

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER - BISKRA

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE



Thèse de doctorat

En vue de l'obtention du diplôme de doctorat LMD en génie électrique

Commande robuste de la machine synchrone à réluctance

Réalisé par: **Imad Eddine MEREDDEF.**

Soutenue publiquement le: 07/11/2024

Devant le jury composé de:

Ali ARIF	Professeur	Université de Biskra	Président
Mohamed Yacine HAMMOUDI	Professeur	Université de Biskra	Rapporteur
Ramzi SAADI	Professeur	Université de Biskra	Examineur
Laid ZELLOUMA	Professeur	Université d'El-Oued	Examineur

Année Universitaire 2023/2024

DÉDICACES

À mes chers parents,

À ma femme et mes enfants,

À tous ceux qui m'ont nourri de leur savoir,

Et À ceux avec qui je partage de bons souvenirs.

REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie Dieu le Tout-Puissant de m'avoir accordé toute la patience, le courage, la volonté et la motivation qui m'ont permis d'achever ce travail.

Ma profonde gratitude et mon appréciation s'adressent à mon directeur de thèse, le professeur Mohamed Yacine HAMMOUDI, membre du Laboratoire LMSE de l'Université de Biskra, pour sa sagesse, sa générosité et surtout sa patience infinie qui m'ont aidé à finaliser ce travail. Sa disponibilité, son encouragement constants et l'intérêt qu'il a témoigné tout au long de la réalisation ont été des éléments déterminants dans la réussite de ma thèse.

Je tiens également à exprimer ma sincère reconnaissance à M. Boumehraz Mohamed, chef du Laboratoire de Modélisation des Systèmes Énergétiques (LMSE), ainsi qu'à Mme Batka, ingénieure du laboratoire, pour avoir créé un environnement idéal pour mes recherches. La réalisation de ces travaux n'aurait pas été possible sans leurs aides et le soutien de toute l'équipe du LMSE.

J'adresse mes chaleureux remerciements aux membres du jury pour avoir pris le temps de lire et d'évaluer ce modeste travail avec attention et bienveillance :

- Monsieur, Ali ARIF, Professeur à l'Université de Biskra, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance.
- Monsieur Ramzi SAADI, Professeur à l'Université de Biskra, Pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour avoir accepté de participer au jury d'examen.
- Monsieur Laid ZELLOUMA, Professeur à l'université d'El Oued, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements s'adressent aussi à monsieur Anouar BOUKHLOUF, maître-assistant

a l'Université de Biskra, pour son aide, et tous ceux qui ont offert leur aide et qui ont contribué a l'élaboration de ce travail de près ou de loin.

Enfin, je ne peux conclure sans exprimer ma profonde gratitude envers mes parents, ma femme et mes enfants (Anfal, Douaa et Islam), dont l'amour et le soutien indéfectible.

Dans un contexte où l'efficacité énergétique et la fiabilité des systèmes électromécaniques deviennent des enjeux majeurs pour l'industrie, l'optimisation des machines électriques est un domaine de recherche en pleine expansion. Parmi ces machines, le moteur à réluctance synchrone (SynRM) se distingue comme une alternative prometteuse aux moteurs conventionnels grâce à sa conception simple, robuste et dépourvue d'aimants permanents. Cette particularité lui confère des avantages considérables, notamment une réduction des coûts de fabrication, une meilleure durabilité et un rendement énergétique optimisé. Grâce à ses performances à basse vitesse et à sa réponse dynamique rapide, le SynRM est de plus en plus adopté dans des secteurs exigeants tels que l'automobile et les énergies renouvelables, où l'innovation technologique et l'efficacité sont essentielles.

Cette thèse s'inscrit dans une approche approfondie du moteur synchrone à réluctance (SynRM) dans un cadre non linéaire, en mettant l'accent sur sa modélisation et sa commande avancée. La première partie est consacrée à la modélisation du SynRM et explore en détail les systèmes non linéaires ainsi que les principes fondamentaux des machines électriques. Elle traite notamment du développement du modèle dynamique du moteur et de l'intégration des systèmes flous de Takagi-Sugeno (TS) pour une représentation plus fidèle des dynamiques complexes. Une méthodologie spécifique est employée pour assurer une modélisation précise des systèmes non linéaires, sans perte d'information. Cette approche repose sur la décomposition en secteurs non linéaires, permettant de reformuler le système sous une forme polytopique. Une telle transformation autorise ensuite l'application des théorèmes issus du cadre des modèles linéaires aux systèmes non linéaires, facilitant ainsi leur analyse et leur contrôle. Enfin, une attention particulière est portée aux outils mathématiques avancés, notamment les inégalités matricielles linéaires

(LMI) et bilinéaires (BMI), qui jouent un rôle clé dans l'évaluation et la garantie de la stabilité du système modélisé.

La seconde partie se focalise sur la commande du SynRM. Elle explore des techniques avancées telles que la linéarisation par rétroaction, le backstepping et les stratégies de commande robuste, incluant la reconfiguration de Lyapunov et la commande par mode glissant. L'accent est mis sur la stabilisation des systèmes flous TS et l'optimisation des performances du moteur. Une application pratique est réalisée à travers la conception et l'implémentation d'un contrôleur non quadratique basé sur l'intégrale de ligne de Lyapunov.

Les performances du contrôleur sont évaluées à l'aide de simulations MATLAB et de tests expérimentaux en conditions réelles. Une analyse comparative avec d'autres méthodes existantes met en évidence les gains en stabilité, robustesse et efficacité énergétique. Ces résultats confirment le potentiel du SynRM comme alternative viable aux moteurs conventionnels et ouvrent la voie à de nouvelles applications industrielles optimisées.

Mots-Clés: Multi-modèles de Takagi-Sugeno, LMI, commande robuste.

*I*n a context where energy efficiency and the reliability of electromechanical systems are becoming major challenges for the industry, the optimization of electric machines is a rapidly expanding field of research. Among these machines, the synchronous reluctance motor (SynRM) stands out as a promising alternative to conventional motors due to its simple and robust design, free of permanent magnets. This characteristic provides significant advantages, including lower manufacturing costs, improved durability, and enhanced energy efficiency. With its high performance at low speeds and rapid dynamic response, the SynRM is increasingly adopted in demanding sectors such as the automotive industry and renewable energy, where technological innovation and efficiency are essential.

This thesis presents an in-depth study of the SynRM within a nonlinear systems, focusing on its modeling and advanced control strategies. The first part is dedicated to the modeling of SynRM and provides a detailed exploration of nonlinear systems and the fundamental principles of electrical machines. It specifically addresses the development of the motor's dynamic model and the integration of Takagi-Sugeno (TS) fuzzy systems to achieve a more accurate representation of complex dynamics.

