

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Mohammed Khider Biskra  
Faculté des Sciences Exactes Et des Sciences de la vie  
Département des Mathématiques



# THESE

Présentée par :  
**Mr. Boussaad Abdelmalik**  
En vue de l'obtention du diplôme de  
**Doctorat en Sciences**  
Spécialité : Mathématiques Appliquées

THEME :

**Analyses multi-résolutions non stationnaires et applications au traitement d'images numériques**

Soutenu le:14/09/2023

Devant le jury composé de :

Président	Mr. Mokhtari Zouhir	Professeur, Université de Batna 2
Rapporteur	Mr. Melkemi Khaled	Professeur, Université de Batna 2
Examineur	Mr. Djabrane Yahia	Professeur, Université de Biskra
Examineur	Mr. Labeled Boubakeur	MCA, Université de Biskra

T  
H  
E  
S  
E

---

## **Remerciements**

Je tiens à remercier le Professeur Khaled Melkemi qui a dirigé cette thèse et qui m'a fait partagé ses idées. Il a toujours été là pour me soutenir et me conseiller au cours de l'élaboration de cette thèse. Qu'il soit aussi remercié pour sa gentillesse, sa disponibilité permanente et pour ses nombreux encouragements. Je tiens à remercier Monsieur Zouhir Mokhtari , professeur à l'université de Batna 2, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse. Je remercie également Monsieur Djebrane Yahia professeur à l'université de Biskra et Monsieur Labeled Boubakeur maître de conférences classe A à l'université de Biskra pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'être dans mon jury de thèse. Je tiens à remercier particulièrement tout le personnel du département des Mathématiques à l'université de Biskra ainsi que tout mes collègues au département de Mathématiques de l'université de Batna 2.

---

## Résumé

Dans, ce travail, une technique de construction d'une Analyse multirésolution non stationnaire est présentée. Notre méthode est basée sur le choix d'une meilleure base d'ondelettes guidée par une application au traitement du signal. Deux applications spécifiques ont été présentées dans le cadre de la classification des signaux ECG est l'approximation des images numériques sur les bases d'ondelettes. Des simulations ont été effectuées prouvent l'efficacité de notre méthode.

**Mots clés:** Transformée en ondelettes, Classification des signaux ECG, Extreme learning machine, Ondelettes non stationnaires, Analyse multirésolution

## Abstract

In this work, a technique for constructing a non-stationary Multiresolution Analysis is presented. Our method is based on the choice of a suitable wavelet basis guided by an application to signal processing. Two specific applications were presented in the context of ECG signal classification and wavelet-based approximation of digital images. Simulations have been carried out to prove the effectiveness of our method.

**Keywords:** Discrete wavelet transform (DWT), ECG signal classification, Extreme learning machine (ELM), Non-stationary wavelets, Multiresolution Analysis.

# Table des Matières

<b>Liste des figures</b>	<b>iv</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>2 Ondelettes et Analyse Multirésolution Standards</b>	<b>4</b>
2.1 Analyse multirésolution standard . . . . .	5
2.2 Équation d'échelle . . . . .	8
2.3 La projection dans les espaces $V_j$ . . . . .	10
2.4 Fonction d'ondelette et filtre d'ondelette . . . . .	11
2.5 Espaces d'ondelettes . . . . .	13
2.6 La projection de $V_{j+1}$ dans $W_j$ . . . . .	14
2.7 Reconstruction de $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$ à partir de $f_j(t) \in V_j$ et $\omega_j(t) \in W_j$ . . . . .	14
2.8 Interprétation dans le domaine fréquentiel et le domaine de la transformée en $z$	15
2.9 Conditions d'orthogonalité . . . . .	17
2.10 Le symbole de la fonction ondelette $\psi$ . . . . .	19
<b>3 Analyse Multirésolution non stationnaire</b>	<b>22</b>
3.1 Analyse Multirésolution Non-stationnaire . . . . .	22
3.2 Équation d'échelle (cas d'une AMR NS) . . . . .	23
3.3 La décomposition sur une AMR NS . . . . .	24
3.4 Condition d'orthogonalité et la transformée en $z$ . . . . .	25
3.5 B-splines exponentielles et Analyse multirésolution non stationnaire . . . . .	26
3.6 Analyse multirésolution et approximation des polynômes exponentielles . . . . .	32
<b>4 Ondelettes non-stationnaires et classification des signaux ECG</b>	<b>33</b>
4.1 Méthode proposée . . . . .	33
4.2 L'algorithme d'optimisation Fireworks . . . . .	34
4.3 Méthode proposée . . . . .	37
4.4 expérimentations et évaluation des résultats . . . . .	41
<b>5 Ondelettes non-stationnaires et traitement d'images</b>	<b>45</b>
5.1 Analyse multirésolution NS biorthogonale . . . . .	45
5.2 Ondelettes biorthogonale non-stationnaires . . . . .	46
5.3 La méthode de construction . . . . .	47
5.4 Les ondelettes biorthogonales non stationnaires proposées . . . . .	49
5.5 Etude expérimentale et comparative . . . . .	50
<b>Conclusion</b>	<b>55</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>56</b>

# Liste des figures

2.1	Fonction d'échelle de Haar et Shannon . . . . .	8
2.2	Ondelette de Haar . . . . .	12
2.3	Fonction d'échelle et ondelette de Daubechies db2 . . . . .	13
2.4	La fonction $ H(\omega) $ . . . . .	16
3.1	La DWT non stationnaire au niveau $j$ . . . . .	25
3.2	Les fonction de Green $G_{-0.5}$ et $G_{0.5}$ . . . . .	28
3.3	Les fonction de Green $G_{(0,-0.5)}$ . . . . .	29
3.4	Les B-splines exponentielles d'ordre 1 de paramètre $\alpha = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$ . . . . .	30
3.5	Les B-splines exponentielles d'ordre 2 de paramètre $(0, \alpha)$ avec $\alpha = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$ . . . . .	30
3.6	Les B-splines exponentielles d'ordre 3 $\beta_{(0,-1,-1)}$ et d'ordre 4 $\beta_{(0,-1,-1,0.5)}$ . . . . .	30
4.1	Block diagram of the proposed non-stationary wavelet design guided by the ECG classification process . . . . .	40
5.1	Functions $\phi, \tilde{\phi}, \psi, \tilde{\psi}$ for $j = 1, \omega = 0.0240$ . . . . .	50
5.2	Original and reconstructed signals by the proposed Bior-NSW . . . . .	52
5.3	Original and reconstructed cameraman image $256 \times 256$ by the proposed Bior-NSW . . . . .	53
5.4	Compared Bior2.4 with proposed Bior-NSW during the thresholding process applying in doppler (a), bumps (b), heavy sine (c) and blocks (d) . . . . .	54

# Liste des tableaux

4.1	Number of clusters for each class . . . . .	41
4.2	Classification results obtained by the ELM classifier on the test set DS2 using original signal (Orig), and Db2, Db4 and proposed Nsw2, Nsw4 wavelets features in level 1 . . . . .	42
4.3	Classification results obtained by the ELM classifier on the test set DS2 using original signal (Orig), and Db2, Db4 and proposed Nsw2, Nsw4 wavelets features in level 2 . . . . .	42
4.4	Classification results obtained by the ELM classifier on the test set DS2 using original signal (Orig), and Db2, Db4 and proposed Nsw2, Nsw4 wavelets features in level 3 . . . . .	43
5.1	Résultats d'approximation obtenues . . . . .	51

# Chapitre 1

## Introduction Générale

**D**urant ces dernières décennies, la notion d'analyse multirésolution (AMR) a émergé comme un outil très important pour analyser les signaux de type  $L^2(\mathbb{R})$  en temps-fréquence et de développer des algorithmes efficaces, rapides et stables pour approximer cette classe de fonctions. Comme son nom l'indique, dans une analyse multirésolution une fonction est visualisée à différents niveaux d'approximations ou de résolutions, l'idée a été développée par Meyer [20] et Mallat [15]. Dans le domaine de traitement du signal une analyse multirésolution peut offrir une décomposition en fonctions simples pour un signal complexe et les étudier séparément. En effet, il existe de nombreuses applications dans lesquelles l'analyse multirésolution peut être très utile [5, 2]. Dans cette optique, plusieurs techniques ont été proposées pour générer des (AMR) standards [14, 9, 27], le point commun entre ces méthodes c'est d'obtenir les fonctions  $(\phi, \psi)$  qui s'appellent respectivement fonction d'échelle et onde mère telle que la famille  $\{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base de Riesz dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Du point de vue approximation, la construction d'une (AMR) standard est équivalente à trouver une base orthogonale dénombrable pour l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  qui permet et assurer une bonne approximation à ce type des fonctions, cette base est appelée base d'ondelettes. Dans ce cadre, I. Daubechies dans [27] a proposée des (AMR) standards qui sont engendrées par des fonctions à support compact de  $L^2(\mathbb{R})$  c-à-d: elle a construit une base d'ondelettes pour l'espace  $L^2(\mathbb{R})$ . Grâce au propriétés support compact et moments nuls, les ondelettes standards de Daubechies peuvent approximer des polynômes de degré supérieur avec quelques éléments de la base, ce qui attirer l'attention de beaucoup de chercheurs dans le domaine de la compression. Par exemple le compresseur d'images standard jpeg 2000 est basé sur les ondelettes de Daubechies. Cependant, l'approximation d'un polynôme exponentiel sous la forme  $p(t)e^{at}$  est un inconvé-

nient majeur de cet base proposée, puisque l'onde mère dans ce cas n'est pas flexible. C'est pour cela une autre base d'ondelettes a été proposée par Michael Unser et Thierry Blu [31] dans ce cadre. L'intérêt globale de cette base est : d'approximer les polynômes exponentiels avec un degré supérieur et un paramètre alpha, obtenir une onde mère flexible et préserver les caractéristiques suivantes de la première construction (i) support compact, (ii) orthonormalité et (iii) symétrie.

Dans ce contexte, l'objectif de cette thèse est de proposer une technique de construction d'une famille d'ondelettes non-stationnaires basée sur [31] et guidée par les performances d'une application en traitement du signal. Dans notre cas nous avons proposé deux méthodes de construction guidées par les deux applications suivantes, classification des signaux ECG et approximation des images numériques.

Le Manuscrit est organisé comme suit :

Dans le deuxième chapitre nous allons présenter des généralités sur la théorie des Ondelettes et Analyse Multirésolution Standards dans  $L^2(\mathbb{R})$ , et par la suite nous présentons des notions sur la fonction échelle, onde mère et la relation qui lie entre eux.

Le troisième chapitre traite la notion d'analyse multirésolution non stationnaire dans  $L^2(\mathbb{R})$  ainsi des concepts sur les ondelettes non stationnaires, ensuite nous exposons quelques définitions et quelques propriétés sur les  $B$ -splines exponentielles. D'autre part, nous présentons une méthode de construire une base d'ondelette orthogonale non stationnaire basée sur les  $B$ -splines exponentielles.

Le quatrième chapitre concerne l'objectif essentiel de notre travail où nous avons construit une onde mère non-stationnaire destinée à la classification automatique des signaux ECG de la Base AAMI, ensuite nous avons effectuer des simulations pour valider les résultats obtenus

Dans le cinquième chapitre, nous avons présenter notre deuxième contribution concer-



nant la proposition d'une meilleure base d'ondelettes non-stationnaire pour l'approximation des signaux et images numériques avec une étude comparative avec les ondelettes de Daubechies.

## Chapitre 2

# Ondelettes et Analyse Multirésolution Standards

Une analyse multirésolution dans  $L^2(\mathbb{R})$  est une structure mathématique qui permet de analyser une fonction ou un signal à différentes échelles de résolution. Elle se base sur la décomposition de la fonction en termes de fonctions de base qui capturent les détails à des échelles différentes. Cette décomposition assure une représentation hiérarchique du signal, où chaque niveau de résolution contient une information différente sur le signal original. Mathématiquement, une analyse multirésolution peut être formulée à l'aide de deux éléments clés suivants :

1. Fonctions d'échelle (scaling functions): Ce sont des fonctions qui servent à représenter les composantes à basse résolution d'un signal. Cela se fait généralement à l'aide des opérations de dilatation et de translation d'une fonction échelle  $\phi(t)$  formant une famille orthogonale.
2. Ondelettes (wavelets): Les ondelettes sont des fonctions qui permettent de représenter les détails ou les variations fines d'un signal. Elles sont engendrées par des versions dilatées et translatées d'une fonction  $\psi(t)$  formant aussi une famille orthogonale. Cette fonction  $\psi(t)$  est appelée onde mère, elle est obtenue de la fonction échelle  $\phi(t)$

En combinant les fonctions d'échelle et les ondelettes, on peut construire une base d'analyse multirésolution. Cette base permet de représenter un signal de manière hiérarchique, en séparant les informations à différentes échelles de résolution. Les coefficients de cette décomposition fournissent une description détaillée du signal à chaque niveau de résolution. Dans ce chapitre nous allons exposer les principales définitions et propriétés concernant une analyse multirésolution standard dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Ensuite, nous présenterons le concept de la construction

d'une base d'ondelettes standards dans  $L^2(\mathbb{R})$ , nous terminerons ce chapitre par la notion de la transformée en ondelettes

## 2.1 Analyse multirésolution standard

**Définition 2.1** Soit  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une suite des sous-espaces fermés de  $L^2(\mathbb{R})$ .  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est appelée une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$  (**AMR**) si elle vérifie les propriétés suivantes:

1.  $\forall j \in \mathbb{Z}; V_{j+1} \subset V_j$
2.  $\forall j \in \mathbb{Z}; f(t) \in V_j \iff f(2t) \in V_{j+1}$
3.  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
4.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
5. Il existe une fonction  $\phi(t) \in V_0$  telle que la famille  $\{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthonormée de  $V_0$  avec la condition  $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt \neq 0$  imposée sur  $\phi(t)$

**Remarque 2.1** On va donner quelques interprétations concernant ces propriétés.

1. La propriété (1) signifie la notion de causalité c-à-d une approximation d'une fonction à l'échelle  $2^{j+1}$  contient toute l'information nécessaire au calcul d'une approximation à l'échelle  $2^j$ .
2. Supposons  $P_{V_j}$  l'opérateur de projection sur le sous-espace  $V_j$ , la propriété (3) entraîne la convergence de l'approximation d'une fonction  $P_{V_j}(f)$  vers la fonction  $f$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_{V_j}(f) - f\| = 0$$

3. (4) assure que: une approximation d'une fonction  $f$  à des échelles grand perd tous les détails de  $f$  c-à-d:

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} \|P_{V_j}\| = 0$$

dans ce cas la fonction  $\phi(t)$  est appelée fonction d'échelle.

**Proposition 2.1** Soit  $\{V_j\}$  une analyse multirésolution de fonction d'échelle  $\phi(t)$ . La famille  $\{\phi_{jk}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthonormée pour  $V_j$

**Preuve** Voir [16, 30] ■

L'approximation d'une fonction  $f$  à l'échelle  $j$  est définie comme sa projection orthogonale  $P_{V_j}$  sur  $V_j$ . Pour calculer cette projection, il faut une base orthonormée de  $V_j$ . Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante sur  $\phi(t)$  pour que la famille  $\{\phi_{jk}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base orthonormée pour  $V_j$ .

**Théorème 2.1** Une famille  $\{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base orthonormale de l'espace  $V_0$  qu'elle engendre ssi:

$$\forall \omega \in [-\pi, \pi]; \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

**Preuve**  $\{\phi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthogonale  $\iff a_k = \langle \phi(t), \phi(t-k) \rangle = \delta_{0k}$ . d'après l'égalité de Parseval on a:

$$\begin{aligned} a_k = \langle \phi(t), \phi(t-k) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle \hat{\phi}(\omega), \hat{\phi}(\omega) e^{-ik\omega} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\phi}(\omega)} e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-2k\pi}^{2(1-k)\pi} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 e^{ik\omega} d\omega \end{aligned}$$

Nous observons maintenant que l'expression du côté droit de l'équation précédente est une intégrale de la transformée de Fourier inverse (à temps discret).

