	1.4156
8x2	1.4156	1.4125	1.4156
10x2	1.4157	1.4136	1.4156
12x2	1.4156	1.4142	1.4156
14x2	1.4156	1.4145	1.4156
Solution de référence [Reka.80]		1.4155	

#### 4.6.3 Ovalisation du cylindre

Dans ce test on va étudier le comportement du présent élément SBS5 pour l'analyse d'un cylindre épais sous l'action d'une pression interne, comme indiqué sur la figure (4.8), qui se déforme radialement avec l'augmentation des rayons externe et interne avec une diminution de l'épaisseur. L'ovalisation est remarquée avec plus d'intensité pour le maillage de taille 14x2 éléments.

Les résultats de déplacement radial  $u_r$ , dans le tableau (4.3), indiquent la similitude de comportement entre l'élément proposé SBS5 est l'élément SBS4.



**Figure 4.8 :** Ovalisation du cylindre.

Tableau 4.3 : Déplacement radial  $u_r$

r(mm)	SBS4 [Bela.98]			SBS5		
	$\alpha$					
	0	$\pi/4$	$\pi/2$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
20	0,19050	0,19050	0,19050	<b>0.19011</b>	<b>0.19067</b>	<b>0.19124</b>
30	0,14145	0,14145	0,14145	<b>0.14140</b>	<b>0.14156</b>	<b>0.14173</b>
40	0,12130	0,12130	0,12130	<b>0.12137</b>	<b>0.12134</b>	<b>0.12132</b>

#### 4.6.4. Anneau soumis à un cisaillement radial

Dans ce test l'analyse est effectuée dans le cas d'un problème d'élasticité plane bidimensionnelle pour une plaque courbée soumise à deux forces de cisaillement radiales en équilibre, les caractéristiques mécaniques et géométriques sont présentées dans la figure (4.9).

En raison de symétrie la moitié de la structure est étudiée. Pour obtenir des résultats satisfaisants une plage considérable de valeurs, a/b est examinée. Les résultats de la flèche radiale au point A sont rapportés au tableau (4.4) démontrant bien la précision et la vitesse de convergence de l'élément proposé SBS5 vers la solution analytique donnée par Timochenko [Timo.51].

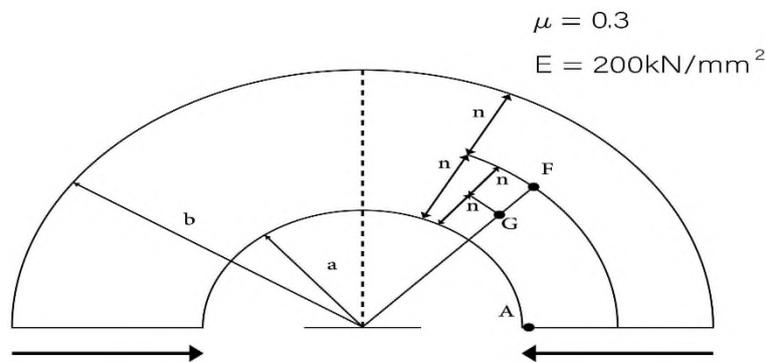


Figure 4.9 : anneau soumis à un cisaillement radial.

Tableau 4.4 : Résultats de convergence de la flèche radiale au point A.

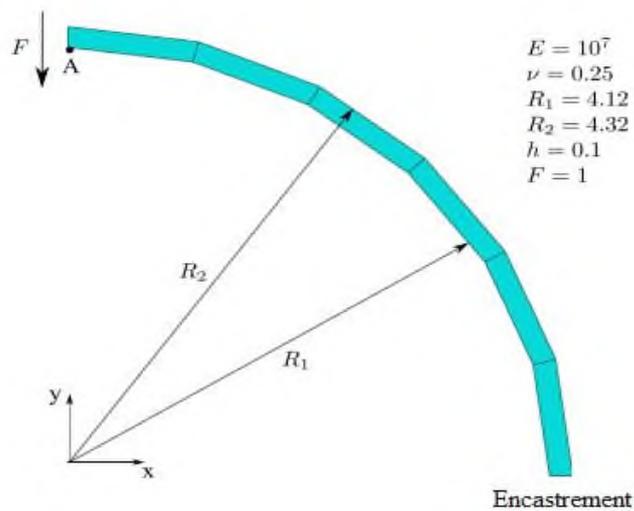
maillage	b/a=3	b/a=2	b/a=1,3
2x2	0.046241	0.14829	2. 2292
4x4	0.049615	0.16028	2. 3752
6x6	0.050071	0. 16167	2. 4349
8x8	0.51452	0.16627	2.5490
10x10	0.051737	0.16717	2.5839
<b>Solution analytique [Timo.51]</b>	<b>0.0526</b>	<b>0.1686</b>	<b>2.6811</b>

#### 4.6.5 Poutre circulaire mince sous une charge de cisaillement dans le plan

Une poutre circulaire mince soumise à une force de cisaillement à son extrémité libre est traitée par Zouari [Zoua.16], modélisée en trois maillages réguliers  $6 \times 1$ ,  $12 \times 2$  et  $24 \times 4$  avec des éléments quadrilatéraux, l'analyse est effectuée dans le cas d'un problème en contrainte plane, les caractéristiques mécaniques et géométriques sont présentées dans la figure (4.10).