A specialized methodology is employed to ensure precise modeling of nonlinear systems without loss of information. This approach relies on sector-based nonlinear decomposition, enabling the reformulation of the system into a polytopic form. Such a transformation allows the application of theorems developed for linear models to nonlinear systems, thereby facilitating their analysis and control. Furthermore, special emphasis is placed on advanced mathematical tools, particularly Linear Matrix Inequalities (LMI) and Bilinear Matrix Inequalities (BMI), which play a key role in stability assessment and guarantee of the modeled system.

The second part focuses on SynRM control, exploring advanced control techniques such as feedback linearization, backstepping, and robust control strategies, including Lyapunov-based reconfiguration and sliding mode control. The research emphasizes stabilization of TS fuzzy systems and performance optimization of the motor. A practical implementation is carried out through the design and implementation of a non-quadratic controller based on Lyapunov's Line Integral approach.

The controller's performance is evaluated using MATLAB simulations and experimental tests under real conditions. A comparative analysis with existing methods highlights gains in stability, robustness, and energy efficiency. These results confirm SynRM's potential as a viable alternative to conventional motors, paving the way for optimized industrial applications.

Key words: Nonlinear system, Takagi-Sugeno multi-models, Linear matrix inequalities, sector non-linearity, backstepping, robust control.

TABLE DES MATIÈRES

1	<i>État de l'Art : les systèmes non linéaires et machines à réductance</i>	4
1.1	Introduction	4
1.2	Différents types des processus	5
1.2.1	Systèmes linéaires	5
1.2.2	Systèmes non linéaires	5
1.2.3	Systèmes singuliers	8
1.2.4	Systèmes chaotiques	9
1.2.5	Systèmes à Bifurcation	11
1.2.6	Systèmes non linéaires à singularité régulière	14
1.2.7	Modèle de FitzHugh-Nagumo	14
1.3	Machines électriques	15
1.3.1	Les Machines à Courant Continu	15
1.3.2	Les machines asynchrones	16
1.3.3	Moteur à réductance commutée	17
1.3.4	Machine synchrone à aimant permanent (PMSM)	19
1.3.5	Moteur synchrone à réductance (SynRM)	20
1.4	Historique de développement	22
1.5	Principe de fonctionnement SynRM	23
1.5.1	Concept de réductance	23
1.6	Principe de fonctionnement SynRM	23
1.6.1	Concept de réductance	23
1.6.2	Fonctionnement	24

1.7	Impact du rapport de saillance L_d/L_q sur les performances de la machine	25
1.8	Types de géométrie de rotor	28
1.8.1	Rotor Massif	28
1.8.2	Rotor segmenté	29
1.8.3	Rotor avec barrières de flux	29
1.8.4	Le rotor à aimants permanents	32
1.8.5	Rotor avec assistance de supraconducteurs	32
1.9	Comparaison des types de rotors	33
1.10	Modèle dynamique du moteur synchrone à réluctance	34
1.10.1	Hypothèses de Simplification	34
1.10.2	Équations électriques d'une machine à réluctance synchrone dans le repère abc	34
1.10.3	Équations électriques du SynRM dans le référentiel $d - q$	35
1.10.4	Équations mécaniques	38
1.11	Conclusion	40
2	<i>La représentation par les systèmes flous de T-S</i>	41
2.1	Introduction	41
2.2	Importance de la Modélisation des Processus	42
2.3	Modèles flous et systèmes flous	43
2.3.1	Composants d'un système flou	43
2.3.2	Modèles Flous de Takagi-Sugeno	45
2.4	Différentes structures multi-modèles	47
2.4.1	Structure couplée	47
2.4.2	Structure découplée	50
2.4.3	Structure Hiérarchique	51
2.5	Construction d'un modèle T-S flous	52
2.6	Transformation polytopique	53
2.7	Conception du modèle Takagi-Sugeno pour la machine SynRM	56
2.8	Analyse de stabilité des systèmes flous TS	59
2.8.1	Inégalités Linéaires Matricielles	59
2.8.2	Inégalités Matricielles Bilinéaires	61
2.8.3	Conditions de stabilité	61

2.9	Conclusion	70
3	<i>Les commandes non linéaires et robustes</i>	72
3.1	Introduction	72
3.2	Méthodes de commande des systèmes non linéaires	73
3.2.1	Commande par linéarisation en régime de petit signal	74
3.2.2	Linéarisation par Rétroaction	80
3.2.3	Linéarisation de l'espace d'état	99
3.2.4	Commande par Backstepping	102
3.3	Méthodes de commandes robustes	109
3.3.1	Commande basée sur le réaménagement de Lyapunov	109
3.3.2	Commande par Mode Glissant	114
3.3.3	Backstepping Robuste	117
3.4	Stabilisation par contrôle distribué parallèle	124
3.5	Stabilisation par Retour de Sortie	133
3.5.1	Stabilisation par Retour d'État Reconstitué	135
3.6	Stabilisation quadratique et non quadratique	136
3.6.1	Théorème des valeurs moyennes différentielles	136
3.6.2	Stabilisation par retour de sortie quadratique	138
3.6.3	Stabilisation non quadratique	141
3.7	Exemple	143
3.8	Conclusion	146
4	<i>Application de la commande robuste au moteur synchrone à réluctance</i>	148

LISTE DES FIGURES

1.1	Oscillateur de Van der Pol: Portrait de phase	7
1.2	Oscillateur de Van der Pol: Position de l'oscillateur	7
1.3	Attracteur de Lorenz	10
1.4	Dynamique Prédateur-Proie de Lotka-Volterra	11
1.5	Bifurcation de Hopf: Solution Temporelle	12
1.6	Bifurcation de Hopf: Portrait de Phase	13
1.7	Modèle de FitzHugh-Nagumo: Solution Temporelle	14
1.8	Modèle de FitzHugh-Nagumo: Portrait de Phase	15
1.9	Le moteur à réductance commutée (SRM, Switched Reluctance Motor) . . .	18
1.10	Moteur Synchrone à réductance (SynRM)	20
1.11	Historique de développement SynRM[BOU23].	22
1.12	Principe de réductance [BOU23]	24
1.13	Le diagramme vectoriel du SynRM	25
1.14	la position du vecteur de courant statorique I_s par rapport à l'axe d	26
1.15	Facteur de puissance en fonction du rapport de saillance L_d/L_q	28
1.16	Différents types de rotor massifs	28
1.17	Rotor anisotrope laminé axialement (ALA)	30
1.18	Rotor anisotrope laminé radialement	31
1.19	Le rotor à aimants permanents	32
1.20	Rotor avec assistance de supraconducteurs	33
2.1	Structure de base des systèmes flous	43
2.2	Raisonnement flou de Mamdani basé sur la méthode d'inférence max-min.	44