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{a}(\omega) d\omega \implies \hat{a}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

**Exemple 2.1** ■

- La fonction d'échelle de Haar définie par:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce cas la famille  $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée. puisque:

$$\langle \phi(t), \phi(t - k) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \overline{\phi(t - k)} dt = \delta_{0k}$$

- La fonction d'échelle de Shannon définie par:  $\phi(t) = \text{sinc}(\pi t)$ . La famille  $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est aussi orthonormale. En utilisant l'égalité de Parseval on obtient:

$$\begin{aligned} \langle \phi(t), \phi(t - k) \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \overline{\phi(t - k)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\omega) \overline{\hat{\phi}(\omega)} e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}(\omega)|^2 e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^2 e^{ik\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega} d\omega \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \phi(t), \phi(t - k) \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ \frac{\sin(k\pi)}{k\pi} = 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}$$

Donc  $\{\phi(t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée.

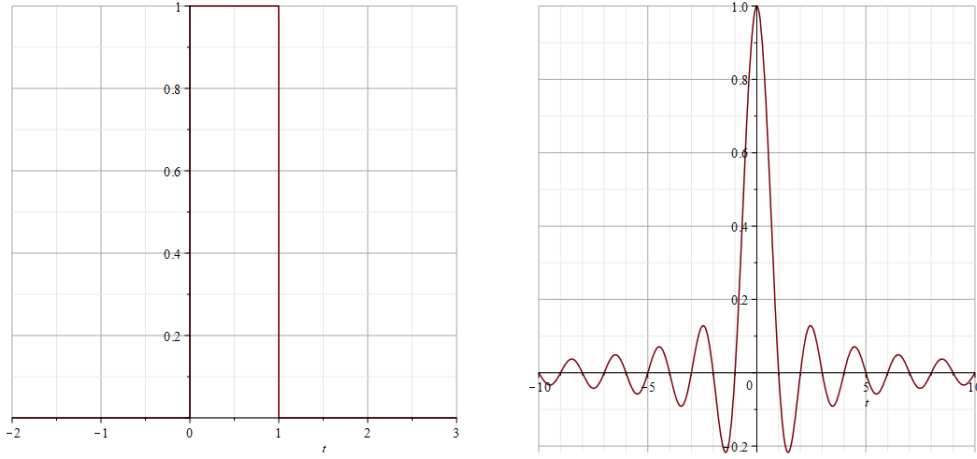


Figure 2.1 – Fonction d'échelle de Haar et Shannon

## 2.2 Équation d'échelle

La propriété de la causalité  $V_0 \subset V_1$  impose que  $\phi$  vérifie la proposition suivante

**Proposition 2.2** Soit  $\{V_j\}$  une AMR dans  $L^2(\mathbb{R})$  avec  $\phi(t)$  une fonction d'échelle alors:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k) \quad (2.1)$$

avec

$$h_k = \langle \phi(t), \phi(2t - k) \rangle = \langle \phi_{00}(t), \phi_{1k}(t) \rangle \quad (2.2)$$

**Preuve** Soit  $\phi(t)$  une fonction d'échelle  $\implies \phi(t) \in V_0 \subset V_1$ , donc  $\phi(t) \in V_1$ .

D'un autre côté la famille  $\{\phi_{1k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée pour  $V_1$  d'après la proposition (2.1) alors:

$$\begin{aligned} \exists (h_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}); \phi(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{1k}(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k) \\ h_k &= \langle \phi(t), \phi_{1k}(t) \rangle \quad \text{puisque la base } \{\phi_{1k}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est orthonormée} \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.2** L'équation (2.1) est appelée équation d'échelle et la suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  filtre miroir conjugué ou filtre d'échelle, c'est une clé essentielle dans la transformée en ondelettes.

**Théorème 2.2** Soient  $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  et  $V_j = \text{span} \{\phi_{j,k}(t)/k \in \mathbb{Z}\}$  tq:

1.  $\phi(t) \in V_0$
2.  $\phi(t)$  satisfait l'équation d'échelle (2.1)

alors,  $\{V_j\}$  est une AMR dans  $L^2(\mathbb{R})$

**Preuve** Voir [30] ■

**Proposition 2.3** Soit  $\phi(t)$  une fonction d'échelle réelle d'une AMR,  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  le filtre d'échelle associé alors:

1.  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2}$
2.  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2l} = \delta_{0l}$
3.  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^2 = 1$
4.  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k h_k = 0$

**Preuve**

1. On a d'après l'équation d'échelle

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k) \\ \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{\mathbb{R}} \phi(2t - k) dt \end{aligned}$$

En utilisant un changement de variable, on obtient:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt \\ &\Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k = \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. On a:

$$\langle \phi(t), \phi(t-l) \rangle = \delta_{0l} \quad (2.3)$$

$$\langle \phi(t), \phi(t-l) \rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t-k), \sum_{k' \in \mathbb{Z}} h_{k'-2l} \phi(2t-k') \right\rangle \quad (2.4)$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} h_k h_{k'-2l} \langle \phi(2t-k), \phi(2t-k') \rangle \quad (2.5)$$

D'un autre côté on a la famille  $\{\phi(2t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormal

$$(2.3) \text{ et } (2.5) \implies \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k h_{k-2l} = \delta_{0l}$$

3. Dans le cas  $l = 0$  on obtient  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^2 = 1$

■

## 2.3 La projection dans les espaces $V_j$

### Proposition 2.4

1. Si  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  alors la projection de  $f(t)$  dans  $V_j$  est définie par:

$$P_{f,j} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \phi_{j,k}(t). \quad (2.6)$$

2. Supposons que  $f_{j+1} \in V_{j+1}$  tq:

$$f_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{j+1,k}(t) \quad (2.7)$$

alors la projection de  $f_{j+1}$  dans  $V_j$  est définie par:

$$f_j(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \phi_{j,l}(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{k-2l} \right] \phi_{j,l}(t) \quad (2.8)$$



**Preuve** On a: la projection de  $f_{j+1}$  dans  $V_j$  est définie par:

$$\begin{aligned}
 f_j(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \langle f_{j+1}(t), \phi_{jl}(t) \rangle \phi_{jl}(t) \\
 (2.7) \implies f_j(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{j+1k}(t), \phi_{jl}(t) \right\rangle \phi_{jl}(t) \\
 \implies f_j(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \langle \phi_{j+1k}(t), \phi_{jl}(t) \rangle \right] \phi_{jl}(t)
 \end{aligned}$$

d'un autre côté on a:

$$\begin{aligned}
 \phi_{jl}(t) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2l} \phi_{j+1m}(t) \\
 \implies \langle \phi_{j+1k}(t), \phi_{jl}(t) \rangle &= \left\langle \phi_{j+1k}(t), \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{m-2l} \phi_{j+1m}(t) \right\rangle = h_{k-2l} \\
 \implies f_j(t) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k h_{k-2l} \right] \phi_{jl}(t)
 \end{aligned}$$

■

## 2.4 Fonction d'ondelette et filtre d'ondelette

**Définition 2.2** Soit  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une AMR dans  $L^2(\mathbb{R})$  avec la fonction d'échelle  $\phi(t)$  posons:

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2t - k) \text{ avec } g_k = (-1)^k h_{1-k} \quad (2.9)$$

1.  $\psi(t) \in V_1$  est appelée fonction d'ondelette (où ondelette)
2. La suite  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est appelée filtre d'ondelette
3.  $\left\{ \psi_{jk}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  les fonctions d'ondelettes
4. L'équation (2.9) est appelée équation d'ondelette

### Exemple 2.2

1. On considère l'AMR engendrée par la fonction d'échelle de Haar suivante:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc on obtient l'équation d'échelle suivante:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi(2t) + \phi(2t - 1) \\ \phi(t) &= \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2t) + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2t - 1) \right)\end{aligned}$$

dans ce cas le filtre d'échelle est défini par la suite  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  tq:

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et } h_k = 0 \quad \text{si } (k \neq 0) \wedge (k \neq 1)$$

D'après la définition précédente on peut définir le filtre d'ondelette  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  avec la manière suivante:

$$\begin{cases} g_0 = (-1)^0 h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ g_1 = (-1)^1 h_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ g_k = 0 \quad \text{si } (k \neq 0) \wedge (k \neq 1) \end{cases}$$

Enfin, l'ondelette de Haar est définie par:

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1) \tag{2.10}$$

c-à-d

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \tag{2.11}$$

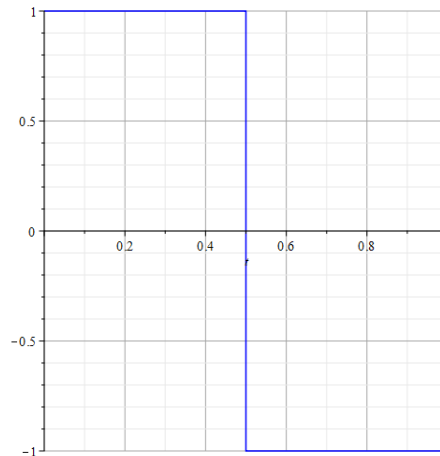


Figure 2.2 – Ondelette de Haar

2. Fonction échelle et ondelette de Daubechies db2

La fonction d'échelle de daubechies db2 est définie par la suite du filtre suivant:

$$h_0 = -0.1294095226, h_1 = 0.2241438680, h_2 = 0.8365163037, h_3 = 0.4829629131 =$$

Donc le filtre d'ondelette de Daubechies D4 est défini par la relation  $g_k = (-1)^k h_{1-k}$

$$\implies g_{-2} = h_3, \quad g_{-1} = -h_2, \quad g_0 = h_1, \quad g_1 = h_0$$

En utilisant l'algorithme de cascade [4], qui est basé sur l'équation (2.1) et (2.9) nous obtenons la fonction d'échelle  $\phi(t)$  et l'ondelette  $\psi(t)$  de daubechies db2.

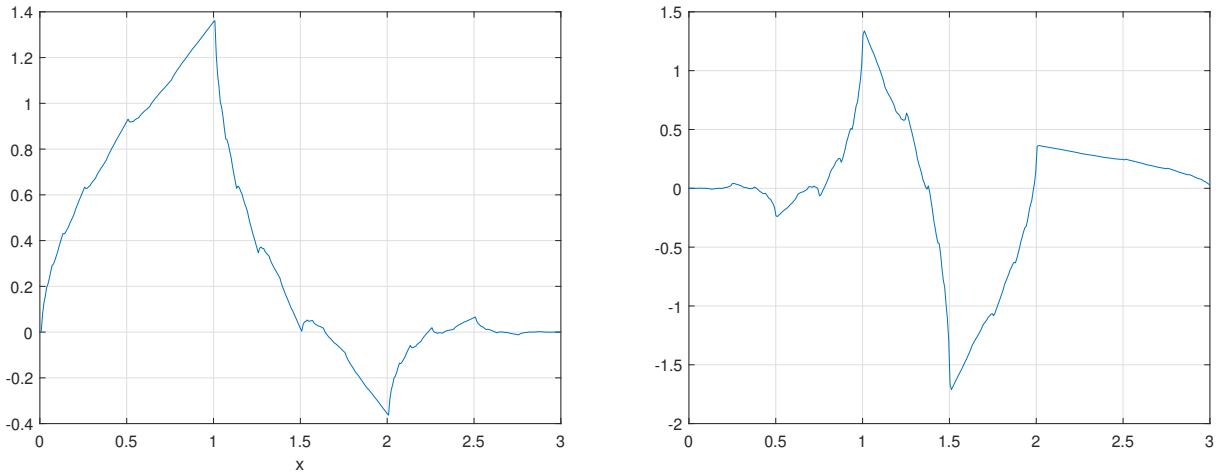


Figure 2.3 – Fonction d'échelle et ondelette de Daubechies db2

## 2.5 Espaces d'ondelettes

**Proposition 2.5** Supposons  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est une AMR dans  $L^2(\mathbb{R})$  avec la fonction d'échelle  $\phi(t)$  et  $\psi(t) \in V_1$  tq:  $\psi(t)$  vérifie (2.9) alors:

$$W_j = \text{span}\{\psi_{jk}(t)\} \implies V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

et de plus

$$\forall j \in \mathbb{Z}; L^2(\mathbb{R}) = V_j \oplus W_j \oplus W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots$$

**Preuve** Voir [32]

■

## 2.6 La projection de $V_{j+1}$ dans $W_j$

Soit  $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$ , d'après la proposition (2.5) on a  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ , donc on peut écrire

$f_{j+1}(t) = f_j(t) + \omega_j(t)$  avec:

- $f_j(t)$  est la projection orthogonale de  $f_{j+1}(t)$  dans  $V_j$
- $\omega_j(t)$  est la projection orthogonale de  $f_{j+1}(t)$  dans  $W_j$

Concernant  $f_j(t)$  est calculée avec l'équation (2.8). Le calcul de  $\omega_j(t)$  est basé sur la proposition suivante:

**Proposition 2.6** Soit  $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$  et  $\omega_j(t)$  la projection orthogonale de  $f_{j+1}(t)$  dans  $W_j$ .

Si on a:

$$f_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{j+1k}(t) \quad (2.12)$$

alors:

$$\omega_j(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (-1)^k h_{2l+1-k} \psi_{jl}(t) \quad (2.13)$$

## 2.7 Reconstruction de $f_{j+1}(t) \in V_{j+1}$ à partir de $f_j(t) \in V_j$ et $\omega_j(t) \in W_j$

**Proposition 2.7** Soient  $f_j(t) \in V_j$  et  $\omega_j(t) \in W_j$  tq:

$$\begin{cases} f_j(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \phi_{jl}(t) \\ \omega_j(t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c_l \psi_{jl}(t) \end{cases}$$

alors:

$$f_{j+1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{j+1k}(t) \quad (2.14)$$

$$\text{Avec: } a_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l h_{k-2l} + c_l (-1)^k h_{2l+1-k} \quad (2.15)$$

**Preuve**

Supposons que  $f_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_{j+1k}(t)$  avec:  $a_k = \langle f_{j+1}(t), \phi_{j+1k}(t) \rangle$

D'après la proposition (2.5) on a:  $f_{j+1}(t) = f_j(t) + \omega_j(t)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_k &= \left\langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \phi_{jl}(t) + c_l \psi_{jl}(t), \phi_{j+1k}(t) \right\rangle \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l \langle \phi_{jl}(t), \phi_{j+1k}(t) \rangle + c_l \langle \psi_{jl}(t), \phi_{j+1k}(t) \rangle \end{aligned}$$

D'un autre côté on a:

$$\begin{cases} \langle \phi_{jl}(t), \phi_{j+1k}(t) \rangle = h_{k-2l} \\ \langle \psi_{jl}(t), \phi_{j+1k}(t) \rangle = g_{k-2l} = (-1)^k h_{2l+1-k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_l h_{k-2l} + c_l (-1)^k h_{2l+1-k}$$

■

## 2.8 Interprétation dans le domaine fréquentiel et le domaine de la transformée en z

**Théorème 2.3** Soit  $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction d'échelle d'une AMR  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  alors:

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\frac{\omega}{2}} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.16)$$

**Preuve**  $\phi(t)$  est une équation d'échelle d'une AMR alors

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2t - k)$$

Posons:  $f(t) = \phi(2t - k) \Rightarrow \hat{f}(\omega) = \frac{1}{2} e^{-ik\frac{\omega}{2}} \hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right)$  donc:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\omega) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} e^{-ik\frac{\omega}{2}} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ \Rightarrow \hat{\phi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\frac{\omega}{2}} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

■

**Notation:** Si on pose  $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$  on obtient:

$$\hat{\phi}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2.17)$$

(2.17) représente l'équivalence de l'équation d'échelle (2.1) dans le domaine de la transformée de Fourier.