Le déplacement vertical normalisé au point A est déterminé par le rapport du déplacement calculé au déplacement de référence et les résultats obtenus sont résumés dans le tableau (4.5). Le déplacement vertical de référence est égal à : 0.08734 [Choo.06].

Nous constatons que le présent élément donne des meilleurs résultats que les éléments SST et ALLMAN.



**Figure 4.10:** Poutre circulaire mince modélisée avec  $6 \times 1$  éléments quadrilatéraux.

**Tableau.4.5 :** Poutre courbé mince, déplacement vertical normalisé au point A.

Maillage	SST [Rezai.14]	ALLMAN [Rezai.14]	SBS5
$6 \times 1$	0.02536	0.02537	0.0476
$12 \times 2$	0.09599	0.09549	0.1618
$24 \times 4$	0.28189	0.29775	0.3179
<b>Solution de référence [Choo.06]</b>		$V_A = 0.08734$	

#### **4.7 Conclusion**

Dans ce chapitre, un élément fini secteur à cinq nœuds (SBS5) a été formulé pour l'analyse statique des structures courbées isotropes. L'élément possède cinq nœuds et deux ddl par nœud (U, V). Cet élément basé sur l'approche en déformation et la méthode de l'approche directe pour formuler des éléments secteurs.

Les résultats obtenus de l'élément secteur SBS5 proposé basé sur l'approche en déformation à travers une série de tests en analyse linéaire montrent leur performance et leur efficacité dans l'analyse de structures courbées et circulaires pour différentes propriétés mécaniques et différents cas de charges appliquées et la convergence de cet élément vers les solutions de références dans tous les cas des problèmes considérés est constatée.

## **Conclusion générale**

## **Conclusion générale**

Dans ce travail de thèse on a présenté une étude bibliographique sur les éléments finis basés sur le modèle en déformation pour l'analyse des problèmes dans l'élasticité plane. Nous avons formulé deux éléments membranaires dans cette étude ,le premier est un élément quadrilatère (SBQ5) à cinq nœuds et deux degrés de liberté pour chaque nœud, le deuxième est un élément (SBS5) secteur qui a cinq nœuds et deux degrés de liberté .

L'intégration numérique est utilisée dans cette étude pour calculer la matrice de rigidité au lieu de l'intégration analytique déjà adoptée dans l'approche en déformation, après avoir satisfait aux conditions de compatibilité pour les deux éléments finis proposés SBQ5 et SBS5.

Dans la première partie nous avons étudié le comportement membranaire des structures en utilisant ce nouvel élément quadrilatère (SBQ5) pour une étude statique de la flexion de poutres à parois minces, du cisaillement de poutres, de parois et de panneaux et enfin de l'influence du coefficient de poisson sur un cylindre épais soumis à une pression interne. Dans le domaine des vibrations libres, nous avons étudié l'influence de la matrice de masse concentrée et de la matrice de masse répartie sur les fréquences naturelles. Les résultats montrent que le comportement de l'élément développé est le même en utilisant les deux types de matrices de masse (concentrée et répartie) et une convergence satisfaisante est obtenue vers les solutions analytiques. Cet élément a également été testé dans d'autres exemples en vibration libre dans différentes structures avec différentes caractéristiques mécaniques ; en général, les résultats trouvés sont proches des solutions analytiques et que cet élément est numériquement similaire aux éléments cités dans ces exemples.

Dans l'analyse des vibrations forcées, cet élément est évalué sur deux tests déjà traités par [Smi.88], le premier concernant la méthode de la réponse complexe pour un solide rectangulaire en déformation plane, et le second test concerne la méthode d'intégration explicite décrite. Les résultats obtenus montrent que le comportement de l'élément SBQ5 est similaire avec les deux autres éléments (Q8 et SBRIE) cités dans les deux exemples .

En conclusion, le premier élément développé (SBQ5) a montré une précision et une bonne efficacité dans l'analyse statique et dynamique et la possibilité d'être impliqué prochainement dans l'analyse non linéaire (élasto-plastique).