2.3	Architecture d'un modèle TS flou	48
2.4	Architecture d'un modèle découplé	51
2.5	Architecture de la structure hiérarchique	52
2.6	Secteurs non linéaires	53
2.7	Paramètres SynRM	57
2.8	Vitesse de rotation par les multimodales floues TS	58
2.9	Les fonctions de pondération H_i	58
2.10	Erreur entre le système et le multi-modèle floue TS	58
2.11	Région de stabilité	70
3.1	Suivi de la position du bras robotique	84
3.2	Contrôle en altitude d'un quadrotor	86
3.3	Vitesse de rotation	98
3.4	Courants statoriques sur l'axes d et q	98
3.5	Les états du pendule inversé	102
3.6	Introduction du Contrôle	103
3.7	Contrôle par Backstepping à travers un Intégrateur	104
3.8	Réponse du Système avec Commande par Lyapunov Redesign	113
3.9	Trajectoires d'état du système en boucle ouverte	133
3.10	Trajectoires d'état du système sous le contrôle distribué parallèle	133
3.11	Domaine de faisabilité	144
3.12	Trajectoires d'état du système	145
3.13	Signal de commande $u(t)$	145

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le moteur à réluctance synchrone (SynRM) se distingue par sa structure robuste, dépourvue d'aimants permanents, ce qui le rend à la fois plus fiable et plus économique. Cette simplicité de conception lui confère une excellente tolérance aux défauts ainsi qu'une capacité à fonctionner efficacement dans des environnements exigeants. Son couple élevé à basse vitesse et sa réponse dynamique rapide en font une solution privilégiée pour les applications nécessitant des démarrages fréquents ou des variations importantes de charge. De plus, l'absence de pertes liées aux aimants permanents améliore significativement son rendement énergétique. Bien que son couple maximal puisse être légèrement inférieur à celui des moteurs à aimants permanents, le SynRM offre un compromis optimal entre performances, coût et fiabilité, ce qui explique son adoption croissante dans divers secteurs industriels, notamment l'automobile et les énergies renouvelables.

Cette thèse s'intéresse à l'étude approfondie des systèmes non linéaires, en particulier au moteur à réluctance synchrone (SynRM) et à sa commande. Ce domaine se situe à l'intersection de plusieurs disciplines scientifiques, telles que l'ingénierie, les mathématiques appliquées et la physique. L'objectif de cette recherche est d'explorer, développer et synthétiser des méthodologies avancées pour la modélisation, l'analyse et la commande de différents types de systèmes non linéaires et le moteur SynRM. Ces derniers jouent un rôle crucial dans une large gamme d'applications soulignant ainsi leur importance dans les technologies contemporaines. Cette thèse est composée de deux parties principales, consacrées à la modélisation et à la commande du moteur SynRM.

La première partie se focalise sur la modélisation de la machine synchrone à réluctance et comprend deux chapitres.

Dans le premier chapitre, une fondation solide est établie pour comprendre les sys-

tèmes non linéaires et les machines électriques, en particulier le SynRM. Il met en avant l'importance cruciale de la modélisation des processus et entreprend une exploration détaillée de divers types de systèmes. Il couvre non seulement les systèmes linéaires et non linéaires mais aussi les systèmes aux caractéristiques plus complexes telles que les systèmes singuliers, chaotiques, à cycles limites et à bifurcation. Ce chapitre poursuit avec une étude approfondie des types de machines électriques en se focalisant sur la SynRM, leur historique, leur principe de fonctionnement et les différentes configurations géométriques de rotor disponibles. Cette analyse conduit au développement du modèle dynamique du SynRM, intégrant ses équations électriques et mécaniques de fonctionnement.

Le deuxième chapitre se concentre sur les systèmes flous de Takagi-Sugeno, une approche raffinée pour la modélisation de systèmes complexes. Cette partie traite des éléments fondamentaux d'un système flou, des diverses structures multi-modèles, et de l'élaboration de modèles flous de type T-S. Une attention particulière est accordée à la transformation polytopique et à l'analyse de la stabilité des systèmes flous de type T-S, en intégrant des concepts avancés tels que les inégalités linéaires et bilinéaires matricielles (LMI et BMI).

La deuxième partie est consacrée à la commande de la machine synchrone à réluctance et comprend également deux chapitres.

Le troisième chapitre est consacré aux méthodes de commande et aux techniques avancées, telles que la linéarisation en régime de petit signal, la linéarisation par rétroaction et la linéarisation de l'espace d'état. Cette analyse conduit à la conception de contrôleurs sophistiqués, notamment l'implémentation de la technique du backstepping, illustrant ainsi une approche complète et innovante pour le contrôle des systèmes non linéaires. Ce chapitre traite ensuite de la commande non linéaire robuste, un aspect fondamental pour garantir la fiabilité et l'efficacité des systèmes évoluant dans des environnements incertains. Il examine en détail plusieurs stratégies avancées de commande, notamment la commande par reconfiguration de Lyapunov, la commande par mode glissant et le backstepping robuste. À travers ces approches, il est démontré que ces méthodes permettent d'améliorer considérablement la performance des systèmes non linéaires dans divers contextes. Enfin, le chapitre se conclut par une synthèse des contrôleurs destinés à la stabilisation des systèmes flous de type TS, un enjeu majeur dans le contrôle des systèmes non linéaires. Il explore plusieurs techniques avancées, notamment la stabilisation via un contrôle distribué parallèle, le retour de sortie, incluant la stabilisation par retour d'état reconstruit, ainsi

que les stratégies de stabilisation quadratique et non quadratique.

Le quatrième chapitre se focalise sur la synthèse de contrôleurs destinés à la stabilisation des systèmes TS flous, un défi majeur dans le contrôle des systèmes non linéaires. Il étudie des techniques telles que la stabilisation via un contrôle distribué parallèle, le retour de sortie, incluant la stabilisation par retour d'état reconstruit, ainsi que la stabilisation quadratique et non quadratique.

Le quatrième chapitre s'attache à l'application pratique des techniques de commande étudiées dans le Chapitre 3 à un moteur synchrone à réluctance (SynRM) modélisé sous la forme d'un multi-modèle de type Takagi-Sugeno (TS). Ce chapitre explore la conception et l'implémentation d'un contrôleur non quadratique basé sur la méthode de l'intégrale de ligne de Lyapunov. L'objectif est de démontrer l'efficacité et les performances du contrôleur sous différentes conditions de fonctionnement. Le chapitre présente ensuite une étude approfondie des résultats obtenus à travers des simulations MATLAB, suivie d'essais expérimentaux en conditions réelles. Une attention particulière est accordée à l'analyse des différentes stratégies de commande, mettant en évidence les performances du contrôleur non quadratique en termes de robustesse et de stabilité.