**Exemple 2.3** Dans le cas de Haar on a:

$$h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{-i\omega}) \\ &= \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-i\frac{\omega}{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |H(\omega)| = \left| \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|$$

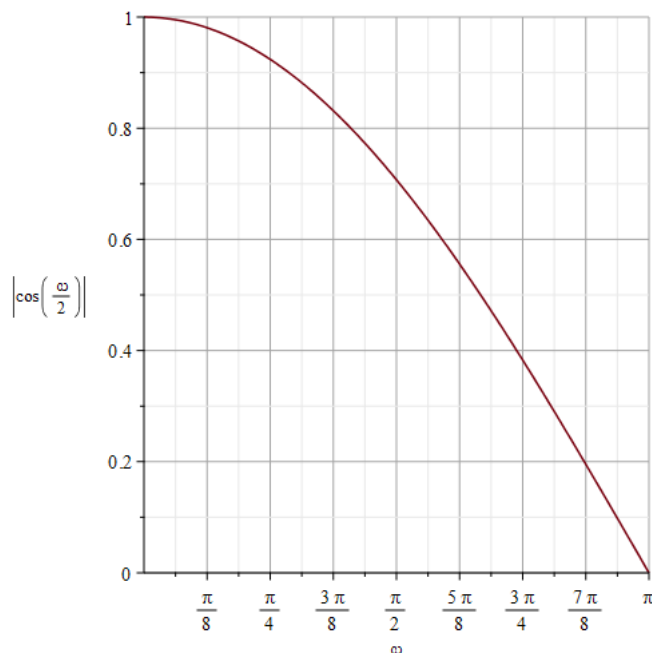


Figure 2.4 – La fonction  $|H(\omega)|$

**Remarque 2.3** La figure (2.4) présente un gabarit d'un filtre passe-bas.

**Définition 2.3** Soient  $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  une fonction d'échelle d'une AMR et  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  le filtre associé.

La fonction

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} \quad (2.18)$$

est appelée le symbole de  $\phi(t)$

**Remarque 2.4** Si on pose  $z = e^{-i\omega}$  on obtient:

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k z^k \quad (2.19)$$

$H(z)$  dans (2.19) représente la transformée en  $z$  du filtre  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$

**Théorème 2.4** Soit  $\phi(t) \in L^2(\mathbb{R})$  qui vérifie les deux conditions suivantes:

1.  $\phi(t)$  est une fonction d'échelle qui engendre une AMR
2.  $\phi(t)$  à support compact

alors on a l'équivalence suivante:

$$\overline{\text{supp}(\phi)} = [0, N] \iff H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{k=N} h_k z^k$$

**Preuve** Voir [15]

**Exemple 2.4** Dans le cas d'une AMR de Haar on a:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-i\omega} \\ \implies H(z) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z \end{aligned}$$

D'après le théorème (2.4)  $\overline{\text{supp}(\phi)} = [0, 1]$

## 2.9 Conditions d'orthogonalité

**Théorème 2.5** Soit  $\phi(t)$  une fonction d'échelle qui engendre une AMR  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  avec une base orthogonale alors:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}; |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (2.20)$$

**Preuve** D'après le théorème (2.1) on a:

$$\{\phi_{i,j}(t)\} \text{ est orthogonale} \implies \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$$

$$\begin{aligned} (2.7) \implies \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + k\pi\right) \right|^2 &= 1 \\ \iff \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + 2j\pi\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2j\pi\right) \right|^2 + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| H\left(\frac{\omega}{2} + (2j+1)\pi\right) \right|^2 \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + (2j+1)\pi\right) \right|^2 &= 1 \end{aligned}$$

$H(\omega)$  est  $2\pi$ -périodique

$$\implies \left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2j\pi\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega + 2\pi}{2} + 2j\pi\right) \right|^2 = 1$$

d'après (2.1) on obtient:

$$\forall \omega \in \mathbb{R}; \left| H\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 + \left| H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right) \right|^2 = 1$$

$$\implies \forall \omega \in \mathbb{R}; |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1$$

■

**corollaire 2.1** (Théorème 2.5 dans le domaine de la transformée en  $z$ )

Soit  $\phi(t)$  une fonction d'échelle qui engendre une AMR  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  avec une base orthogonale

Posons:  $z = e^{-i\omega}$ , le symbole  $H(z)$  de  $\phi(t)$  vérifie les condition suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} |H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1 \\ \text{et} \\ H(-1) = 0 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

**Preuve** On a:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega}$$

Si on pose  $z = e^{-i\omega}$  on obtient:

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k z^k$$



D'un autre côté

$$\begin{aligned}
 H(\omega + \pi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik(\omega + \pi)} \implies H(-z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k (-z)^k \\
 &\implies |H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1
 \end{aligned}$$

■

**Théorème 2.6** *Supposons que  $H(z)$  satisfait les condition suivantes:*

1.  $H(z)$  vérifie (2.21)
2. Si  $H(z) = \left(\frac{1+z}{2}\right)^n S(z)$  tq:  $\max_{|z|=1} |S(z)| \leq 2^{n-1}$

alors  $\phi(t)$  engendre une AMR dont le symbole est  $H(z)$

**Preuve** Voir [4]

## 2.10 Le symbole de la fonction ondelette $\psi$

**Définition 2.4** *Soit  $\phi(t)$  une fonction d'échelle d'une AMR avec  $H(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k z^k$  est la fonction symbole de  $\phi$ . Le symbole  $G(z)$  de  $\psi(t)$  est défini par:*

$$G(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k z^k \quad \text{tq: } g_k = (-1)^k h_{1-k} \quad (2.22)$$

**Proposition 2.8** *Soient  $\phi(t)$  une fonction d'échelle d'une AMR sur  $L^2(\mathbb{R})$  et  $\psi(t)$  la fonction ondelette alors:*

1.  $\hat{\psi}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$
2.  $G(\omega) = -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$
3.  $G(0) = 0$
4. Si on pose  $z = e^{-i\omega}$ , le polynôme  $G(z)$  est divisible par  $z - 1$ .

**Preuve**

1. On a:

$$\begin{aligned}
 \psi(t) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2t - k) \\
 \Rightarrow \hat{\psi}(\omega) &= \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{-ik\frac{\omega}{2}} \\
 \hat{\psi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k e^{-ik\frac{\omega}{2}} \right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
 \Rightarrow \hat{\psi}(\omega) &= G\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)
 \end{aligned}$$

2. On a:

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\omega} \\
 \Rightarrow H(\omega + \pi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k (-1)^k e^{-ik\omega} \\
 \overline{H(\omega + \pi)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k (-1)^k e^{ik\omega} \\
 \Rightarrow -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k (-1)^{k+1} e^{i\omega(k-1)} \\
 \Rightarrow -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{1-l} (-1)^l e^{-i\omega l} = G(\omega)
 \end{aligned}$$

3. D'après (2)  $G(0) = \overline{H(\pi)} = 0$

4. Si on pose  $z = e^{-i\omega}$ , donc pour  $\omega = 0$  on obtient  $z = 1$  dans le  $z$ -domain  $\Rightarrow G(1) = 0$ .

■

**Théorème 2.7** Soient  $\phi(t)$  une fonction d'échelle qui engendre une AMR  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  dans  $L^2(\mathbb{R})$  et  $\psi(t)$  la fonction ondelette. Les symboles  $H(\omega)$  et  $G(\omega)$  associés à  $\phi(t)$  et  $\psi(t)$  vérifient les propriétés suivantes:

$$|G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad (2.23)$$

$$H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)} = 0 \quad (2.24)$$

**Preuve**

1. D'après la proposition (2.8) on a:

$$G(\omega) = -e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |G(\omega)|^2 = |H(\omega + \pi)|^2 \\ |G(\omega + \pi)|^2 = |H(\omega)|^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |G(\omega)|^2 + |G(\omega + \pi)|^2 = |H(\omega)|^2 + |H(\omega + \pi)|^2 = 1$$

2. On a:

$$H(\omega) \overline{G(\omega)} + H(\omega + \pi) \overline{G(\omega + \pi)}$$

$$= -H(\omega)H(\omega + \pi)e^{i\omega} - H(\omega + \pi)H(\omega + 2\pi)e^{i(\omega + \pi)}$$

$$= -H(\omega)H(\omega + \pi)e^{i\omega} + H(\omega + \pi)H(\omega)e^{i\omega} = 0$$

■

**Remarque 2.5** Dans le domaine de la transformée en  $z$ , les propriétés (2.23) et (2.24) sont équivalentes à les propriétés suivantes

$$|G(z)|^2 + |G(-z)|^2 = 1 \tag{2.25}$$

$$H(z) \overline{G(z)} + H(-z) \overline{G(-z)} = 0 \tag{2.26}$$

# Chapitre 3

## Analyse Multirésolution non stationnaire

L'analyse multirésolution non stationnaire (AMR NS) est une extension de l'AMR standard qui vise à décomposer un signal en différentes échelles pour mieux comprendre ses composantes. Ce concept est proposé par C.deBoor, R.A.DeVore and A.Ron dans [3]. Contrairement à l'AMR standard, où les mêmes fonctions d'échelles et ondelettes sont utilisées à tous les niveaux de décomposition, l'AMR NS utilise des fonctions d'échelles et ondelettes différentes à chaque niveau. Ces fonctions sont conçues pour être flexibles aux variations locales du signal à chaque niveau. Dans ce chapitre, nous allons présenter en détail le concept fondamental de l'Analyse Multirésolution Non Stationnaire (AMR NS) qui représente une avancée majeure dans le domaine du traitement du signal. De plus, dans ce chapitre, nous illustrerons ce concept à l'aide d'un exemple concret d'une AMR NS qui est engendrée par les  $B$ -splines exponentielles.

### 3.1 Analyse Multirésolution Non-stationnaire

**Définition 3.1** Soit  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une suite des sous-espaces de  $L^2(\mathbb{R})$ .  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  est appelée Analyse Multirésolution Non-Stationnaire (AMR NS) dans  $L^2(\mathbb{R})$  ssi:

1.  $\forall j \in \mathbb{Z}; V_{j+1} \subset V_j$
2.  $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$
3.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
4.  $\forall j \in \mathbb{Z}; \exists \phi^j(t) \in V_j$  tq :  $\left\{ 2^{-\frac{j}{2}} \phi^j(2^{-j}t - k) / k \in \mathbb{Z} \right\}$  est une base de Riesz pour  $V_j$

**Remarque 3.1** La famille  $\left\{2^{-\frac{j}{2}}\phi^j(2^{-j}t - k)/k \in \mathbb{Z}\right\}$  est une base de Riesz pour l'espace  $V_j$  ssi:

$$\exists \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}_+^*, \forall \{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}); \alpha_j \|c\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi^j(2^{-j}t - k) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \beta_j \|c\|_{l^2(\mathbb{Z})} \quad (3.1)$$

Les nombres  $\alpha_j, \beta_j$  sont appelés respectivement borne inférieure de Riesz et borne supérieure de Riesz. Dans le domaine fréquentiel (3.1) équivaut à:

$$\alpha_j^2 \leq \mathcal{A}_j(e^{i\omega}) \leq \beta_j^2 \quad (3.2)$$

$$tq: \quad \mathcal{A}_j(e^{i\omega}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k^j e^{-ik\omega} \quad \text{et} \quad \alpha_k^j = \langle \phi^j(t), \phi^j(t - k) \rangle$$

## 3.2 Équation d'échelle (cas d'une AMR NS)

L'inclusion  $V_{j+1} \subset V_j$  implique l'existence d'une suite  $(h_k^j)_{k \in \mathbb{Z}}$  tq:

$$\phi^{j+1}(2^{-(j+1)}t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^j \phi^j(2^{-j}t - k) \quad (3.3)$$

Dans le domaine fréquentiel l'équation (3.3) équivaut à:

$$2\hat{\phi}^{j+1}(2\omega) = H^j(e^{i\omega})\hat{\phi}^j(\omega) \quad (3.4)$$

$$(3.4) \implies \forall n \in \mathbb{N}; \hat{\phi}^j(\omega) = \frac{1}{2} \prod_{l=1}^{l=n} H^{j-l} \left( e^{i\frac{\omega}{2^l}} \right) \hat{\phi}^{j-l} \left( \frac{\omega}{2^l} \right)$$

En utilisant cette formule pour calculer la transformée de fourier de la fonction échelle basant sur le filtre  $(h_k^j)_{k \in \mathbb{Z}}$  et la condition  $\lim_{j \rightarrow -\infty} \hat{\phi}^j(2^j \omega) = 1$

$$\implies \hat{\phi}^j(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} \prod_{l=1}^{l=n} H^{j-l} \left( e^{i\frac{\omega}{2^l}} \right) \right) \quad (3.5)$$

L'équation (3.5) permet de calculer la fonction d'échelle  $\phi_j(t)$  au niveau  $j$  en utilisant la transformée de fourier inverse.

### 3.3 La décomposition sur une AMR NS

D'après la définition d'une analyse multirésolution nonstationnaire  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  et si la famille  $\{\phi_k^j(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi^j(2^{-j}t - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthogonale de  $V_j$ , on peut approximer une fonction  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  avec sa projection sur  $V_j$  définie par:

$$P_{V_j} f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_j(k) \phi_k^j(t) \quad (3.6)$$

$$\text{avec: } x_j(k) = \langle f(t), \phi_k^j(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi_k^j(t)} dt$$

D'après la définition 2.1 d'une AMR NS on a:  $\lim_{j \rightarrow -\infty} \|f - P_{V_j} f\| = 0$

**Définition 3.2** Soit  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une AMR NS avec les fonctions d'échelles  $\{\phi^j(t)\}_{j \leq j_0}$ . Le complément orthogonale de  $V_{j+1}$  dans  $V_j$  est défini par:

$$W_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$$

$W_j$  est appelé l'espace des ondelettes non-stationnaires et de plus  $\forall j \neq k; W_j \perp W_k$

**Proposition 3.1** D'après [31] la suite  $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  vérifie la propriété suivante:

$$\overline{\bigoplus_{j \leq j_0} W_j} = L^2(\mathbb{R}) \quad (3.7)$$

**Définition 3.3** (Fonctions ondelettes non stationnaires)

On suppose que  $\{\phi^j\}_{j \leq j_0}$  des fonctions échelles non stationnaires d'une AMR NS dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Posons:

$$\forall j \leq j_0; \psi^{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k^j \phi_k^j(t) \quad (3.8)$$

$$\text{avec: } g_k^j = (-1)^k \overline{h_{1-k}^j} \quad (3.9)$$

La famille des fonctions  $\{\psi^j\}_{j \leq j_0}$  est appelée fonctions ondelettes non stationnaires.

