

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER BISKRA, ALGÉRIE
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES ET SCIENCES DE LA NATURE ET
DE LA VIE

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat en Mathématiques Appliquées

Option : STATISTIQUES

Par : LALA BOUALI Dalal

Estimation de l'espérance conditionnelle des queues de distribution (C.T.E) pour les données complètes

Directeur de thèse : Pr. BENATIA Fatah

Devant le jury :

Mr. BRAHIMI Brahim	Professeur	Université de Biskra	Président
Mr. BENATIA Fatah	Professeur	Université de Biskra	Directeur de thèse
Mr. YAHIA Djabrane	Professeur	Université de Biskra	Examineur
Mr. HARIZ BEKKAR Lourabi	MCA	Université d'El-Oued	Examineur



Présenté par :

LALA BOUALI Dalal

Estimation de l'espérance conditionnelle des queues de distribution (C.T.E) pour les données complètes

THÈSE

Pour l'obtention du diplôme de Doctorat en Mathématiques Appliquées

Option : STATISTIQUES

Soumettre à

L'université Mohamed Khider Biskra, Algérie

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques

Directeur de thèse :

Pr. BENATIA Fatah

Année : 2021/2022

Dédicace

Louange à Dieu tout puissant, qui m'a permis de voir ce jour tant attendu.

Je dédie cette thèse à :

Mes chers parents. Qui n'ont jamais cessé de m'encourager et me conseiller. Ils m'ont beaucoup aidée tout en long de mon chemin, grâce à leur amour, leur dévouement, leur compréhension et leur patience sans jamais me quitter des yeux ni baisser les bras et leurs soutien moral et matériel, je ne saurais jamais traduire ce qu'on ressent vraiment envers eux.

Mon frère et mes sœurs. Pour leur indulgence en mon faveur qu'ils touchent ici l'affection la plus intime qu'on ressent à leur égard.

Mon mari. Tu as toujours offert soutien et réconfort, j'exprime envers toi une profonde admiration.

Mes amis et collègues. Pour leur compagnie et bons moments passés ensemble.

Remerciements

Ce travail de recherche a été accompli au laboratoire de Mathématiques appliquées "LMA" et de l'Université Mohamed Khider Biskra, dirigé par le Pr. Benatia Fatah. Je le remercie vivement pour m'avoir accueillie comme doctorante dans son laboratoire.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse le Professeur BENATIA Fatah et le Professeur BRAHIMI Brahim. Je leur adresse mes plus sincères remerciements pour la confiance qu'ils m'ont accordée, pour leur disponibilité et leur précieux conseils et d'avoir permis à ce travail de voir le jour. Merci infiniment.

J'adresse mes sincères remerciements à YAHIA Djabrane et HARIZ BEKKAR Lorabi pour le temps qu'ils ont consacré à rapporter cette thèse. Je remercie également et le Professeur BRAHIMI Brahim d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Table des matières

Dédicace	1
Remerciements	3
Introduction générale	9
1 Notions de bases sur la théorie des valeurs extrêmes	11
1.1 Concept dans la théorie des valeurs extrêmes	12
1.2 Distributions des valeurs extrêmes	13
1.3 Distribution des excès	16
1.4 Caractérisation des domaines d'attraction	17
1.4.1 Les fonctions à variations régulières	18
1.4.2 Domaine d'attraction de Fréchet	19
1.4.3 Domaine d'attraction de Weibull	20
1.4.4 Domaine d'attraction de Gumbel	21
1.5 Estimation des quantiles extrêmes	22
1.6 Classe de distribution à queue lourde	23
1.6.1 Queue d'une loi de probabilité	23

1.6.2	Type des queues	24
1.6.3	Robustesse statistique	25
2	Mesures de risque	27
2.1	Notations et définitions	28
2.2	Quelques mesures de risque usuelles	34
2.2.1	La variance	34
2.2.2	La Value-at-Risk	34
2.2.3	La Tail Value-at-Risk	36
3	L'estimateur robuste de l'espérance conditionnelle des queues dans le cas des distributions de type Pareto	41
3.1	Introduction	41
3.2	Définition de l'estimateur robuste	44
3.3	Normalité asymptotique	45
3.4	Étude de la simulation	51
3.5	Robustesse	53
4	Une nouvelle classe de distribution en tant que mélange fonctionnel fini utilisant des poids fonctionnels	57
4.1	Introduction	57
4.2	la famille des distributions et certaines de ses propriétés	59
4.2.1	<i>Construction de la famille</i>	60
4.2.2	<i>Quelques propriétés de la famille</i>	62
4.3	la distribution FWE et ses propriétés	64

TABLE DES MATIÈRES	7
4.3.1 Définition	64
4.3.2 Moments de la distribution FWE	67
4.4 Applications	69
4.4.1 Données sur les temps de défaillance	70
4.4.2 Données de temps de survie	78
Conclusion et perspective	83
Bibliographie	83
Résumé	93
Abstract	95

Introduction générale

La gestion des risques est un sujet de préoccupation en finance et en actuariat. La protection contre les risques financiers et actuariels est essentielle pour anticiper les crises financières ou les sinistres d'assurance majeurs. Pour cela, il existe de nombreux outils pour quantifier et prédire les risques (mesures des risques). Ils permettent d'évaluer le niveau de danger de ce risque, aussi de comparer différents risques entre eux. La quantification, la prévention, la comparaison et la prévision des risques sont des éléments essentiels de notre société.

L'une des mesures de risque les plus connues et utilisées est la Value-at-Risk (ou VaR), introduite dans les années 1990 par Morgan (1997). (voir Jorion (1997) pour plus de détails). L'idée du VaR est la suivante : on fixe un seuil α et on calcule une valeur $VaR(\alpha)$ qui sera telle que la probabilité de survenue de la catastrophe soit inférieure à α . Ainsi, $VaR(\alpha)$ peut être considéré comme le montant de capital supplémentaire et les besoins commerciaux afin de réduire la probabilité de faire faillite à α .

En termes statistiques, la VaR de niveau $\alpha \in]0, 1[$ correspond au niveau $(1 - \alpha)$ quantile de la fonction de distribution des pertes. Cette mesure de risque présente plusieurs défauts. Il ne donne qu'une information ponctuelle au quantile $q(\alpha)$ et aucune information au-delà de ce point ; il ne prend pas en compte l'importance de la catastrophe lorsqu'elle se produit mais uniquement sa fréquence.

Pour répondre au besoin de principes pratiques théoriques, Artzner *et al.* (1999) a introduit le concept de mesure cohérente des risques. Une mesure de risque est dite cohérente

si elle satisfait les quatre propriétés : monotonie, homogénéité positive, invariance par translation et sous-additivité.

Malheureusement, la mesure de risque VaR n'est pas sous-additive, ce qui implique qu'elle n'est pas cohérente. Pour cette raison, de nombreux auteurs ont proposé de remplacer la norme VaR par d'autres mesures de risque telles que Conditional Tail Expectation (CTE), également appelée dans la littérature sur la mesure de risque Tail Value-at-Risk ($TVaR$) ou Expected Shortfall (ES).

Cette mesure de risque donne des informations sur la distribution au-delà du $VaR(\alpha)$. Ainsi, contrairement la VaR , il prend en compte les informations contenues dans la queue de la distribution qui sont essentielles dans le contexte financier. La CTE a été étudié par de nombreux auteurs tels que : Artzner *et al.* (1999), Cai and Tan (2007), Cai *et al.* (2015), Tasche (2002), Brazauskas *et al.* (2008), Landsman and Valdez (2003).

L'application de ces mesures alternatives a suscité un intérêt croissant dans la littérature et l'industrie. En particulier, en raison de ses propriétés et de son efficacité dans différents domaines tels que la finance et les actuaires, l'utilisation et les études sur la CTE continuent d'augmenter.

Chapitre 1

Notions de bases sur la théorie des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes a pour objectif l'étude du comportement asymptotique des grandes observations d'un échantillon de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. L'approche standard en théorie des probabilités place l'accent sur le comportement en moyenne et la variabilité autour de la moyenne, par le biais d'outils probabilistes comme par exemple la loi des grands nombres ou le théorème central limite. Le théorème fondamental de la théorie des valeurs extrêmes (Connu sous le nom de Théorème de Fisher-Tippett) donne quant à lui les lois limites possibles du maximum de l'échantillon et permet ainsi d'avoir une certaine connaissance sur la queue de distribution. L'utilisation des lois des valeurs extrêmes repose sur des propriétés de statistiques d'ordre et sur des méthodes d'extrapolation. Plus précisément, elle repose principalement sur les distributions limites des extrêmes et leurs domaines d'attraction.

1.1 Concept dans la théorie des valeurs extrêmes

Le développement de la théorie des extrêmes était principalement motivé par la curiosité intellectuelle. La théorie des valeurs extrêmes est apparue entre 1920 et 1940 grâce aux travaux de Fisher and Tippett (1928), de Gumbel (1935) et de Gnedenko (1943) et a ensuite été repris et simplifié par Pickands (1975). C'est une branche de statistique qui s'intéresse aux valeurs extrêmes des distributions de probabilité (les événements rares qui peuvent conduire à des pertes financières importantes). Cette théorie est appliquée en hydrologie pour prévoir les crues, en démographie pour prévoir la distribution de probabilité de l'âge maximum que l'être humain pourra atteindre, en assurance pour prévoir les grands sinistres, en finance ou encore en météorologie.

En statistique classique, on s'intéresse souvent au comportement des données au voisinage de leur moyenne. Sur la base de la loi des grands nombres, la moyenne de l'échantillon ou moyenne empirique est utilisée comme estimateur consistant de la moyenne. De plus, le théorème central limite assure un comportement asymptotiquement normal de la moyenne d'échantillon. Il est nécessaire de développer des techniques particulières basées sur les valeurs extrêmes d'un échantillon, sur des quantiles extrêmement élevés ou sur les probabilités de queue (c'est à dire dans la zone éloignée de sa valeur centrale). En ce sens, nous pouvons considérer la théorie des valeurs extrêmes comme la contre partie de la théorie de la statistique classique.

On peut penser qu'un pneu de voiture peut échouer de deux manières, les deux théories concernent l'échec. Chaque jour de conduite usera un peu le pneu, et après une longue période, la décomposition accumulée entraînera une défaillance (c'est-à-dire que les sommes partielles dépassent un certain seuil). Mais aussi en conduisant, on peut heurter un nid de poule ou on peut accidentellement heurter le trottoir. De tels incidents n'ont aucun effet ou le pneu sera crevé. Dans ce dernier cas, c'est juste une grande observation qui provoque l'échec, ce qui signifie que les maxima partiels dépassent un certain seuil.

Pour la suite, considérons $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ un échantillon de n variables aléatoires indé-

pendantes et identiquement distribuées de fonction de répartition commune F .

1.2 Distributions des valeurs extrêmes

La théorie asymptotique des échantillons extrêmes a été développée en parallèle avec la théorie de la limite centrale, et en fait les deux théories présentent une certaine ressemblance. Lorsque nous étudions un phénomène aléatoire, nous nous intéressons principalement à la partie dite centrale de la loi qui modélise au mieux le phénomène considéré (calcul de l'espérance, de la médiane, de la variance, utilisation du théorème central limite, etc.). Cependant, l'étude des «grandes» valeurs (ou de manière équivalente des «petites» valeurs) du phénomène est parfois indispensable lorsqu'il s'agit, par exemple, de quantifier le risque pour une compagnie d'assurance (par exemple, connaître la fréquence d'une rivière, etc...). La théorie des valeurs extrêmes propose un cadre théorique solide pour étudier la loi d'un extrême d'une suite des variables aléatoires réelles même si la loi du phénomène est inconnue.

Considérons les résultats d'un nombre d'observations fini N liées à une distribution statistique infinie. Parmi ces résultats, il y aura toujours une valeur (ou plus) qui dépasse toutes les autres tout en restant finie, puisque évidemment on ne peut observer que des valeurs finies. Le but est de fixer cette valeur maximale et d'analyser comment elle augmente avec le nombre d'observations.

Nous sommes maintenant en mesure d'identifier le théorème fondamental en théorie des valeurs extrêmes qui donne la classe des distributions non dégénérées (on dit une distribution dégénéré si elle converge vers une valeur fixe constante) du maximum d'un échantillon de variables aléatoires iid qui ne peuvent converger en loi que vers 3 types de loi. Cette classe de distribution s'appelait la classe de distribution des valeurs extrêmes.

Théorème 1.2.1 (Fisher and Tippett (1928), Gnedenko (1943)). Soit X_1, X_2, \dots, X_n une suite des variables aléatoires iid de fonction de répartition F et $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

S'il existe une paire de suites (a_n, b_n) , telle que $(a_n)_{n \geq 1} > 0$, $(b_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}$ et une distribution non dégénérée H_γ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = H_\gamma(x),$$

alors $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$:

$$H_\gamma(x) = \begin{cases} \exp -(1 + \gamma x)^{-1/\gamma} \mathbf{1}_{\{1 + \gamma x > 0\}} & \text{si } \gamma \neq 0 \\ \exp (-e^{-x}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La distribution limite H_γ est appelée fonction de répartition de la loi des valeurs extrêmes appartient à la famille des lois de Gumbel, des lois de Fréchet, ou des lois de Weibull. Ces familles peuvent être regroupées dans la classe des lois d'extrêmes généralisées, en anglais "Generalized Extreme Value Distribution" notée GEV. Une preuve détaillée de ce théorème se trouve dans [Resnick \(1987\)](#) et dans [Embrechts et al \(1997\)](#). L'unification du comportement du maximum en une seule fonction de répartition facilite grandement l'étude du comportement du maximum. De ce résultat asymptotique, il découle immédiatement que le comportement de la queue de distribution d'une fonction est complètement caractérisé par un unique paramètre, noté γ qui s'appelle l'indice des valeurs extrêmes. Le signe de ce paramètre est un indicateur essentiel sur la forme de la queue de distribution. De façon précise, si on propose $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$ le point terminal de F et si on définit une fonction à variation lente l comme une fonction positive satisfaisant $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = 1$ pour $\lambda > 0$, on peut alors distinguer trois cas de domaines d'attraction :

- Si $\gamma > 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de Fréchet, et l'on note $(F \in \mathbf{D}_F)$. Il contient toutes les lois dont la fonction de survie est décroissante comme une fonction puissance, i.e. les lois à queues lourdes ou lois de type Pareto : $1 - F(x) = x^{-1/\gamma} l_F(x)$ où l_F est une fonction à variation lente. Alors, les lois de ce domaine ont un point terminal x_F infini.

• Si $\gamma < 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de Weibull, et l'on note ($F \in \mathbf{D}_W$). Ce domaine regroupe toutes les lois dont le point terminal x_F fini. On a alors, $1 - F(x) = (x_F - x)^{-1/\gamma} l_F((x_F - x)^{-1})$ où l_F est également une fonction à variations lentes.

• Si $\gamma = 0$, on dit que F est dans le domaine d'attraction de Gumbel, et l'on note ($F \in \mathbf{D}_G$). Ce sont les lois dont la fonction de survie est à décroissance exponentielle, i.e. les lois à queues légères. Le point terminale x_F peut être fini ou infini.

Dans le tableau [1.1](#) on regroupe quelques lois selon leur domaine d'attraction, et pour une classification de nombreuses lois, voir [Embrechts et al \(1997\)](#), page 145.

Fréchet ($\gamma > 0$)	Weibull ($\gamma < 0$)	Gumbel ($\gamma = 0$)
Burr	Beta	Weibull
Pareto	Uniforme	Gumbel
Fréchet	ReverseBurr	Gamma
Cauchy		Normale
Student		Logistique
Chi-deux		Log-normale
Log-gamma		Exponentielle
Log-logistique		Benktander-type-I
$\alpha - Stableavec\alpha < 2$		Benktander-type-II

TABLE 1.1 – Quelques lois usuelles classées selon leurs domaines d'attraction

Une autre approche "Peaks Over Threshold" (notée POT) alternative à la loi GEV peut donner des informations sur la queue de distribution. Cette modélisation (des dépassements au dessus d'un seuil) a été développée à travers l'approximation de la loi des excès au-delà d'un seuil. Le théorème suivant illustre que la loi des dépassements de seuil (aussi appelée loi des excès) permet de modéliser le comportement des valeurs extrêmes.

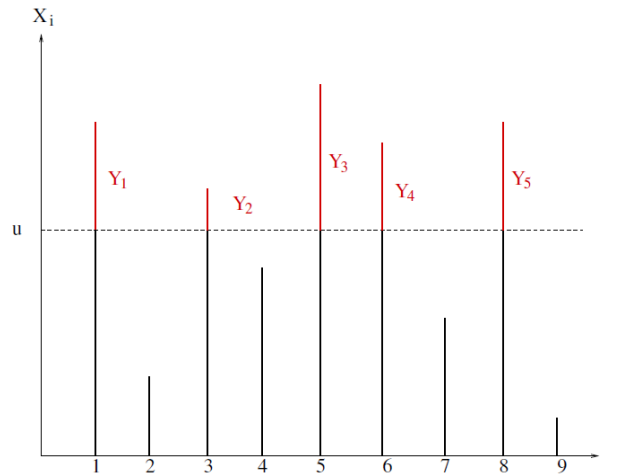


FIGURE 1.1 – "Peaks Over Threshold" (notée POT)

1.3 Distribution des excès

Soit un échantillon de variables aléatoires i.i.d. Y_1, \dots, Y_n et $u < x_F$. F_u la fonction de répartition des excès au delà du seuil u , elle représente la loi de X sachant que $\{X > u\}$.

On peut la écrire par la fonction suivante :

$$F_u(y) = P(Y \leq y | X > u) = P(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(u + y) - F(u)}{\bar{F}(u)}. \quad (1.3.1)$$

Le théorème suivant dû à [Balkema and Haan \(1974\)](#) et [Pickands \(1975\)](#) donnent un résultat très précis sur l'approximation de cette fonction de répartition.

Théorème 1.3.1. ([Balkema and Haan \(1974\)](#), [Pickands \(1975\)](#)) Si F appartient à l'un des trois domaines d'attraction de la loi des valeurs extrêmes (Fréchet, Gumbel ou Weibull), et s'il existe $\sigma > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que la loi des excès F_u peut être uniformément approchée par une loi de Paréto généralisée notée $\mathcal{G}_{\gamma, \sigma}$ i.e.

$$\lim_{x \rightarrow y_F} \sup_{y \in]y_F - u[} |F_u(y) - \mathcal{G}_{\gamma, \sigma}(y)| = 0 \quad (1.3.2)$$

où $\mathcal{G}_{\gamma,\sigma}$ est la fonction de répartition de la loi de Pareto Généralisée définie par

$$\mathcal{G}_{\gamma,\sigma}(y) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma y/\sigma)^{-1/\sigma} & \text{si } \gamma \neq 0, \sigma > 0 \\ 1 - \exp(-y/\sigma) & \text{si } \gamma = 0, \sigma > 0. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

définie pour $y \in [0, (y_F - u)]$ si $\gamma \geq 0$ ou $y \in [0, \min(-\sigma/\gamma, y_F - u)]$ si $\gamma < 0$.

Le dernier théorème affirme que La loi de $Y|X > u$ converge vers une unique loi non dégénérée appelée la loi de Pareto Généralisée, en anglais "Generalized Pareto Distribution" notée GPD. Il établit l'équivalence en loi d'une distribution du domaine d'attraction maximum et le comportement limite des excès au-delà d'un seuil assez grand (i.e. la convergence vers une loi de Pareto généralisée). Ainsi, l'exploitation de ces deux théorème nous permettre d'avoir des informations sur la queue de distribution qui représente la modélisation des valeurs extrêmes. Selon les signes de paramètre qui existe dans ces théorème on classe les lois de la statistique en trois familles appelées domaines d'attraction.

1.4 Caractérisation des domaines d'attraction

Un domaine d'attraction est l'ensemble des distributions pour lesquelles la distribution limite du maximum converge vers la même limite GEV. Nous donnerons des conditions sur la fonction de répartition F pour qu'elle appartienne à l'un des trois domaines d'attractions. Différentes caractéristiques des trois domaines d'attractions de Fréchet, Gumbel et Weibull ont été proposées dans [De Haan and Ferreira \(2007\)](#), [Resnick \(1987\)](#) et [Embrechts et al \(1997\)](#). Ces caractéristiques font traction aux classes de fonctions à variation régulière.