Afin de faciliter l'implémentation du contrôleur, le chapitre propose également un code en MATLAB, servant de guide pratique pour permettre aux lecteurs de comprendre l'algorithme de commande et de l'appliquer dans un contexte réel. Le chapitre présente ensuite les résultats de simulation obtenus lors de l'application du contrôle au système SynRM ainsi que les performances obtenue sous différentes conditions de fonctionnement.

Enfin, les résultats de simulation obtenus lors de l'application du contrôleur au système SynRM sont présentés et analysés. Une étude comparative est réalisée afin d'évaluer l'efficacité de l'approche de commande proposée par rapport aux méthodes existantes. Les conclusions tirées apportent des informations précieuses sur la précision, la robustesse et les performances globales du contrôleur basé sur l'approche non quadratique de Lyapunov dans des applications industrielles.

Modélisation de la machine synchrone à réluctance

Introduction

La transition vers des systèmes énergétiques plus durables et efficaces a suscité un intérêt croissant pour l'optimisation des machines électriques. L'amélioration de leur performance et de leur rentabilité est devenue un enjeu majeur dans de nombreux secteurs industriels. Parmi les technologies émergentes, la machine à réluctance synchrone (SynRM) se distingue par son potentiel à offrir un rendement élevé tout en réduisant la dépendance aux matériaux rares, tels que les aimants permanents.

Dans cette perspective, cette partie propose une analyse approfondie des différentes catégories de machines électriques, en mettant un accent particulier sur la SynRM. Elle explore son évolution historique, ses principes de fonctionnement ainsi que les caractéristiques influençant ses performances. Une comparaison détaillée des différentes géométries de rotor est également réalisée afin d'évaluer leurs avantages et limitations selon les applications.

Par ailleurs, la modélisation et la commande des machines électriques reposent sur des dynamiques complexes, souvent non linéaires. Cette non-linéarité pose des défis majeurs pour l'analyse de la stabilité, en raison de l'inapplicabilité du principe de superposition. Les approches traditionnelles basées sur des modèles linéaires se révèlent alors insuffisantes, nécessitant l'adoption de méthodes plus avancées.

Dans ce contexte, le modèle flou de Takagi-Sugeno (T-S) s'est imposé comme un outil fondamental pour l'approximation et l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires. En

décomposant un système global en plusieurs sous-modèles linéaires locaux, liés par des fonctions d'appartenance floues, cette approche facilite l'analyse rigoureuse de la stabilité. L'application du modèle T-S dans le cadre de la compensation parallèle-distribuée (PDC) a démontré son efficacité dans divers domaines, allant de l'aérospatial à l'optimisation des processus industriels.

Cette partie met ainsi en lumière l'importance de l'étude de la stabilité dans les systèmes électriques non linéaires, notamment à travers les outils mathématiques tels que la fonction de Lyapunov. Ces approches permettent d'établir des conditions garantissant la stabilité asymptotique des systèmes et d'analyser l'impact des incertitudes et des perturbations sur leur comportement dynamique. L'objectif est d'offrir une vision globale des défis et solutions liés à la stabilité des machines électriques modernes, ouvrant ainsi la voie à de futures améliorations dans ce domaine en pleine évolution.

Cette partie met ainsi en lumière l'importance de l'étude de la stabilité dans les systèmes électriques non linéaires, notamment à travers les outils mathématiques tels que la fonction de Lyapunov. Ces approches permettent d'établir des conditions garantissant la stabilité asymptotique des systèmes et d'analyser l'impact des incertitudes et des perturbations sur leur comportement dynamique. L'objectif est d'offrir une vision globale des défis et solutions liés à la stabilité des machines électriques modernes, ouvrant ainsi la voie à de futures améliorations dans ce domaine en pleine évolution

CHAPITRE 1

ÉTAT DE L'ART : LES SYSTÈMES NON LINÉAIRES ET MACHINES À RÉLUCTANCE

1.1 Introduction

Les systèmes non linéaires, présents dans de nombreux domaines tels que la mécanique, la chimie, l'électronique et la biologie, se caractérisent par une complexité analytique et de commande. Cette complexité découle de leur nature non linéaire et de l'inapplicabilité du principe de superposition. Par conséquent, les méthodes traditionnelles de commande, basées sur des modèles linéaires, s'avèrent souvent inadéquates, nécessitant ainsi le développement de nouvelles approches adaptées.

Au cours des dernières années, la demande pour des machines électriques à la fois économes en énergie et rentables a connu une augmentation significative, portée par des préoccupations environnementales croissantes et un besoin pressant de solutions énergétiques durables. Ce chapitre vise à fournir un aperçu des différentes machines électriques, en mettant l'accent sur la machine à réluctance synchrone (SynRM).

Le chapitre débute par une introduction aux principales catégories de machines électriques, notamment les machines à courant continu (DC), les machines asynchrones ou à induction (IM), les machines à réluctance commutée (SRM) et les machines synchrones à aimants permanents (PMSM). Ensuite, il explore en profondeur l'évolution historique des SynRM, en analysant leurs principes de fonctionnement fondamentaux et les différentes configurations de géométrie de rotor disponibles.

Un point clé de ce chapitre est l'analyse de l'influence du paramètre L_d/L_q , un facteur déterminant pour les performances globales de la machine, qui impacte directement son efficacité et son comportement en fonctionnement. Une comparaison approfondie des types

de rotors est également réalisée pour mettre en lumière leurs avantages, inconvénients et domaines d'application spécifiques.

En outre, le chapitre développe un modèle dynamique détaillé des moteurs à réluctance synchrone, intégrant les équations électriques et mécaniques nécessaires pour comprendre leur fonctionnement. Enfin, le chapitre se conclut par un résumé des points clés abordés, en insistant sur les défis actuels et les opportunités de développement futur dans le domaine des machines électriques. Il ouvre ainsi des perspectives pour la conception et l'utilisation de technologies plus performantes.

1.2 Différents types des processus

1.2.1 Systèmes linéaires

Un système linéaire est représentable par des équations différentielles linéaires ou des équations aux différences dans le cas de systèmes discrets. Pour un système linéaire continu, la représentation en équations d'état est :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Où $x(t)$ est le vecteur d'état, $u(t)$ est le vecteur d'entrée, $y(t)$ est le vecteur de sortie, et A, B, C, D sont des matrices de coefficients constants qui caractérisent le système.