**Proposition 3.2** Soit  $\{\phi^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  une famille des fonctions échelles d'une analyse multirésolution non stationnaire alors:

- La famille  $\{\psi_k^j(t) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi^j(2^{-j}t - k) / j \leq j_0 \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$  est une base de Riesz pour  $\bigoplus_{j \leq j_0} W_j$
- La famille  $\mathcal{B} = \{\phi_k^{j_0}(t)\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_k^j(t)\}_{j \leq j_0, k \in \mathbb{Z}}$  est une base de Riesz pour  $L^2(\mathbb{R})$
- La décomposition d'une fonction  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  au niveau  $j_0$  est définie par:

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{j_0}(k) \phi_k^{j_0}(t) + \sum_{j \leq j_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_j(k) \psi_k^j(t) \quad (3.10)$$

avec:

$$x_{j_0}(k) = \langle f(t), \phi_k^{j_0}(t) \rangle \quad \text{et} \quad y_j(k) = \langle f(t), \psi_k^j(t) \rangle \quad (3.11)$$

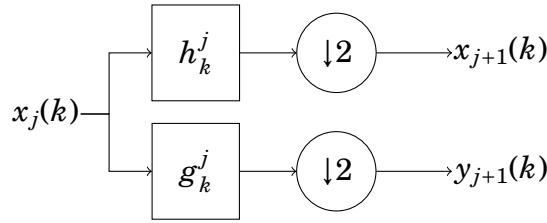


Figure 3.1 – La DWT non stationnaire au niveau  $j$

### 3.4 Condition d'orthogonalité et la transformée en $z$

Soit  $\{\phi^j(t)\}_{j \leq j_0}$  une famille de fonctions d'échelles qui engendre une AMR NS  $\{V_j\}_{j \leq j_0}$

Posons:  $\forall j \leq j_0; \{h_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$  le filtre associé à  $\phi^j(t)$  au niveau  $j$

**Théorème 3.1**  $\forall j \leq j_0; \{\phi_k^j(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthogonale de  $V_j$  alors:

$$\forall j \leq j_0; H^j(z) \overline{H^j(z^{-1})} + H^j(-z) \overline{H^j(-z^{-1})} = 4 \quad (3.12)$$

avec

$$H^j(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^j z^{-k} \quad (3.13)$$

**Preuve** Voir [31]

**Remarque 3.2** Concernant le symbole de  $\psi^j(t)$  est défini par:

$$G^j(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k^j z^{-k}; \quad tq: g_k^j = (-1)^k \overline{h_{1-k}} \quad (3.14)$$

## 3.5 B-splines exponentielles et Analyse multirésolution non stationnaire

Les B-splines exponentielles [19, 18, 29] sont une classe importante de fonctions qui est une extension des B-splines classiques. Couramment elles sont utilisées en informatique graphique, en modélisation géométrique, en traitement d'image, en conception assistée par ordinateur (CAO) et dans de nombreux autres domaines de l'informatique et des mathématiques appliquées. Elles jouent un rôle essentiel dans la représentation et l'approximation de courbes et de surfaces. Dans cette partie, nous exposons la méthode de construction des B-splines exponentielles et leur utilisation pour engendrer une analyse multirésolution nonstationnaire. Comme indiqué dans [18, 29, 28], on considère l'opérateur différentiel suivant:

$$T(f) = D^n(f) + b_{n-1}D^{n-1}(f) + b_{n-2}D^{n-2}(f) + \dots + b_0I(f) \quad (3.15)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} D^n f = \frac{d^n f}{dt^n} \\ I : \text{opérateur d'identité} \end{array} \right.$$

Le polynôme caractéristique de  $T$  est défini par:

$$T(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1x + b_0 \quad (3.16)$$

Si  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$  est le vecteur des racines de  $T$  alors on peut écrire:

$$T(x) = \prod_{k=1}^{k=n} (x - \alpha_k) = \prod_{m=1}^{m=d} (x - \alpha_{(m)})^{n_m} \quad (3.17)$$

avec

- $\{\alpha_{(m)}\}$ : Les racines de  $T(x)$  distincts. Chaque racine  $\alpha_{(m)}$  est d'ordre  $n_m$
- $d$ : Le nombre de racines distincts
- $\sum_{m=1}^d n_m = n$



Donc on peut factoriser l'opérateur  $T$  avec la manière suivante:

$$T = (D - \alpha_1 I) * (D - \alpha_2 I) * \dots * (D - \alpha_n I) \quad (3.18)$$

avec:

- \*: L'opération de la convolution
- $I$ : L'opérateur d'identité.

**Notation:** On note par:  $T_{\vec{\alpha}} = (D - \alpha_1 I) * (D - \alpha_2 I) * \dots * (D - \alpha_n I)$

Dans le domaine de Fourier  $T_{\vec{\alpha}}$  est défini par:

$$\widehat{T_{\vec{\alpha}}} = \prod_{k=1}^n (i\omega - \alpha_k) \quad (3.19)$$

**Proposition 3.3** [13] *Le noyau de l'opérateur  $T_{\vec{\alpha}}$  est défini par:*

$$\ker T_{\vec{\alpha}} = \text{span} \left\{ t^k e^{\alpha_m t} \right\}_{k=1, n_m, m=1, d} \quad (3.20)$$

**Définition 3.4** (*Fonction de Green*)

*En traitement du signal, un opérateur  $T$  invariant par translation est caractérisé par sa réponse impulsionnelle définie par:  $h(t) = T(\delta(t))$  avec  $\delta(t)$  est la masse de Dirac. Il est plus pratique mathématiquement de considérer la caractérisation inverse  $\delta(t) = T(G(t))$ , où  $G(t)$  est ce que l'on appelle fonction de Green de  $T$*

**Remarque 3.3** *En traitement du signal, la fonction de Green de  $T$  représente la réponse impulsionnelle de l'opérateur  $T^{-1}$  (si  $T$  est inversible).*

**Exemple 3.1** *On considère l'opérateur suivant:*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}; T_{\alpha} = D - \alpha I. \quad (3.21)$$

*On va calculer la fonction de Green associée à  $T_{\alpha}$ . On a:*

$$G_{\alpha}(t) \text{ est une fonction de Green de } T_{\alpha} \iff T_{\alpha}(G_{\alpha}(t)) = \delta(t)$$

$$\iff \forall \alpha \in \mathbb{R}; G_\alpha(t)' - \alpha G_\alpha(t) = \delta(t) \quad (3.22)$$

la fonction  $e^{at}$  est une solution de l'équation (3.22) homogène. Supposons que  $G_\alpha(t) = c(t)e^{at}$  est une solution de l'équation (3.22)

$$\implies \forall \alpha \in \mathbb{R}; c'(t)e^{at} = \delta(t)$$

Pour  $\alpha = 0 \implies c'(t) = \delta(t)$  (la dérivée au sens des distributions)

$$\implies c(t) = 1_+(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{La fonction de Heaviside}$$

Donc la fonction de Green de l'opérateur  $T_\alpha$  est:  $G_\alpha(t) = 1_+(t)e^{at}$

**Proposition 3.4** Soit  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ . Posons  $T_{\vec{\alpha}} = (D - \alpha_1) * (D - \alpha_2) * \dots * (D - \alpha_n)$

La fonction de green de  $T_{\vec{\alpha}}$  est définie par:

$$G_{\vec{\alpha}}(t) = (G_{\alpha_1} * G_{\alpha_2} * \dots * G_{\alpha_n})(t) \quad (3.23)$$

**Preuve** Voir [28] ■

1. On a:  $G_{-0.5} = 1_+(t)e^{-0.5t}$  et  $G_{0.5} = 1_+(t)e^{0.5t}$

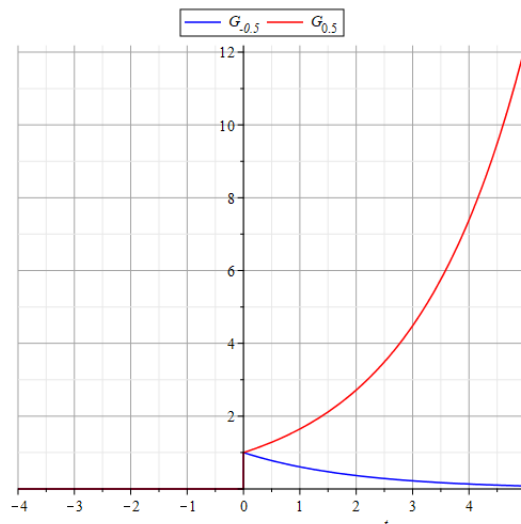
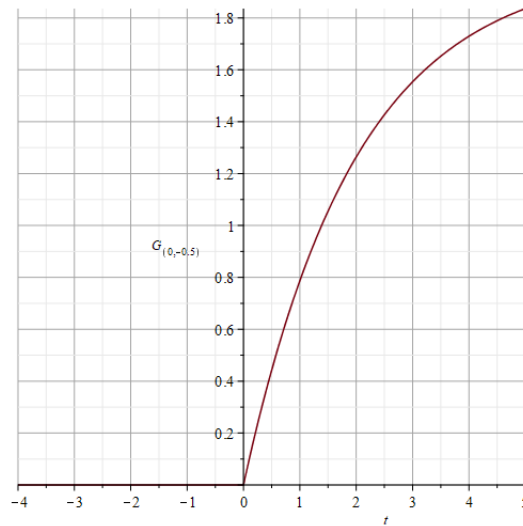


Figure 3.2 – Les fonction de Green  $G_{-0.5}$  et  $G_{0.5}$

$$2. G_{\vec{\alpha}}(t) = \begin{cases} 2 - 2e^{-0.5t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } \vec{\alpha} = (0; -0.5)$$


 Figure 3.3 – Les fonction de Green  $G_{(0,-0.5)}$ 
**Définition 3.5** (*B-splines exponentielles*)

1. Soient  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $G_\alpha(t)$  la fonction de Green associée à l'opérateur  $T_\alpha$ . Posons

$$\beta_\alpha(t) = G_\alpha(t) - e^\alpha G_\alpha(t-1) \quad (3.24)$$

La fonction  $\beta_\alpha(t)$  est appelée *B-spline exponentielle d'ordre 1 de paramètre  $\alpha$* .

2. D'une façon générale, si on a:  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , le *B-spline exponentielle d'ordre  $n$  de paramètre  $\vec{\alpha}$*  est défini par:

$$\beta_{\vec{\alpha}}(t) = \beta_{\alpha_1}(t) * \beta_{\alpha_2}(t) * \dots * \beta_{\alpha_n}(t) \quad (3.25)$$

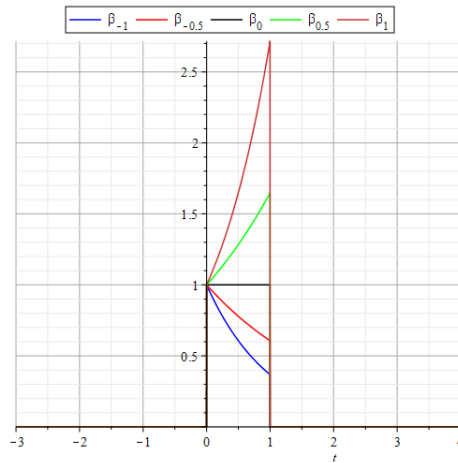


Figure 3.4 – Les B-splines exponentielles d'ordre 1 de paramètre  $\alpha = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$

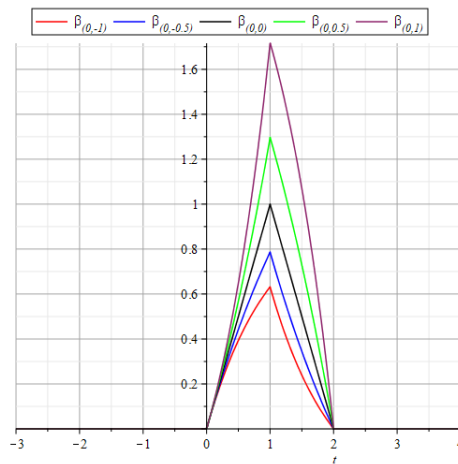


Figure 3.5 – Les B-splines exponentielles d'ordre 2 de paramètre  $(0, \alpha)$  avec  $\alpha = -1, -0.5, 0, 0.5, 1$

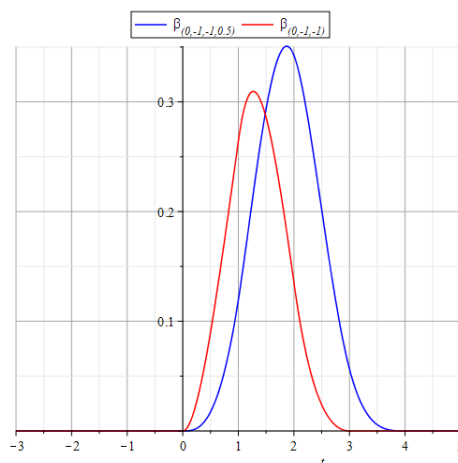


Figure 3.6 – Les B-splines exponentielles d'ordre 3  $\beta_{(0,-1,-1)}$  et d'ordre 4  $\beta_{(0,-1,-1,0.5)}$

**Remarque 3.4**

1. Si  $\vec{\alpha} = \vec{0}$  alors,  $\beta_{\vec{\alpha}}(t) = M_n(t)$  est un B-spline d'ordre  $n$ .
2. Si  $\vec{\alpha} = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \implies \beta_{\vec{\alpha}}(t) = e^{\alpha t} M_n(t)$
3. Si  $\vec{\alpha}$  possède des composantes purement imaginaires alors,  $\beta_{\vec{\alpha}}$  est une fonction spline trigonométrique.

**Théorème 3.2** Soient  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  tq:  $\forall i \neq j; \alpha_i \neq \alpha_j$  et  $n \geq 2$ . Posons:

$$\Gamma_{i,n} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\alpha_i - \alpha_j)$$

alors on a:

1. Pour tout  $t \notin [0, n]$ ;  $\beta_{\vec{\alpha}}(t) = 0$
2.  $\forall t \in [0, 1]$ ;  $\beta_{\vec{\alpha}}(t) = \sum_{k=1}^n \frac{e^{\alpha_k t}}{\Gamma_{k,n}}$
3.  $\forall t \in [l-1, l]$ ; tq  $l \geq 2$  on a:

$$\beta_{\vec{\alpha}}(t) = (-1)^{l-1} \sum_{i=1}^n \frac{e^{\alpha_i(t-l+1)}}{\Gamma_{i,n}} \sum_{\substack{1 \leq j_1 \dots \leq j_{l-1} \leq n \\ j_1 \dots j_{l-1} \neq i}} e^{\alpha_{j_1} + \alpha_{j_2} + \dots + \alpha_{j_{l-1}}}$$

**Preuve** Voir [29] ■

**Proposition 3.5** Soit  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ ,  $\beta_{\vec{\alpha}}(t)$  satisfait les propriétés suivantes:

1.  $\text{supp}(\beta_{\vec{\alpha}}(t)) = [0, n]$
2.  $\forall t \in [0, n]$ ;  $\beta_{\vec{\alpha}}(t) \geq 0$
3.  $\beta_{\vec{\alpha}}(t) \in C^{n-2}$

## 3.6 Analyse multirésolution et approximation des polynômes exponentielles

### Définition 3.6 (*Reproduction des polynômes exponentielles*)

Étant donné un vecteur  $\vec{\alpha} \in \mathbb{C}^n$  avec  $\alpha_{(m)}$  ses composantes distinctes et  $n_m$  leurs multiplicités respectives, la multirésolution non stationnaire  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  reproduit les polynômes exponentiels correspondant à  $\vec{\alpha}$  si et seulement si, pour un  $P(x)e^{\alpha_{(m)}x}$ , où  $P(x)$  est un polynôme de  $\deg < n_m$  et à toute échelle  $j$ , il existe une suite  $\{b_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$  telle que :

$$P(x)e^{\alpha_{(m)}x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^j \varphi_j(2^{-j}x - k) \quad (3.26)$$

# Chapitre 4

## Ondelettes non-stationnaires et classification des signaux ECG

Dans ce chapitre, nous présenterons une nouvelle approche pour la présentation des signaux ECG basée sur la notion d'analyse multirésolution non stationnaire. La différence principale avec l'analyse multirésolution standard est que: les espaces multirésolutions sont générés par des fonctions dépendantes de l'échelle, ce qui offre plus de flexibilité dans l'approximation du signal. Basant sur l'algorithme d'optimisation des feux d'artifice ( Fireworks Algorithm for Optimization) afin de guider l'ondelette non stationnaire à la tâche de classification des signaux ECG, cette technique proposée est conçue pour être générale et ne pas dépendre du choix d'une classe particulière de classifieurs. La méthode proposée est validée sur les classes AAMI du jeu de données bien connu de MIT. Les résultats comparés aux ondelettes stationnaires standard montrent une amélioration significative de la précision.