Dans la suite, on note $F^{\leftarrow}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F(x) \geq y\}$ l'inverse généralisée de F (avec la convention $\inf\{\emptyset\} = \infty$).

Avant de donner les caractéristiques de chaque domaine d'attraction, une définition utile doit être fournie.

1.4.1 Les fonctions à variations régulières

On traite ici les fonctions à variation régulières qu'elles sont largement répandues dans la théorie des valeurs extrêmes. On résume certains principaux résultats sur ces fonctions, pour plus de détails on pourra consulter [Bingham et al. \(1987\)](#), [Beirlant et al. \(2006\)](#) et [De Haan and Ferreira \(2007\)](#).

Définition 1.4.1. Une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable est à variation régulière à l'infini si et seulement si, il existe un réel α tel que pour tout $x > 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(tx)}{g(t)} = x^\alpha. \quad (1.4.1)$$

Et on note $g \in \mathcal{RV}_\alpha$, α est appelé indice (ou exposant) de la fonction à variation régulière g .

La notion des fonctions à variations régulières à l'infini est liée à celle des fonctions à variations lentes à l'infini.

Remarque 1.4.1. Dans le cas particulier où $\alpha = 0$ (on note $g \in \mathcal{RV}_0$), on dit que g est à variation lente à l'infini, c'est à dire

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(tx)}{g(t)} = 1, \quad \forall x > 0. \quad (1.4.2)$$

Les fonctions à variations lentes sont génériquement notées $l(x)$.

Une fonction à variation régulière d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$ peut toujours s'écrire sous la forme $g(x) = x^\alpha l(x)$, où $l \in \mathcal{RV}_0$.

Ce résultat démontre que l'étude des fonctions à variations lentes à l'infini s'élève à l'étude des fonctions à variations régulières à l'infini.

En utilisant les différents résultats présentés dans les fonctions à variations régulières et à variations lentes à l'infini, nous pouvons caractériser les différents domaines d'attraction. Connaissant la distribution F , nous voulons connaître son domaine d'attraction et

ses constantes de normalisation. On se souvient des conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction de distribution appartienne à un domaine d'attraction.

1.4.2 Domaine d'attraction de Fréchet

Commençons par se souvenir du domaine d'attraction de Fréchet contient les lois dont la fonction de survie est à décroissance polynomiale, c'est-à-dire les lois à queues lourdes ou lois de type Pareto. Les lois de ce domaine ont un point terminal x_F infini. Précisons que dans toute la suite, nous noterons par $\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$, la fonction de survie de F . Et $Q(\cdot)$ l'inverse généralisée de F ; définie par $Q(s) = F(s)^\leftarrow = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq s\}$, $0 < s \leq 1$. Q est aussi appelée fonction de quantile associée à la distribution F . On définit également la fonction de quantile de queue par $U(x) = Q(1 - 1/x)$, $x > 1$.

Théorème 1.4.1. *Une fonction de répartition F ayant pour point terminal x_F appartient au domaine d'attraction de Fréchet ($F \in \mathbf{D}_F$) (avec un indice des valeurs extrêmes $\gamma > 0$) si et seulement si $x_F = +\infty$ et si la fonction de survie \bar{F} est à variations régulières d'indice $-1/\gamma$ qui s'écrit $\bar{F} \in \mathcal{RV}_{-1/\gamma}$ i.e.*

$$\forall x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(t)} = x^{-1/\gamma}. \quad (1.4.3)$$

En d'autres termes, une fonction de distribution F , qui appartient au domaine d'attraction de Fréchet s'écrit sous la forme :

$$F(x) = 1 - x^{-1/\gamma}l(x) \iff \bar{F} = x^{-1/\gamma}l(x) \iff q(\alpha) = \alpha^{-\gamma}L(\alpha^{-1}), \text{ avec } (l, L) \in \mathcal{RV}_0^2 \quad (1.4.4)$$

où $\alpha \in]0, 1[$ est appelé ordre du quantile $q(\alpha)$. Disons qu'il est facile d'obtenir une caractérisation de la fonction de quantile dans le domaine d'attraction de Fréchet.

Dans ce cas, un choix possible pour les suites a_n et b_n est (pour plus de détail voir [Resnick](#))

(1987)) :

$$a_n = \bar{F}^{\leftarrow}(1/n) \text{ et } b_n = 0.$$

Les résultats précédent déclaré par Gnedenko (1943) et dont on trouvera une démonstration simple dans le livre de Resnick (1987) affirme que toute fonction appartenant au domaine d'attraction de Fréchet est une fonction à variations régulières et inversement. Le domaine d'attraction de Fréchet rassemble une grande variété de lois, se reporter au tableau 1.1

1.4.3 Domaine d'attraction de Weibull

Le résultat énoncé par Gnedenko (1943) et démontré par (Resnick (1987), Proposition 1.13), surgit que l'on passe du domaine d'attraction de Fréchet à celui de Weibull par un simple changement de variable dans la fonction de répartition.

Théorème 1.4.2. *Une fonction de répartition F appartient au domaine d'attraction de Weibull avec $\gamma < 0$ si et seulement si $x_F < +\infty$ et la fonction de répartition F définie par*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ F(x_F - 1/x) & \text{si } x > 0. \end{cases} \quad (1.4.5)$$

appartient au domaine d'attraction de Fréchet avec un indice des valeurs extrêmes $-\gamma > 0$ i.e.

$$\forall x > 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x_F - 1/(tx))}{\bar{F}(x_F - 1/t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{1/\gamma}. \quad (1.4.6)$$

Ça signifie que F est une fonction à variation régulière d'indice $1/\gamma$ à l'infini et on note ($F \in \mathcal{RV}_{1/\gamma}$). Par conséquent, $F \in \mathbf{D}_W$ avec un indice de valeur extrême $\gamma < 0$ si et seulement si $x_F < \infty$ et $F(x) = 1 - (x_F - x)^{-1/\gamma} l((x_F - x)^{-1})$ avec $l \in \mathcal{RV}_0$.

Dans ce cas, les suites de normalisation a_n et b_n sont déterminées comme suit :

$$a_n = x_F - F^{\leftarrow}(1 - 1/n) = x_F - U(n) \text{ et } b_n = x_F \quad (1.4.7)$$

Ainsi, il est facile de voir qu'une caractérisation de la fonction de quantile associée est $q(\alpha) = x_F - \alpha^{-\gamma}L(\alpha^{-1})$, pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et $L \in \mathcal{RV}_0$.

1.4.4 Domaine d'attraction de Gumbel

Les résultats liés au domaine d'attraction de la loi de Gumbel sont plus délicats, contrairement aux deux autres domaines. Ce domaine contient les lois dont la fonction de survie est à décroissance exponentielle, i.e. les lois à queues légères. Il n'y a pas de représentation simple pour les lois appartenant au domaine d'attraction de Gumbel. Il peut être décrit à partir des fonctions de type Von Mises (voir [Vonmises \(1954\)](#)), que nous allons commencer à définir.

Définition 1.4.2. (*Fonction de Von Mises*)

Une distribution F avec le point terminal x_F s'appelle une fonction de Von Mises si : $\exists z < x_F$ tel que pour $z < x < x_F$ et $c > 0$

$$\bar{F} = c \exp \left\{ - \int_z^x \frac{dt}{f(t)} \right\}, \quad (1.4.8)$$

où f est une fonction positive absolument continue sur (z, x_F) (par rapport à la mesure de Lebesgue) avec une densité f' vérifiant $\lim_{x \rightarrow x_F} f'(x) = 0$. On appelle f une fonction auxiliaire.

Des exemples des fonctions de Von Mises sont disponibles dans [Embrechts et al \(1997\)](#).

Théorème 1.4.3. La fonction de distribution F avec un point terminal x_F appartient au domaine d'attraction de Gumbel, $F \in \mathbf{D}_W$, si et seulement si il existe un réel $z, z < x < x_F$, tel que

$$\bar{F} = c(x) \exp \left(- \int_z^x \frac{g(t)}{a(t)} dt \right). \quad (1.4.9)$$

Où c et g sont deux fonctions mesurables satisfaisantes $c(x) \rightarrow c > 0, g(x) \rightarrow 1$ lorsque

$x \rightarrow x_F$, et a est une fonction positive absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue), de dérivée de densité a' telle que $\lim_{x \rightarrow x_F} a'(x) = 0$.

Dans ce cas, un choix possible pour les suites de normalisation a_n et b_n pour tout $n > 0$ est

$$a_n = x_F - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\overline{F}(a_n)} \int_{a_n}^{x_F} \overline{F}(y) dy \quad (1.4.10)$$

1.5 Estimation des quantiles extrêmes

Dans cette partie, on supposera que F appartient à l'un des domaines d'attraction défini précédemment. L'estimation des quantiles extrêmes en dehors de l'échantillon pose problème. En effet, on a vu qu'en supposant $n\alpha_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow 1$ implique que $P(Y_{n,n} < q_{\alpha n}) \rightarrow 1$. Par conséquent, on ne peut pas estimer le quantile de manière empirique. Dans une telle situation, l'estimation du quantile extrême requiert une extrapolation au-delà de l'échantillon. Il existe en théorie des valeurs extrêmes différentes approches, nous présenterons les trois suivantes :

1. L'approche des maxima par bloc consiste à séparer l'échantillon en sous-blocs choisis arbitrairement assez grands puis à ajuster la loi des maxima de ces blocs à une loi des valeurs extrêmes. On a $F_n(a_n y + b_n) \approx H_\gamma(y)$, à partir de cette approximation on pourra estimer des quantiles extrêmes. Cette estimation dépendra de l'ajustement de la loi des valeurs extrêmes, on présentera donc les différentes méthodes d'estimation des paramètres de celle-ci.
2. L'approche par dépassements de seuil consiste à ajuster la loi des excès à une loi de Pareto généralisée. D'après le Théorème 2.2.2 on a $F_u(y) \approx G_{\gamma,\sigma}(y)$. A partir de cette approximation on pourra estimer des quantiles extrêmes. Cette estimation dépendra de l'ajustement de F_u à $G_{\gamma,\sigma}$ donc du choix du seuil et de l'estimation des paramètres γ et $\sigma > 0$. On présentera donc les différentes méthodes d'estimation de ces derniers.

3. L'approche semi-paramétrique :

- Si l'on se place dans le domaine d'attraction de Fréchet, on a la caractérisation de la fonction quantile. A partir de cette expression, Weissman (1978) proposa un estimateur semi-paramétrique du quantile extrême dépendant de l'estimation du paramètre γ . On présentera donc des estimateurs de $\gamma > 0$ dont le plus célèbre est dû à Hill [116] en 1975.
- Si l'on se place dans le domaine d'attraction de Gumbel, et plus particulièrement dans le cas d'une loi à queue de type Weibull, on a la caractérisation de la fonction quantile. A partir de cette expression, Beirlant et al. [19] proposa un estimateur semi-paramétrique du quantile extrême dépendant de l'estimation du paramètre β . On présentera donc des estimateurs de $\beta > 0$ dont le plus célèbre est dû à Beirlant et al. [19] en 1996.

Il s'avère qu'il existe une analogie entre toutes ces méthodes d'estimation de quantiles extrêmes. Ces méthodes sont basées sur des estimateurs des paramètres des lois GEV et GPD et en particulier sur des estimateurs de l'indice des valeurs extrêmes.

1.6 Classe de distribution à queue lourde

1.6.1 Queue d'une loi de probabilité

En théorie des probabilités et en statistique, la queue d'une loi de probabilité est le comportement de la loi de probabilité dans la zone éloignée de sa valeur centrale, la queue d'une loi est également appelée la traîne.

Définition 1.6.1. *Considérons une loi de probabilité P dont la fonction de répartition est donnée par :*

$$F(x) = P(X \leq x).$$

La fonction de queue de la loi P est la fonction $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$.

La loi P est dite avoir une propriété de queue si la fonction F possède une propriété qui ne dépend que de l'ensemble des valeurs $\bar{F}(x)$ pour $x \geq x_0$ pour tout x_0 fini.

Il est possible de comparer les queues de deux lois de probabilités. Deux lois de fonction de répartition respective F et G sont dites des queues équivalentes si :

$$\frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} \rightarrow c \in]0, \infty[\text{ lorsque } x \rightarrow \infty.$$

1.6.2 Type des queues

La loi a queue lourde : une loi de probabilité est dite à queue lourde ou à queue épaisse si sa fonction de répartition vérifie :

$$\int_{\mathbf{R}} e^{\lambda x} F(dx) = \infty \text{ pour tout } \lambda > 0.$$

Sinon la loi est dite à queue légère ou à queue finie.

Lois à queue longue : une loi de probabilité est dite à queue longue ou possédant une longue traîne si le support de sa fonction de répartition n'est pas majoré et si, pour tout $y > 0$,

$$\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} \rightarrow 1 \text{ lorsque } x \rightarrow +\infty.$$

Les lois à queue longue sont des lois à queue lourde.

1.6.3 Robustesse statistique

Le robustesse d'un estimateur et sa capacité à ne pas être perturbé par une petite modification dans les données ou dans les paramètres du modèle choisi pour l'estimation.

Il arrive que lors d'un sondage, une valeur extrême et rare apparaisse (par exemple un enfant de 10 ans mesurant 1,80 m). On cherche à ce que ce genre de valeur ne change que de manière très faible la valeur de l'estimateur. On dit alors que l'estimateur est robuste. un estimateur robuste est un estimateur dont les performances restent assez bonnes lorsque la distribution des données s'écarte de la distribution supposée.

Chapitre 2

Mesures de risque

Ces dernières années, une attention croissante a été portée aux méthodes permettant d'associer une mesure chiffrée à un risque, ce risque pouvant être issu d'une position financière ou d'aléas assurés par une compagnie d'assurance, ces derniers incluant des risques majeurs variés comme ceux des catastrophes naturelles, des pandémies, ou encore des risques industriels. En général, un risque est un événement qui peut ou peut ne pas se produire (i.e, un événement aléatoire) et apporte quelques conséquences néfastes. Il est naturel de modéliser le risque en une variable aléatoire qui représente le montant aléatoire de perte qu'une société peut rencontrer. On peut supposer que les variables aléatoires modélisant les pertes de risque sont non négatives (semblable au risque d'assurance). En général, le risque peut être défini comme une variable aléatoire représentant une valeur future, mais nous nous concentrons sur les risques de pertes, pas de profits.

2.1 Notations et définitions

Considérons un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) . Où

- Ω représente l'ensemble de tous les scénarios possibles ;
- \mathcal{A} est une tribu ;
- P est une mesure de probabilité. La valeur future d'un scénario est représentée par une v.a. X .

Définition 2.1.1. (*risque*) Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable où Ω est l'espace de résultats et \mathcal{A} est la tribu définie ci-dessus. Un risque est une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}) .

Les éléments X et \mathcal{X} sont des variables aléatoires, ce qui représente des pertes. Notons \mathcal{X} l'ensemble de variables aléatoires des pertes réelles définies sur un espace mesurable (Ω, \mathcal{A}) . \mathcal{X} contient les constants et il est stable par l'addition et la multiplication par un scalaire.

Comme son nom l'indique, une mesure de risque permet de quantifier le danger inhérent à un risque représenté par une valeur aléatoire X (mesurer des risques signifie établir une correspondance entre la variable aléatoire représentant le risque et un nombre réel non-négatif).

Définition 2.1.2. Une mesure de risque $\rho(X)$ (éventuellement infinie) est une fonctionnelle ρ qui attribue une valeur réelle à la variable aléatoire X des pertes associées à un risque tel que $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

Compte tenu de cette définition du risque, l'espérance, la variance et les moments d'ordres supérieures, les mesures basées sur le quantile comme la VaR, et les espérances conditionnelles telles que CVaR sont toutes des mesures de risque. Si $X > 0$ on a eu une perte et si $X < 0$ on a eu un gain.

Il existe des nombreuses mesures de risque introduites dans la littérature et la pratique, et le choix d'une mesure de risque peut être difficile. Une approche pour traiter la question

de la mesure du risque consiste à commencer par une liste des propriétés qu'une mesure de risque doit satisfaire. Pour répondre à la nécessité de principes théoriques et pratiques, il est d'usage qu'une mesure de risque vérifie un certain nombre de propriétés. Une liste de propriétés évidentes pour une bonne mesure de risque a été introduite dans l'article fondateur par Artzner et al. (1999). La vérification de ces propriétés amène à la notion de mesure de risque cohérente.

Définition 2.1.3. *Deux risques X, Y sont dits comonotones si il existe une v.a. z et des fonctions non-décroissantes h_1, h_2 tels que $X = h_1(z), Y = h_2(z)$. En particulier, les risques comonotoniques peuvent être toujours représentés par $X = F_X^{-1}(U), Y = F_Y^{-1}(U)$, où U est une v.a. de fdr uniforme et $F_X(\cdot)$ et $F_Y(\cdot)$ est la fdr de X et Y respectivement.*

Définition 2.1.4. *(Comonotonicité) Deux variables aléatoires à valeurs réelles X et Y sur (Ω, \mathcal{F}) sont dites comonotones si*

$$(X(\omega) - X(\omega_0))(Y(\omega) - Y(\omega_0)) \geq 0, \forall (\omega, \omega') \in \Omega^2. \quad (2.1.1)$$

Pour deux variables aléatoires à valeurs réelles X et Y sur (Ω, \mathcal{F}) les conditions suivantes sont équivalentes :

- i X et Y sont comonotones,
- ii Ils existent une v.a. Z sur (Ω, \mathcal{F}) et deux fonctions non-décroissantes f et g sur \mathbb{R} tel que $X = f(Z)$ et $Y = g(Z)$.

Définition 2.1.5. *(invariante en loi) Une mesure de risque $\rho : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait $\rho(X) = \rho(Y)$ pour tout $X, Y \in \mathcal{X}$ tels que X et Y ont la même distribution dessous P s'appelle une mesure de risque invariante en loi.*

Définition 2.1.6. *(Convexité et Concavité) Une fonction ϕ , définie sur un intervalle I , est convexe sur I si la partie du plan située au-dessus de la courbe est convexe, i.e, si tout arc de*

sa courbe représentative est situé au-dessous de la corde correspondante. Cette définition se traduit par :

$$\phi(kx_1 + (1 - k)x_2) \leq k\phi(x_1) + (1 - k)\phi(x_2), \quad \forall k \in [0, 1] \text{ et } \forall x_1, x_2 \in I. \quad (2.1.2)$$

Si $-\phi$ est convexe, ϕ est dite concave.

Pour les définitions de tous les axiomes, X et Y sont des variables aléatoires représentant la perte, $c \in \mathbb{R}$ est un scalaire représentant la perte, et ρ est une mesure de risque.

Axiome 1 Invariance par translation : pour toute constante c , $\rho[X + c] = \rho[X] + c$.

Axiome 2 Monotonie : si $X < Y$ pour tous les résultats possibles, alors $\rho[X] \leq \rho[Y]$.

Axiome 3 Homogénéité positive : pour toute réelle positive c , $\rho[cX] = c\rho[X]$.

Axiome 4 Sous-additivité : $\rho[X + Y] \leq \rho[X] + \rho[Y]$.

Axiome 5 Convexité : $\forall X, Y \in \mathcal{X}$

$$\rho[kX + (1 - k)Y] \leq k\rho[X] + (1 - k)\rho[Y]. \quad (2.1.3)$$

Axiome 6 Invariance en loi : $X = Y \Rightarrow \rho[X] = \rho[Y]$.

Axiome 7 Additivité comonotone : $\rho[X + Y] = \rho[X] + \rho[Y]$ où X, Y sont comonotons.

[Artzner et al. \(1999\)](#) ont analysé les mesures de risque et énoncé un ensemble des axiomes qui devraient être souhaitables pour toute mesure de risque. Toute mesure de risque qui satisfait ces axiomes est dite cohérente.