1.2.2 Systèmes non linéaires

Les systèmes non linéaires, où la relation entrée-sortie n'est pas linéaire, ne suivent pas le principe de superposition. Ils peuvent comporter des termes exponentiels, logarithmiques, trigonométriques ou des produits des variables d'état et d'entrée [SL⁺91, Tay94, Oud08].

La modélisation par variables d'état, une méthode efficace pour représenter les processus industriels, implique de choisir des variables significatives physiquement pour décrire le processus. Le modèle en espace d'état se construit via des équations différentielles et algébriques, formant un modèle mathématique qui reflète le comportement du processus physique. Ces modèles sont exprimés par les fonctions f et g , reliant l'état, l'entrée et la sortie, et illustrant la dynamique du système ainsi que ses relations de sortie.

La représentation conventionnelle des systèmes non linéaires est :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.2)$$

Où f désigne la fonction d'état du système, décrivant l'évolution temporelle du vecteur d'état $x(t)$ en fonction de l'entrée $u(t)$. Cette fonction caractérise la dynamique intrinsèque du système. Par ailleurs, g est la fonction de sortie qui établit la correspondance entre le vecteur d'état $x(t)$ et l'entrée $u(t)$ avec la sortie mesurée $y(t)$. Elle spécifie la manière dont les états du système sont mesurés.

Caractéristiques des systèmes non linéaires

Les systèmes non linéaires présentent des caractéristiques distinctives, notamment :

- **Non Proportionnalité** : La sortie n'est pas proportionnelle à l'entrée, indiquant une relation complexe entre ces deux variables.
- **Effets de Seuil** : Comportements spécifiques tels que l'hystérésis, où la réponse du système est influencée par son historique.
- **Points d'Équilibre Multiples** : Ces systèmes peuvent présenter plusieurs états stables, contrairement aux systèmes linéaires qui en ont généralement un seul.
- **Bifurcations** : Ils subissent des changements qualitatifs dans leur comportement dynamique en réponse à des variations de paramètres spécifiques.
- **Phénomènes Chaotiques** : Une sensibilité extrême aux conditions initiales peut entraîner des comportements imprévisibles sur des périodes prolongées, caractéristique du chaos.

Exemples de systèmes non linéaires

1. **Oscillateur de Van der Pol**: Un circuit électrique qui illustre des oscillations auto-entretenues non linéaires.

$$\ddot{x} = \mu(1 - x^2)\dot{x} - x \quad (1.3)$$

Où μ est un paramètre non linéaire.

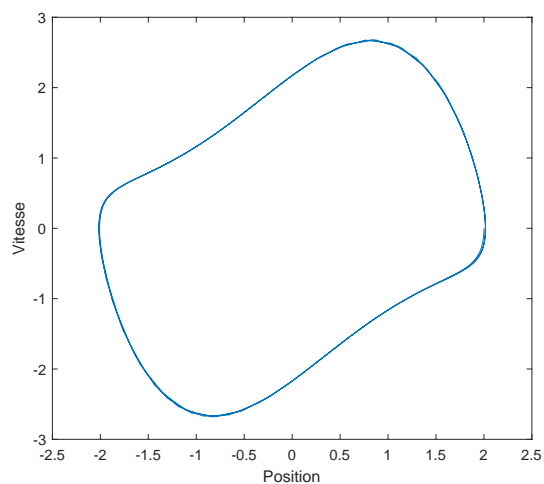


Fig 1.1: Oscillateur de Van der Pol: Portrait de phase

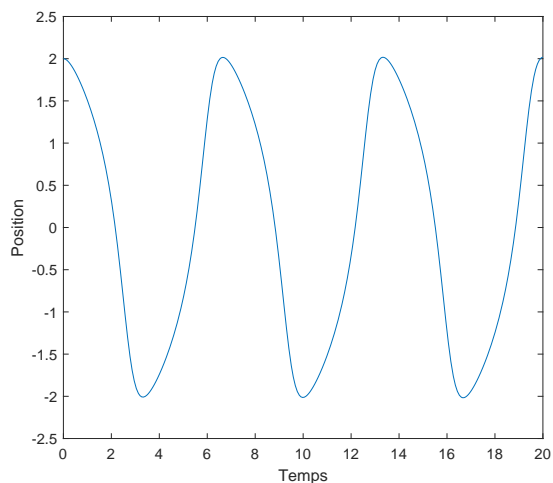


Fig 1.2: Oscillateur de Van der Pol: Position de l'oscillateur

2. **Pendule Simple:** Un exemple classique d'un système mécanique non linéaire en raison de la dépendance sinusoidale de la force gravitationnelle.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0 \quad (1.4)$$

Où θ est l'angle de déplacement, g est l'accélération due à la gravité et l est la longueur du pendule.

3. **Réacteur Chimique:** Les réactions chimiques sont souvent non linéaires, avec des taux qui dépendent des concentrations de manière non linéaire.

$$\frac{d[A]}{dt} = k[A]^n \quad (1.5)$$

Où $[A]$ est la concentration du réactif, k est la constante de vitesse et n est l'ordre de la réaction.

1.2.3 Systèmes singuliers

Les systèmes singuliers, également connus sous le nom de systèmes différentiels-algébriques (DAE), intègrent à la fois des équations différentielles et des équations algébriques. On les retrouve fréquemment dans des domaines variés tels que l'électronique, la mécanique et la robotique [Zer11, Ham12].

Caractéristiques des systèmes singuliers

Les systèmes singuliers se distinguent par plusieurs caractéristiques notables :

- **Contraintes algébriques sur les variables d'état** : Ces systèmes imposent des relations algébriques spécifiques entre les variables d'état, influençant ainsi leur dynamique.
- **Indice de DAE** : Cet indice mesure la complexité associée à la résolution des systèmes DAE, reflétant la difficulté de séparer et résoudre les composantes différentielles et algébriques.
- **Sensibilité aux conditions initiales** : Les solutions de ces systèmes peuvent présenter une dépendance particulière vis-à-vis des conditions initiales, influençant de manière significative leur comportement global.

Exemples de systèmes singuliers

1. **Circuits Électriques** Dans un circuit contenant des condensateurs et des inducteurs, on peut rencontrer des équations différentielles liées aux lois de Kirchhoff et des équations algébriques découlant de la loi d'Ohm.

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V(t) \\ C \frac{dV(t)}{dt} = i(t) - \frac{V(t)}{R} \end{cases} \quad (1.6)$$

Où L est l'inductance, R est la résistance, C est la capacité, $i(t)$ est le courant, et $V(t)$ est la tension.