Dans la deuxième partie, un élément fini secteur basé sur l'approche en déformation pour les problèmes d'élasticité plane dans un système de coordonnées polaires est développé en utilisant une approche directe qui a été introduite pour la première fois par Raju et Rao [Raju.69] et qui est la plus utilisée dans la formulation des éléments membranaires quadrilatéraux bilinéaires, cette approche consiste à interpoler sur les variables polaires de la même manière qu'on le fait sur les variables cartésiennes tout en satisfaisant l'équation de compatibilité exprimée en coordonnées polaires.

L'élément développé est un élément quadrilatère membranaire destiné à l'analyse des problèmes d'élasticité plane linéaire en statique, cet élément secteur est appelé (SBS5) (strain based sector five node) basé sur l'approche en déformation à cinq nœuds, quatre nœuds de coin et le cinquième au milieu de l'élément avec deux degrés de liberté à chaque nœud. Les résultats obtenus par les différents tests confirment la bonne performance de l'élément SBS5, et la possibilité de le proposer sur différentes structures courbées prochainement.

# **ANNEXES**

## ANNEXE A

\*La matrice de transformation  $[C]$  de l'élément développé SBQ5[Bouz.19] est donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & (1-(1+e))/2 & -1/2 & 0 & (1-g)/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & (1-(1+e))/2 & -1 & 1 & -1/2 & (1-g)/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & (1-(1+e))/2 & 1/2 & 0 & (1-g)/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & (1-(1+e))/2 & 1 & -1 & -1/2 & (1-g)/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & (1-(1+e))/2 & 1/2 & 0 & (1-g)/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & (1-(1+e))/2 & 1 & 1 & 1/2 & (1-g)/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & (1-(1+e))/2 & -1/2 & 0 & (1-g)/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & (1-(1+e))/2 & -1 & -1 & 1/2 & (1-g)/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\* L'inverse de la matrice  $[C]^{-1}$  pour l'élément SBQ5

$$[C]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.125 & 0.125 & -0.125 & -0.125 & -0.125 & 0.125 & 0.125 & 0.125 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ -0.25 & -0.25 & -0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & -0.25 & 0.25 & 0 & 0 \\ \frac{e}{4g-4} & -\frac{1}{2g-2} & -\frac{1}{2g-2} & -\frac{e}{4g-4} & -\frac{e}{4g-4} & -\frac{1}{2g-2} & \frac{e}{4g-4} & -\frac{1}{2g-2} & 0 & \frac{2}{g-1} \\ -\frac{1}{2g-2} & -0.5\frac{e}{2g-2} & 0.5\frac{e}{2g-2} & -\frac{1}{2g-2} & -\frac{1}{2g-2} & -0.5\frac{e}{2g-2} & -\frac{1}{2g-2} & 0.5\frac{e}{2g-2} & \frac{4}{2g-2} & 0 \end{bmatrix}$$

\* Le champ de déplacement est exprimé en fonction de déplacements nodaux par la relation suivante :

$$\{U\} = [N] \{q\}$$

Ou

$$\{q\} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4, u_5, v_5\}$$

\*Les fonctions de forme de l'élément SBQ5 est donnée sous forme matricielle comme suit :

$$[N] = [P(x, y)]_{2 \times 10} [C]_{10 \times 10}^{-1}$$

\*La matrice  $[P(x, y)]$  peut être exprimée sous forme matricielle comme :

$$[P(x, y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & (x^2 - (1+e)y^2)/2 & y/2 & 0 & (y^2 - gx^2)/2 \\ 0 & 1 & x & 0 & (y^2 - (1+e)x^2)/2 & y & xy & x/2 & (x^2 - gy^2)/2 & 0 \end{bmatrix}$$

\*L'interpolation du champ de déplacements dans la formulation isoparamétrique peut être exprimée par les expressions suivantes :

$$u = \sum_{i=1}^n N^U_{2i-1}(\zeta, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N^U_{2i}(\zeta, \eta) v_i$$

$$v = \sum_{i=1}^n N^V_{2i-1}(\zeta, \eta) u_i + \sum_{i=1}^n N^V_{2i}(\zeta, \eta) v_i$$

\*Les fonctions de forme de l'élément SBQ5 développé sont données par la forme suivante:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1^u & N_2^u & N_3^u & N_4^u & N_5^u & N_6^u & N_7^u & N_8^u & N_9^u & N_{10}^u \\ N_1^v & N_2^v & N_3^v & N_4^v & N_5^v & N_6^v & N_7^v & N_8^v & N_9^v & N_{10}^v \end{bmatrix}$$