### 4.1 Méthode proposée

La méthode proposée est basée sur [31]. C'est une technique de conception d'une AMR non stationnaires sous les contraintes suivantes sur les fonctions d'échelle

1. Reproduire un ensemble de polynômes exponentiels correspondant à  $\vec{\alpha}$  qui ne dépend pas de l'échelle  $j$ .
2. Les fonctions échelles  $\varphi_j$  sont à valeurs réelles et à support compact.
3.  $\langle \varphi_j(x), \varphi_j(x - k) \rangle = \delta(k)$

$$\text{où } \delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans [31], les auteurs ont prouvé que les contraintes précédentes sont équivalentes à :

1. Chaque filtre  $H_j$  a un zéro d'ordre  $n_m$  à  $z = -e^{2^j \alpha_m}$  pour tout  $m$ , cela signifie que  $H_j$  doit être divisible par  $B_{2^j \vec{\alpha}}$  où,

$$B_{2^j \vec{\alpha}}(z) = \prod_{k=1}^n (1 + e^{2^j \alpha_k} z^{-1}) \quad (4.1)$$

2. Les éléments de  $\vec{\alpha}$  doivent être réels ou apparaître dans des paires conjuguées complexes avec la même multiplicité et  $H_j(z)$  est un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR).

3. Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  :

$$H_j(z)H_j(z^{-1}) + H_j(-z)H_j(-z^{-1}) = 4 \quad (4.2)$$

À partir des contraintes précédentes imposées, le problème de conception peut être formulé comme suit.

Pour un vecteur  $\vec{\alpha}$  donné qui satisfait la contrainte (2) et un niveau  $j$ , trouver le FIR le plus court  $Q_j(z)$  tel que :

$$\begin{cases} H_j(z)H_j(z^{-1}) + H_j(-z)H_j(-z^{-1}) = 4 \\ H_j(z) = B_{2^j \vec{\alpha}}(z)Q_j(z) \end{cases} \quad (4.3)$$

Le problème dans (4.3) est équivalent à :

$$C_j(Z)D_j(Z) + C_j(-Z)D_j(-Z) = 2 \quad (4.4)$$

où  $Z = \frac{z + z^{-1}}{2}$ ,  $C_j(Z) = c_j B_{2^j \vec{\alpha}}(z)B_{2^j \vec{\alpha}}(z^{-1})$ ,  $2c_j D_j(z) = Q_j(z)Q_j(z^{-1})$

et  $c_j = \prod_{k=1}^n e^{-2^j \alpha_k}$ . L'équation (4.4) est appelé équation de Bezout.

## 4.2 L'algorithme d'optimisation Fireworks

L'algorithme Fireworks (FW) est un algorithme de calcul évolutif comme les algorithmes génétiques (GAs) [25] ou l'optimisation par essaim de particules (PSO) [12], qui s'inspire de l'intelligence en essaim. Il a été récemment proposé par [26] pour résoudre des problèmes complexes d'optimisation de conception dans différentes applications, telles que l'ingénierie électrique et mécanique [10, 6].

Comme expliqué dans [26], les principaux concepts du L'algorithme FW est donné ci-dessous :



Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{tel que : } x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \quad (4.5)$$

où :  $x = (x^1, x^2, \dots, x^d)$  représente un emplacement dans l'espace potentiel (ou un feu d'artifice),  $x_{\min} = (x_{\min}^1, x_{\min}^2, \dots, x_{\min}^d)$ ,  $x_{\max} = (x_{\max}^1, x_{\max}^2, \dots, x_{\max}^d)$  désignent les bornes de l'espace potentiel, et  $f(x)$  est une fonction objective avec les contraintes  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max} \Leftrightarrow (x_{\min}^1 \leq x^1 \leq x_{\max}^1) \wedge \dots \wedge (x_{\min}^d \leq x^d \leq x_{\max}^d)$ .

Généralement, l'algorithme FW se compose de trois étapes, une étape d'explosion (générant des étincelles d'explosion), une mutation gaussienne et une stratégie de sélection.

### 4.2.1 Etape d'explosion

Dans cette partie de l'algorithme FW, l'amplitude de l'explosion  $A_i$  et le nombre d'étincelles  $S_i$  pour chaque feu d'artifice  $x_i$  sont définis par :

$$A_i = \hat{A} \frac{f(x_i) - y_{\min} + \zeta}{\sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_{\min}) + \zeta} \quad (4.6)$$

$$S_i = m \frac{y_{\max} - f(x_i) + \zeta}{\sum_{i=1}^n (y_{\max} - f(x_i)) + \zeta} \quad (4.7)$$

où  $y_{\min}$  et  $y_{\max}$  sont le minimum et le maximum de la fonction objectif  $f$  parmi les  $n$  feux d'artifice,  $\hat{A}$  est une constante réelle représente la somme de all  $A_i/i = 1, n$  et  $m$  est le nombre total d'étincelles, tandis que  $\zeta$  est une petite constante utilisée pour empêcher la division par zéro. L'approximation et la limitation du nombre d'étincelles sont définies comme suit : Ouvrir dans

$$\hat{S}_i = \begin{cases} \text{round}(\alpha.m) & \text{if } S_i < \alpha.m \\ \text{round}(\beta.m) & \text{if } S_i > \beta.m \\ \text{round}(S_i) & \text{Otherwise} \end{cases} \quad (4.8)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes telles que  $\alpha < \beta < 1$ , et  $\text{round}()$  est la fonction d'arrondi. L'algorithme (1) décrit la manière de générer des étincelles dans cette étape de l'algorithme FW.

---

**algorithm 1** Etape d'explosion

---

- 1: Initialize location of explosion spark  $\hat{x}_j \hat{x}_j = x_i$ .
  - 2: Set  $z^k = \text{round}(\text{rand}(0, 1)), k = 1, 2, \dots, d$
  - 3: **for** each dimension of  $\hat{x}_j$  where  $z^k == 1$  **do**
  - 4:     Calculate  $h^k = A_i * \text{rand}(-1, 1)$
  - 5:      $\hat{x}_j^k = \hat{x}_j^k + h^k$
  - 6:     **if**  $\hat{x}_j^k < x_{\min}^k$  or  $x_j^k > x_{\max}^k$  **then**
  - 7:         randomly map  $\hat{x}_j^k$  to the search space:  $\hat{x}_j^k = x_{\min}^k + \text{rand}(0, 1)(x_{\max}^k - x_{\min}^k)$      //  
        rand(0, 1) denotes a random number from uniform distribution in [0, 1]//.
  - 8:     **end if**
  - 9: **end for**
- 

## 4.2.2 Étape de mutation Gaussienne

Comme indiqué dans [26], pour assurer la diversité des étincelles, l'algorithme FW utilise un autre type d'étincelles, appelées étincelles gaussiennes. L'algorithme 2 montre la manière de générer ce genre d'étincelles.

---

**algorithm 2** Etape de mutation gaussienne

---

- 1: Initialize location of a specific spark  $\hat{x}_j \hat{x}_j = x_i$ .
  - 2: Set  $z^k = \text{round}(\text{rand}(0, 1)), k = 1, 2, \dots, d$
  - 3: Calculate the coefficient  $g = \mathcal{N}(1, 1)$
  - 4: **for** each dimension of  $\hat{x}_j$  where  $z^k == 1$  **do**
  - 5:      $\hat{x}_j^k = \hat{x}_j^k * g$
  - 6:     **if**  $\hat{x}_j^k < x_{\min}^k$  or  $x_j^k > x_{\max}^k$  **then**
  - 7:         randomly map  $\hat{x}_j^k$  to the search space:  $\hat{x}_j^k = x_{\min}^k + \text{rand}(0, 1)(x_{\max}^k - x_{\min}^k)$
  - 8:     **end if**
  - 9: **end for**
- 

## 4.2.3 La stratégie de la sélection

À chaque itération, FW conserve le meilleur emplacement pour la prochaine génération d'explosion, parmi toutes les étincelles et feux d'artifice actuels, puis  $n - 1$  emplacements sont sélectionnés avec des probabilités proportionnelles à leurs distances à d'autres emplacements.

La probabilité de sélection est définie par les équations suivantes :

$$R(x_i) = \sum_{j \in k} d(x_i, x_j) = \sum_{j \in k} \|x_i - x_j\| \quad (4.9)$$

$$p(x_i) = \frac{R(x_i)}{\sum_{j \in K} R(x_j)} \quad (4.10)$$

Enfin, nous résumons l'algorithme FW dans le pseudo-code suivant:

---

**algorithm 3** Algorithme Fireworks

---

```

1: Randomly select  $n$  locations for fireworks
2: while stop criteria=false do
3:   for each firework do
4:     Explosion step
5:   end for
6:   Randomly select  $\hat{m}$  fireworks for generating Gaussian sparks
7:   for  $k = 1 : \hat{m}$  do Gaussian mutation step
8:   end for
9:   Calculate  $f(x_i)$  for all fireworks and sparks
10:  Selection strategy step
11: end while

```

---

### 4.3 Méthode proposée

Dans cette partie, nous dériverons la méthode de construction d'une ondelette non stationnaire proposée pour la classification des signaux ECG. Comme mentionné dans l'introduction, la littérature rapporte de nombreuses méthodes exploitant les ondelettes pour analyser les signaux ECG [23, 24, 22]. La plupart de ces techniques utilisent la transformée discrète en ondelettes comme outil de représentation des signaux, ce qui est équivalent à décomposer le signal avec l'algorithme de Mallat [17] jusqu'à un niveau souhaité. Dans le cas des ondelettes standards, les filtres d'échelle et les filtres d'ondelettes utilisés dans l'algorithme de Mallat sont les mêmes pour chaque niveau de décomposition. Cependant, la décomposition du signal ECG à travers un banc de filtres non stationnaire, c'est-à-dire l'utilisation de l'algorithme de Mallat avec des filtres différents pour chaque niveau, pourrait offrir une représentation plus personnalisée et donc meilleure en particulier si elle est guidée par les tâches. Dans ce contexte, nous proposons une conception d'ondelette non stationnaire qui reproduit un filtre différent à chaque niveau pour l'algorithme de décomposition de Mallat. Le processus de conception est guidé par la précision de la classification ECG à l'aide d'un algorithme de feux d'artifice pour l'optimisation. Comme représenté sur la figure **Fig.4.1**, les vecteurs  $\{\alpha_i\}_{i=1,n}$  représentent les emplacements des feux d'artifice. Concernant la fonction de fitness, nous utilisons la précision de classification du classifieur ELM [7]. Il est à noter que la méthode proposée est générale ne dépend pas par le choix d'un classifieur spécifique (dans nos expérimentations le classificateur

ELM sera adopté, mais tout autre classificateur pourra également être exploité). Pour plus de détails concernant le classificateur ELM, voir [7, 8]

La fonction de fitness est une estimation de la précision qui conduit l'algorithme FW à sélectionner la meilleure ondelette candidate. Au cours de la phase d'apprentissage, les paramètres du classifieur (dans le cas de l'ELM sont les paramètres de régularisation et du noyau) sont choisis dans le domaine des ondelettes par une procédure standard de validation croisée. Comme illustré dans **Fig.4.1**, les principales étapes de notre méthode proposée sont décrites ci-dessous :

**algorithm 4** La méthode proposée

---

- 1: set the length of decomposition filters=  $4n$ , and the decomposition level=  $d$
  - 2: Initialize the FA algorithm with  $n$  random population vectors which represent locations of fireworks  $\{v_k = (\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)/k = 1, \dots, n\}$
  - 3: Generate sparks for each firework according to Algorithm 1
  - 4: Generate Gaussian sparks according to Algorithm 2
  - 5: **for** each spark and firework location  $(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)$  **do**
  - 6:     **for** each level  $j$  **do**
  - 7:         Set the vector  $\vec{\alpha}^j = 2^j(-i\alpha_1^k, i\alpha_1^k, -i\alpha_2^k, i\alpha_2^k, \dots, -i\alpha_n^k, i\alpha_n^k)$
  - 8:         Find the shortest Bezout solution  $D_0^{\vec{\alpha}^j}$
  - 9:     **end for**
  - 10: **end for**
  - 11: **for** each spark and firework location  $(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)$  **do**
  - 12:     **if**  $D_0^{\vec{\alpha}^j}$  exists and positive over  $[-1, 1]$  at every  $j$  **then**
  - 13:         **for** each level  $j$  **do**
  - 14:             Generate the filter bank  $\{h_k^j, g_k^j\}$  of level  $j$
  - 15:         **end for**
  - 16:         Apply DWT to each ECG training beat up to level  $d$
  - 17:         Train an classifier (e.g ELM) by feeding it with the generated wavelet features and compute its cross-validation
  - 18:         Evaluate the fitness function  $F(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k)$
  - 19:     **else**
  - 20:         Set fitness function  $F(\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k) = 0$
  - 21:     **end if**
  - 22: **end for**
  - 23: **if** FA converge **then**
  - 24:     Select the best non-stationary filter bank according to the best location
  - 25: **else**
  - 26:     Select the best locations according to Eq ??
  - 27:     Generate a new population and go to 03
  - 28: **end if**
-

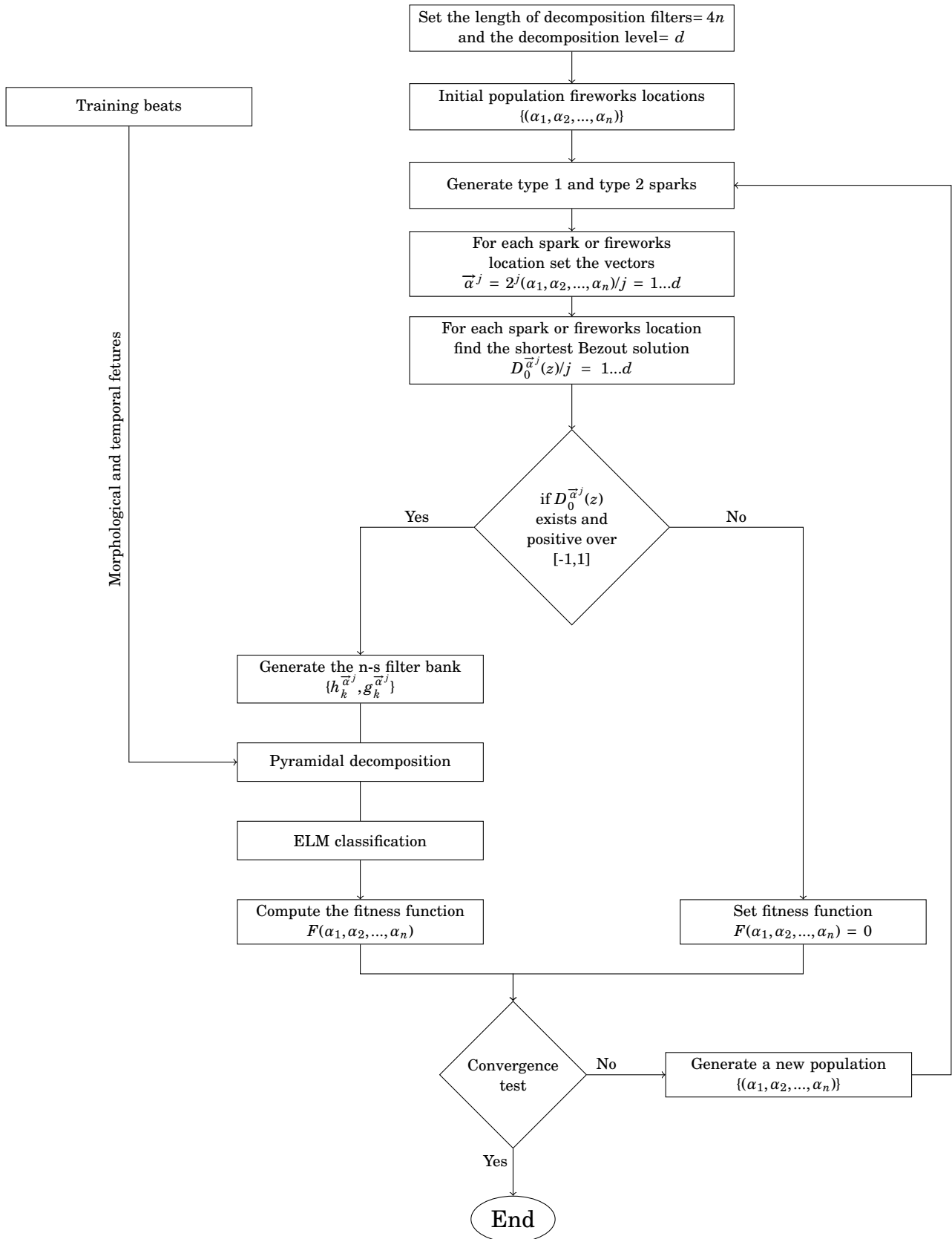


Figure 4.1 – Block diagram of the proposed non-stationary wavelet design guided by the ECG classification process