Définition 2.1.7. (mesure du risque cohérente) une mesure du risque $\rho[X]$ est dite cohérente si elle vérifie les propriétés

1. Invariance par translation,
2. Monotonie,
3. Homogénéité positive,
4. Sous-additivité.

Cette définition axiomatique est la pierre angulaire d'une théorie très riche qui tire ses modules de l'analyse fonctionnelle et a des interprétations économiques intéressantes.

Interprétation des 4 axiomes :

Axiome 1 Cet axiome signifie que l'ajout d'un montant fixe au risque va changer la valeur de mesure de risque par le même montant. Cela garantit alors que $\rho[X - \rho[X]] = 0$.

Axiome 2 Cet axiome est intuitif et exprime une exigence minimale : si le risque Y est plus grand que le risque X , alors les mesures correspondantes doivent satisfaire à la même inégalité.

Axiome 3 Cet axiome signifie que mesurer une proportion c d'un risque revient à considérer la mesure de risque par la même proportion.

Axiome 4 Le raisonnement derrière cet axiome est d'intégrer l'idée de diversification, i.e, la fusion de deux risques, X_1 et X_2 avec mesures associées $\rho[X_1]$ et $\rho[X_2]$ va créer le risque global $X = X_1 + X_2$ avec une mesure $\rho[X]$ inférieure ou égale à la somme des mesures associées $\rho[X_1] + \rho[X_2]$. Cet axiome est le plus connu parce que le VaR ne satisfait pas cette condition dans certaines situations.

Une autre façon de formaliser une mesure de risque cohérente est le théorème de représentation d'une mesure de risque cohérente :

Théorème 2.1.1. *Une mesure de risque est cohérente si et seulement si, il existe une famille \mathcal{P} de mesure de probabilité sur l'ensemble des états de la nature tel que :*

$$\rho(X) = \sup\{\mathbb{E}_P(X) | P \in \mathcal{P}\}. \quad (2.1.4)$$

Voir [Artzner et al. \(1999\)](#) pour une démonstration.

Remarque 2.1.1. *La Value-at-Risk, bien que très largement utilisée en finance, n'est pas une mesure de risque cohérente car elle n'est pas sous-additive; de même pour la variance. Par contre la CVaR est une mesure de risque cohérente.*

Définition 2.1.8. *Les mesures de risque qui satisfont les propriétés (1) et (2) de la définition*

2.1.7 sont appelées mesures de risque monétaires.

Nous introduisons ici une relaxation de la propriété de cohérence. En effet, dans bien des cas, la propriété d'homogénéité positive n'est pas vérifiée autrement dit le risque ne croît pas de manière linéaire par rapport à la taille du portefeuille. Pour prendre en compte le risque de liquidité, Föllmer and Schied (2002) proposent de rejeter l'axiome d'homogénéité. Moyennant cela, ils définissent un nouvel ensemble des mesures de risques dites convexes, qui englobent les mesures de risques cohérentes.

Les critiques des axiomes de sous-additivité et d'homogénéité positive ont conduit à l'étude des mesures de risque convexe. Une mesure de risque convexe satisfait les mêmes axiomes qu'une mesure de risque cohérente, sauf que les axiomes de sous-additivité et d'homogénéité positive sont remplacés par l'axiome de convexité (Axiome 5.). Si les axiomes (Axiome 3.) et (Axiome 4.) sont remplacés par l'axiome de convexité (Axiome 5.), la mesure de risque ρ est appelée mesure de risque convexe.

Définition 2.1.9. Une mesure de risque ρ définie d'un ensemble des variables aléatoires convexe \mathcal{X} à valeur réelle est dite convexe (voir Föllmer and Schied (2002)) si elle vérifie les Axiomes suivantes :

1. Invariance par translation,
2. Monotonie,
3. Convexité.

Interprétation. La propriété de convexité dit que la position $\rho[kX + (1 - k)Y]$ est moins risquée que les positions $k\rho[X]$ et $(1 - k)\rho[Y]$ prises individuellement. Les mesures de risque convexes ont été présentées et étudiées la première fois dans Föllmer and Schied (2002).

Remarque 2.1.2. • D'après la définition 2.1.7, On peut donc dire aussi qu'une mesure de risque monétaire avec propriété de convexité comme dans 2.1.9 est appelée mesure de risque

convexe.

- Lorsque la mesure de risque ρ est normalisée (i.e $\rho(0) = 0$) et qu'elle vérifie la propriété d'homogénéité positive alors l'axiome de convexité est équivalente à l'axiome de sous-additivité. Donc, la propriété de convexité possède certains aspects de la diminution du risque sous diversification comme pour l'axiome de sous-additivité.
- Une mesure de risque cohérente est une mesure de risque convexe. Cependant, une mesure de risque convexe n'est pas nécessairement cohérente car elle ne peut pas satisfaire les propriétés de sous-additivité et l'homogénéité positive de la définition 2.1.7. Si une mesure de risque convexe est positivement homogène, elle est également sous-additive.

Comme dans [Artzner et al. \(1999\)](#) pour le cas d'une mesure du risque cohérente, nous donnons ici un théorème de représentation pour la mesure de risque convexe. Soient \mathcal{X} l'espace des fonctions à valeurs réelles sur un ensemble fini Ω , et \mathcal{Q} est l'ensemble de toutes les mesures de probabilités dans Ω .

Théorème 2.1.2. (Théorème de représentation) *Toute mesure de risque convexe ρ définie de \mathcal{X} à valeurs dans \mathbb{R} peut s'écrire sous la forme :*

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}} (\mathbb{E}[-X] - \alpha(\mathbb{Q})), \quad (2.1.5)$$

où \mathcal{Q} est une famille de mesures de probabilité sur l'espace des états de la nature et α est une fonctionnelle sur \mathcal{Q} donnée par

$$\alpha(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}_p} (\mathbb{E}[X]) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_p = \{X \in \mathcal{X} | \rho[X] \leq 0\} \quad (2.1.6)$$

Notons que le Théorème 2.1.2 comprend le théorème de représentation pour la mesure de risque cohérente (Théorème 2.1.1) comme un cas spécial. En effet, il est facile de voir que ρ satisfait la propriété d'homogénéité positive, c-à-d, ρ sera une mesure de risque cohérente, si et seulement si la fonction de pénalité ci-dessus $\alpha(\cdot)$ (voir [Föllmer and Schied \(2002\)](#)) ne

prend que la valeur 0 et $+\infty$. Dans ce cas, Le Théorème 2.1.2 implique la représentation (2.1.4) en termes de l'ensemble $Q = \{q \in \mathcal{P} | \alpha(q) = 0\}$, et la représentation en (2.1.5) se simplifie en $\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} (\mathbb{E}[-X])$.

Nous présentons dans la suite des exemples de mesures couramment utilisées en gestion des risques.

2.2 Quelques mesures de risque usuelles

2.2.1 La variance

La variance est une mesure de dispersion d'une variable aléatoire autour de sa moyenne. Si X est une variable aléatoire de carré intégrable, sa variance est définie par $Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$.

2.2.2 La Value-at-Risk

L'un de plus populaires mesures de risque est la Value-at-Risk (VaR), appelée également "Valeur à Risque".

Définition 2.2.1. *On appelle Value-at-Risk de niveau $\alpha \in (0, 1)$ le quantile de niveau α ,*

$$\rho[X] = VaR_\alpha[X] = x_\alpha \text{ où } P(X \leq x_\alpha) = \alpha, \quad (2.2.1)$$

ou encore

$$VaR_\alpha[X] = F^{-1}(\alpha) = \inf\{x : P[X > x] \leq 1 - \alpha\} = \inf\{x : P(X \leq x) \geq \alpha\} = \sup\{x : F(x) < \alpha\} \quad (2.2.2)$$

i.e, la VaR est le seuil minimum excédé par X avec la probabilité tout au plus $1 - \alpha$.

La VaR a les propriétés suivantes :

- $VaR_\alpha[X] \leq \max[X]$ pour tout $\alpha \in (0, 1)$.
- La VaR est monotone : $VaR_\alpha[X] \leq VaR_\alpha[Y]$ si $X \leq Y$.
- La VaR est translation invariant, $VaR_\alpha[X + c] = VaR_\alpha[X] + c$.
- La VaR est positive homogène $VaR_\alpha[cX] = cVaR_\alpha[X]$.
- La VaR est comonotone additive. Si les risques X_1, X_2, \dots, X_n sont comonotons, alors $VaR_\alpha[X_1 + X_2 + \dots + X_n] = VaR_\alpha[X_1] + VaR_\alpha[X_2] + \dots + VaR_\alpha[X_n]$.

Les deux dernières propriétés découlent également de la relation générale suivante.

Proposition 2.2.1. (La VaR d'une fonction de v.a.) La VaR d'une v.a. $Y = g(X)$, où $g(\cdot)$ est une fonction non-décroissante d'une v.a. X , peut être calculée comme suivant

$$VaR_\alpha[X] = g(VaR_\alpha[X]) \quad (2.2.3)$$

Malgré sa simplicité, La mesure de risque de référence, Value-at-Risk (VaR), a été critiquée. Tout d'abord, la VaR ne fournit pas d'informations sur la gravité des pertes au-delà du seuil indiqué. Deuxièmement, la VaR ne satisfait pas la propriété de la subadditivité (donc ne pas cohérente) dans le sens [Artzner et al. \(1999\)](#). Il peut arriver que la diversification conduise à une augmentation de la VaR, notamment dans le cas où les v.a ont des distributions à queues lourdes (moyennes infinies). Ainsi, la VaR d'une somme de pertes n'est pas nécessairement inférieure ou égale à la somme des VaR de pertes individuelles. La VaR est subadditive pour les pertes distribuées elliptiquement (voir, par exemple, [McNeil et al. \(2015\)](#)). Alors que la mesure VaR indique un seul point de la queue de la distribution, il ne fournit aucune information sur l'ampleur des pertes qui peuvent survenir au-delà de la VaR. La VaR peut conduire à une mauvaise interprétation des risques : par exemple les portefeuilles qui affichent une même VaR ne sont pas nécessairement soumis aux mêmes risques. Pour couvrir ces inconvénients, d'autres mesures de risque cohérentes ont été développées.

2.2.3 La Tail Value-at-Risk

En plus de souligner le manque de cohérence de la VaR, Artzner *et al.* (1999) a été aussi proposé un membre des mesures de risques cohérentes comme une mesure de risque alternative : la Tail Conditional Expectation ou Tail Value-at-Risk (notée TCE ou TVaR). Une telle mesure de risque est étudiée intensivement par différents auteurs dans divers contextes, par conséquent, parfois, ils sont définis et nommés différemment. Wirch and Hardy (1999) ont défini la même mesure de risque par Conditional Tail Expectation (CTE) et nous suivrons leur terminologie dans cette thèse. Rockafellar and Uryasev (2000) ont nommé leur mesure de risque le Conditional Value-at-Risk (CVaR) (Valeur-à-Risque conditionnel (CVaR)); Bertsimas *et al.* (2004) ont nommé une mesure de risque par semblable Mean Shortfall et une mesure de risque semblable avec un nom apparemment identique Expected Shortfall est étudiés par Acerbi *et al.* [1, 2001]. Nous suivrons la terminologie de Wirch and Hardy [91, 1999] (Conditional Tail Expectation (CTE)) dans ce qui suit. La Tail Value-at-Risk (TVaR) ou Conditional Value-at-Risk (CVaR) ou encore Expected Shortfall (ES) à $\alpha\%$ représente les pertes moyennes attendues au delà de la VaR pour un niveau de confiance de $(1-\alpha\%)$. Elle traduit la moyenne équipondérée de toutes les VaR calculées à des niveaux de risques inférieurs ou égaux à α . Elle améliore la VaR en prenant en compte l'ampleur des pertes. La notoriété dont jouie cette mesure face à la VaR réside dans sa capacité à prendre en compte les pertes extrêmes et rares. Il s'agit d'une mesure cohérente au sens d'Artzner *et al.* (1999).

Définitions

La Conditional-Tail-Expectation (CTE) au niveau de probabilité α , appelée aussi la Tail-Conditional-Expectation, est une mesure de risque définie comme l'espérance de la v.a. X au delà de la VaR.

Définition 2.2.2. (*La Conditional-Tail-Expectation*) *La Conditional-Tail-Expectation d'une*

v.a. $X \sim F(x)$ au niveau de probabilité α , notée $CTE_\alpha[X]$, est

$$CTE_\alpha[X] = E[X|X > VaR_\alpha[X]] \quad (2.2.4)$$

ce qu'est l'espérance de la v.a. X dans les cas où cette v.a. prend des valeurs supérieures à VaR , avec $CTE_0[X] = E[X|X > VaR_0[X]] = E[X]$.

Cette mesure vérifie toutes les propriétés. Dans le cas continu, la propriété de sous-additivité est vérifiée et la mesure est cohérente. A noter que dans ce cas, la CTE coïncide alors avec la TVaR et nous pouvons évaluer l'une ou l'autre indifféremment. Nous considérons la perte au-dessus de VaR conditionnel étant excédé, i.e

$$X - VaR_\alpha[X]|X > VaR_\alpha[X] \quad (2.2.5)$$

Le moyen de cet excès conditionnel, appelé la mesure Conditional VaR, est noté par $CVaR_\alpha[X]$ et défini comme suit.

Définition 2.2.3. (La Conditional Value-at-Risk) La Conditional Value-at-Risk d'une v.a. $X \sim F(x)$ au niveau de probabilité α , notée $CVaR_\alpha[X]$, est

$$CVaR_\alpha[X] = E[X - VaR_\alpha[X]|X > VaR_\alpha[X]] = CTE_\alpha[X] - VaR_\alpha[X] \quad (2.2.6)$$

ce qu'est la valeur moyenne des pertes qui excèdent la VaR, i.e. il s'agit de l'excédent moyen de sinistre au-delà de la VaR.

Définition 2.2.4. (L'Expected shortfall) L'Expected shortfall au niveau α , notée $ES_\alpha[X]$

est

$$ES_\alpha[X] = E[(X - VaR_\alpha[X])_+] \quad (2.2.7)$$

$$= E[X - VaR_\alpha[X] | X > VaR_\alpha[X]] P(X > VaR_\alpha[X]) \quad (2.2.8)$$

$$= (1 - \alpha) CVaR_\alpha[X] \quad (2.2.9)$$

ce qu'est la prime stop-loss dont la rétention est fixée à $VaR_\alpha[X]$. Où $(x - d)_+ = \max(X - d, 0)$, $d > 0$. Et nous avons, d'après les deux dernier équations

$$CTE_\alpha[X] = VaR_\alpha[X] + CVaR_\alpha[X] \quad (2.2.10)$$

$$= VaR_\alpha[X] + \frac{1}{1 - \alpha} ES_\alpha[X] \quad (2.2.11)$$

ce qui relie CTE_α au ES_α .

Une autre mesure de risque qui est de plus en plus considérée dans la littérature est la Tail-Value-at-Risk (TVaR). La TVaR est définie pour un niveau de confiance α , $0 \leq \alpha < 1$, comme

$$TVaR_\alpha[X] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_s[X] ds \quad (2.2.12)$$

ce qui s'appelle parfois le Tail value-at-risk, noté par $TVaR_\alpha[X]$. et est la moyenne arithmétique du VaR_s de X de s à 1, avec $TVaR_0[X] = \int_0^1 VaR_s[X] ds = \mathbb{E}[X]$.

Elle prend évidemment en compte les valeurs de la distribution au delà de la VaR au niveau de confiance α et nous informe donc sur l'épaisseur de la queue de distribution. si l'on considère une v.a. X continue, alors $P(X \leq VaR_\alpha[X]) = \alpha$. Donc la CTE peut s'écrire comme suit $CTE_\alpha[X] = E[X | X > VaR_\alpha[X]] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 VaR_s[X] ds$

Propriétés

Alors que la TVaR sera cohérente aussi bien pour des v.a. continues que non continues. Plus, dans ce même contexte de non-continuité, la CTE ne respecte pas toutes les propriétés d'une mesure de risque cohérente. Quand X est continue, la CTE est cohérente. La CTE est aussi satisfait toutes les propriétés désirables énoncées précédemment.

Chapitre 3

L'estimateur robuste de l'espérance conditionnelle des queues dans le cas des distributions de type Pareto

3.1 Introduction

Dans la littérature la mesure des risques a trop attiré l'attention, avec nombreuse applications dans l'exposition aux risques actuariels et financiers. L'une des mesures les plus courantes est l'espérance à queue conditionnelle introduit par [Denuit et al. \(2006\)](#), aussi appelé Expected Shortfall ou Value-at-risk. Elle peut être définie comme l'espérance de perte étant donnée que la perte tombe dans la pire $(1 - \alpha)$ partie de la distribution des pertes i.e, plus précisément elle représente l'espérance de perte entre certain quantité. La pire $(1 - \alpha)$ partie de la distribution de la pertes dans la partie au-dessus de α -quantile, noté par $Q(\alpha)$.

Maintenant, nous pouvons considérer la variable X de perte aléatoire continue avec la fonction de distribution cumulative inconnue (cdf) $F(x)$. La fdc est appelé la distribution

à queue lourde, si la queue $1 - F(x)$ est régulièrement variée entre l'index $-1/\gamma$ laquelle est très utile pour étudier le taux de convergence dans les valeurs extrêmes théoriques et la normalité asymptotique de l'estimateur à queue [De Haan and Resnick \(1996\)](#). L'étude est basée sur la variable aléatoire X réelle et positive, car la variable négative est considérée comme étant des gains. Nous pouvons interpréter la CTE à l'échelle de confiance α , pour chaque donné $\alpha \in (0, 1)$, le α -quantile mesure le risque $Q(\alpha)$, comme

$$CTE_\alpha = E[X|X > Q(\alpha)], \quad (3.1.1)$$

tel que $Q(\alpha) = \inf\{x : F(x) \geq \alpha\}$ est la fonction quantile de l'ordre α de la variable X . Puisque $F(x)$ est continu, nous pouvons réécrire la CTE_α comme

$$CTE_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 Q(s) ds. \quad (3.1.2)$$

Naturellement, la CTE est inconnu car il dépend de $F(x)$. Son estimation peut être décrite comme suit. Spécifiquement, soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et de distribution identique d'une fdc $F(x)$ et soit $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{k:n}, \dots, X_{n:n}$ les statistiques d'ordre. Un estimateur naturel de CTE_α est défini par

$$\widehat{CTE}_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 Q_n(s) ds, \quad (3.1.3)$$

où $Q_n(s)$ est la fonction quantile empirique, qui est égale à la i ème statistique d'ordre $X_{i,n}$ pour tout $s \in ((i-1)/n, i/n]$, et pour tout $i = 1, \dots, n$. Le comportement asymptotique de l'estimateur \widehat{CTE}_α a été étudié par [Brazauskas et al. \(2008\)](#), lorsque $E[X^2] < \infty$. Mais dans la classe des distributions de type Pareto (i.e, pour lesquelles $\gamma > 0$ ou distributions à queue lourde) caractérisée pour tout $x \geq 1$ par l'équation $1 - F(x) = x^{-1/\gamma} l_F(x)$ où $l_F(x)$ est une fonction qui varie lentement à l'infini satisfaisant $l_F(\lambda x)/l_F(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow \infty$ pour chaque $\lambda > 0$, cette condition de second moment est atteinte dans le cas où

$\gamma \in (0, 1/2)$. Des exemples dans cette classe sont les distributions de Fréchet, Pareto et Burr. De plus, pour les valeurs $\gamma \in [1/2, 1)$, on a $E[X^2] = \infty$ néanmoins, la CTE est bien défini et fini puisque $E[X] < \infty$. Dans cette étude, nous concentrons notre attention sur ce dernier cas. En particulier, [Necir et al. \(2010\)](#) ont proposé un estimateur alternatif de [\(3.1.2\)](#) et établi sa normalité asymptotique basée sur l'estimateur de Weissman du quantile élevé $q_s = Q(1 - s)$ défini par

$$\tilde{q}_s = \left(\frac{k}{n}\right)^{\hat{\gamma}} X_{n-k:n} s^{-\hat{\gamma}}, \quad 0 < s < \frac{k}{n}, \quad (3.1.4)$$

comme $\hat{\gamma}$ est un estimateur de γ (voir [Weissman \(1978\)](#)). Ils ont utilisé l'estimateur le plus célèbre de l'indice de queue $\gamma \in (1/2, 1)$, nommé l'estimateur de Hill, voir [Hill \(1975\)](#), défini comme

$$\hat{\gamma}_n^H = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log X_{n-i+1:n} - \log X_{n-k:n}, \quad (3.1.5)$$