\*Les fonctions de forme pour l'élément SBQ5 en coordonnées naturelles

**Tableau 5.1. :** Fonctions de forme de l'élément SBQ5

$N_1^u = \frac{1}{4}(\xi + \eta) \frac{-g - \eta + g\xi + 1}{g - 1}$	$N_1^v = \frac{1}{8}(\xi - \eta)(\xi + \eta) \frac{g + eg - 1}{g - 1}$
$N_2^u = \frac{1}{4}(\xi - \eta) \frac{-g + \eta + g\xi + 1}{g - 1}$	$N_2^v = -\frac{1}{8}(\xi - \eta)(\xi + \eta) \frac{g + eg - 1}{g - 1}$
$N_3^u = \frac{1}{4}(\xi + \eta) \frac{g - \eta + g\xi - 1}{g - 1}$	$N_3^v = \frac{1}{8}(\xi - \eta)(\xi + \eta) \frac{g + eg - 1}{g - 1}$
$N_4^u = \frac{1}{4}(\xi - \eta) \frac{g + \eta + g\xi - 1}{g - 1}$	$N_4^v = -\frac{1}{8}(\xi - \eta)(\xi + \eta) \frac{g + eg - 1}{g - 1}$
$N_5^u = \frac{g + \eta^2 - g\xi^2 - 1}{g - 1}$	$N_5^v = 0$
$N_6^u = -\frac{1}{8}(\xi - \eta)(\xi + \eta) \frac{g + eg - 1}{g - 1}$	$N_6^v = \frac{1}{4}(\xi + \eta) \frac{-g - \xi + g\eta + 1}{g - 1}$
$N_7^u = \frac{1}{8}(\xi - \eta)(\xi + \eta) \frac{g + eg - 1}{g - 1}$	$N_7^v = -\frac{1}{4}(\xi - \eta) \frac{g + \xi + g\eta - 1}{g - 1}$
$N_8^u = -\frac{1}{8}(\xi - \eta)(\xi + \eta) \frac{g + eg - 1}{g - 1}$	$N_8^v = \frac{1}{4}(\xi + \eta) \frac{g - \xi + g\eta - 1}{g - 1}$
$N_9^u = \frac{1}{8}(\xi - \eta)(\xi + \eta) \frac{g + eg - 1}{g - 1}$	$N_9^v = -\frac{1}{4}(\xi - \eta) \frac{-g + \xi + g\eta + 1}{g - 1}$
$N_{10}^u = 0$	$N_{10}^v = \frac{g + \xi^2 - g\eta^2 - 1}{g - 1}$

\*Les matrices  $[P]$  et  $[Q]$  de l'élément développé **SBQ5** sont donnée respectivement par :

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y & x & xy & 0 & (x^2 - (1+e)y^2)/2 & y/2 & 0 & (y^2 - gx^2)/2 \\ 0 & 1 & x & 0 & (y^2 - (1+e)x^2)/2 & y & xy & x/2 & (x^2 - gy^2)/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & y & 0 & x & 0 & 0 & -gx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y & 1 & x & 0 & -gy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ex & 0 & -ey & 1 & x & y \end{bmatrix}$$

\*Pour un matériau élastique, homogène et isotrope en contraintes planes dans l'élasticité plane en 2D, la matrice d'élasticité [D] s'écrit :

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

\*Pour les problèmes en déformation plane la matrice d'élasticité est donnée en 2D :

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix}$$

## ANNEXE B

\*Les matrices [p] et [Q] pour l'élément secteur développé SBS5 en coordonnées polaire sont données respectivement comme suit

$$[p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\theta & r & r\theta & 0 & (r^2 - (1+e)\theta^2)/2 & \theta/2 & 0 & (\theta^2 - gr^2)/2 \\ 0 & 1 & r & 0 & (\theta^2 - (1+e)r^2)/2 & \theta & r\theta & r/2 & (r^2 - g\theta^2)/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[Q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & \theta & 0 & r & 0 & 0 & -gr \\ \frac{1}{r} & 0 & -\frac{\theta}{r} & 1 & \theta + \frac{\theta}{r} & \frac{1}{r} & \left(\frac{1}{r} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{\theta^2}{2}(e+1)\right) + 1\right) & \frac{\theta}{2r} & -\frac{g\theta}{r} & \frac{1}{2r}(\theta^2 - r^2) \\ 0 & -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & 1 - r(e+1) - \frac{1}{2r}(\theta^2 - r^2(e+1)) & -\frac{\theta}{r} & -\frac{\theta}{r}(e+1) & \frac{1}{2r} & \left(r - \frac{1}{2r}(r^2 - g\theta^2)\right) & \frac{\theta}{r} \end{bmatrix}$$