## 4.4 expérimentations et évaluation des résultats

Dans notre algorithme proposé, nous nous intéressons à distinguer les quatre classes *AAMI* (Association for the Advancement of Medical Instrumentation) de la base de données *MIT*, à savoir la classe normale (*N*), la classe supra ventriculaire (*S*), classe ventriculaire (*V*) et classe de fusion (*F*). L'ensemble d'apprentissage initial est composé de 22 enregistrements, à savoir  $DS1=\{101, 106, 108, 109, 112, 114, 115, 116, 118, 119, 122, 124, 201, 203, 205, 207, 208, 209, 215, 220, 223, 230\}$  du MIT-BIH, les autres enregistrements de cette base sont laissés à l'essai qui sont regroupés dans l'ensemble suivant  $DS2=\{100, 103, 105, 111, 113, 117, 121, 123, 200, 202, 201, 212, 213, 214, 219, 221, 222, 228, 231, 232, 233, 234\}$ . Dans ce contexte, pour générer l'ensemble d'apprentissage à partir de  $DS1$ , nous suivons la même méthode proposée par [1], qui est basée sur le clustering de l'ensemble d'apprentissage global avec l'algorithme de clustering k-means. En particulier, pour chaque classe *AAMI*, l'algorithme k-means est exécuté pour la diviser en clusters  $N_{clust}$ . Ensuite, les échantillons les plus proches du centre de gravité de chaque cluster sont sélectionnés pour former un ensemble d'apprentissage de taille réduite. Ce choix offre un bon compromis entre précision de calcul et précision de classification. Dans notre cas, nous effectuons un clustering dans l'ensemble d'apprentissage  $DS1$  selon les numéros de cluster rapportés dans le tableau 4.1.

Ainsi, l'ensemble d'entraînement est formé de 3700 battements, tandis que l'ensemble de test

Class	N	S	V	F
Number of clusters	2000	500	1000	200

Table 4.1 – *Number of clusters for each class*

contient tous les battements  $DS2$ , soit 49664 battements.

La performance de notre algorithme proposé pour discriminer les différentes classes d'*AAMI* a été calculée à l'aide de différentes mesures, qui sont :

1. La précision globale (*OA*), qui représente le pourcentage de battements correctement classés parmi tous les battements considérés (indépendamment des classes auxquelles ils appartiennent).
2. La sensibilité  $S_e = \frac{T_P}{T_P + F_N}$ , c'est le rapport entre le nombre de battements correctement détectés concernant une classe et le nombre total de battements appartenant à cette classe.

3. La prédictivité positive,  $P_p = \frac{T_P}{T_P + F_P}$ , soit le rapport entre le nombre de battements correctement détectés concernant une classe et le nombre total de battements détectés de cette classe .

Les notations ci-dessus sont les suivantes :  $T_P$  = vrai positif,  $F_N$  = faux négatif et  $F_P$  = faux positif

#### 4.4.1 Résultats expérimentaux et discussion

Notre ondelettes non stationnaires (Nsw) est comparée à l'ondelette de référence de Daubechies (db2 et db4 de filtres de mise à l'échelle de longueur 4 et 8, respectivement) de même longueur donnant lieu à deux ondelettes non stationnaires appelées ci-après Nsw2 et Nsw4 , et en considérant différents niveaux de décomposition. Les résultats obtenus sont résumés dans les tableaux (4.2,4.3) et (4.4).

	N		S		V		F		OA
	Se	Pp	Se	Pp	Se	Pp	Se	Pp	
Orig	73.24	92.88	60.03	87.35	75.49	98.35	57.05	87.30	72.90
Db2	74.43	90.01	55.85	89.53	70.46	98.05	59.28	86.13	76.46
Nsw2	<b>81.50</b>	<b>90.03</b>	<b>61.57</b>	<b>94.18</b>	<b>79.05</b>	<b>99.03</b>	<b>60.08</b>	<b>93.24</b>	<b>80.86</b>
Db4	75.20	91.04	54.30	89.77	71.54	98.44	60.13	86.85	77.12
Nsw4	<b>81.56</b>	<b>91.50</b>	<b>61.60</b>	<b>95.06</b>	<b>79.40</b>	<b>99.01</b>	<b>61.76</b>	<b>94.33</b>	<b>81.43</b>

Table 4.2 – Classification results obtained by the ELM classifier on the test set DS2 using original signal (Orig), and Db2, Db4 and proposed Nsw2, Nsw4 wavelets features in level 1

	N		S		V		F		OA
	Se	Pp	Se	Pp	Se	Pp	Se	Pp	
Orig	73.24	92.88	60.03	87.35	75.49	98.35	57.05	87.30	72.90
Db2	77.35	<b>98.87</b>	56.14	90.27	70.36	98.01	60.15	86.07	76.58
Nsw2	<b>82.77</b>	98.84	<b>67.43</b>	<b>94.70</b>	<b>78.12</b>	<b>98.25</b>	<b>61.20</b>	<b>93.42</b>	<b>82.10</b>
Db4	77.45	98.90	55.99	91.90	74.20	98.05	62.05	86.90	77.51
Nsw4	<b>83.40</b>	98.87	<b>67.73</b>	<b>95.83</b>	<b>80.07</b>	<b>99.05</b>	<b>64.23</b>	<b>95.04</b>	<b>84.47</b>

Table 4.3 – Classification results obtained by the ELM classifier on the test set DS2 using original signal (Orig), and Db2, Db4 and proposed Nsw2, Nsw4 wavelets features in level 2

En général, comme on peut l'observer à partir de ces résultats quantitatifs, nos ondelettes non stationnaires proposées présentent des performances supérieures par rapport aux ondelettes Daubechies standard Db2 et Db4 avec la même longueur de filtre d'échelle, ceci pour les quatre classes. Un tel résultat révèle que la personnalisation des ondelettes est un moyen



	N		S		V		F		OA
	Se	Pp	Se	Pp	Se	Pp	Se	Pp	
Orig	73.24	92.88	60.03	87.35	75.49	98.35	57.05	87.30	72.90
Db2	77.60	98.85	54.55	90.41	69.94	98.30	59.20	86.91	76.56
Nsw2	<b>86.11</b>	<b>98.60</b>	<b>70.32</b>	<b>94.11</b>	<b>80.35</b>	<b>98.81</b>	<b>62.01</b>	<b>92.85</b>	<b>86.60</b>
Db4	77.95	98.88	60.15	92.23	74.30	98.75	62.15	86.93	78.65
Nsw4	<b>88.04</b>	<b>98.64</b>	<b>70.56</b>	<b>96.46</b>	<b>85.11</b>	<b>99.35</b>	<b>65.67</b>	<b>96.20</b>	<b>87.84</b>

Table 4.4 – Classification results obtained by the ELM classifier on the test set DS2 using original signal (Orig), and Db2, Db4 and proposed Nsw2, Nsw4 wavelets features in level 3

précieux d'améliorer la représentation des signaux ECG et par conséquent la capacité de discrimination dans l'espace de représentation résultant. Ceci est rendu possible grâce à la nature non stationnaire ainsi qu'à l'optimisation FA du banc de filtres, indépendamment du niveau de décomposition. En effet, pour les trois niveaux explorés, Nsw surpasse Db pour les deux tailles de filtre (longueur 4 et 8). Il est à noter que plus le niveau de décomposition est élevé, plus l'écart de précision entre Nsw et Db est important (d'environ 4% pour le niveau 1 à environ 10% pour le niveau 3). Cela peut s'expliquer par le fait que Nsw conduit à une représentation plus clairsemée, et que le niveau de décomposition augmente à mesure que la parcimonie devient plus marquée, dotant le classifieur d'une capacité de généralisation potentiellement plus élevée. Plus en détail, en comparant par exemple Db2 et Nsw2, et en regardant le troisième niveau de décomposition (Table 4.4), l'utilisation du signal ECG d'origine pour alimenter le classificateur génère une précision globale de 72,9% due principalement à un problème de discrimination de la classe 'N' qui est largement dominante dans le jeu de données du MIT. Le passage d'une représentation temporelle à une représentation temps-fréquence grâce à Db2 permet d'atténuer ce problème, puisque plus de 4% de précision supplémentaire est capturée pour la classe 'N' impactant substantiellement l'OA (de 72,9% à 76,6%). Un tel gain positif se paie cependant par une diminution significative de la sensibilité pour les classes 'S' et 'V', qui sont moins fréquentes dans l'ensemble de données mais pas moins importantes que la classe 'N'. L'application de Nsw a permis d'apporter un effet positif sur toutes les classes en termes de sensibilité ainsi que de prédictivité, suggérant que l'espace de caractéristiques résultant a fortement amélioré la séparabilité entre les distributions de classe et pas seulement entraîné un changement partiel de distribution de classe. Les mêmes observations peuvent être rapportées concernant Db4 par rapport à Nsw4 (c'est-à-dire avec 8 coefficients de mise à l'échelle de la longueur du filtre).

La principale limite de la méthode proposée réside dans la lourde charge de calcul requise pour générer le banc de filtres non stationnaire optimal. En effet, sur un (processeur Intel I5 de fréquence 1,70 GHz avec 8 Go de mémoire RAM), moins de 20 minutes ont été consommées pour préparer le classificateur à prédire l'étiquette des battements de test. Cependant, étant donné que le processus de formation est effectué une fois et hors ligne, ce type de problème peut en fait être considéré comme n'étant pas si critique en ce qui concerne les gains de précision obtenus.

# Chapitre 5

## Ondelettes non-stationnaires et traitement d'images

Dans ce chapitre, nous présenterons une technique constructive d'une famille d'ondelettes non stationnaires biorthogonales (Bior-NSW) basée sur [31], et nous effectuons une étude comparative entre les Daubechies classiques la famille des ondelettes biorthogonales et les ondelettes non stationnaires construites, ce qui a prouvé la dominance des ondelettes non stationnaires en approximation de différents types de signaux.

### 5.1 Analyse multirésolution NS biorthogonale

Dans cette section, nous présentons quelques propriétés et notions de base concernant l'analyse multirésolutions non stationnaires biorthogonales et ondelettes non stationnaires.

**Définition 5.1** Soit  $(\phi_j(t))_{j \leq j_0}$  et  $(\tilde{\phi}_j(t))_{j \leq j_0}$  deux suites de fonction dans  $L^2(\mathbb{R})$  tel que  $j_0 \in \mathbb{Z}$ . Le couple  $((V_j)_{j \leq j_0}, (\tilde{V}_j)_{j \leq j_0})$  tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_j = \left\{ f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi_j(2^{-j}t - k), a \in l^2(\mathbb{Z}) \right\}; \\ \tilde{V}_j = \left\{ g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \tilde{\phi}_j(2^{-j}t - k), b \in l^2(\mathbb{Z}) \right\}, \end{array} \right.$$

définit une analyse multirésolution non stationnaire biorthogonale si et seulement si :

1. Pour tous  $j \leq j_0$   $\phi_j(t)$  et  $\tilde{\phi}_j(t)$  génèrent une base de Riesz, i.e:

$$\exists C_{1j}, C_{2j} \in \mathbb{R}_+^* \setminus \forall (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}) :$$

$$C_{1j} \|c\|_{l^2(\mathbb{Z})} \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_j(\cdot - k) \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_{2j} \|c\|_{l^2(\mathbb{Z})},$$

où,  $C_{1j}, C_{2j}$  sont appelés limites de Riesz inférieure et supérieure respectivement, il en est de même dans le cas de  $\tilde{\phi}_j(t)$ .

2. Pour tous  $j \leq j_0$ ,  $V_{j+1} \subset V_j$ ,  $\tilde{V}_{j+1} \subset \tilde{V}_j$ ,

3.  $\overline{\bigcup_{j \leq j_0} V_j} = \overline{\bigcup_{j \leq j_0} \tilde{V}_j} = L^2(\mathbb{R})$ ,

4.  $\bigcap_{j \leq j_0} V_j = \bigcap_{j \leq j_0} \tilde{V}_j = \{0\}$ .

Dans le cas stationnaire on a:  $\forall j \leq j_0$ :  $\phi_j(t) = \phi(t)$  and  $\tilde{\phi}_j(t) = \tilde{\phi}(t)$ .

## 5.2 Ondelettes biorthogonale non-stationnaires

Dans cette section, on note

1. Les fonctions  $\phi_{j,k}$  et  $\tilde{\phi}_{j,k}$ ,  $j \leq j_0$  génère des espaces  $V_j$  et  $\tilde{V}_j$  respectivement, c'est-à-dire dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \phi_j(2^j t - k); \\ \tilde{\phi}_{j,k}(t) = \sqrt{2^j} \tilde{\phi}_j(2^j t - k), \end{array} \right.$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} V_j = \text{span} \{ \phi_{j,k}(t) \}_{j,k \in \mathbb{Z}}; \\ \tilde{V}_j = \text{span} \{ \tilde{\phi}_{j,k}(t) \}_{j,k \in \mathbb{Z}}, \end{array} \right.$$

$\phi_{j,k}(t)$ ,  $\tilde{\phi}_{j,k}(t)$  sont appelées les fonctions d'échelles

2. A partir de la condition (2) on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k^{[j]} \phi_j(2t - k); \\ \tilde{\phi}_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_k^{[j]} \tilde{\phi}_j(2t - k). \end{array} \right. \quad (1)$$

La relation (1) est appelée équations d'échelle, et  $(h_k^{[j]})_{j,k \in \mathbb{Z}}, (\tilde{h}_k^{[j]})_{j,k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$  sont les filtres d'échelles.

**Définition 5.2** Les compléments orthogonaux de  $V_{j+1}$  dans  $V_j$  et  $\tilde{V}_{j+1}$  dans  $\tilde{V}_j$  sont  $W_{j+1}$  et  $\tilde{W}_{j+1}$  respectivement tels que:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1} \\ \tilde{V}_j = \tilde{V}_{j+1} \oplus \tilde{W}_{j+1} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} W_{j+1} \perp \tilde{V}_{j+1}; \\ \tilde{W}_{j+1} \perp V_{j+1}. \end{array} \right.$$

Les espaces  $W_{j+1}$  et  $\tilde{W}_{j+1}$  sont définis par:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_j = \text{span} \{ \psi_{j,k}(t) \}_{j,k \in \mathbb{Z}}; \\ \tilde{W}_j = \text{span} \{ \tilde{\psi}_{j,k}(t) \}_{j,k \in \mathbb{Z}}. \end{array} \right.$$

D'après l'inclusion  $W_{j+1} \subset V_j$  on obtient les relations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k^{[j]} \phi_j(2t-k); \\ \tilde{\psi}_{j+1}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_k^{[j]} \tilde{\phi}_j(2t-k), \end{array} \right.$$

à partir de la condition de la biorthogonalité on obtient les suites  $(g_k^{[j]})_{j,k \in \mathbb{Z}}, (\tilde{g}_k^{[j]})_{j,k \in \mathbb{Z}}$  définies par:

$$\left\{ \begin{array}{l} g_k^{[j]} = (-1)^k \tilde{h}_{1-k}^{[j]}; \\ \tilde{g}_k^{[j]} = (-1)^k h_{1-k}^{[j]}. \end{array} \right. \quad (2)$$

les fonctions  $\psi_j, \tilde{\psi}_j$  sont appelées ondelettes et les suites  $(g_k^{[j]})_{j,k \in \mathbb{Z}}, (\tilde{g}_k^{[j]})_{j,k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$  sont les filtres d'ondelettes.