Pour une séquence intermédiaire $k = k_n \in \{1, \dots, n\}$ sont tels que $k \rightarrow \infty$ et $k/n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. L'estimateur considéré pour la CTE est donné par

$$\widetilde{CTE}_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^{1-k/n} Q_n(s) ds + \frac{k X_{n-k:n}}{n(1 - \alpha)(1 - \hat{\gamma})}. \quad (3.1.6)$$

L'estimateur de Hill est un estimateur de pseudo-maximum de vraisemblance basé sur l'approximation exponentielle des log-espacements normalisés, c'est-à-dire $Y_j = j(\log X_{j:n} - \log X_{j+1:n})$ pour $j = 1, \dots, k$. En pratique, l'estimateur de Hill dépend du choix de la fraction d'échantillon k et leur fonction d'influence qui augmente lentement mais sans limite. Ainsi, l'estimateur de Hill est intrinsèquement peu robuste aux grandes valeurs Y_j , ce qui rend l'estimateur proposé par [Necir et al. \(2010\)](#) sensible. Ceci constitue un problème sérieux en termes de biais et d'erreur quadratique moyenne (RMSE). [Fabián and Stehlík \(2009\)](#) ont proposé une distribution sensible connue sous le nom d'estimateur t-Hill (t-score ou estimation du moment du score) pour l'indice de queue de toute distribution de

queue qui varie régulièrement. De plus, [Jordanova and Pancheva \(2012\)](#) ont découvert la distribution limite de l'estimateur t-Hill dans le cas où le rang k de la statistique d'ordre supérieur est $o(n)$ et prouvent sa normalité asymptotique. Cet estimateur de moment de score est plus robuste que l'estimateur de Hill classique $\hat{\gamma}_n^H$ défini dans l'équation [3.1.5](#), voir [Stehlík et al. \(2012\)](#) et il a été étudié dans [Stehlík et al. \(2012\)](#). Récemment, plusieurs études sur t-Hill ont été publiées, voir [Stehlík et al. \(2010\)](#) et il a été étudié dans [Stehlík et al. \(2012\)](#), Récemment, plusieurs études sur t-Hill ont été publiées voir [Beran et al. \(2014\)](#) et [Jordanova et al. \(2016\)](#). Pour améliorer la qualité de CTE_α dans le cas de pertes à queue lourde, au lieu d'implémenter celle de Hill, nous proposons d'estimer l'indice de queue γ par la procédure dite du moment t-score, pour obtenir un résultat robuste. La formule de l'estimateur de t-Hill, donnée par

$$\hat{\gamma}_n^{tH} = \hat{\gamma}_n^{tH}(k) =: \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{X_{n-k:n}}{X_{n-i+1:n}} \right)^{-1} - 1, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.1.7)$$

Pour d'autres estimateurs robustes de γ , nous pouvons renvoyer le lecteur à [\[Juárez and Schucany \(2004\), Kim and Lee \(2008\), Peng and Welsh \(2001\), Vandewalle et al. \(2007\)\]](#).

Le reste du chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la section 2, nous présentons une construction d'un estimateur robuste de CTE_α dans le cas de pertes à queue lourdes. Dans la section 3, nous montrons sa normalité asymptotique. Dans la section 4, nous effectuons une étude de simulation pour illustrer la performance de notre estimateur. La section 5 présente une étude de contamination où la robustesse de l'estimateur est évaluée. Enfin, des conclusions sont tirées et une discussion finale est fournie dans la section 6.

3.2 Définition de l'estimateur robuste

Comme déjà mentionné, dans le cas de pertes à queue lourde, la CTE estimateur \widetilde{CTE}_α donné par [3.1.6](#) n'est pas robuste. Pour cette raison, nous fournissons une solution en

utilisant l'estimateur robuste t-Hill pour obtenir un estimateur robuste espérance conditionnelle dans le cas de pertes à queue lourde. Nous suivons la même méthode et les mêmes étapes de [Necir et al. \(2010\)](#) pour écrire ce nouvel estimateur, mais à la place de l'estimateur d'indice de queue simple $\hat{\gamma}_n^H$ de [Hill \(1975\)](#), nous considérons l'estimateur t-Hill proposé par [Fabián and Stehlík \(2009\)](#), noté $\hat{\gamma}_n^{tH}$.

Nous formulons l'estimateur robuste de l'espérance conditionnelle à queue dans le cas des pertes à queue lourde en utilisant la fonction de quantile empirique Q_n comme suit

$$\widetilde{CTE}_\alpha^{tH} := \frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^{1-k/n} Q_n(s) ds + \frac{kX_{n-k:n}}{n(1-\alpha)(1-\hat{\gamma})} \quad (3.2.1)$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{j=1}^{n-k} \left(\left(\frac{j}{n} - \alpha \right)_+ - \left(\frac{j-1}{n} - \alpha \right)_+ \right) X_{j:n} + \frac{kX_{n-k:n}}{n(1-\alpha)(1-\hat{\gamma})}, \quad (3.2.2)$$

où $(g)_+$ représente la partie positive de (g) et nous utilisons l'estimateur cohérent t-Hill pour estimer l'indice de queue $\hat{\gamma}$ donné par

$$\hat{\gamma}_n^{tH} := \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{X_{n-k:n}}{X_{n-i+1:n}} \right)^{-1} - 1.$$

Dans la section suivante, nous prouvons la normalité asymptotique de notre estimateur.

3.3 Normalité asymptotique

La preuve de notre résultat principal exige que $F(x)$ satisfasse la condition du second ordre avec le paramètre du second ordre $\rho \leq 0$ (voir [Geluk et al. \(1997\)](#)). Autrement dit, nous supposons qu'il existe une fonction $a(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ qui a finalement un signe constant tel que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{a(t)} \left(\frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} - x^{-1/\gamma} \right) = x^{-1/\gamma} \frac{x^{\rho/\gamma} - 1}{\rho/\gamma}. \quad (3.3.1)$$

Si $\rho = 0$, le rapport sur le côté droit de [3.3.1](#) est interprété comme $\log x$. De plus, nous utiliserons également la fonction $A(z) = \gamma^2 a(\mathbb{U}(z))$, avec $\mathbb{U}(z) = Q(1 - 1/z)$.

Théorème 3.3.1. *Supposons que $F(x)$ est une fdc satisfaisant la condition de variation régulière du second ordre avec $\gamma \in (1/2, 1)$, c'est-à-dire qu'il a vérifié l'équation [3.3.1](#). Soit $k = k_n \rightarrow \infty$ tel que $k/n \rightarrow 0$ et $\sqrt{k}A(n/k) \rightarrow 0$ comme $n \rightarrow \infty$.*

Alors, pour tout $\alpha \in (0, 1)$ fixe et la fonction quantile $Q(s) = (1 - s)^{-\gamma} l(s)$ par l'une fonction variant lentement à 0, on a

$$\frac{\sqrt{n} \left(\widetilde{CTE}_\alpha^{tH} - CTE_\alpha \right) (1 - \alpha)}{(k/n)^{1/2} Q(1 - k/n)} \xrightarrow{d} \mathcal{N} \left(0, \sigma^2 \right), \quad (3.3.2)$$

avec la variance σ^2 est donnée par

$$\sigma^2 = \frac{4\gamma^5}{(4\gamma^2 - 1)(\gamma - 1)^4}, \quad (3.3.3)$$

On peut remarquer que

$$\sigma^2 = \frac{\gamma^4}{(2\gamma - 1)(\gamma - 1)^4} \cdot \frac{4\gamma}{(2\gamma + 1)} \geq \frac{\gamma^4}{(2\gamma - 1)(\gamma - 1)^4}, \quad (3.3.4)$$

lorsque $\gamma \in (1/2, 1)$, le côté droit de l'inégalité correspondant à la variance asymptotique dérivée par [Necir et al. \(2010\)](#). Cependant, les qualités bien connues de l'estimateur t-Hill restent transposées à l'estimateur de la CTE proposé

Démonstration 3.3.1. *Les lignes principales de cette preuve sont basées sur le travail de [Necir et al. \(2010\)](#). Nous pouvons écrire*

$$\left(\widetilde{CTE}_\alpha^{tH} - CTE_\alpha \right) (1 - \alpha) = A_{n,1} + A_{n,2},$$

avec

$$A_{n,1} = \int_\alpha^{1-k/n} (Q_n(s) - Q(s)) ds \quad (3.3.5)$$

et

$$A_{n,2} = \frac{k/n}{1 - \hat{\gamma}_n^{tH}} X_{n-k:n} - \int_{1-k/n}^1 Q(s) ds. \quad (3.3.6)$$

[Csörgő et al. \(1986\)](#) ont montré les taux de convergence des processus quantiles uniformes et empiriques notés β_n et, respectivement, λ_n vers une suite des ponts Browniens $\{\mathbb{B}_n(s), 0 \leq s \leq 1\}$ sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec U_1, \dots, U_n des variables aléatoires indépendantes suivent la loi uniforme $(0,1)$. Tel que pour chaque $0 \leq \nu < 1/2$

$$\sup_{1/n \leq s \leq 1-1/n} \frac{n^\nu |\beta_n(s) - \mathbb{B}_n(s)|}{(s(1-s))^{1/2-\nu}} = O_p(1)$$

comme $n \rightarrow \infty$, et une construction analogue a été montrée pour le processus empirique en termes de Brownian bridges tels que pour tout $0 \leq \nu < 1/4$

$$\sup_{1/n \leq s \leq 1-1/n} \frac{n^\nu |\lambda_n(s) - \mathbb{B}_n(s)|}{(s(1-s))^{1/2-\nu}} = O_p(1)$$

quand $n \rightarrow \infty$. Le corollaire 2, 3 à la page 50 de [Csörgő et al. \(1986\)](#) peut également être utile pour définir la relation entre un processus quantile empirique et uniforme qui représente à la fois $A_{n,1}$ et $A_{n,2}$.

Démonstration de la déclaration $A_{n,1}$

De même pour la preuve de l'énoncé (4.3) dans l'article de [Necir et al. \(2010\)](#), nous avons

$$\frac{\sqrt{n}A_{n,1}}{(k/n)^{1/2}Q(1-k/n)} = - \frac{\int_0^{1-k/n} \mathbb{B}_n(s) dQ(s)}{(k/n)^{1/2}Q(1-k/n)} + o_p(1).$$

Démonstration de la déclaration $A_{n,2}$

Soit $Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \dots \leq Y_{n:n}$ les statistiques d'ordre relatives aux variables aléatoires

indépendantes et distribuées de manière identique Y_1, \dots, Y_n qui sont définis sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec la fdc correspondant $G(y) = 1 - 1/y$, où $y \geq 1$. De telle sorte que

$$\{X_{n-i+1:n}, 1 \leq i \leq n\} \stackrel{d}{=} \{\mathbb{U}(Y_{n-i+1:n}), 1 \leq i \leq n\} = \{Q(G(Y_{n-i+1:n})), 1 \leq i \leq n\}.$$

Écrivons la formule $A_{n,2}$ avec la décomposition suivante

$$\frac{\sqrt{n}A_{n,2}}{(k/n)^{1/2}Q(1-k/n)} = \frac{\sqrt{n}A_{n,2}}{(k/n)^{1/2}\mathbb{U}(n/k)} \stackrel{d}{=} T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} + T_{n,4},$$

avec

$$T_{n,1} = \frac{\sqrt{k}}{1 - \hat{\gamma}_n^{tH}} \left(\frac{\mathbb{U}(Y_{n-k:n})}{\mathbb{U}(n/k)} - \left(\frac{Y_{n-k:n}}{n/k} \right)^\gamma \right), \quad (3.3.7)$$

$$T_{n,2} = \frac{\sqrt{k}}{1 - \hat{\gamma}_n^{tH}} \left(\left(\frac{Y_{n-k:n}}{n/k} \right)^\gamma - 1 \right), \quad (3.3.8)$$

$$T_{n,3} = \sqrt{k} \left(\frac{1}{1 - \hat{\gamma}_n^{tH}} - \frac{1}{1 - \gamma} \right) \quad (3.3.9)$$

et

$$T_{n,4} = \sqrt{k} \left(\frac{1}{1 - \gamma} - \frac{\int_1^\infty s^{-2} \mathbb{U}(ns/k) ds}{\mathbb{U}(n/k)} \right). \quad (3.3.10)$$

Nous discutons maintenant ces quatre facteurs, tour à tour. Comme démontré dans [Necir et al. \(2010\)](#), nous avons que $T_{n,4} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ comme $n \rightarrow \infty$. De plus, d'après la preuve de [Necir et al. \(2007\)](#) (pages 156, 157) et pour pouvoir l'appliquer nous ajoutons que d'après [Jordanova et al. \(2016\)](#) nous avons $\hat{\gamma}_n^{tH}$ est un estimateur faiblement cohérent pour γ c'est-à-dire que $\hat{\gamma}_n^{tH} \xrightarrow{\mathbb{P}} \gamma$ comme $n \rightarrow \infty$. Donc $\frac{1}{1 - \hat{\gamma}_n^{tH}} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{1 - \gamma}$ comme $n \rightarrow \infty$, alors nous en déduisons que $T_{n,1} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Maintenant, nous montrons que $T_{n,2} + T_{n,3}$ est asymptotiquement normal. Supposons que les variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n et la séquence $(U_n)_{n \geq 1}$ qui sont portées sur un espace de pro-

tabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont définis de cette manière $\{Y_{i:n}, 1 \leq i \leq n\}_{n \geq 1} \stackrel{d}{=} \{(1 - U_{i:n})^{-1}, 1 \leq i \leq n\}_{n \geq 1}$.

Par conséquent, nous avons

$$T_{n,2} = \frac{\sqrt{k}}{1 - \hat{\gamma}_n^{tH}} \left(\left(\frac{1}{n/k(1 - U_{n-k:n})} \right)^\gamma - 1 \right),$$

En utilisant des arguments similaires à [Necir et al. \(2007\)](#), nous constatons que

$$T_{n,2} = (n/k)^{1/2} \frac{\gamma}{1 - \gamma} (1 + o_p(1)) \mathbb{B}_n(1 - k/n). \quad (3.3.11)$$

On se retrouve avec $T_{n,3}$, en utilisant la proposition 1 dans l'article de [Brahimi and Kenioua \(2016\)](#) et en utilisant la méthode delta avec la fonction $g(\theta) = 1/(1 - \theta)$ on trouve

$$T_{n,3} = \frac{1}{(1 - \gamma)^2} \sqrt{k} (\gamma - \hat{\gamma}_n^{tH}) = \frac{\gamma(\gamma + 1)^2}{(\gamma - 1)^2} \int_0^1 s^{\gamma-1} \mathbb{B}_n(s) ds + o_p(1).$$

Enfin nous avons

$$\frac{\sqrt{n} A_{n,2}}{(k/n)^{1/2} Q(1 - k/n)} = \frac{\gamma(\gamma + 1)^2}{(\gamma - 1)^2} \int_0^1 s^{\gamma-1} \mathbb{B}_n(s) ds - \sqrt{\frac{n}{k}} \frac{\gamma}{1 - \gamma} \mathbb{B}_n(1 - \frac{k}{n}) + o_p(1). \quad (3.3.12)$$

Par conséquent, nous définissons la représentation asymptotique

$$\frac{\sqrt{n} \left(\widetilde{CTE}_\alpha^{tH} - CTE_\alpha \right) (1 - \alpha)}{(k/n)^{1/2} Q(1 - k/n)} = \Delta(\gamma) + o_p(1),$$

où

$$\Delta(\gamma) = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3} + o_p(1),$$

$$W_{n,1} = -\frac{\int_0^{1-k/n} \mathbb{B}_n(s) dQ(s)}{(k/n)^{1/2} Q(1-k/n)},$$

$$W_{n,2} = \frac{\gamma(\gamma+1)^2}{(\gamma-1)^2} \int_0^1 s^{\gamma-1} \mathbb{B}_n(s) ds$$

et

$$W_{n,3} = -\sqrt{\frac{n}{k}} \frac{\gamma}{1-\gamma} \mathbb{B}_n\left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

Il est clair que $\Delta(\gamma)$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne 0 et de variance

$$E[(\Delta(\gamma))^2] = E(W_{n,1}^2) + E(W_{n,2}^2) + E(W_{n,3}^2) + 2E(W_{n,1}W_{n,2}) + 2E(W_{n,1}W_{n,3}) + 2E(W_{n,2}W_{n,3}).$$

Après quelques opérations algébriques et en utilisant le lemme 6 dans [Deme et al. \(2013\)](#), nous obtenons les résultats suivants :

$$E(W_{n,1}^2) = \frac{2\gamma}{2\gamma-1} + o(1),$$

$$E(W_{n,2}^2) = \frac{\gamma^2(\gamma+1)^2}{(2\gamma+1)(\gamma-1)^4} + o(1),$$

$$E(W_{n,3}^2) = \frac{\gamma^2}{(1-\gamma)^2} + o(1),$$

$$E(W_{n,1}W_{n,2}) = 0 + o(1),$$

$$E(W_{n,1}W_{n,3}) = \frac{\gamma}{1-\gamma} + o(1),$$

and

$$E(W_{n,2}W_{n,3}) = 0 + o(1).$$

En rassemblant les résultats ci-dessus, nous terminons la démonstration du théorème [3.3.1](#).

3.4 Étude de la simulation

Dans notre étude actuelle, nous examinons la performance de $\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$ donnée dans 3.2.2 et la comparons à celle de Necir *et al.* (2010), c'est-à-dire \widetilde{CTE}_α donné dans 3.1.6. Ainsi, nous générons 1000 répliquation indépendants d'échantillons de taille $n = 200, 500, 1000$ et 1500 basés sur les fdcs de Pareto et Fréchet. Nous prenons l'indice de valeur extrême $\gamma = 0,6$ pour la distribution et le niveau α fixé à $0,75$ et $0,6$ pour la distribution de Pareto et à $0,75$ et $0,9$ pour la distribution de Fréchet. Nous estimons le paramètre de l'indice de queue par les estimateurs de Hill et t-Hill, $\hat{\gamma}_n^H$ et $\hat{\gamma}_n^{tH}$ respectivement, donnés en 3.1.5 et 3.1.7. Nous employons la méthode de Reiss (2007) pour indiquer la valeur optimale du paramètre k noté par k^* . Les résultats sont résumés dans les tableaux 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4. On voit dans les tableaux 1, 2, 3 et 4 que les RMSE de $\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$ convergent plus rapidement à 0 lorsque n augmente, en comparaison avec les RMSE de \widetilde{CTE}_α . Dans ce cadre, ces résultats numériques montrent que $\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$ est le meilleur.

TABLE 3.1 – Biais, RMSE et l'échantillon optimal k^* des estimateurs $\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$ et \widetilde{CTE}_α basés sur 1000 échantillons de Pareto-distribution avec indice de queue 0,6 et $\alpha = 0,75$.

n	$\gamma = 0.6$			$\alpha = 0.75$			$CTE_\alpha = 5.743492$		
	$\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$			\widetilde{CTE}_α					
	k^*	bias	RMSE	k^*	bias	RMSE	k^*	bias	RMSE
200	67	0.0171	1.6031	63	0.0743	2.1524			
500	113	0.0039	0.5046	112	0.0485	0.7871			
1000	178	0.0016	0.3613	172	0.0042	0.4800			
1500	269	0.0005	0.2773	267	0.0006	0.3746			

La valeur exacte de CTE est 5.743492.