## Références bibliographiques

- [Allm.88] Allman D.J., Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 26, pp. 2645-2655, 1988.
- [Argy.60] Argyris J. H. and Kelsey S., *Energy theorems and Structural Analysis*, Butterworth, London, 1960.
- [Ashw.71a] Ashwell D.G., Sabir A.B., and Roberts T.M, Further studies in the application of curved finite elements to circular arches, *IJMS*, Vol. 13, pp. 507-517, 1971.
- [Ashw.71b] Ashwell D.G., and Sabir A.B., Limitation of certain curved finite elements applied to arches, *IJMS*, Vol. 13, pp. 133-139, 1971
- [Ashw.72] Ashwell D.G., and Sabir A.B., A new cylindrical shell finite element based on simple independent strain functions, *International Journal of Mechanical Sciences* Vol. 14, pp. 171-183, 1972.
- [Bela.00] Belarbi M.T., Développement de nouveaux éléments finis à modèle en déformation, application linéaire, Thèse de Doctorat, Université de Constantine, 235 pages, Février 2000.
- [Bela.05] Belarbi M.T., and Maalam T., On improved rectangular finite element for plane linear elasticity analysis, *Revue Européenne de Génie Civil*, Vol. 14, pp. 985-997, 2005.
- [Bela.98] Belarbi M.T., and Charif A., Nouvel Element Secteur basé sur le modèle de Déformation avec rotation dans le plan, *Revue Européenne des éléments finis*. Vol.7, No. 4, pp. 439-458,1998.
- [Bela.99] Belarbi M.T., and Charif A., Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses Vol. 7(4), pp. 439-458, 1999.
- [Belo.05] Belounar L., and Guenfoud M., A new rectangular finite element based on the strain approach for plate bending, *Thin-Walled Structures*, Vol. 43, pp. 47-63, 2005.
- [Belo.14] Belounar L.,Guerraiche K., A new strain based brick element for plate bending, *Alexandria Engineering Journal*, Vol. 53, No.1, pp. 95-105,2014.
- [Belo.19a] Belounar A., Benmebarek S., Houhou M. N., and Belounar, L., Static, Free

Vibration, and Buckling Analysis of Plates Using Strain-Based Reissner–Mindlin Elements,” *International Journal of Advanced Structural Engineering*, Vol. **11**(2), pp. 211–230, 2019.

[Belo.19b] Belounar A., *Eléments finis membranaires et flexionnels à champ de déformation pour l’analyse des structures*, Université Mohamed Khider-Biskra, thèse doctorat, 2019.

[Belo.20a] Belounar A., Benmebarek S., Houhou M.N., and Belounar L., Free Vibration with Mindlin Plate Finite Element Based on the Strain Approach, *Journal of The Institution of Engineers (India): Series C*, Vol. 101(2), pp. 331-346, 2020.

[Belo.20b] Belounar A., Benmebarek S., and Belounar L. Strain based triangular finite element for plate bending analysis, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 27(8), pp. 620-632, 2020.

[Berb.84] Berbbia C.A, Telles J.C., and Wrobel Boundary L.C, *Element* Springer Berlin 1984.

[Bous.20] Boussem F., and Belounar L., A Plate Bending Kirchhoff Element Based on Assumed Strain Functions, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 12(4), pp. 935-952, 2020.

[Bous.21a] Boussem F., Belounar A., and Belounar L., Assumed Strain Finite Element for Natural Frequencies of Bending Plates, *World Journal of Engineering*, 2021. <https://doi.org/10.1108/WJE-02-2021-0114>

[Bous.21b] Boussem F., *Formulation des éléments finis à champ déformation pour l'étude dynamique des structures minces*, Université Mohamed Khider - Biskra.

[Bouz.19] Bouzidi L., Belounar L., and Guerraiche K., Presentation of a New Membrane Strain-Based Finite Element for Static and Dynamic Analysis, *International Journal of Structural Engineering*, Vol. 10(1), pp. 40-60,2019.

[Bou.05] Bouzrira C., Sabir. A. B., and Nemouchi Z., A sector inplane finite element in polar coordinates with rotational degree of freedom, *Archives of Civil Engineering*, Vol. 51, pp. 471-483, 2005.

[Bou.87] Bouzrira C., *Finite element analysis for general plane elasticity*, Msc. Thesis, University of Walles College of Cardiff (G.B.), 1987.

[Bouz.15] Bouzriba. A., and Bouzrira C., Sector element for analysis of thick cylinders

exposed to internal pressure and change of temperature, *Gradevinar*, Vol. 67, pp. 547-555, 2015.

[Cen.07] Cen S., Chen X.M., and Fu X.R., Quadrilateral membrane family formulated by the quadrilateral area coordinate method, *Comput Meth Appl Mech.Eng* ,Vol. 196,pp.43-53 ,2007

[Cen.11] Cen S., Zhou M.J., and Fu X.R., A 4-node hybrid stress-function (HS-F) plane element with drilling degrees of freedom less sensitive to severe mesh distortions, *Computer Struct*, Vol. 89, Nos.5-6, pp. 517-528, 2011.

[Cen.15] Cen S., Zhou P.L, Li C.F., and Wu C.J., An unsymmetric 4-node, 8-DOF plane membrane element perfectly breaking through Mac Neal's theorem, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 103, No. 7, pp.469-500,2015.