### 5.3 La méthode de construction

Généralement, dans le  $z$ -domaine la condition de biorthogonalité équivalente à:

$$H_j(z)\tilde{H}_j(z^{-1}) + H_j(-z)\tilde{H}_j(-z^{-1}) = 4, \quad (3)$$

comme indiqué dans [31], nous posons:

$$\begin{cases} H_j(z) = R_{2^j \vec{\alpha}}(z) \mathbf{Q}_j(z); \\ \tilde{H}_j(z) = R_{2^j \vec{\tilde{\alpha}}}(z) \tilde{\mathbf{Q}}_j(z), \end{cases} \quad (4)$$

avec

$$\begin{cases} R_{2^j \vec{\alpha}}(z) = \prod_{k=1}^N (1 + e^{2^j \alpha_k} z); \\ R_{2^j \vec{\tilde{\alpha}}}(z) = \prod_{k=1}^{\tilde{N}} (1 + e^{2^j \tilde{\alpha}_k} z). \end{cases}$$

Notre méthode est basée sur les étapes suivantes.

### Étape 1

En remplaçant (4) dans (3) on obtient

$$C_j(Z) D_{0j}(Z) + C_j(-Z) D_{0j}(-Z) = 2, \quad (5)$$

avec

$$C_j(Z) = \tilde{c}_j z^{\frac{N-\tilde{N}}{2}} R_{2^j \vec{\alpha}}(z) R_{2^j \vec{\tilde{\alpha}}}(z^{-1}),$$

tel que:  $N$  et  $\tilde{N}$  sont les longueurs des vecteurs complexes  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\tilde{\alpha}}$  respectivement,

$$\tilde{c}_j = \prod_{k=1}^{\tilde{N}} e^{-2^j \tilde{\alpha}_k} \quad \text{et} \quad Z = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

Dans cette étape, nous trouvons la solution la plus courte  $D_{0j}(Z)$  de l'équation (5), utilisant la technique d'interpolation, voir [31].

### Étape 2 la factorisation spectrale

$$2z^{\frac{N-\tilde{N}}{2}} \tilde{c}_j D_{0j}\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = \mathbf{Q}_j(z) \tilde{\mathbf{Q}}_j(z),$$

comme proposé dans [21],  $\mathbf{Q}_j(z) = 2^{1-N}$  donc

$$\tilde{\mathbf{Q}}_j(z) = 2^N z^{\frac{\tilde{N}-N}{2}} \tilde{c}_j D_{0j}\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right).$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} H_j(z) = 2^{1-N} R_{2^j \vec{\alpha}}(z); \\ \tilde{H}_j(z) = R_{2^j \vec{\alpha}}(z) 2^N z^{\frac{\tilde{N}-N}{2}} \tilde{c}_j D_{0j} \left( \frac{z+z^{-1}}{2} \right). \end{array} \right.$$

## 5.4 Les ondelettes biorthogonales non stationnaires proposées

Notre Bior-NSW proposé est basé sur le choix des vecteurs  $\vec{\alpha}$  and  $\vec{\tilde{\alpha}}$  avec le manière suivante  $\vec{\alpha} = \vec{\tilde{\alpha}} = (i\omega, -i\omega, 0)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  En formulant l'équation (5) et en appliquant les étapes (1) et (2) on obtient :

$$H_j(z) = \frac{\sqrt{2}}{4(\beta+1)} z^{-3} + \frac{\sqrt{2}(2\beta+1)}{4(\beta+1)} z^{-2} + \frac{\sqrt{2}(2\beta+1)}{4(\beta+1)} z^{-1} + \frac{\sqrt{2}}{4(\beta+1)}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j(z) = & \frac{\sqrt{2}(2\beta+1)}{32\beta^3(\beta+1)} z^{-5} - \frac{\sqrt{2}(2\beta+1)^2}{32\beta^3(\beta+1)} z^{-4} - \frac{\sqrt{2}(8\beta^3+4\beta^2-4\beta-1)}{32\beta^3(\beta+1)} z^{-3} \\ & + \frac{\sqrt{2}(16\beta^4+24\beta^3+8\beta^2-2\beta-1)}{32\beta^3(\beta+1)} z^{-2} + \frac{\sqrt{2}(16\beta^4+24\beta^3+8\beta^2-2\beta-1)}{32\beta^3(\beta+1)} z^{-1} \\ & - \frac{\sqrt{2}(8\beta^3+4\beta^2-4\beta-1)}{32\beta^3(\beta+1)} z^0 - \frac{\sqrt{2}(2\beta+1)^2}{32\beta^3(\beta+1)} z^1 + \frac{\sqrt{2}(2\beta+1)}{32\beta^3(\beta+1)} z^2 \end{aligned}$$

Où,  $\beta = \cos(2^j \omega)$ . et les filtres d'échelles biorthogonaux sont:

$$h_{-3}^{[j]} = \frac{\sqrt{2}}{4(\beta+1)}, h_{-2}^{[j]} = \frac{\sqrt{2}(2\beta+1)}{4(\beta+1)}, h_{-1}^{[j]} = \frac{\sqrt{2}(2\beta+1)}{4(\beta+1)}, h_0^{[j]} = \frac{\sqrt{2}}{4(\beta+1)}$$

$\tilde{h}_{-5}^{[j]} = \frac{\sqrt{2}(2\beta+1)}{32\beta^3(\beta+1)}$	$\tilde{h}_{-1}^{[j]} = \frac{\sqrt{2}(16\beta^4+24\beta^3+8\beta^2-2\beta-1)}{32\beta^3(\beta+1)}$
$\tilde{h}_{-4}^{[j]} = -\frac{\sqrt{2}(2\beta+1)^2}{32\beta^3(\beta+1)}$	$\tilde{h}_0^{[j]} = -\frac{\sqrt{2}(8\beta^3+4\beta^2-4\beta-1)}{32\beta^3(\beta+1)}$
$\tilde{h}_{-3}^{[j]} = -\frac{\sqrt{2}(8\beta^3+4\beta^2-4\beta-1)}{32\beta^3(\beta+1)}$	$\tilde{h}_1^{[j]} = -\frac{\sqrt{2}(2\beta+1)^2}{32\beta^3(\beta+1)}$
$\tilde{h}_{-2}^{[j]} = \frac{\sqrt{2}(16\beta^4+24\beta^3+8\beta^2-2\beta-1)}{32\beta^3(\beta+1)}$	$\tilde{h}_2^{[j]} = \frac{\sqrt{2}(2\beta+1)}{32\beta^3(\beta+1)}$

Pour obtenir les filtres d'ondelettes nous utilisons la relation (2).

**Exemple 5.1** Si on choisit  $\omega = 0.0240$  et  $j = 1$  on obtient le biorthogonal suivant mise à l'échelle d'un filtre wevelets

$h_{-3}^{[1]} = 0.1769$	$h_{-1}^{[1]} = 0.5302$	$\tilde{g}_1^{[1]} = -0.1769$	$\tilde{g}_3^{[1]} = -0.5302$
$h_{-2}^{[1]} = 0.5302$	$h_0^{[1]} = 0.1769$	$\tilde{g}_2^{[1]} = 0.5302$	$\tilde{g}_4^{[1]} = 0.1769$
$\tilde{h}_{-5}^{[1]} = 0.0665$	$\tilde{h}_{-1}^{[1]} = -0.1994$	$g_{-1}^{[1]} = -0.0665$	$g_3^{[1]} = 0.1994$
$\tilde{h}_{-4}^{[1]} = -0.1546$	$\tilde{h}_0^{[1]} = 0.9946$	$g_0^{[1]} = -0.1546$	$g_4^{[1]} = 0.9946$
$\tilde{h}_{-3}^{[1]} = 0.9946$	$\tilde{h}_1^{[1]} = -0.1546$	$g_1^{[1]} = -0.9946$	$g_5^{[1]} = 0.1546$
$\tilde{h}_{-2}^{[1]} = -0.1994$	$\tilde{h}_2^{[1]} = 0.0665$	$g_2^{[1]} = -0.1994$	$g_6^{[1]} = 0.0665$

En utilisant l'algorithme en cascade [11], nous obtenons le biorthogonal suivant fonctions de mise à l'échelle et de wevelets

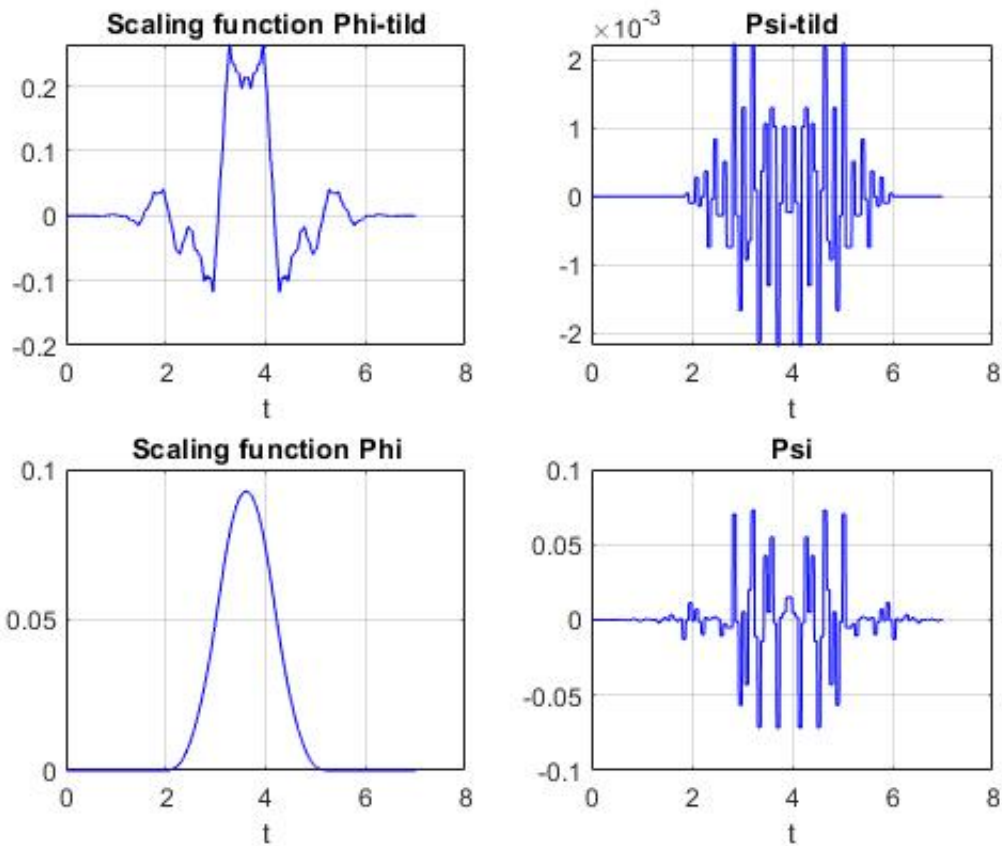


Figure 5.1 – *Functions  $\phi, \tilde{\phi}, \psi, \tilde{\psi}$  for  $j = 1, \omega = 0.0240$*

## 5.5 Etude expérimentale et comparative

Dans cette section, nous effectuons une étude comparative dans le but de choisir un meilleur Bior-NSW pour générer une base  $L^2(\mathbb{R})$  pour l'approximation des signaux et des images. Notez que notre technique de choix de la meilleure ondelette Bior-NSW est basée sur le choix de  $\omega$



par la valeur maximale de la mesure de qualité PSNR (abréviation de Peak rapport signal sur bruit), où

$$PSNR = 10 \log_{10} \left( \frac{\|x\|_2^2}{\|x - xr\|_2^2} \right),$$

et  $x$ ,  $xr$  sont respectivement le signal original et le signal construit. Notre étude comparative est composée de deux parties : une partie approximation et une partie seuillage.

**Partie d'approximation :**

Dans cette partie de notre étude comparative, nous approchons une classe de signaux en la base Bior-NSW proposée et dans la famille Daubechies de base d'ondelettes biorthogonales, puis nous comparons les résultats obtenus en utilisant la mesure de qualité PSNR. Dans notre étude nous utilisons la classe de signaux suivante : Doppler, blocs, lourds sinus, bosses, ECG et image du caméraman (IC), on obtient alors le tableau suivant de résultats.

Bior Daubechies	PSNR Doppler	PSNR Blocks	PSNR Heavy Sine	PSNR Bumps	PSNR ECG	PSNR CI
Bior 1.1	304,8595	304,8595	304,8595	304,8595	305.0227	300.8817
Bior 1.3	304,5391	304,5391	304,5391	304,5391	303.9560	300.8962
Bior 1.5	304,1961	304,1961	304,1961	304,1961	303.0740	300.8513
Bior 2.2	302,7128	302,7128	302,7128	302,7128	302.2617	298.8938
Bior 2.4	308,2876	308,2876	308,2876	308,2876	307.9377	305.2787
Bior 2.6	307,9099	307,9099	307,9099	307,9099	307.8459	305.1269
Bior 2.8	304,5545	304,5545	304,5545	304,5545	304.0225	301.3887
Bior 3.1	299,7088	299,7088	299,7088	299,7088	299.7691	296.1518
Bior 3.3	304,7780	304,7780	304,7780	304,7780	304,2777	300.7060
Bior 3.5	304,0868	304,0868	304,0868	304,0868	303.6168	300.6334
Bior 3.7	302,8794	302,8794	302,8794	302,8794	303.0174	299.7753
Bior 3.9	302,4278	302,4278	302,4278	302,4278	303.2998	299.7939
Bior 4.4	252,7010	252,7010	252,7010	252,7010	259.7322	238.9062
Bior 5.5	248,8891	248,8891	248,8891	248,8891	257.6999	236.3364
Bior 6.8	267,6460	267,6460	267,6460	267,6460	273.5575	252.8666
Proposed Bior-NSW	<b>313,6768</b>	<b>317,1361</b>	<b>314,3498</b>	<b>314,3029</b>	<b>315.2481</b>	<b>312.9809</b>
Best value of $\omega$	0.0240	1.0560	0.1260	0.0240	0.1400	0.0410