TABLE 3.2 – Biais, RMSE et l'échantillon optimal k^* des estimateurs $\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$ et \widetilde{CTE}_α basés sur 1000 échantillons de Pareto-distribution avec indice de queue 0,6 et $\alpha = 0,6$.

n	$\gamma = 0.6$			$\alpha = 0.6$			$CTE_\alpha = 4.332155$		
	$\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$			\widetilde{CTE}_α					
	k^*	bias	RMSE	k^*	bias	RMSE	k^*	bias	RMSE
200	31	0.2327	1.2853	47	0.5819	1.5516			
500	43	0.5170	0.8006	50	0.6282	0.9212			
1000	135	0.0005	0.9965	132	0.0013	0.9897			
1500	211	0.0004	0.8138	207	0.0010	0.7934			

La valeur exacte de CTE est 4.332155.

TABLE 3.3 – Biais, RMSE et l'échantillon optimal k^* des estimateurs $\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$ et \widetilde{CTE}_α basés sur 1000 échantillons de Pareto-distribution avec indice de queue 0,6 et $\alpha = 0.75$.

$\gamma = 0.6$		$\alpha = 0.75$		$CTE_\alpha = 5.743492$		
n	$\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$			\widetilde{CTE}_α		
	k^*	bias	RMSE	k^*	bias	RMSE
200	27	0.5629	2.4984	37	1.4997	6.6415
500	36	0.1638	0.7932	40	0.4464	1.1956
1000	38	0.0243	0.7162	43	0.2174	0.9943
1500	57	0.0022	0.4947	48	0.0064	0.6403

La valeur exacte de CTE est 5.743492.

TABLE 3.4 – Biais, RMSE et l'échantillon optimal k^* des estimateurs $\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$ et \widetilde{CTE}_α basés sur 1000 échantillons de Pareto-distribution avec indice de queue 0,6 et $\alpha = 0,9$.

$\gamma = 0.6$		$\alpha = 0.9$		$CTE_\alpha = 9.952679$		
n	$\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$			\widetilde{CTE}_α		
	k^*	bias	RMSE	k^*	bias	RMSE
200	61	0.0572	5.1351	52	1.1388	10.2384
500	165	0.0027	1.2899	137	0.0151	4.4969
1000	350	0.0034	2.4160	304	0.0116	3.0131
1500	450	0.0034	0.9593	396	0.0061	1.4985

La valeur exacte de CTE est 9.952679.

3.5 Robustesse

Une façon de construire la robustesse est de faire un modèle de contamination, qui est considéré jusqu'à présent qu'il consiste à remplacer une proportion de variables des données X par des valeurs aberrantes. Ainsi, pour évaluer la robustesse de notre estimateur, une simulation a été réalisée avec des données contaminées pour chaque estimateur. Les principaux points importants pour ce faire sont les suivants.

TABLE 3.5 – Biais et RMSE des estimateurs $\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$ et \widetilde{CTE}_α basés sur 1000 échantillons de distribution ϵ -contaminée avec $\alpha = 0, 6$.

		$\gamma_1 = 0.6$	$\gamma_2 = 0.8$	$\alpha = 0.6$	$CTE_\alpha = 6.330482$		
$\epsilon=0.05$	n	$\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$			\widetilde{CTE}_α		
		k^*	bias	RMSE	k^*	bias	RMSE
	500	95	0.0066	1.7309	85	0.0557	1.8504
	1000	206	0.0003	1.0712	183	0.0056	1.0773
	1500	299	0.0001	1.0245	271	0.0024	1.0235
$\epsilon=0.1$	n	$\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$			\widetilde{CTE}_α		
		k^*	bias	RMSE	k^*	bias	RMSE
	500	62	0.0013	2.9118	50	0.0127	2.9716
	1000	138	0.0002	2.8282	124	0.0012	2.8210
	1500	203	0.0001	1.6626	187	0.0018	1.6411
$\epsilon=0.15$	n	$\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$			\widetilde{CTE}_α		
		k^*	bias	RMSE	k^*	bias	RMSE
	500	44	0.1059	2.3419	44	0.2468	2.4132
	1000	81	0.0001	2.3377	76	0.0018	2.3037
	1500	138	0.0003	1.2484	129	0.0030	1.2178

TABLE 3.6 – Biais et RMSE des estimateurs $\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$ et \widetilde{CTE}_α basés sur 1000 échantillons de distribution ϵ -contaminée avec $\alpha = 0,75$.

		$\gamma_1 = 0.6$	$\gamma_2 = 0.8$	$\alpha = 0.75$	$CTE_\alpha = 8.796719$		
$\epsilon=0.05$	n	$\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$			\widetilde{CTE}_α		
		k^*	bias	RMSE	k^*	bias	RMSE
	500	91	0.0067	2.5122	80	0.0286	2.5612
	1000	179	0.0010	2.5806	165	0.0067	2.5396
	1500	272	0.0005	1.9749	252	0.0036	1.9342
$\epsilon=0.1$	n	$\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$			\widetilde{CTE}_α		
		k^*	bias	RMSE	k^*	bias	RMSE
	500	70	0.0034	2.8849	60	0.0119	3.1510
	1000	132	0.0052	2.9089	123	0.0072	2.9040
	1500	190	0.0006	2.6097	181	0.0029	2.5610
$\epsilon=0.15$	n	$\widetilde{CTE}_\alpha^{tH}$			\widetilde{CTE}_α		
		k^*	bias	RMSE	k^*	bias	RMSE
	500	46	0.0918	3.8553	75	0.9310	3.5844
	1000	91	0.0012	2.4832	85	0.0389	2.4777
	1500	124	0.0011	2.2757	120	0.0066	2.1808

D'abord, nous considérons un modèle ϵ -contaminé constitué d'une distribution de Fréchet du paramètre γ_1 polluée par des variables extraites de la distribution de Pareto pour le paramètre γ_2 . Où $\epsilon \in (0, 1)$ est le taux de contamination que nous avons pris $\epsilon = 5\%$, 10% et 15% . Ensuite, nous générons des échantillons de 1000 de taille $n = 500, 1000$ et 1500 à partir de notre modèle. Avec, $\gamma_1 = 0,6$ et $\gamma_2 = 0,8$. Enfin, nous comparons chacun des estimateurs en calculant le biais et le RMSE. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.5 pour $\alpha = 0,6$ et dans le tableau 3.6 pour $\alpha = 0,75$. Il s'est avéré que l'effet de la contamination devient immédiatement apparent.

Chapitre 4

Une nouvelle classe de distribution en tant que mélange fonctionnel fini utilisant des poids fonctionnels

4.1 Introduction

Les distributions de mélange surviennent dans une grande variété d'applications, y compris la distribution des tailles des enfants, discutée par [Everitt & Hand \(1981\)](#), et la concentration plasmatique de bêta-carotène donnée dans [Schlattmann \(2009\)](#). De plus, une application naturelle des distributions de mélange est dans la modélisation de données hétérogènes où chaque composant de la distribution de mélange correspond à un cluster de données. étant donné que les distributions de mélanges ont le potentiel de modéliser une grande variété de phénomènes aléatoires, elles ont reçu une attention croissante dans la littérature et ont été explorées par de nombreux chercheurs dans divers contextes, voir [McLachlan & Peel \(2000\)](#). La distribution du mélange k -composant est définie via la

fonction de densité de probabilité suivante (fd) :

$$h(x) = \sum_{i=1}^k p_i f_i(x), \quad (4.1.1)$$

Où $p_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$, et $f_i(x)$ est la fonction de densité de la i ème composant de population. La distribution du mélange dans (4.1.1) est exprimée comme une somme pondérée des fonctions de densité et montre suffisamment de flexibilité dans la modélisation de données hétérogènes ayant plusieurs modes, voir [Elmahdy & Aboutahoun \(2013\)](#), [Elmahdy \(2017\)](#), [Frühwirth-Schnatter \(2006\)](#), [Seidel \(2010\)](#) et les monographies citées ci-dessus. D'un autre côté, une distribution donnée peut être généralisée en employant une fonction composite. Pour être plus précis, soit $f(x)$ une fonction de densité avec support sur (a, b) , $G(x)$ une fonction croissante sur (a, b) avec $\lim_{x \rightarrow a^+} G(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow b^-} G(x) = b$ et $g(x) = G'(x)$. On peut alors montrer que $g(x)f(G(x))$ est aussi une fd basé sur le gau-chissement de $f(x)$. Par exemple, lorsque $f(x)$ est la fd d'une distribution exponentielle, alors $g(x)f(G(x))$ est la fd de la distribution de Weibull pour un terme polynomial $G(x)$. D'autres développements peuvent être trouvés dans, par exemple, [AL-Hussaini \(2012\)](#), [Alzaatreh et al. \(2013, 2012\)](#), [Sharma et al. \(2017\)](#), et les références qu'ils contiennent.

En combinant les deux approches mentionnées ci-dessus, une façon naturelle d'augmenter la flexibilité de $f(x)$ et $g(x)f(G(x))$ est de considérer un mélange de ces deux fd définis par $h(x) = pf(x) + (1 - p)g(x)f(G(x))$ avec $p \in [0, 1]$. Le paramètre p opère un compromis entre $f(x)$ et $g(x)f(G(x))$, avec $h(x) = f(x)$ si $p = 1$ et $h(x) = g(x)f(G(x))$ si $p = 0$. Il est important de noter que la proportion p est supposée être une constante fixe quel que soit le support de la variable aléatoire, bien que cela puisse sembler peu pratique dans certains cas. En gardant cela à l'esprit, nous introduisons un nouveau générateur de distributions qui généralise le mélange fini des fds $f(x)$ et $g(x)f(G(x))$ en introduisant une fonction de Lebesgue mesurable et monotone $w(x)$ avec $w(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in (a, b)$. La nouvelle famille de distributions se caractérise par la fd suivant.

$$h(x) = w(x)f(x) + [1 - w(G(x))]g(x)f(G(x)), \quad (4.1.2)$$

(Plus de détails sont donnés dans la proposition [4.2.1](#) ci-dessous). Ainsi, $h(x)$ peut être vu comme deux composants "mélange fonctionnel" de $f(x)$ et $g(x)f(G(x))$ avec les "poids fonctionnels" $\{w(x), 1 - w(G(x))\}$. Il fournit un compromis entre $f(x)$ et $g(x)f(G(x))$, en utilisant une fonction de poids monotone qui dépend des variations de x . L'introduction d'un tel poids fonctionnel dans un mélange fini de distributions est également motivée par l'utilité des distributions pondérées dans la modélisation et la prédiction efficaces à partir des données, voir [Saghir et al. \(2017\)](#), et les références qui y sont contenues.

Le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans la section [4.2](#), nous présentons les détails de base de notre famille de distributions proposée. Certains cas particuliers sont discutés. Nous soulignons également l'importance de la famille, avec un point culminant sur les connexions existantes avec d'autres familles de distributions bien connues. Des expressions des moments ordinaires sont dérivées. La section [4.3](#) est consacrée à un cas particulier, fournissant une nouvelle distribution de durée de vie avec trois paramètres. Il est basé sur la distribution exponentielle pour $f(x)$, une transformation de dilatation pour $G(x)$, et un poids avec décroissance polynomiale pour $w(x)$. Les moments de cette distribution sont également fournis. Dans la section [4.4](#), les estimations du maximum de vraisemblance des paramètres sont considérées, et deux applications réelles sont présentées pour démontrer l'applicabilité de la distribution.

4.2 la famille des distributions et certaines de ses propriétés

Dans cette section, nous définissons formellement la famille de distributions proposée ainsi que quelques cas particuliers. Les expressions des moments ordinaires sont égale-

ment étudiées pour le cas général.

4.2.1 Construction de la famille

La fonction de distribution de la famille est défini dans la proposition suivante.

Proposition 4.2.1. Soit $f(x)$ une fr avec support sur (a, b) avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \cup \{-\infty, \infty\}^2$ (y compris les intervalles semi-infinis : $(0, \infty)$ et $(-\infty, 0)$), et la droite réelle \mathbb{R} , $G(x)$ un dérivable croissant fonction sur (a, b) avec $\lim_{x \rightarrow a^+} G(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow b^-} G(x) = b$, $g(x) = G'(x)$ et $w(x)$ une fonction mesurable sur (a, b) avec $w(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in (a, b)$. Alors la fonction suivante est une fonction de densité :

$$h(x) = w(x)f(x) + [1 - w(G(x))]g(x)f(G(x)). \quad (4.2.1)$$

Preuve de proposition 4.2.1. En utilisant les hypothèses sur $f(x)$, $w(x)$ et $G(x)$, et après quelques arguments analytiques standards, nous pouvons montrer que $h(x) \geq 0$. Maintenant, nous devons montrer que $\int_a^b h(x)dx = 1$. En utilisant le changement de variables $y = G(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b h(x)dx &= \int_a^b w(x)f(x)dx + \int_a^b [1 - w(G(x))]g(x)f(G(x))dx \\ &= \int_a^b w(x)f(x)dx + \int_a^b [1 - w(y)]f(y)dy = \int_a^b f(x)dx = 1. \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve. \square

Le tableau 4.1 répertorie quelques cas particuliers des fds tels que présentés dans (4.2.1) avec divers choix de $f(x)$, $w(x)$ et $G(x)$. La distribution particulière basée sur la densité exponentielle avec $w(x) = \frac{1}{1+\alpha x^2}$ et $G(x) = \frac{x}{\sigma}$ sera discutée avec détail dans la section 4.4. La motivation du choix de cette distribution sera claire plus loin.

TABLE 4.1 – Quelques nouveaux fds $h(x)$ (4.2.1) avec divers choix de $f(x)$, $w(x)$ et $G(x)$

*.

$f(x)$	$w(x)$	$G(x)$	$h(x)$
$\theta e^{-\theta x}$	$e^{-\alpha x}$	x^σ	$\theta e^{-(\theta+\alpha)x} + \theta\sigma [1 - e^{-\alpha x^\sigma}] x^{\sigma-1} e^{-\theta x^\sigma}$
$\theta e^{-\theta x}$	$[\cos(\alpha x)]^2$	x^σ	$\theta [\cos(\alpha x)]^2 e^{-\theta x} + \theta\sigma [\sin(\alpha x^\sigma)]^2 x^{\sigma-1} e^{-\theta x^\sigma}$
$\theta e^{-\theta x}$	$[\cos(\alpha x)]^2$	$e^{\sigma x} - 1$	$\theta [\cos(\alpha x)]^2 e^{-\theta x} + \theta\sigma [\sin(\alpha x^\sigma)]^2 e^{\sigma x} e^{-\theta(e^{\sigma x}-1)}$
$2\theta x e^{-\theta x^2}$	$1 - e^{-\alpha x}$	$x + x^\sigma$	$2\theta x e^{-\theta x^2} (1 - e^{-\alpha x}) + \theta e^{-\alpha(x+x^\sigma)} (1 + \sigma x) e^{-\theta(x+x^\sigma)}$
$\theta e^{-\theta x}$	$\frac{1}{1 + \alpha x^2}$	$\frac{x}{\sigma}$	$\frac{\theta}{1 + \alpha x^2} e^{-\theta x} + \frac{\alpha\theta}{\sigma(\sigma^2 + \alpha x^2)} x^2 e^{-\theta \frac{x}{\sigma}}$
$\theta\beta e^{-\theta x} (1 - e^{-\theta x})^{\beta-1}$	$\frac{1}{1 + \alpha x^2}$	$\frac{x}{\sigma}$	$\theta\beta \left(\frac{1}{1 + \alpha x^2} e^{-\theta x} (1 - e^{-\theta x})^{\beta-1} + \frac{\alpha}{\sigma} \frac{x^2}{\sigma^2 + \alpha x^2} e^{-\theta \frac{x}{\sigma}} (1 - e^{-\theta \frac{x}{\sigma}})^{\beta-1} \right)$
$\theta\beta(\theta x)^{\beta-1} e^{-(\theta x)^\beta}$	$\frac{1}{1 + \alpha x^2}$	$\frac{x}{\sigma}$	$\theta\beta \left(\frac{1}{1 + \alpha x^2} (\theta x)^{\beta-1} e^{-(\theta x)^\beta} + \frac{\alpha}{\sigma} \frac{x^2}{\sigma^2 + \alpha x^2} (\theta \frac{x}{\sigma})^{\beta-1} e^{-\left(\theta \frac{x}{\sigma}\right)^\beta} \right)$

* Tous les paramètres apparaissant ci-dessus sont définis sur $(0, \infty)$ et $x \in (0, \infty)$.

Il est important de noter que la fonction de densité $h(x)$ est très flexible et peut être exprimé comme une somme de fonctions de natures/formes différentes. En raison de la structure complexe, la fonction de distribution cumulative (fdc) associée à $h(x)$ n'a pas nécessairement une forme fermée. Cependant, si nous prenons $w(x) = F(x)$, la fdc de la famille a une très belle expression sous forme fermée et une interprétation probabiliste. Les fonctions de densité et fdc associés sont donnés par

$$h(x) = F(x)f(x) + [1 - F(G(x))]g(x)f(G(x))$$

et

$$H(x) = \frac{1}{2}[F(x)]^2 + \frac{1}{2}[1 - [1 - F(G(x))]^2], \quad (4.2.2)$$

respectivement. La variable aléatoire associée à (4.2.2) peut être interprétée comme la variable aléatoire suivante :

$$Z = \epsilon \sup(X, Y) + (1 - \epsilon) \inf(G^{-1}(X), G^{-1}(Y)),$$

où ϵ est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, X et Y sont

des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de fd commun $f(x)$, et $G^{-1}(x)$ désigne la fonction inverse de quantile $G(x)$. Par conséquent, la famille de distributions proposée comprend des mélanges finis de sup et inf de variables aléatoires.

Un autre point est de montrer le lien possible entre la famille proposée et les distributions asymétriques. Considérons le cas où $a = -\infty$, $b = \infty$, $G(0) = 0$, $f(x)$ soit une densité symétrique autour de 0 et $w(x) = bf1_{\{x>0\}}$ est la fonction indicatrice sur l'ensemble $\{x > 0\}$. Par conséquent, la fd $h(x)$ devient une version asymétrique de $f(x)$ comme suit

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \leq 0, \\ g(x)f(G(x)) & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

La famille de distributions proposée peut être utilisée pour générer une autre famille asymétrique de distributions étudiées par [Huang & Chen \(2007\)](#). Il peut être défini comme suit. Soit $k(x)$ une densité symétrique autour de 0 et $m(x) \in [0, 1]$ une fonction mesurable de Lebesgue satisfaisant $m(x) + m(-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$, presque partout. Alors la fonction $f(x) = 2k(x)m(x)$, $x \in \mathbb{R}$, est une fonction de densité.

En utilisant fd [\(4.2.1\)](#) avec $w(x) = m(x)$, nous pouvons dériver une nouvelle famille de distributions asymétriques ; pour un $k(x)$ donné, on obtient

$$h(x) = 2 \left(k(x)(m(x))^2 + [1 - m(G(x))] g(x)k(G(x))m(G(x)) \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Sur la base de cette idée, il est possible de développer des nouvelles familles de distributions asymétriques.

4.2.2 Quelques propriétés de la famille

Nous présentons maintenant les moments ordinaires de la famille de distributions proposée [\(4.2.1\)](#). Soit X une variable aléatoire avec la densité $h(x)$ [\(4.2.1\)](#) et Y une variable

aléatoire avec fd $f(x)$. Le r ième moment non central de X est

$$\begin{aligned}\mu'_r &= E(X^r) = \int_a^b x^r h(x) dx = \int_a^b x^r [w(x)f(x) + [1 - w(G(x))]g(x)f(G(x))] dx \\ &= \int_a^b x^r w(x)f(x) dx + \int_a^b x^r [1 - w(G(x))]g(x)f(G(x)) dx \\ &= \int_a^b x^r w(x)f(x) dx + \int_a^b (G^{-1}(x))^r (1 - w(x))f(x) dx \\ &= E(Y^r w(Y)) + E[(G^{-1}(Y))^r (1 - w(Y))].\end{aligned}$$

En réarrangeant cette égalité, la formule alternative est

$$\mu'_r = E((G^{-1}(Y))^r) + E[w(Y)(Y^r - (G^{-1}(Y))^r)].$$

En particulier, la moyenne de X est donnée par $\mu'_1 = E(G^{-1}(Y)) + E[w(Y)(Y - G^{-1}(Y))]$ et la variance de X est donnée par $V(X) = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$.