On peut écrire la dynamique du circuit sous forme d'un système d'état, où l'on introduit une matrice dépendante du temps $E(t)$ qui peut être singulière :

$$\begin{cases} E(t)\dot{x}(t) = H(x(t), u(t)) \\ y(t) = J(x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.7)$$

Avec H et J représentant des fonctions des vecteurs d'état $x(t)$, d'entrée $u(t)$, et du temps t . Lorsque H et J sont linéaires par rapport à $x(t)$ et $u(t)$, nous obtenons le système singulier linéaire suivant :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

Ici, E , A , B , et C sont des matrices réelles, constantes et de dimensions appropriées.

Si la matrice E est inversible, nous pouvons alors réécrire le système sous une forme standard :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = E^{-1}Ax(t) + E^{-1}Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1.9)$$

2. **Robotique** Les robots qui manipulent des objets sont souvent modélisés par des DAE, combinant la dynamique des moteurs et les contraintes mécaniques.

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau \\ J(q)\dot{q} = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Ici, $M(q)$ est la matrice d'inertie, $C(q, \dot{q})$ représente les forces de Coriolis, $g(q)$ les forces gravitationnelles, τ les couples moteurs, $J(q)$ la matrice jacobienne des contraintes, et q les coordonnées généralisées.

1.2.4 Systèmes chaotiques

Les systèmes chaotiques sont des systèmes dynamiques déterministes qui, malgré leur nature prévisible, manifestent un comportement imprévisible sur le long terme en raison

de leur extrême sensibilité aux conditions initiales. Ces systèmes se caractérisent par des attracteurs étranges, une structure fractale des bassins d'attraction, et un comportement mêlé dans l'espace des phases [Rob21].

Exemples de systèmes chaotiques

1. **Attracteur de Lorenz** est l'un des exemples les plus célèbres de comportement chaotique, qui est modélisé par les équations différentielles suivantes:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z. \end{cases} \quad (1.11)$$

Où σ , ρ , et β sont des paramètres du système.

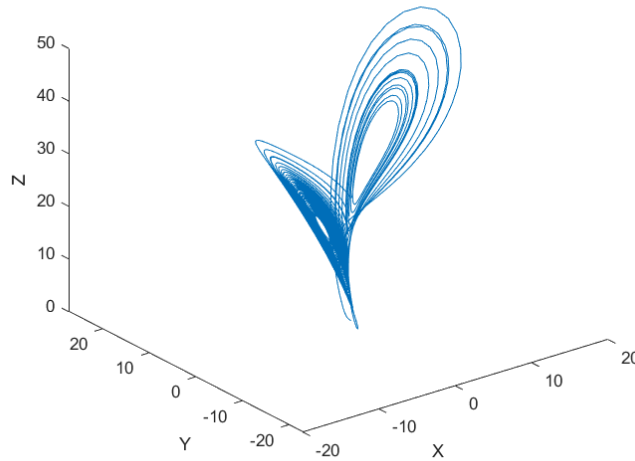


Fig 1.3: Attracteur de Lorenz

2. **La Carte Logistique** Un autre exemple classique de chaos déterministe est la carte logistique, qui est une équation de récurrence définie par :

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (1.12)$$

Où r est le taux de reproduction.

Exemples de systèmes à cycles limites

1. Oscillateur de Van der Pol

est un système non linéaire qui présente un cycle limite caractéristique pour certaines valeurs de paramètres.

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (1.13)$$

Où μ est un paramètre qui contrôle le degré de non-linéarité.

2. Modèles prédateur-proie de Lotka-Volterra

Les modèles de Lotka-Volterra décrivent les interactions prédateur-proie et sont connus pour leurs cycles limites dans l'espace des phases.

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy, \\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y. \end{cases} \quad (1.14)$$

Où x et y sont les populations de proies et de prédateurs, respectivement, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des paramètres qui régissent les interactions.

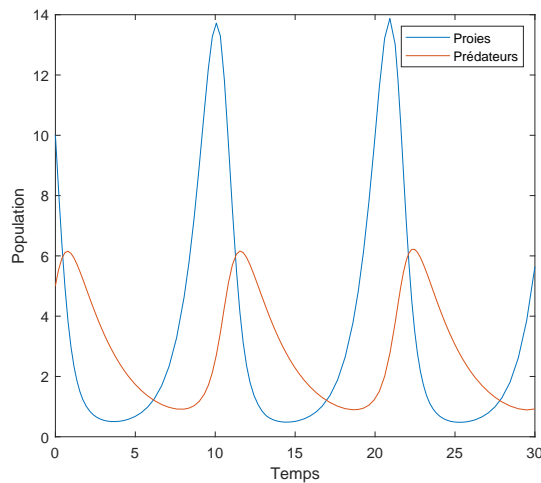


Fig 1.4: Dynamique Prédateur-Proie de Lotka-Volterra

1.2.5 Systèmes à Bifurcation

Les systèmes à bifurcation représentent un concept fondamental en théorie des systèmes dynamiques et en mathématiques. Ils caractérisent le comportement d'un système qui subit des changements qualitatifs dans sa structure dynamique en réponse à des variations

de paramètres. Ces bifurcations jouent un rôle clé dans l'analyse de la stabilité et la dynamique des systèmes [Ngu00].

1. **Bifurcation de Hopf** : La bifurcation de Hopf survient dans les systèmes dynamiques continus et peut entraîner la création ou la disparition de cycles limites (oscillations). Ce phénomène se manifeste lorsque des changements dans les paramètres du système provoquent une transition de la stabilité d'un point fixe, menant à l'émergence ou à l'extinction d'oscillations périodiques.

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - \omega y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = \omega x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (1.15)$$

Ici, μ et ω sont des paramètres du système.