Table 5.1 – Résultats d'approximation obtenues

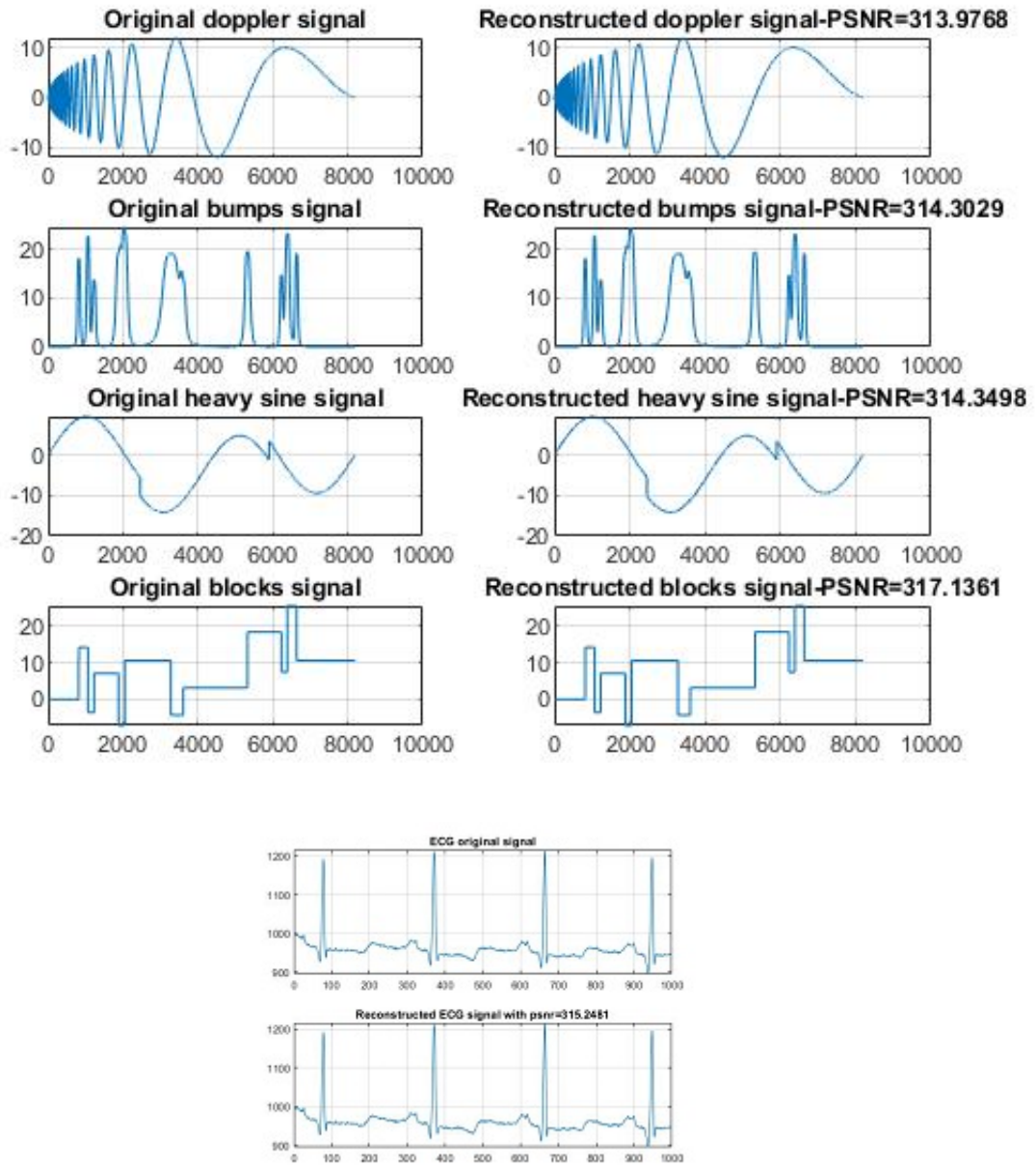


Figure 5.2 – Original and reconstructed signals by the proposed Bior-NSW



Figure 5.3 – *Original and reconstructed cameraman image  $256 \times 256$  by the proposed Bior-NSW*

En général, comme on peut le constater à partir de ces résultats obtenus, notre proposition Bior-NSW affiche un pouvoir d'approximation par rapport aux Daubechies famille des ondelettes biorthogonales

#### **Partie de seuillage :**

Généralement, pendant le processus de compression avec perte de données, le seuillage est une opération importante cela signifie, trouver un seuil (TH) en fonction d'une qualité critères et annulant les coefficients de signal qui ont un module inférieur à th en préservant la qualité du signal reconstruit. Dans cette partie de notre étude nous choisissons la meilleure ondelette biorthogonale concernant les Daubechies famille qui a un meilleur PSNR et notre proposition Bior-NSW dans le but de faire une étude comparative entre eux dans l'opération de seuillage. Dans Dans notre cas, nous effectuons une analyse de la mesure du PSNR par rapport à la seuil (TH) et nous obtenons les résultats suivants.

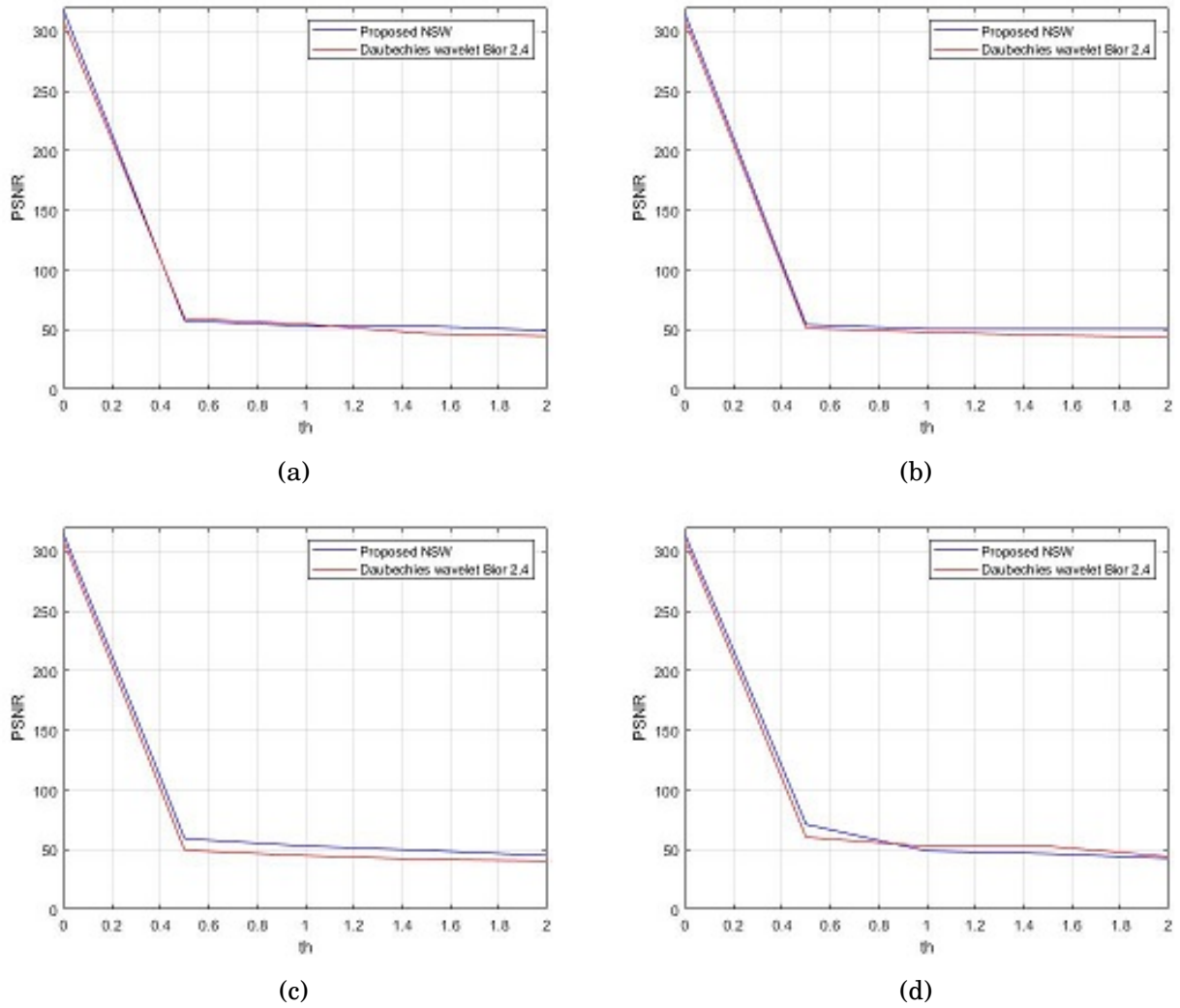


Figure 5.4 – Compared Bior2.4 with proposed Bior-NSW during the thresholding process applying in doppler (a), bumps (b), heavy sine (c) and blocks (d)

D'après les résultats ci-dessus, nous remarquons que : le processus de seuillage dans base d'ondelettes générées par notre Bior-NSW donne une bonne résultats comparés à la famille des ondelettes biorthogonales de Daubechies.mm

# Conclusion

Durant l'élaboration de ce modeste travail que nous nous sommes fixé, plusieurs questions survolaient l'esprit, telles que : Pourquoi les ondelettes non-stationnaires sont apparues ? Quels sont leurs fondements théoriques de base ? Et où sont-elles impliquées en pratique ? En essayant de répondre à ces questions, nous avons pu englober, d'une manière suffisante, les notions de fond de la théorie des analyses multirésolutions et ondelettes non-stationnaires . La lecture attentive de plusieurs références et articles de recherches en liaison avec les applications d'ondelettes non-stationnaires, nous a conduit de choisir les deux applications les plus répandues dans la littérature spécialisée du domaine et qui sont : la classification automatique des signaux ECG de la base AAMI et l'approximation des images numériques et signaux dans les bases d'ondelettes non-stationnaires. Les résultats obtenus, en classification des signaux ECG, issus de l'algorithme de construction proposé sont encourageants. Néanmoins, la réflexion dans la direction de la construction d'une onde mère non-stationnaires avec la taille des filtres changeables dédiée à la classification des signaux destinées au autres bases semble être tout à fait logique. Concernant le deuxième volet qu'est l'approximation des signaux et images numériques dans la base des ondelettes non-stationnaires, les résultats sont aussi satisfaisants et montre bien le pouvoir d'approximation d'une manière assez efficace.

A la fin, nous nous considérons heureux d'avoir eu cette opportunité inestimable de s'introduire au domaine fascinant de la recherche scientifique. Nous espérons avoir la capacité de continuer à explorer le vaste monde des ondelettes.

# Bibliographie

- [1] Mohamad M AL RAHHAL et al. “Classification of AAMI heartbeat classes with an interactive ELM ensemble learning approach”. In : *Biomedical Signal Processing and Control* 19 (2015), p. 56-67.
- [2] R BENZID et al. “Fixed percentage of wavelet coefficients to be zeroed for ECG compression”. In : *Electronics Letters* 39.11 (2003), p. 1.
- [3] Carl de BOOR, Ronald A DEVORE et Amos RON. “On the construction of multivariate (pre) wavelets”. In : *Constructive approximation* 9 (1993), p. 123-166.
- [4] Ingrid DAUBECHIES. *Ten lectures on wavelets*. SIAM, 1992.
- [5] Mesut GÖKTEN, Atef ELSHERBENI et Ercument ARVAS. *Multiresolution Frequency Domain Technique for Electromagnetics*. Springer Nature, 2022.
- [6] Debkalpa GOSWAMI et Shankar CHAKRABORTY. “Parametric optimization of ultrasonic machining process using gravitational search and fireworks algorithms”. In : *Ain Shams Engineering Journal* 6.1 (2015), p. 315-331.
- [7] Gao HUANG et al. “Trends in extreme learning machines: A review”. In : *Neural Networks* 61 (2015), p. 32-48.
- [8] Guang-Bin HUANG et al. “Extreme learning machine for regression and multiclass classification”. In : *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)* 42.2 (2011), p. 513-529.
- [9] Guang-Bin HUANG et al. “Extreme learning machine for regression and multiclass classification”. In : *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)* 42.2 (2012), p. 513-529.
- [10] A Mohamed IMRAN et M KOWSALYA. “A new power system reconfiguration scheme for power loss minimization and voltage profile enhancement using Fireworks Algorithm”. In : *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* 62 (2014), p. 312-322.
- [11] Argyro KAMPOURAKI, George MANIS et Christophoros NIKOU. “Heartbeat time series classification with support vector machines”. In : *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine* 13.4 (2009), p. 512-518.
- [12] James KENNEDY et al. *Swarm intelligence*. Morgan Kaufmann, 2001.
- [13] Yeon Ju LEE, Jungho YOON et al. “Analysis of compactly supported nonstationary biorthogonal wavelet systems based on exponential B-splines”. In : *Abstract and Applied Analysis*. T. 2011. Hindawi. 2011.
- [14] Cuiwei LI, Chongxun ZHENG et Changfeng TAI. “Detection of ECG characteristic points using wavelet transforms”. In : *IEEE Transactions on biomedical Engineering* 42.1 (1995), p. 21-28.
- [15] S MALLAT. “A Theory of Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, GRASP LAB, Dept. of Computer and Inf”. In : *Science* ().

- [16] Stéphane MALLAT. *A wavelet tour of signal processing*. Elsevier, 1999.
- [17] Stéphane G MALLAT. “A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation”. In : *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence* 11.7 (1989), p. 674-693.
- [18] MAZURE et MELKÉMI. “Orthonormality of cardinal Chebyshev B-spline bases in weighted Sobolev spaces”. In : *Constructive approximation* 18 (2002), p. 387-415.
- [19] Khaled MELKEMI. “Orthogonalité des B-splines de Chebyshev cardinales dans un espace de Sobolev pondéré”. Thèse de doct. Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 1999.
- [20] Y MEYER. “Wavelets: Algorithms and Applications Philadelphia: SIAM, 1993”. In : *Progress in Wavelet Analysis and Applications (Eds Y Meyer, S Roques)(Gif-sur-Yvette: Editions Frontiers, 1993)* (1993).
- [21] Kei-ichiro MINAMI, Hiroshi NAKAJIMA et Takesshi TOYOSHIMA. “Real-time discrimination of ventricular tachyarrhythmia with Fourier-transform neural network”. In : *IEEE transactions on Biomedical Engineering* 46.2 (1999), p. 179-185.
- [22] Shadhon Chandra MOHONTA, Mohammad Abdul MOTIN et Dinesh Kant KUMAR. “Electrocardiogram based arrhythmia classification using wavelet transform with deep learning model”. In : *Sensing and Bio-Sensing Research* 37 (2022), p. 100502.
- [23] Sudestna NAHAK, Akanksha PATHAK et Goutam SAHA. “Fragment-level classification of ECG arrhythmia using wavelet scattering transform”. In : *Expert Systems with Applications* 224 (2023), p. 120019.
- [24] Ali RIZWAN et al. “A machine learning approach for the detection of QRS complexes in electrocardiogram (ECG) using discrete wavelet transform (DWT) algorithm”. In : *Computational Intelligence and Neuroscience* 2022 (2022).
- [25] Liang-Yu SHYU, Ying-Hsuan WU et Weichih HU. “Using wavelet transform and fuzzy neural network for VPC detection from the Holter ECG”. In : *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* 51.7 (2004), p. 1269-1273.
- [26] Ying TAN. “Fireworks algorithm”. In : *Heidelberg, Germany: Springer* 10 (2015), p. 978-3.
- [27] Manu THOMAS, Manab Kr DAS et Samit ARI. “Automatic ECG arrhythmia classification using dual tree complex wavelet based features”. In : *AEU-International Journal of Electronics and Communications* 69.4 (2015), p. 715-721.
- [28] Michael UNSER. “Cardinal exponential splines: part II-think analog, act digital”. In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 53.4 (2005), p. 1439-1449.
- [29] Michael UNSER et Thierry BLU. “Cardinal exponential splines: Part I-Theory and filtering algorithms”. In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 53.4 (2005), p. 1425-1438.
- [30] Patrick J VAN FLEET. *Discrete wavelet transformations: An elementary approach with applications*. John Wiley & Sons, 2019.
- [31] Cédric VONESCH, Thierry BLU et Michael UNSER. “Generalized Daubechies wavelet families”. In : *IEEE Transactions on Signal Processing* 55.LIB-ARTICLE-2007-013 (2007), p. 4415-4429.
- [32] David F WALNUT. *An introduction to wavelet analysis*. Springer Science & Business Media, 2002.