La fonction génératrice des moments est

$$\begin{aligned}M(t) &= E(e^{tX}) = \int_a^b e^{tx} h(x) dx = \int_a^b e^{tx} [w(x)f(x) + [1 - w(G(x))]g(x)f(G(x))] dx \\ &= E(e^{tY} w(Y)) + E[e^{tG^{-1}(Y)} (1 - w(Y))].\end{aligned}$$

On peut vérifier que $\mu'_r = M^{(k)}(t) |_{t=0}$. En utilisant les mêmes arguments mathématiques, le r ième moment conditionnel non central de X est donné par, pour $t \in (a, b)$,

$$\mu'_r(t) = \int_a^t x^r h(x) dx = E(Y^r w(Y) \mathbf{1}_{Y \leq t}) + E[(G^{-1}(Y))^r (1 - w(Y)) \mathbf{1}_{\{Y \leq G^{-1}(t)\}}].$$

L'écart moyen par rapport à la médiane M peut être écrit comme

$$\begin{aligned}\delta &= E(|X - M|) = \int_a^b |x - M| h(x) dx \\ &= E(Y w(Y)) + E[(G^{-1}(Y))(1 - w(Y))] - 2\mu'_1(M).\end{aligned}$$

Toutes les attentes ci-dessus peuvent être calculées ou approchées pour des fonctions spécifiques $f(x)$, $w(x)$ et $G(x)$.

Dans la section suivante, nous nous concentrons sur un sous-modèle de la famille avec trois paramètres basés sur la distribution exponentielle, une transformation de dilatation et un poids avec décroissance polynomiale, appelée distribution exponentielle pondérée fonctionnelle.

4.3 la distribution FWE et ses propriétés

Dans cette section, nous considérons un sous-modèle spécial de la famille proposée basé sur la distribution exponentielle et discutons de certaines de ses propriétés.

4.3.1 Définition

Considérons maintenant la fonction de densité exponentiel $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, $\theta > 0$, $x > 0$, la fonction de poids $w(x) = \frac{1}{1+\alpha x^2}$, $\alpha \geq 0$ et $G(x) = \frac{x}{\sigma}$, $\sigma > 0$. Notez que $w(x) \in [0, 1]$ et $G(x)$, une fonction de dilatation standard, satisfaisant $G(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \infty$. la fonction (4.2.1) avec $a = 0$ et $b = \infty$ devient

$$h(x) = \frac{\theta e^{-\theta x}}{1 + \alpha x^2} + \frac{\alpha \theta x^2 e^{-\theta \frac{x}{\sigma}}}{\sigma(\sigma^2 + \alpha x^2)}, \quad x > 0. \quad (4.3.1)$$

Nous appelons la distribution avec une densité (4.3.1) la distribution exponentielle pondérée fonctionnelle, FWE en abrégé. Elle est intéressante du fait du compromis fait entre les fonctions à décroissance exponentielle $f(x)$ et $g(x)f(G(x))$, et une fonction à décroissance polynomiale $w(x)$. Cela garantit une plus grande flexibilité en termes de taux de décroissance, ce qui est un avantage pour la modélisation d'une grande variété de données de durée de vie. Notez également que la distribution FWE se réduit à la distribution

exponentielle lorsque $\alpha = 0$ ou $\sigma = 1$. Ainsi, la distribution proposée peut être considérée comme une extension de la distribution exponentielle. La figure 4.1 montre les tracés de la densité de la distribution FWE pour les valeurs sélectionnées des paramètres. La densité de la distribution FWE prend des formes décroissantes et unimodales en fonction des choix des paramètres. La dérivée première de $h(x)$ est

$$h'(x) = -\theta \left(\frac{\alpha x e^{-\frac{\theta x}{\sigma}} (\theta \sigma^2 x + \alpha \theta x^3 - 2\sigma^3)}{\sigma^2 (\sigma^2 + \alpha x^2)^2} + \frac{e^{-\theta x} (\theta + \alpha \theta x^2 + 2\alpha x)}{(1 + \alpha x^2)^2} \right),$$

et lorsqu'il existe, le mode de distribution, x_0 , vérifie l'équation suivante :

$$\alpha x_0 e^{-\frac{\theta x_0}{\sigma}} (\theta \sigma^2 x_0 + \alpha \theta x_0^3 - 2\sigma^3) (1 + \alpha x_0^2)^2 + e^{-\theta x_0} (\theta + \alpha \theta x_0^2 + 2\alpha x_0) \sigma^2 (\sigma^2 + \alpha x_0^2)^2 = 0. \quad (4.3.2)$$

Remarquez également que $h(x) = \theta - \theta^2 x + x^2 \left[\frac{\theta^3}{2} + \alpha \theta \left(\frac{1}{\sigma^3} - 1 \right) \right] + O(x^3)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \theta > 0$. Ainsi, on voit le rôle des paramètres dans la courbure de densité autour de $x = 0$, principalement pour le terme polynomial x^2 . Aussi, nous avons $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ as

$$h(x) = e^{-\theta x} \left[\frac{\theta}{\alpha x^2} - \frac{\theta}{\alpha^2 x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right) \right] + e^{-\frac{\theta x}{\sigma}} \left[\frac{\theta}{\sigma} - \frac{\sigma \theta}{\alpha x^2} + \frac{\sigma^3 \theta}{\alpha^2 x^4} + O\left(\frac{1}{x^6}\right) \right].$$

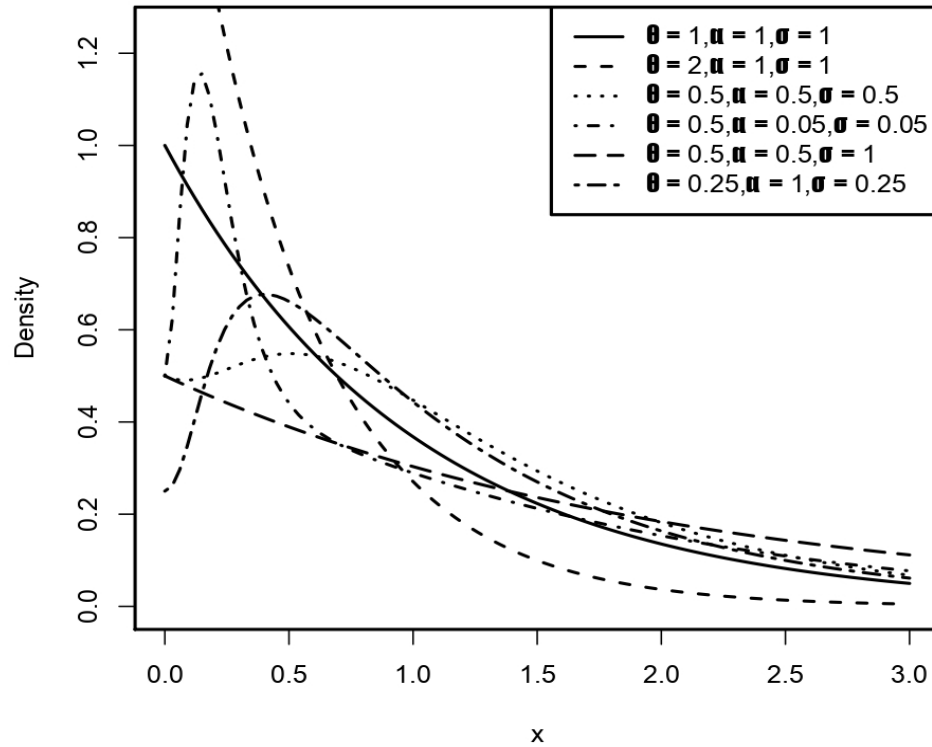


FIGURE 4.1 – Différentes formes de densité de la distribution FWE.

D'un point de vue probabiliste, la distribution FWE provient de la représentation stochastique simple, $Y = S_X X$, où X est une variable aléatoire avec fd $f(x)$, $\sigma \neq 1$, et S_X est une variable aléatoire telle que

$$P(S_x = 1 \mid X = x) = \frac{1}{1 + \alpha x^2}, \quad P(S_x = \sigma \mid X = x) = \frac{\alpha x^2}{1 + \alpha x^2}.$$

Nous pouvons observer que $h(x)$ est une fonction de distribution exponentielle pondérée puisqu'elle peut s'écrire sous la forme

$$h(x) = W(x)\theta e^{-\theta x}, \quad W(x) = \frac{1}{1 + \alpha x^2} + \frac{\alpha x^2}{\sigma(\sigma^2 + \alpha x^2)} e^{-\theta(\frac{1}{\sigma}-1)x}.$$

Notez que $W(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} W(x) = 0$ if $\sigma < 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} W(x) = 1$ si $\sigma = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} W(x) = \infty$ if $\sigma > 1$. Pour plus d'informations sur les distributions pondérées,

voir [Saghir et al. \(2017\)](#). Les aspects pratiques de la distribution FWE sont étudiés dans la section [4.4](#)

4.3.2 Moments de la distribution FWE

Soit X une variable aléatoire avec la densité $h(x)$ [\(4.3.1\)](#). Alors le r ème moment non central de X est donné par

$$\begin{aligned}\mu'_r &= E(X^r) = \int_0^\infty x^r h(x) dx = \theta \int_0^\infty \frac{x^r}{1 + \alpha x^2} e^{-\theta x} dx + \frac{\alpha \theta}{\sigma} \int_0^\infty \frac{x^{r+2}}{\sigma^2 + \alpha x^2} e^{-\theta \frac{x}{\sigma}} dx \\ &= \theta \int_0^\infty \frac{x^r}{1 + \alpha x^2} e^{-\theta x} dx + \alpha \theta \sigma^r \int_0^\infty \frac{x^{r+2}}{1 + \alpha x^2} e^{-\theta x} dx \\ &= \theta \int_0^\infty \frac{x^r}{1 + \alpha x^2} (1 + \alpha \sigma^r x^2) e^{-\theta x} dx = \frac{1}{\theta^r} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \alpha(x/\theta)^2} \left(x^r e^{-x} + \frac{\alpha}{\theta^2} \sigma^r x^{r+2} e^{-x} \right) dx.\end{aligned}$$

En utilisant l'expression $\frac{1}{1 + \alpha(x/\theta)^2} = \frac{1}{\alpha(x/\theta)^2} \frac{1}{1 + (\alpha(x/\theta)^2)^{-1}}$ et des séries géométriques, on obtient

$$\begin{aligned}\mu'_r &= \frac{1}{\theta^r} \left(\int_0^{\frac{\theta}{\sqrt{\alpha}}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\alpha^i}{\theta^{2i}} \left(x^{r+2i} e^{-x} + \frac{\alpha}{\theta^2} \sigma^r x^{r+2i+2} e^{-x} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{\theta}{\sqrt{\alpha}}}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\alpha^{-(i+1)}}{\theta^{-2(i+1)}} \left(x^{r-2(i+1)} e^{-x} + \frac{\alpha}{\theta^2} \sigma^r x^{r-2i} e^{-x} \right) dx \right), \\ &= \frac{1}{\theta^r} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\alpha^i}{\theta^{2i}} \left[\gamma \left(r + 2i + 1, \frac{\theta}{\sqrt{\alpha}} \right) + \frac{\alpha}{\theta^2} \sigma^r \gamma \left(r + 2i + 3, \frac{\theta}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\alpha^{-(i+1)}}{\theta^{-2(i+1)}} \left[\Gamma \left(r - 2i - 1, \frac{\theta}{\sqrt{\alpha}} \right) + \frac{\alpha}{\theta^2} \sigma^r \Gamma \left(r - 2i + 1, \frac{\theta}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \right),\end{aligned}$$

où, $\gamma(a, x) = \int_0^x s^{a-1} e^{-s} ds$, $a, x > 0$ et $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty s^{a-1} e^{-s} ds$, $a \in \mathbb{R}, x > 0$ sont respectivement les fonctions gamma incomplètes supérieure et inférieure. En particulier,

la moyenne de X est donné par

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \frac{1}{\theta} \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\alpha^i}{\theta^{2i}} \left[\gamma \left(2(1+i), \frac{\theta}{\sqrt{\alpha}} \right) + \frac{\alpha}{\theta^2} \sigma \gamma \left(2(i+2), \frac{\theta}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\alpha^{-(i+1)}}{\theta^{-2(i+1)}} \left[\Gamma \left(-2i, \frac{\theta}{\sqrt{\alpha}} \right) + \frac{\alpha}{\theta^2} \sigma \Gamma \left(2(1-i), \frac{\theta}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

La variance de X peut être obtenue comme $V(X) = \mu'_2 - (\mu'_1)^2$.

En utilisant des arguments mathématiques similaires, la fonction génératrice de moment peut être exprimée comme suite, pour $t < \theta / \max(1, \sigma)$,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} h(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \left(\frac{\theta}{1 + \alpha x^2} e^{-\theta x} + \frac{\alpha \theta}{\sigma} \frac{x^2}{\sigma^2 + \alpha x^2} e^{-\theta \frac{x}{\sigma}} \right) dx \\ &= \theta \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha x^2} e^{-(\theta-t)x} dx + \alpha \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1 + \alpha x^2} e^{-(\theta-\sigma t)x} dx \right) \\ &= \theta \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\alpha x^2)^i e^{-(\theta-t)x} dx + \alpha \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\alpha x^2)^i x^2 e^{-(\theta-\sigma t)x} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\alpha x^2)^{-(i+1)} e^{-(\theta-t)x} dx + \alpha \int_{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\alpha x^2)^{-(i+1)} x^2 e^{-(\theta-\sigma t)x} dx \right) \\ &= \theta \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \alpha^i \left[\frac{1}{(\theta-t)^{2i+1}} \gamma \left(2i+1, \frac{\theta-t}{\sqrt{\alpha}} \right) + \frac{1}{(\theta-\sigma t)^{2i+3}} \gamma \left(2i+3, \frac{\theta-\sigma t}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \alpha^{-(i+1)} \left[\frac{1}{(\theta-t)^{-2i-1}} \Gamma \left(-2i-1, \frac{\theta-t}{\sqrt{\alpha}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{(\theta-\sigma t)^{-2i+1}} \Gamma \left(-2i+1, \frac{\theta-\sigma t}{\sqrt{\alpha}} \right) \right] \right). \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

L'écart moyen par rapport à la médiane M est donné par

$$\begin{aligned} \delta(x) &= E(|X - M|) = \int_0^{\infty} |x - M| h(x) dx = \mu'_1 - 2 \int_0^M x h(x) dx, \\ &= \mu'_1 - 2\theta \left(\int_0^M \frac{x}{1 + \alpha x^2} e^{-\theta x} dx + \alpha \sigma \int_0^{\sigma M} \frac{x^3}{1 + \alpha x^2} e^{-\theta x} dx \right). \end{aligned}$$

Les intégrales apparues ci-dessus peuvent s'écrire en termes de sommes comme fait dans (4.3.4), en distinguant les cas $M > \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $M \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $\sigma M > \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ et $\sigma M \leq \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Par souci de

concision, nous l'omettons.

L'entropie de Shannon est définie par $S[h(X)] = -E[\log h(X)]$. On a

$$\begin{aligned} S[h(X)] &= -E \left[\log \left(\frac{\theta e^{-\theta X}}{1 + \alpha X^2} + \frac{\alpha \theta X^2 e^{-\theta \frac{X}{\sigma}}}{\sigma(\sigma^2 + \alpha X^2)} \right) \right], \\ &= -E \left[\log \left(\frac{1 + \alpha \sigma^{-1} X^2 (1 + \alpha X^2) (\sigma^2 + \alpha X^2)^{-1} e^{\frac{\sigma-1}{\sigma} \theta X}}{\theta^{-1} (1 + \alpha X^2) e^{\theta X}} \right) \right], \\ &= -E \left[\log \left(1 + \alpha \sigma^{-1} X^2 (1 + \alpha X^2) (\sigma^2 + \alpha X^2)^{-1} e^{\frac{\sigma-1}{\sigma} \theta X} \right) \right] + E \left[\log \left(\theta^{-1} (1 + \alpha X^2) e^{\theta X} \right) \right]. \end{aligned}$$

En utilisant le développement en série $E[\log(1 + X^n)] = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} E(X^{in})$, on arrive à

$$S[h(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^i}{i \sigma^i} E \left[\left(\frac{X^2 (1 + \alpha X^2)}{\sigma^2 + \alpha X^2} e^{\frac{\sigma-1}{\sigma} \theta X} \right)^i \right] - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-\alpha)^i}{i} E(X^{2i}) + \theta E(X) - \log(\theta). \quad (4.3.5)$$

Les développements des attentes peuvent être effectués via des arguments mathématiques similaires utilisés pour les moments.

4.4 Applications

Cette section comprend deux applications réelles. Nous présentons la qualité de l'ajustement de la distribution FWE basée sur la méthode standard du maximum de vraisemblance. Nous comparons l'ajustement de la distribution FWE avec cinq autres distributions ayant trois paramètres, qui sont des généralisations des distributions de Weibull et Gamma. Les distributions considérées pour la comparaison sont :

- Distribution Weibull (MW) modifiée par [Sarhan & Zaindin \(2009\)](#) avec fr

$$F(x) = 1 - e^{-\beta x^\lambda - \alpha x}, \quad \lambda > 0, \beta, \alpha \geq 0 \text{ with } \beta + \alpha > 0.$$

- Distribution Weibull exponentielle (EW) par [Mudholkar & Srivastava \(1993\)](#) avec fr

$$F(x) = \left(1 - e^{-\beta x^\lambda}\right)^\alpha, \quad \beta > 0, \lambda > 0, \alpha > 0.$$

- Distribution gamma exponentielle (EG) par [Cordeiro et al. \(2011\)](#) avec fdc

$$F(x) = [\text{GammaCDF}(\alpha, \beta)]^\theta, \quad \beta > 0, \theta > 0, \alpha > 0,$$

où $\text{GammaCDF}(\alpha, \beta)$ est la fdc de la distribution gamma avec le paramètre de forme α et le paramètre d'échelle β .

- Distribution Weibull pondérée (WtW) par [Shahbaz et al. \(2010\)](#) avec la densité

$$f(x) = \frac{\beta + 1}{\beta} \alpha \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha} \left(1 - e^{-\beta \lambda x^\alpha}\right), \quad \beta > 0, \lambda > 0, \alpha > 0.$$

- Distribution gamma généralisée étendue (EGG) utilisée par [Lee & Wang \(2013\)](#) avec la densité

$$f(x) = \frac{\lambda \alpha^\alpha \beta^{\lambda \alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\lambda \alpha - 1} e^{-\alpha(\beta x)^\lambda}, \quad \beta > 0, \lambda > 0, \alpha > 0.$$

La distribution EGG se réduit à la distribution de Weibull pour $\alpha = 1$.

Les résultats de l'ajustement sont comparés sur la base de deux jeux de données pratiques appartenant aux analyses de fiabilité et de survie. Les ensembles de données sont discutés dans les sous-sections suivantes.

4.4.1 Données sur les temps de défaillance

La qualité de l'ajustement de la distribution FWE est d'abord consultée pour les durées de vie de rupture de fatigue du Kevlar 373/époxy qui sont soumises à une pression constante au niveau de contrainte 90 jusqu'à ce que tout ait échoué. L'ensemble de données a été

rapporté par [Barlow et al. \(1984\)](#) et étudié par [Andrews & Herzberg \(2012\)](#). Les statistiques descriptives sont présentées dans le tableau [4.2](#). Puisque $Skewness = 1.980$ et $Kurtosis = 2.16$, les données sont positivement asymétriques et ont un pic de distribution inférieur à la courbe normale.