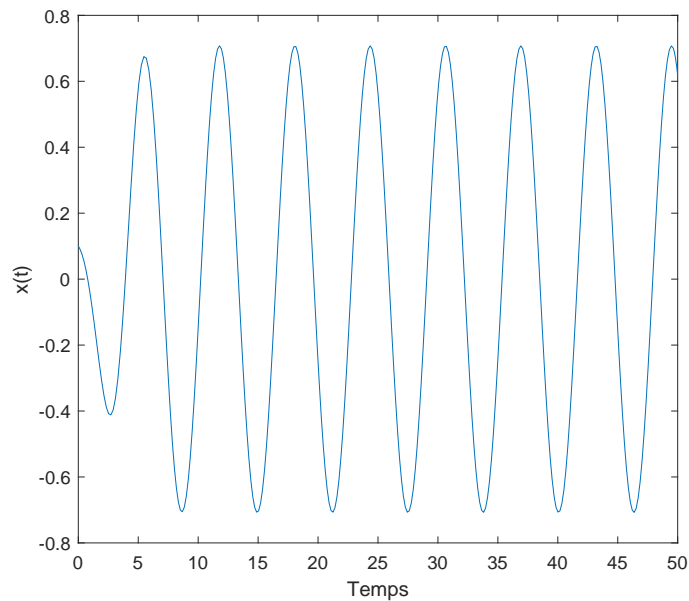


Fig 1.5: Bifurcation de Hopf:Solution Temporelle

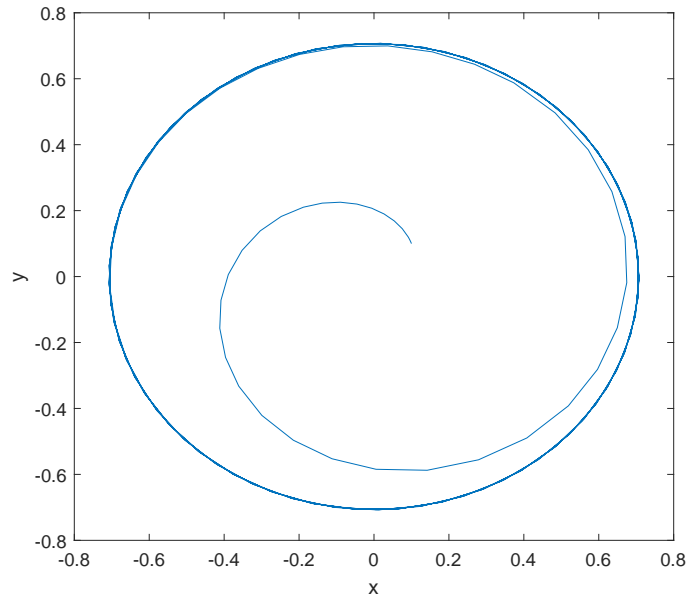


Fig 1.6: Bifurcation de Hopf: Portrait de Phase

2. **Bifurcation de Pitchfork** La bifurcation de Pitchfork est courante dans les systèmes symétriques. Elle peut être supercritique (stable) ou sous-critique (instable).

$$\dot{x} = rx - x^3 \quad (1.16)$$

r est le paramètre de bifurcation.

3. **Bifurcation de Selle-Noeud** Ce type de bifurcation se caractérise par la collision et l'annihilation d'un point fixe stable et d'un point fixe instable.

$$\dot{x} = r + x^2 \quad (1.17)$$

Ici aussi, r est le paramètre de bifurcation.

4. **Bifurcation Transcritique** Dans ce cas, deux points fixes échangent leur stabilité en traversant l'un l'autre.

$$\dot{x} = rx - x^2 \quad (1.18)$$

Le paramètre r contrôle la bifurcation.

Ces systèmes montrent comment de petits changements dans les paramètres peuvent conduire à des changements drastiques dans le comportement d'un système dynamique. Les bifurcations sont fondamentales pour comprendre des phénomènes

complexes comme le chaos, les oscillations dans les systèmes biologiques, ou les transitions de phase en physique.

1.2.6 Systèmes non linéaires à singularité régulière

Les systèmes non linéaires à singularité régulière, également connus sous le nom de systèmes à singularité pliée, forment une classe spécifique de systèmes dynamiques. Dans ces systèmes, le comportement change de manière qualitative à proximité d'un point singulier. Ils sont couramment étudiés dans le cadre de la théorie des bifurcations et de la dynamique des systèmes non linéaires.

Un point singulier régulier se définit comme un point dans l'espace des phases où la linéarisation du système dynamique n'est pas applicable. Cela se produit généralement lorsque la matrice jacobienne du système devient singulière, c'est-à-dire que son déterminant est nul en ce point. Cette particularité engendre une gamme de comportements dynamiques complexes et intrigants, y compris des bifurcations, des cycles limites et divers autres phénomènes non linéaires.

1.2.7 Modèle de FitzHugh-Nagumo

Ce modèle, utilisé pour décrire le comportement des neurones, est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{v} = v - \frac{v^3}{3} - w + I \\ \dot{w} = \epsilon(v + a - bw) \end{cases} \quad (1.19)$$

Où I, a, b , et ϵ sont des paramètres.

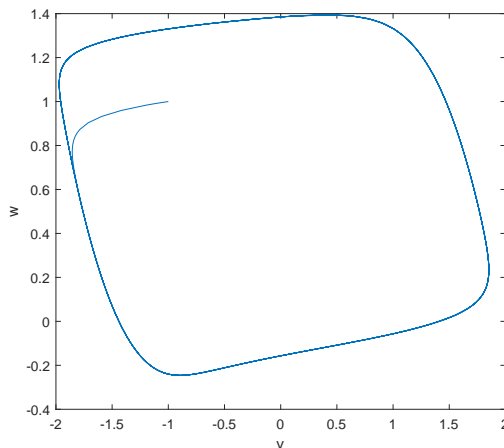


Fig 1.7: Modèle de FitzHugh-Nagumo: Solution Temporelle

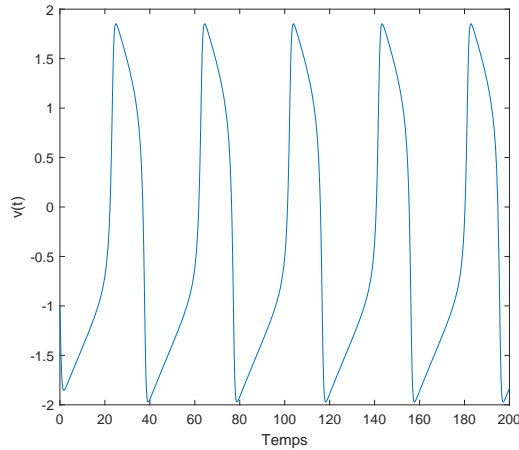


Fig 1.8: Modèle de FitzHugh-Nagumo: Portrait de Phase

1.3 Machines électriques

Les machines électriques, essentielles à la conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique et vice versa, sont classées en plusieurs types, notamment les machines à induction (IM), les machines synchrones à aimants permanents (PMSM), les machines à réluctance commutée (SRM) et les machines à réluctance synchrone (SynRM).

1.3.1 Les Machines à Courant Continu

Depuis leur invention, les machines à courant continu ont été largement utilisées dans diverses applications, grâce à leur simplicité et polyvalence. Elles restent une option attrayante pour les applications à vitesse réglable en raison de leurs propriétés bien établies telles que :

- *Simplicité de contrôle,*
- *Régulation de vitesse efficace,*
- *Capacité de démarrages fréquents,*
- *Facilité de freinage et de changement de sens,*
- *Caractéristiques adéquates couple-vitesse.*

Le principe de fonctionnement d'une machine à courant continu est simple, reposant sur l'interaction entre le flux d'induit, déterminé par la tension d'entrée et la force

électromotrice (FEM) inverse, et le flux d'induit créé par le courant d'excitation ou le matériau magnétique. Il existe quatre types de moteurs à courant continu à excitation bobinée en fonction de l'interconnexion entre les enroulements d'induit et d'excitation : à excitation indépendante, à excitation shunt, à excitation série et à excitation compound.