[Chen.04] Chen X.M., Cen S., Long Y.Q., and Yaob Z.H., Membrane elements insensitive to distortion using the quadrilateral area coordinate method. *Computers, Structures*, Vol. 82, No.1, pp. 35-54, 2004.

[Cheu.00] Cheung Y.K., Zhang. Y.X., and Chen W.J., A refined nonconforming plane quadrilateral element, *Computers and Structures*, Vol. 78,pp. 699-709,2000.

[Choo.06] Choo Y.S., Choi N., and Lee B.C., Quadrilateral and triangular plane elements with drilling degrees of freedom based on the hybrid Trefftz method, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 42, pp. 1002-1008, 2006.

[Cook.86] Cook R.D., On the Allman triangle and a related quadrilateral element, *Comput Struct*, Vol. 22, pp.1065-1067, 1986.

[Cook.74] Cook R.D., Improved two-dimensional finite element, *Journal of Structural Division*, Vol. 100,pp. 1851-1863,1974.

[Dai.07] Dai K.Y., and Liu G.R., Free and forced vibration analysis using the smoothed finite element method. *Journal of sound and vibration*, Vol. 301, No.3, pp.803- 820, 2007.

[Der.84] Der Avanessian G.V., Finite element analysis of curved box girder bridges, Phd thesis University college Cardiff,1984.

[Djou.03] Djoudi M.S., and Bahai H., A shallow shell finite element for the linear and non-linear analysis of cylindrical shells, *Engineering Structures*, Vol. 25, pp. 769-778, 2003.

- [Djou.04a] Djoudi M.S., and Bahai H., A cylindrical strain-based shell element for vibration analysis of shell structures, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 40, pp. 1947-1961, 2004.
- [Djou.04b] Djoudi M.S. and Bahai H., Strain-based finite element for vibration of cylindrical panels with openings, *Thin-Walled Structures*, Vol. 42, pp. 575-588, 2004.
- [Djou.90] Djoudi M.S., Strain based Finite Elements for linear and geometrically non-linear analysis of structures, PhD Thesis University of Walles College of Cardiff (G.B.), 1990.
- [Ergat.68] Ergatoudis B.M., and Irons O.C. Zienkiewicz, Curved isoparametric, “quadrilateral” elements for finite element analysis, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, Issue 1, pp. 31-42,1968.
- [Fort.19] Fortas L., Belounar L., and Merzouki T., Formulation of a new finite element based on assumed strains for membrane structures, *International Journal of Advanced Structural Engineering*, Vol. 11, Supplement 1, pp. 9-18, 2019.
- [Fort.20] Fortas L., Investigation des éléments finis non conforme pour l'analyse des structures, Université Mohamed Khider - Biskra, 2020.
- [Gira.97] Girard A., Dynamique des structures Technique d'analyse et essai Tech L'ingénieur .Mécanique des éléments tournants, Vol .Tib185D40 , oct1997
- [Guen.18] Guenfoud H., Humeur M., Ziou H. and Guenfoud M., A consistent triangular thin flat shell finite element with drilling rotation based on the strain approach. *International Journal of Structural Engineering*, Vol.9, No. 3, pp.191-223, 2018.
- [Guer.14] Guerraiche, K., Eléments finis d'Élasticité Plane et de Volume Basés sur l'Approche En Déformation, Université Mohamed Khider - Biskra, 2014,
- [Guer.18] Guerraiche K., Belounar L. and Bouzidi L., A new eight nodes brick finite element based on the strain approach, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 10, pp. 186199, 2018.
- [Hama.06] Hamadi D., Analysis of Structures by Non-conforming Finite Elements, Phd Thesis, Civil Engineering Département, Biskra University, Algeria, pp.130, 2006.
- [Hama.16] Hamadi D., Ayoub A., and Maalem T., A new strain-based finite element for plane elasticity problems, *Engineering Computations*, Vol. 33, pp.562-579, 2016.