En général, les formes du taux d'échec empirique (danger) d'un ensemble de données peuvent être identifiées en utilisant le concept de temps total par le test plot (TTT) de [Aarset \(1987\)](#). La transformation TTT mise à l'échelle est :

$$g(u) = \frac{H^{-1}(u)}{H^{-1}(1)},$$

avec $H^{-1}(u) = \int_0^{F^{-1}(u)} [1 - F(y)] dy$, $u \in (0, 1)$, et leur version empirique est

$$g_n\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_{i:n}} \left[\sum_{i=1}^r x_{i:n} + (n-r)x_{r:n} \right],$$

où $r = 1, 2, \dots, n$ et $x_{i:n}$, $i = 1, 2, \dots, n$, représentent l'ordre statistiques de l'échantillon. Il a été montré que la transformée TTT mise à l'échelle est convexe (concave) si le taux de risque diminue (augmente), et pour taux de risque de baignoire (unimodale), la transformation TTT à l'échelle est d'abord convexe (concave) puis concave (convexe). La figure [4.2](#) indique que l'ensemble de données sur les temps de défaillance a un taux de risque croissant.

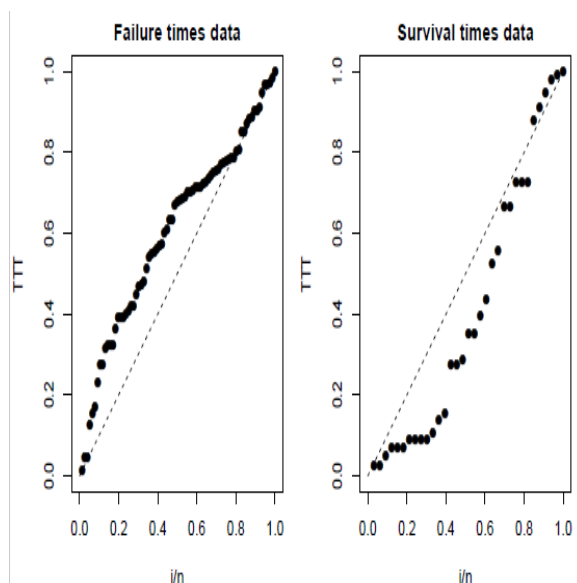


FIGURE 4.2 – Graphiques TTT pour les deux ensembles de données.

Les MLEs des paramètres de distribution ainsi que leurs erreurs standard (ESs) sont indiqués dans le tableau 4.3 pour cet ensemble de données. De ce tableau, il ressort clairement que les SEs correspondant aux estimations des paramètres de la distribution FWE sont les plus petites parmi les autres. Nous appliquons maintenant des tests formels d'adéquation afin de vérifier quelle distribution correspond le mieux à l'ensemble de données donné. Nous considérons le critère d'information d'Akaike ($AIC = 2p - 2\ln(\hat{\ell})$), l'information bayésienne Critère ($BIC = p \ln(n) - 2\ln(\hat{\ell})$), $-\ln(\hat{\ell})$ et statistique de Kolmogorov-Smirnov (KS) avec p -value comme critère d'adéquation, où $\ln(\hat{\ell})$ est la valeur de la fonction de vraisemblance évaluée au niveau des estimations de paramètres, n est le nombre d'observations, et p est le nombre de paramètres estimés. Pour un ensemble de données donné, plus l'AIC ou le BIC est petit, l'ajustement est meilleur. Ces statistiques sont calculées à l'aide des MLE des paramètres basés sur l'ensemble de données et présentés dans le tableau 4.4. Nous pouvons noter à partir de ce tableau que la distribution FWE a des valeurs plus petites des statistiques AIC, BIC et KS, entre autres. Par conséquent, nous pouvons conclure que la distribution FWE correspond mieux que les distributions considérées pour l'en-

semble de données donné. Les tracés de probabilité-probabilité (PP) des distributions sont donnés dans la figure 4.3 pour l'ensemble de données sur les temps de défaillance. Les figures 4.4 et 4.5 montrent respectivement la densité et la fdc ajustés de la distribution FWE pour cet ensemble de données. Les estimations ajustées et empiriques sont très proches les unes des autres. Ces chiffres indiquent donc que la distribution FWE peut fournir de bonnes estimations des probabilités associées aux durées de vie de rupture de fatigue du Kevlar 373/époxy, par exemple, $q = P(2 < X < 3) = 0,184$, et son l'estimation est $\hat{q} = 0,176$.

TABLE 4.2 – Descriptions statistiques des deux ensembles de données.

Statistic	Failure times	Survival times	Statistic	Failure times	Survival times
	data	data		data	data
Minimum	0.03	1.0	Q1	0.91	4
Maximum	9.10	156.0	Q3	2.30	65
Mean	1.96	40.9	Skewness	1.98	1.16
Median	1.74	22.0	Kurtosis	2.16	2.88
St. Deviation	1.57	46.7	Range	9.07	155

TABLE 4.3 – Les MLE et SE des paramètres des distributions pour les données de temps de défaillance.

Model	Estimate (SE)		
FWE(θ, α, σ)	$\hat{\theta} = 0.227(0.078)$	$\hat{\alpha} = 0.123(0.111)$	$\hat{\sigma} = 0.294(0.115)$
EG(α, β, θ)	$\hat{\alpha} = 1.260(2.196)$	$\hat{\beta} = 1.334(2.513)$	$\hat{\theta} = 0.759(0.479)$
MW(α, β, λ)	$\hat{\alpha} = -0.063(0.453)$	$\hat{\beta} = 0.431(0.475)$	$\hat{\lambda} = 1.283(0.295)$
EW(α, β, λ)	$\hat{\alpha} = 1.443(0.647)$	$\hat{\beta} = 0.580(0.302)$	$\hat{\lambda} = 1.101(0.264)$
EGG(α, β, λ)	$\hat{\alpha} = 1.477(0.805)$	$\hat{\beta} = 0.502(0.063)$	$\hat{\lambda} = 1.065(0.338)$
WtW(α, β, λ)	$\hat{\alpha} = 0.907(0.130)$	$\hat{\beta} = 0.336(2.768)$	$\hat{\lambda} = 0.973(0.960)$

TABLE 4.4 – Log-vraisemblance, AIC, BIC, KS et valeurs de p pour les distributions ajustées pour les données sur les temps de défaillance.

Model	$-\ln(\hat{\ell})$	AIC	BIC	KS	PV
FWE	121.099	248.197	255.190	0.088	0.567
EG	122.235	250.469	257.461	0.096	0.460
MW	122.512	251.024	258.016	0.108	0.311
EW	122.164	250.327	257.319	0.099	0.422
EGG	122.230	250.460	257.452	0.100	0.402
WtW	122.366	250.733	257.725	0.094	0.489

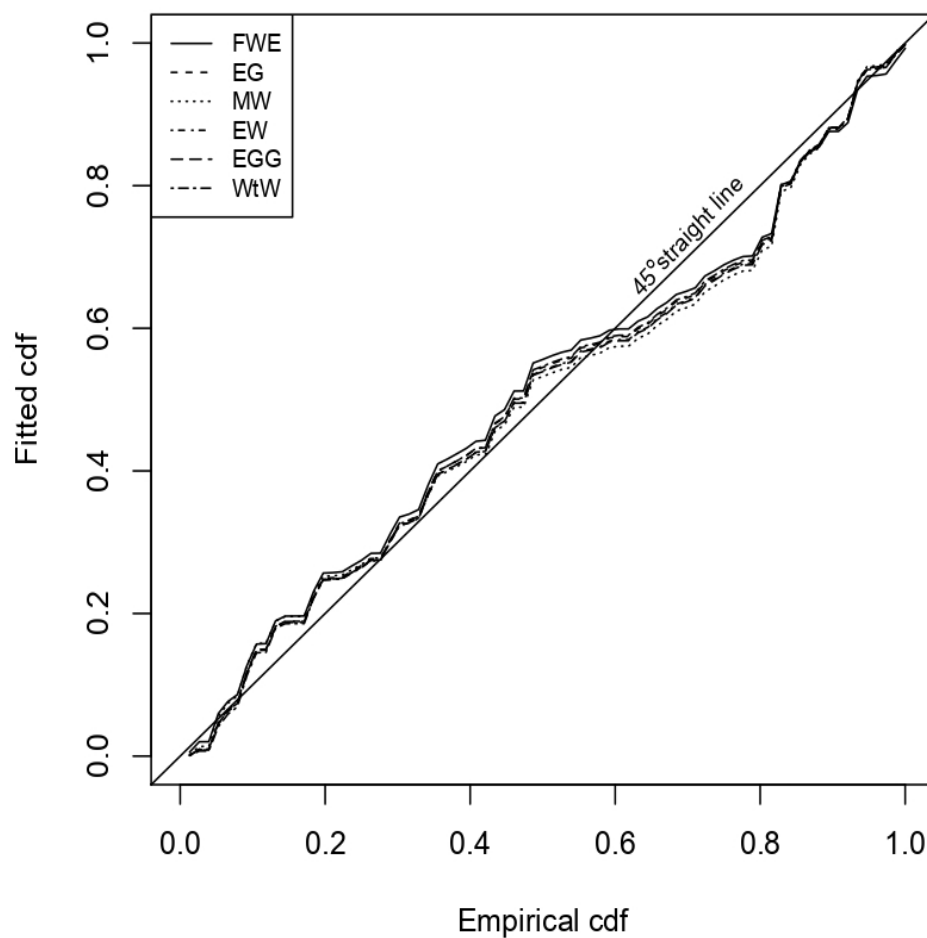


FIGURE 4.3 – Tracés de probabilité-probabilité (PP) des distributions des données de temps de défaillance.

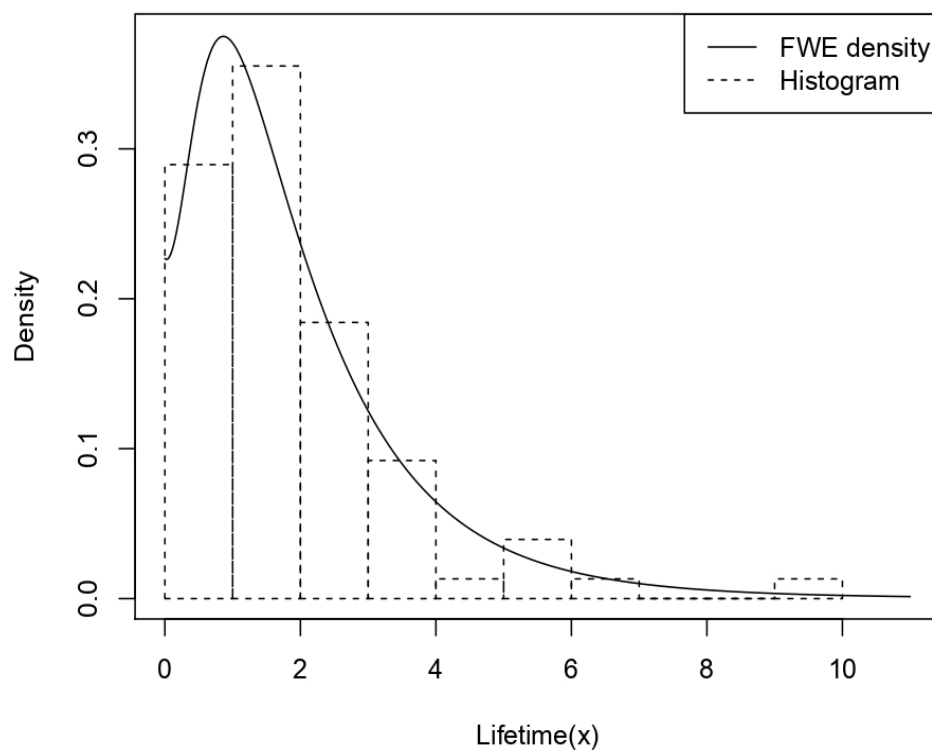


FIGURE 4.4 – Tracé de densité ajusté de la distribution FWE pour les données de temps de défaillance.

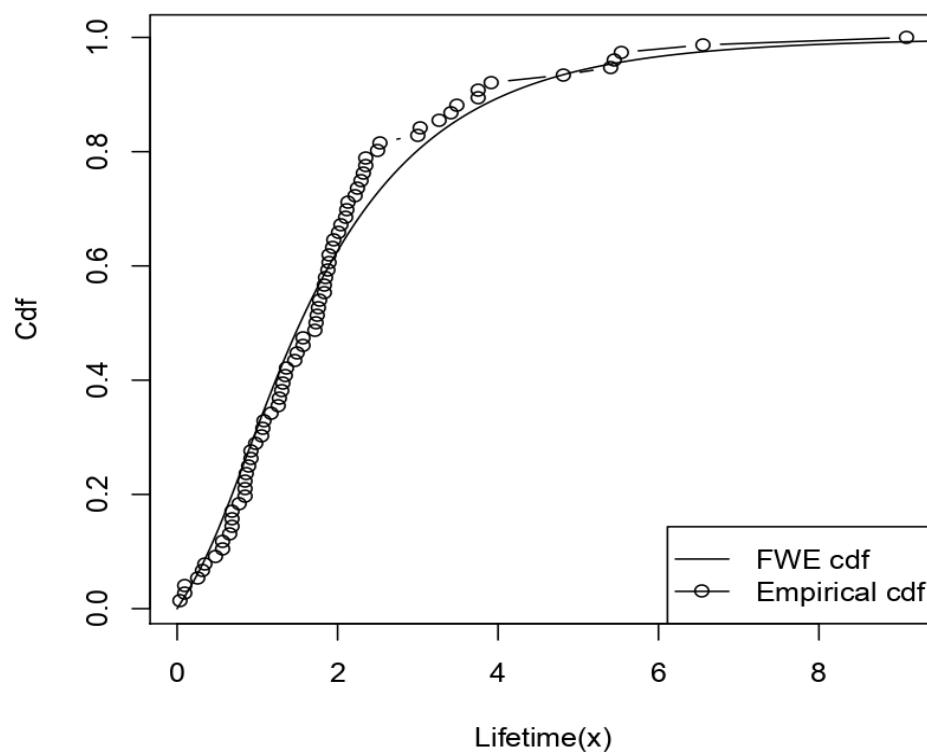


FIGURE 4.5 – Tracé fdc ajusté de la distribution FWE pour les données de temps de défaillance.

4.4.2 Données de temps de survie

Dans cette sous-section, nous présentons la modélisation des temps de survie de 33 patients décédés de leucémie myéloïde aiguë. Les temps de survie sont notés en semaines. L'ensemble de données est obtenu à partir de Feigl & Zelen (1965) et est également disponible dans le package "MASS" du logiciel R. La distribution de fréquence des données est lourde et asymétrique à droite, voir le tableau 4.2, à partir de la figure 4.2, nous pouvons voir que le tracé TTT pour l'ensemble de données sur les temps de défaillance est d'abord convexe puis concave, ce qui signifie que l'ensemble de données appartient au taux de risque en forme de baignoire.

Nous calculons les MLE, ainsi que les SE respectifs, des paramètres de toutes les distributions pour les données sur les temps de survie. Ils sont présentés dans le tableau 4.5. Pour chaque distribution, les valeurs de log-vraisemblance, AIC, BIC, KS et p sont obtenues à l'aide des MLE. Ils sont présentés dans le tableau 4.6. À partir de ce tableau, nous voyons que la distribution FWE a les plus petites valeurs AIC, BIC et KS sur toutes les autres distributions. La valeur p de la statistique de test KS est maximale pour la distribution FWE. Par conséquent, nous pouvons conclure que la distribution FWE est un meilleur modèle pour modéliser les temps de survie que les distributions EG, EM, EGG WtW et MW. Les graphiques PP des distributions sont donnés dans la figure 4.6 pour l'ensemble de données sur les temps de survie. La figure 4.7 montre la fd ajusté de la distribution FWE pour l'ensemble de données donné. La figure 4.8 montre la fdc ajustée de la distribution FWE. étant donné que les estimations ajustées et empiriques sont très proches les unes des autres, nous pouvons dire que la distribution FWE correspond bien à cette distribution de fréquence.

TABLE 4.5 – Les MLE et SE des paramètres des distributions pour les données de temps de survie.

Model	Estimate (SE)		
FWE(θ, α, σ)	$\hat{\theta} = 0.070(0.0264)$	$\hat{\alpha} = 0.0195(0.0213)$	$\hat{\sigma} = 3.277(1.202)$
EG(α, β, θ)	$\hat{\alpha} = 100.034(9675.29)$	$\hat{\beta} = 0.601 \times 10^{-2}(3.697 \times 10^{-5})$	$\hat{\theta} = 0.526(0.229)$
MW(α, β, λ)	$\hat{\alpha} = -0.0027(0.0424)$	$\hat{\beta} = 0.0645(0.0396)$	$\hat{\lambda} = 0.795(0.293)$
EW(α, β, λ)	$\hat{\alpha} = 1.535(5.286)$	$\hat{\beta} = 0.160(1.033)$	$\hat{\lambda} = 0.608(1.137)$
EGG(α, β, λ)	$\hat{\alpha} = 2.574(7.181)$	$\hat{\beta} = 0.037(0.025)$	$\hat{\lambda} = 0.444(0.695)$
WtW(α, β, λ)	$\hat{\alpha} = 0.512(0.0675)$	$\hat{\beta} = 8.021 \times 10^{-5}(1.515)$	$\hat{\lambda} = 0.3583(0.291)$

TABLE 4.6 – Log-vraisemblance, AIC, BIC, KS et valeurs de p pour les distributions ajustées pour les données sur les temps de survie.

Model	$-\ln(\ell)$	AIC	BIC	KS	PV
FWE	151.125	308.250	312.739	0.090	0.952
EGD	153.136	312.271	316.761	0.136	0.576
MW	153.585	313.169	317.659	0.129	0.644
EWD	153.585	313.169	317.659	0.137	0.564
EGG	153.501	313.003	317.492	0.137	0.562
WtW	153.507	313.013	317.503	0.137	0.565

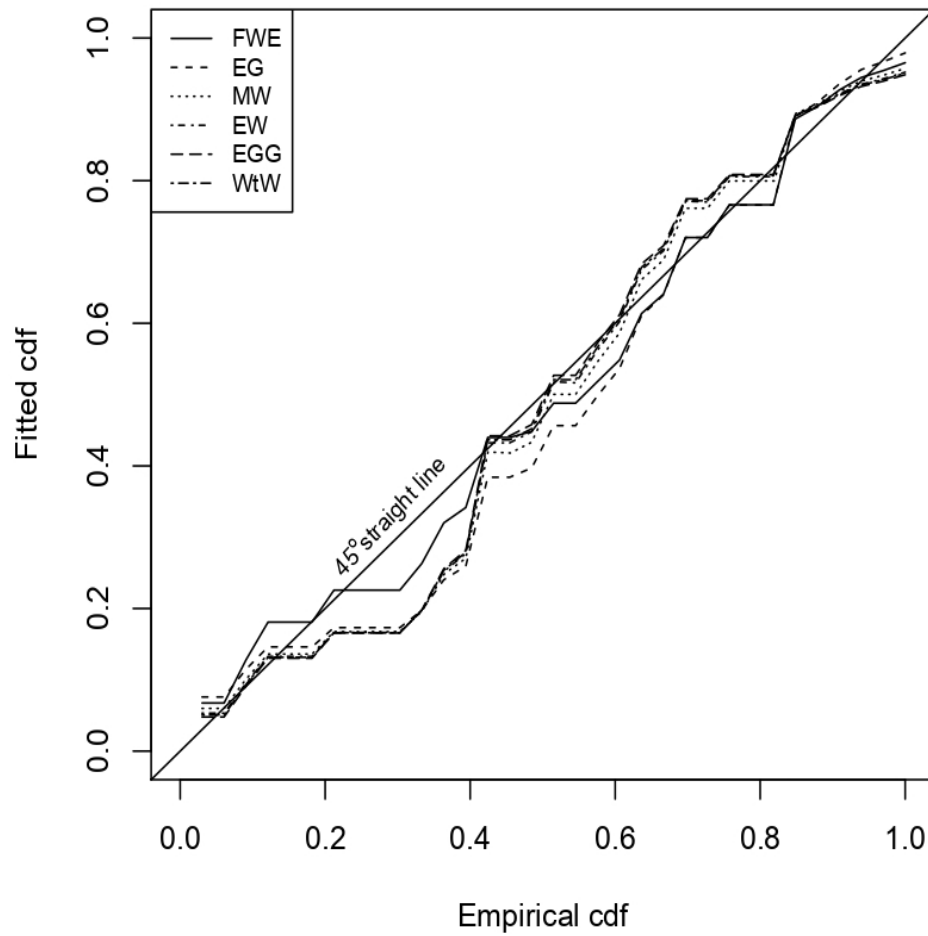


FIGURE 4.6 – Graphiques de probabilité-probabilité (PP) des distributions des données sur les temps de survie.