- [Hime.11] Himeur M., and Guenfoud M., Bending triangular finite element with a fictitious fourth node based on the strain approach, *European Journal of Computational Mechanics*, Vol.20 (7-8), pp.455-485, 2011.
- [Hime.15] Himeur M., Zergua A. and Guenfoud M., A Finite Element Based on the Strain Approach Using Airy's Function, *Arabian Journal for Science and Engineering*, Vol. 40, pp. 719-733, 2015.
- [Khio.20a] Khiouani H.E., Belounar L.,and Houhou M. N., A New Three-Dimensional Sector Element for Circular Curved Structures Analysis, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 12(1), pp. 165-174,2020.
- [Khio.20b] Khiouani H.E., Contribution de l'Approche En déformation pour la Modélisation Des Structures Courbes, Université Mohamed Khider Biskra, 2020.
- [Kugl.10] Kugler S., Fotiu P.,and Murin J., A highly efficient membrane finite element with drilling degrees of freedom, *Acta Mechanica*, Vol. 213,pp. 323-348,2010.
- [Li.14] Li G., and Huang L.H., A-node plane parameterized element based on quadrilateral area coordinate, *Engineering Mechanics*, Vol. 31,No.7,pp.15-21,2014.
- [Li.011] Li Z.H., and Izzuddin B.A., A mixed co-rotational curved quadrilateral shell element, *International Journal of Structural Engineering*, Vol.2, No.2, pp.188-208, 2011.
- [Lin.90] Lin H., Tang L.M., and Lu H.X., The quasi-conforming plane element with rotational degree of freedom, *Computers and Structures Mechanics Applications Chinese*, Vol. 7, pp. 23-31, 1990.
- [Long.94] Long Y., and Xu Y., Generalized conforming quadrilateral membrane element with vertex rigid rotational freedom, *Comput Struct*, Vol.52, pp.749-755, 1994.
- [MacN.85] Mac Neal R.H., and Harder R.L. R., A proposed standard set of problems to test finite element accuracy, *Finite Element in Analysis and Design*.Vol.11, pp.3-20, 1985.
- [MacN.88] Mac Neal R.H., and Harder R.L., A refined four node membrane with rotational degrees of freedom. *Computers and Structures*, 1988.
- [Made.12] Madeo A., Zagari G., and Casciaro R., An isostatic quadrilateral membrane finite element with drilling rotation and no spurious modes, *Finite Elem. Anal. Des*. Vol. 50, No.1, pp. 21-32, 2012.
- [Mess.19a] Messai A., Belounar L., and Merzouki, T., Static and free vibration of plates

with a Strain Based brick element, European Journal of Computational Mechanics, 2019  
[online] <https://doi.org/10.1080/17797179.2018.1560845>.

[Mess.19b] Messai A., Contribution de l'approche En Déformation Dans l'analyse Statique et Dynamique Des Structures, Université Mohamed Khider - Biskra,2019.

[Naga.99] Nagashima T., Node by node meshless approach and its application to structural analysis, International Journal Methods in Engineering Vol. 46, pp. 341-385, 1999.

[Olson.70] Olson M.D., and Lindberg G.M., Annular and circular sector finite element for plate bending, IJMS. Vol. 12, pp. 17-33, 1970.

[Pakn.07] Paknahad M., Noorzai J, Jaafar M.S., and Thanon W.A., Analysis of shear wall structure using optimal membrane triangle element, Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 43, No.9, pp. 861-869, 2007.

[Pian.84] Pain T.H, and Sumihara K., Rational approach for assumed stress finite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, pp.1685-1695, 1984.

[Pilt.95] Piltner R.,and Taylor R.L., A quadrilateral mixed finite element with two enhanced strain modes, Int. J. Numer Methods Eng, Vol. 38, pp. 783-808, 1995.

[Pilt.99] Piltner R., Taylor R.L., A symptomatic construction of B-BAR functions for linear and non-linear mixed-enhanced finite elements for plane elasticity problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.44, No.5, pp.615- 639, 1999.

[Raju.69] Raju I.S., and Rao A.K., Stiffness matrices for sector elements, AIAA J, Vol.7, pp.156-157, 1969.

[Raju.73] Raju I.S., Krishna A.V and Rao A.K., Sector elements for matrix displacement analysis, IJNME, Vol. 10, pp. 6553-563,1973.

[Rebi.13] Rebiai C., and Belounar L., A new strain based rectangular finite element with drilling rotation for linear and nonlinear analysis, Arch. Civ. Mech. Eng., Vol. 13, pp. 72-81, 2013.

[Rebi.14] Rebiai C., and Belounar L., An effective quadrilateral membrane finite element based on the strain approach , Measurement, Vol. 50, No. 1, pp.263-269, 2014.

[Reis.19] Reissner Mindlin elements, International Journal of Advanced Structural

Engineering, Vol. 11, pp. 211-230, 2019.

[Reka.80] Reka V., Problèmes de la théorie de l'élasticité, Edition Mir Moscou, 1980.

[Reza.12] Rezaiee Pajand M., and Yaghoobi M., "Formulating an effective generalized four-sided element", *Eur. J. Mech. A-Solid*, Vol. 36, pp. 141-155, 2012.

[Reza.13] Rezaiee Pajand M., and Karkon M., "An effective membrane element based on analytical solution", *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 39, No.1, pp. 268-279, 2013.

[Reza.14] Rezaiee Pajand M., and Yaghoobi M., "A robust Triangular Membrane Element", *Latin American Journal of Solids and Structures* Vol. 11, pp.2648-2671, 2014.

[Reza.15] Rezaiee Pajand M., and Yaghoobi M., "Two new quadrilateral elements based on strain states", *Civ. Eng. Inf. J.*, Vol 48(1), pp. 133-156, 2015.

[Reza.18] Rezaiee Pajand M., and Yaghoobi M., "Geometrical nonlinear analysis by plane quadrilateral element", *Sci. Ira.*, Vol. 25(5), pp. 2488-2500, 2018.

[Reza.19a] Rezaiee Pajand M., Gharaei-Moghaddam N., and Ramezani M.R., "Two triangular membrane elements based on strain", *Int. J. Appl. Mech.*, Vol. 11(1), 2019.

[Reza.19b] Rezaiee Pajand M., Gharaei-Moghaddam N., and Ramezani MR., "A new higher-order strain-based plane element", *Scientia Iranica A*, Vol.26(4) ,pp. 2258-2275, 2019.

[Reza.20] Rezaiee Pajand M., Gharaei-Moghaddam N., and Ramezani M.R., "Strain-based plane element for fracture mechanics problems", *Theoretical and applied Fracture Mechanics* Vol. 108, pp. 25-69, 2020.

[Sabi.83] Sabir A. B., "A new class of Finite Elements for plane elasticity problems", *CAFEM 7th, International Conference of Structural Mechanics In Reactor Technology*, Chicago, 1983.

[Sabi.85] Sabir A. B., "A rectangular and triangular plane elasticity element with drilling degrees of freedom", Chapter 9 in *Proceeding of the 2nd International Conference on Variational Methods in Engineering*, Southampton University, Springer-Verlag, Berlin, pp. 17-25, 1985.

[Sabi.86] Sabir A. B., and Salhi H. Y., "A strain based finite element for general plane

elasticity in polar coordinates, Res. mechanica, Vol. 19, pp. 1-16, 1986.

[Sabi.95a] Sabir A. B., and Sfindji A., Triangular and Rectangular plane elasticity finite elements, Thin-Walled Structures, Vol. 21, pp. 225-232 ,1995.

[Sabi.95b] Sabir A. B. and Djoudi M.S., Shallow shell finite element for the large deflection geometrically non-linear analysis of shells and plates. Thin-Walled Structures Vol. 21, p p. 253-267, 1995.

[Sawk.71]. Sawko F., and Merriman P.A., An annular segment finite element for plate bending, International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 3, pp. 119129, 1971.

[Smit.04] Smith I.M., and Griffith D.V, Programming the finite Element Method, second ed., John Wiley's, Sons, Ltd, UK, 2004.

[Smit.88] Smith I.M., and Griffith D.V., Programming the Finite Element Method, second ed., John Wiley's, Sons, UK, 1988.

[Sze.00] Sze K.Y., On immunizing five beta hybrid stress element models from (trapezoidal locking in practical analyses). International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.47, No.4, pp.907-920, 2000.

[Sze.92] Sze K.Y, Chen W. and Cheung, Y.K., An efficient quadrilateral plane element with drilling degrees of freedom using orthogonal stress modes, Computer and Structures, Vol. 24, No 5, pp. 695-705,1992.

[Tayl.76] Taylor T.L, Beresford, P.J., and Wilson, E.L., A non-conforming element for stress analysis, Int .J. Numer. Methods Engen., Vol. 10,No.6,pp. 1211-1219,1976.

[Timo.51] Timoshenko S.P., Goodier J.N., Theory of elasticity, Third edition, McGraw Hill, New york, 1951.

[Timo.70] Timoshenko S.P., and Goodier J.N., Theory of Elasticity, 3rd Edition. McGraw-Hill, New York, 1970.

[Wang.14] Wang C.Z., Zhang X., and Hu P., Quadrilateral 4-node quasi-conforming plane element with internal parameters. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 46, No.6, pp. 971-976, 2014.

[Xie.04] Xie X., and Zhou, T., Optimization of stress modes by energy compatibility for 4-

node hybrid quadrilaterals, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.59, No.2, pp. 293-313, 2004.

[Xie.17] Xie Y., Zheng G., and Hu P., Incompatible modes with Cartesian coordinates and application in quadrilateral finite element formulation, Computational and applied Mathematics, Vol.36, No.2, pp. 859-875, 2017.

[Yunu.89] Yunus S.M., Saigle, S., and Cook R.D., On improved hybrid finite element with rotational degrees of freedom, IJME, Vol. 28,pp. 785-800, 1973.

[Zoua.16] Zouari W., Hammadi F., and Ayad R., Quadrilateral membrane finite elements with rotational DOFs for the analysis of geometrically linear and nonlinear plan problems, Computers and Structures ,Vol. 173,pp. 139-149,2016.

<https://doi: 10.22034/JSM.2019.1867106.1430>.