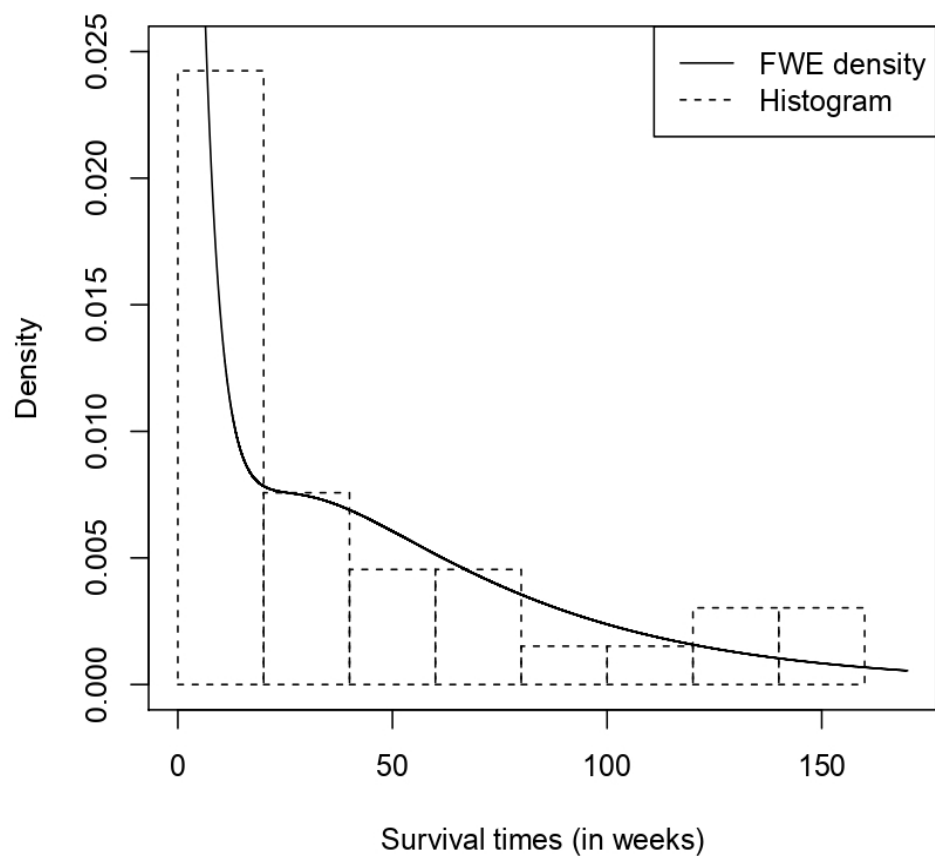


FIGURE 4.7 – Graphique de densité ajusté de la distribution FWE pour les données de temps de survie.

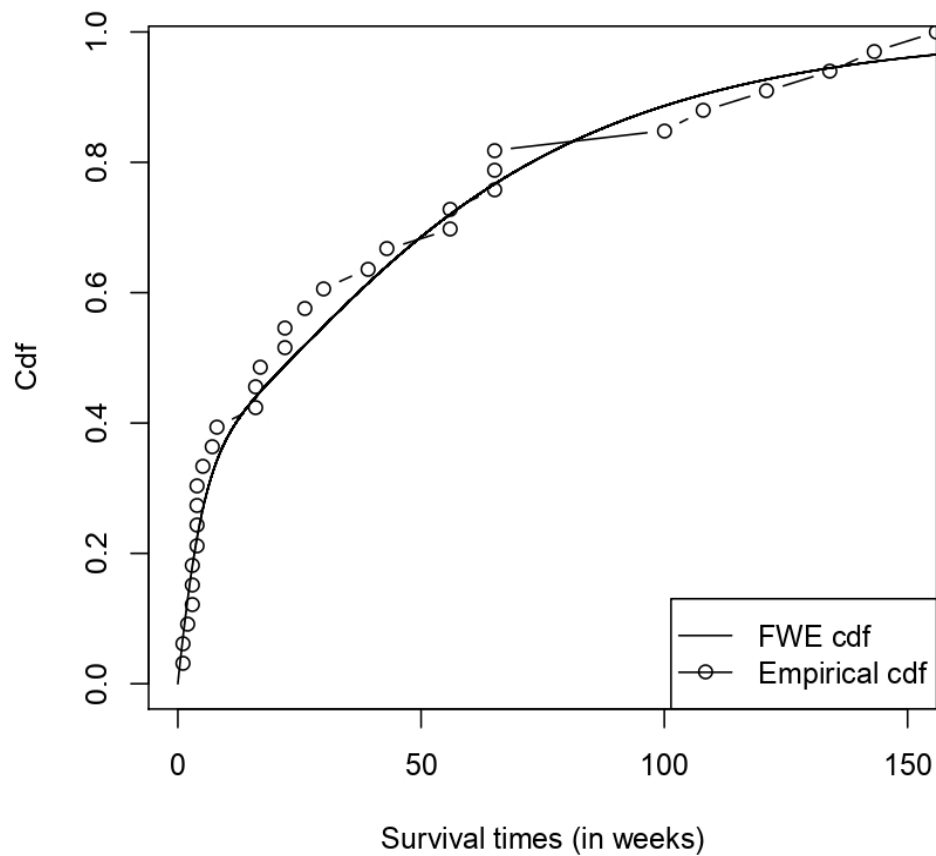


FIGURE 4.8 – Tracé fdc ajusté de la distribution FWE pour les données de temps de survie.

Conclusion et perspective

Dans cette thèse nous avons abordé un problème récent en théorie des valeurs extrêmes, Ce problème est très fréquent dans plusieurs domaines de la vie socio-économique , tels la finance, l'assurance, la fiabilité,... Nous avons proposé un estimateur avec une performance assez bonne lorsque la distribution des données s'écarte de la distribution supposée. Nous montrons que le nouvel estimateur de CTE basé sur l'estimateur t-Hill est plus robuste et fonctionne mieux que l'autre basé sur l'estimateur de Hill proposé par Peng and Welsh (2001). Nous pensons que cette nouvelle découverte ouvre la porte à des nouvelles applications dans le cadre d'estimation CTE, hors du champ de cet article. De plus, nous introduisons et étudions une nouvelle famille de distributions basées sur un mélange fonctionnel fini utilisant des poids fonctionnels. Certaines propriétés mathématiques de la nouvelle famille sont étudiées. Un cas particulier basé sur les poids polynomiaux et la distribution exponentielle, appelé distribution exponentielle pondérée fonctionnelle (FWE), est étudié en détail. Les estimations des paramètres inconnus de la distribution FWE sont obtenues en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. L'utilité du sous-modèle proposé est démontrée par deux ensembles de données réelles.

Une suite logique de ce travail est d'étudier le même cas en présence de censure ou d'utiliser une autre méthode d'estimation (par exemple la méthode du noyau).

Bibliographie

- Aarset, M. V. (1987). How to identify bathtub hazard rate. *IEEE transactions on reliability*, 36(1), 106-108.
- AL-Hussaini, E. K. (2012). Composition of cumulative distribution functions. *Journal of Statistical Theory and Applications* ISSN, 1538, 7887.
- Alzaatreh, A., Lee, C., & Famoye, F. (2013). A new method for generating families of continuous distributions. *Metron*, 71(1), 63-79.
- Alzaatreh, A., Famoye, F., & Lee, C. (2012). Gamma-Pareto distribution and its applications. *J Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 11(1), 7.
- Andrews, D. F., & Herzberg, A. M. (2012). Data : a collection of problems from many fields for the student and research worker. *Springer Science Business Media*.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3), 203-228.
- Balkema, A. A., & De Haan, L. (1974). Residual life time at great age. *The Annals of probability*, 2(5), 792-804.
- Barlow, R. E., Toland, R. H., & Freeman, T. (1984, May). A Bayesian analysis of stress-rupture life of kevlar 49/epoxy spherical pressure vessels. *In Proc. Conference on Applications of Statistics*, Marcel Dekker, New York.

- Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J., & Teugels, J. L. (2004). *Statistics of extremes : theory and applications*. *John Wiley & Sons*.
- Beran, J., Schell, D., & Stehlik, M. (2014). The harmonic moment tail index estimator : asymptotic distribution and robustness. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 66(1), 193-220.
- Bertsimas, D., Lauprete, G. J., & Samarov, A. (2004). Shortfall as a risk measure : properties, optimization and applications. *Journal of Economic Dynamics and control*, 28(7), 1353-1381.
- Bingham, N. H., Goldie, C. M., & Teugels, J. L. (1988). Regular variation. *Bull. Amer. Math. Soc*, 19, 329-332.
- Brahimi, B., & Kenioua, Z. (2016). Robust estimator of distortion risk premiums for heavy-tailed losses. *Afrika Statistika*, 11(1), 869-882.
- Brazauskas, V., Jones, B. L., Puri, M. L., & Zitikis, R. (2008). Estimating conditional tail expectation with actuarial applications in view. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 138(11), 3590-3604.
- Cai, J. J., Einmahl, J. H., de Haan, L., & Zhou, C. (2015). Estimation of the marginal expected shortfall : the mean when a related variable is extreme. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)*, 77(2), 417-442.
- Cai, J., & Tan, K. S. (2007). Optimal retention for a stop-loss reinsurance under the VaR and CTE risk measures. *ASTIN Bulletin : The Journal of the IAA*, 37(1), 93-112.
- Cordeiro, G. M., Ortega, E. M., & Silva, G. O. (2011). The exponentiated generalized gamma distribution with application to lifetime data. *Journal of statistical computation and simulation*, 81(7), 827-842.

- Csorgo, M., Csorgo, S., Horváth, L., & Mason, D. M. (1986). Weighted empirical and quantile processes. *The Annals of Probability*, 31-85.
- De Haan, L., Ferreira, A., & Ferreira, A. (2006). *Extreme Value Theory : an Introduction*. New York : Springer.
- De Haan, L., & Resnick, S. (1996). Second-order regular variation and rates of convergence in extreme-value theory. *The Annals of Probability*, 97-124.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., & Kaas, R. (2006). *Actuarial theory for dependent risks : measures, orders and models*. John Wiley & Sons.
- Elmahdy, E. E., & Aboutahoun, A. W. (2013). A new approach for parameter estimation of finite Weibull mixture distributions for reliability modeling. *Applied Mathematical Modelling*, 37(4), 1800-1810.
- Elmahdy, E. E. (2017). Modelling reliability data with finite Weibull or lognormal mixture distributions. *Appl. Math. Inf. Sci*, 11(9), 1081-1089.
- Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. (2013). *Modelling extremal events : for insurance and finance*. Springer Science & Business Media.
- Everitt, B. S., & Hand, D. J. (1981). Mixtures of discrete distributions. In *Finite Mixture Distributions*. Springer, Dordrecht, 1981. 89-105.
- Fabián, Z., & Stehlik, M. (2009). On robust and distribution sensitive Hill like method. *IFAS research paper series*, 43(4), 1-9.
- Feigl, P., & Zelen, M. (1965). Estimation of exponential survival probabilities with concomitant information. *Biometrics*, 21, 826-838.
- Fisher, R. A., & Tippett, L. H. C. (1928, April). Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society (Vol. 24, No. 2)*. Cambridge University Press, 180-190.

- Föllmer, H., & Schied, A. (2002). Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and stochastics*, 6(4), 429-447.
- Frühwirth-Schnatter, S., & Frèuhwirth-Schnatter, S. (2006). Finite mixture and Markov switching models. *New York : Springer*.
- Geluk, J., de Haan, L., Resnick, S., & Stărică, C. (1997). Second-order regular variation, convolution and the central limit theorem. *Stochastic Processes and their Applications*, 69(2), 139-159.
- Girard, S., & Guillou, A. (2013). Reduced-bias estimator of the Proportional Hazard Premium for heavy-tailed distributions. *Insurance : Mathematics and Economics*, 52(3), 550-559.
- Gnedenko, B. (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire. *Annals of mathematics*, 423-453.
- Gumbel, E. J. (1935). Les valeurs extrêmes des distributions statistiques. *In Annales de l'institut Henri Poincaré*, 115-158.
- Hill, B. M. (1975). A simple general approach to inference about the tail of a distribution. *The annals of statistics*, 3(5), 1163-1174.
- Huang, W. J., & Chen, Y. H. (2007). Generalized skew-Cauchy distribution. *Statistics & probability letters*, 77(11), 1137-1147.
- Jordanova, P., Fabián, Z., Hermann, P., Střelec, L., Rivera, A., Girard, S., Torres, S. & Stehlík, M. (2016). Weak properties and robustness of t-Hill estimators. *Extremes*, 19(4), 591-626.
- Jordanova, P., & Pancheva, E. (2012). Weak asymptotic results for t-hill estimator. *Comptes rendus de l'académie bulgare des sciences*, 65(12), 1649-1656.
- Jorion, P. (1997). Value at risk : the new benchmark for controlling market risk. Irwin Professional Pub.

- Juárez, S. F., & Schucany, W. R. (2004). Robust and efficient estimation for the generalized pareto distribution. *Extremes*, 7(3), 237-251.
- Kim, M. & Lee, S. (2008). Estimation of a tail index based on minimum density power divergence. *Journal of multivariate Analysis*, 99(10), 2453-2471.
- Landsman, Z. M., & Valdez, E. A. (2003). Tail conditional expectations for elliptical distributions. *North American Actuarial Journal*, 7(4), 55-71.
- Lee, E. T., & Wang, J. (2003). Statistical methods for survival data analysis. *John Wiley & Sons*.
- McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). Quantitative risk management : concepts, techniques and tools-revised edition. *Princeton university press*.
- Morgan, J. P. (1997). Creditmetrics-technical document. *JP Morgan, New York*.
- Mudholkar, G. S., & Srivastava, D. K. (1993). Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE transactions on reliability*, 42(2), 299-302.
- Necir, A., Meraghni, D. & Meddi, F. (2007) Statistical estimate of the proportional hazard premium of loss. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2007(3), 147-161.
- Necir, A., Rassoul, A. & Zitikis, R. (2010). Estimating the conditional tail expectation in the case of heavy-tailed losses. *Journal of Probability and Statistics*.
- Peel, D. A. V. I. D., & MacLahlan, G. (2000). Finite mixture models. *John & Sons*.
- Peng, L., & Welsh, A. H. (2001). Robust estimation of the generalized pareto distribution. *Extremes*, 4(1), 53-65.
- Pickands III, J. (1975). Statistical inference using extreme order statistics. *Annals of statistics*, 3(1), 119-131.

- Reiss, R. D., Thomas, M., & Reiss, R. D. (1997). Statistical analysis of extreme values with applications to insurance. Finance, Hydrology and Other. *Birkhauser Verlag, Basel*.
- Resnick, S. I. (2008). Extreme values, regular variation and point processes. *Springer Science & Business Media*.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of risk*, 2, 21-42.
- Saghir, A., Hamedani, G. G., Tazeem, S., & Khadim, A. (2017). Weighted distributions : A brief review, perspective and characterizations. *International journal of Statistics and Probability*.
- Sarhan, A. M., & Zaindin, M. (2009). Modified Weibull distribution. *APPS. Applied Sciences*, 11, 23-36.
- Schlattmann, P. (2009). Medical applications of finite mixture models. *Berlin : Springer*.
- Seidel, W. (2010). Mixture models. In Lovric, M., *International Encyclopedia of Statistical Science*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Shahbaz, S., Shahbaz, M. Q., & Butt, N. S. (2010). A class of weighted Weibull distribution. *Pakistan J Stat Oper Res*, 6(1), 53-59.
- Sharma, V. K., Bakouch, H. S., & Suthar, K. (2017). An extended Maxwell distribution : Properties and applications. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46(9), 6982-7007.
- Stehlík, M., Fabián, Z. & Střelec, L. (2012). Small sample robust testing for normality against pareto tails. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 41(7), 1167-1194.
- Stehlík, M., Potocký, R., Waldl, H. & Fabián, Z. (2010). On the favorable estimation for fitting heavy tailed data. *Computational Statistics*, 25(3), 485-503.

- Tasche, D. (2002). Expected shortfall and beyond. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1519-1533.
- Vandewalle, B., Beirlant, J., Christmann, A. & Hubert, M. (2007). A robust estimator for the tail index of pareto-type distributions. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(12), 6252-6268.
- Von Mises, R. (1954). La distribution de la plus grande de n valeurs. *American Mathematical Society, Providence, RI, II(In Selected Papers)*, 271–294.
- Weissman, I. (1978). Estimation of parameters and large quantiles based on the k largest observations. *Journal of the American Statistical Association*, 73(364), 812-815.
- Wirch, J. L., & Hardy, M. R. (1999). A synthesis of risk measures for capital adequacy. *Insurance : mathematics and Economics*, 25(3), 337-347.

Résumé :

Cette thèse est divisée en quatre (4) chapitres auxquels s'ajoutent une introduction et une conclusion. Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de base sur la théorie des valeurs extrêmes. Dans le deuxième chapitre, nous avons discuté sur les mesures de risque. Dans le troisième chapitre, nous utilisons l'estimateur de l'indice des valeurs extrêmes, appelé t-Hill, pour dériver un estimateur robuste de l'espérance conditionnelle à queue (*CTE*) dans le cas de pertes à queue lourde. La *CTE* devient rapidement la mesure privilégiée pour l'évaluation statutaire du bilan à n'importe quel moment où la stochastique réelle est utilisée pour fixer la provision pour les risques, sous les valeurs méthodologiques extrêmes, nous démontrant la normalité asymptotique d'un estimateur non paramétrique robuste de l'espérance conditionnelle des pertes lorsque la variable de la perte ne suit aucune distribution avec un seconde moment infini. De plus, la performance numérique de notre nouveau estimateur est étudiée et comparée à un estimateur bien établi, avec des résultats favorables. Dans le dernier chapitre, nous introduisons une nouvelle famille de distribution dont la fonction de densité de probabilité est définie comme une somme pondérée de deux fonctions de densité de probabilité. Nous concentrons notre attention sur un cas particulier basé sur la distribution exponentielle avec trois paramètres, une transformation de dilatation et un poids avec décroissance polynomiale, conduisant à une nouvelle distribution de durée de vie. Pour estimer les paramètres, on a utilisé la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance. Et à la fin, deux applications avec des ensembles de données pratiques sont données.

Mots Clés: Espérance conditionnelle des queues, estimateur t-Hill, l'indice de queue, distribution à queue lourde, distribution pondérée, distribution exponentielle, estimation du maximum de vraisemblance.

Abstract :

This thesis is divided into four (4) chapters plus an introduction and a conclusion. In the first chapter, we recall some basic notions on the theory of extreme values. In the second chapter, we discussed about risk measurements. In the third chapter, we use the estimator of the index of extreme values, called t-Hill, to derive a robust estimator of the conditional tail expectation (*CTE*) in the case of heavy tail losses. The *CTE* is quickly becoming the preferred measure for the statutory assessment of the balance sheet at any time when the actual stochastic is used to set the provision for risks, under the extreme methodological values, showing us the asymptotic normality of the robust. nonparametric estimator of the conditional expectation of losses when the loss variable follows no distribution with an infinite second moment. In addition, the numerical performance of our new estimator is studied and compared to a well-established estimator, with favorable results. In the last chapter, we introduce a new family of distributions whose probability density function is defined as a weighted sum of two probability density functions. We focus our attention on a special case based on the exponential distribution with three parameters, an expansion transformation and a weight with polynomial decay, leading to a new lifetime distribution. To estimate the parameters, the maximum likelihood estimation method is used. Two applications to practical data sets are given.

Keywords: Conditional tail expectation, t-Hill estimator, tail index, heavy-tailed distribution, weighted distribution, exponential distribution, moment generating function, maximum likelihood estimation.