Les machines à courant continu à excitation indépendante, contrôlées par hacheur DC-DC, combinent les avantages d'une grande flexibilité de contrôle, d'un rendement élevé et d'une réponse dynamique rapide, ce qui en fait des candidats idéaux pour les applications de traction. Néanmoins, leur principal inconvénient réside dans la présence d'un commutateur mécanique, qui nécessite un entretien régulier et limite leur durée de vie, réduisant ainsi leur fiabilité globale et augmentant les coûts d'exploitation sur le long terme.

Malgré les limitations associées à l'ensemble commutateur-brosse, qui nécessite un entretien supplémentaire et l'inadéquation pour les applications de moyenne puissance, les machines à courant continu trouvent encore leur place dans de nombreuses applications de faible puissance, comme les actionneurs d'obturateur qui régulent le débit d'air dans divers systèmes. où la simplicité du convertisseur en H compense leurs inconvénients [BOU23]

En conclusion, les machines à courant continu constituent une solution simple, mature et polyvalente pour des applications nécessitant une vitesse ajustable et une performance fiable. Cependant, la présence du collecteur impose un entretien régulier, ce qui limite leur adéquation pour les applications à haute puissance et réduit leur efficacité globale et leur fiabilité.

1.3.2 Les machines asynchrones

Les machines asynchrones (IM, Induction Machines) sont devenues un choix populaire dans diverses industries grâce à leurs nombreux avantages par rapport aux entraînements classiques à commutateur courant continu. Ces avantages, particulièrement importants pour une vaste gamme d'applications, incluent : une haute efficacité, un coût réduit, une densité de puissance élevée, la robustesse et la fiabilité, et une capacité à fonctionner dans des environnements hostiles.

En tant que machine à courant alternatif avec une topologie asynchrone, la machine à induction se distingue par un champ statorique et un champ rotorique tournant à des vitesses différentes. Ce décalage, connu sous le nom de glissement, généralement faible,

influence la puissance de sortie et le couple développé par la machine. Les machines asynchrones peuvent être divisées en deux types principaux

- **Rotor en cage d'écureuil**, le plus courant et largement utilisé dans les applications de traction.
- **Rotor bobiné**, moins populaire en raison de son coût plus élevé et de ses besoins en maintenance.

Les machines asynchrones à rotor en cage sont massivement produites et disponibles dans une large gamme de puissances. Elles nécessitent peu d'entretien et présentent un taux de défaillance très faible. Ces caractéristiques en font un choix privilégié pour diverses applications. Un des avantages majeurs de ces machines est leur capacité à fonctionner sur une large plage de variations vitesse en régime de puissance constante, avec un ratio vitesse maximale/vitesse minimale pouvant atteindre de 1 à 5.

Les machines asynchrones à double alimentation, dotées d'un rotor bobiné, sont équipées d'un stator couplé à un transformateur et d'un rotor connecté à un convertisseur statique. Elles sont couramment utilisées dans la production d'énergie éolienne à vitesse variable. Bien qu'elles présentent certains inconvénients, tels que: la dissipation de puissance dans les éléments résistifs et une robustesse réduite en raison de la présence du système de bagues et de balais, ces machines offrent des avantages significatifs en matière de fonctionnement à vitesse variable, ce qui les rend attractives pour divers fabricants et applications spécifiques

En conclusion les machines asynchrones, et en particulier celles à rotor en cage, représentent une solution efficace, robuste et économique pour de nombreuses applications industrielles. Leur capacité à fonctionner avec un entretien minimal et une large plage de vitesses en régime constant en fait un choix incontournable dans des secteurs variés, notamment dans les systèmes de traction et la production d'énergie renouvelable.

1.3.3 Moteur à réluctance commuté

Les machines à réluctance commutée (SRM, Switched Reluctance Machines) suscitent un intérêt croissant dans diverses applications grâce à leur conception unique et à l'absence d'aimants permanents. Les SRM présentent une conception de stator unique, utilisant un contrôle pas à pas pour générer un couple, ce qui se traduit par une puissance spécifique

élevée et des capacités à haute vitesse. Leur structure robuste, composée principalement d'acier dans le rotor, renforce leur attrait.

Les SRM sont des moteurs à excitation simple et à double saillance, dotés d'enroulements concentriques simples sur le stator (chaque dent porte un enroulement) et d'un rotor sans enroulements, ni aimants, ni commutateurs ou balais. Le nombre de pôles du stator et du rotor doit être différent. En règle générale, le nombre de pôles du stator est supérieur à celui du rotor. Une combinaison typique est de 6/4 (c'est-à-dire 6 pôles de stator et 4 pôles de rotor). Le moment d'inertie du rotor permet une réponse dynamique rapide et une accélération rapide. De plus, les SRM présentent un couple de démarrage élevé et un rapport couple/inertie élevé.

Parmi les avantages des SRM, on peut citer le faible coût, une fabrication relativement simple, une large plage de vitesse, un rendement élevé, une structure simple et robuste, simplicité de contrôle, capacité de fonctionnement à haute vitesse, un fonctionnement tolérant aux défauts et un refroidissement facile avec une insensibilité aux températures élevées. Ces qualités rendent les SRMs attractifs pour des applications nécessitant une grande robustesse, comme les environnements industriels difficiles.

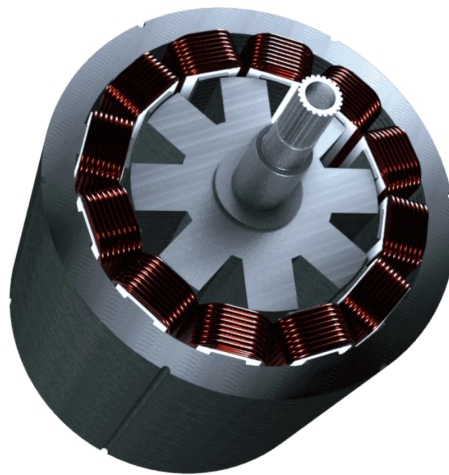


Fig 1.9: Le moteur à réluctance commuté (SRM, Switched Reluctance Motor)

Cependant, les SRM présentent plusieurs inconvénients qui peuvent limiter leur adoption dans certaines applications. Ces problèmes techniques comprennent un couple ondulateur élevé, la génération de bruit acoustique et la génération de bruit d'interférence électromagnétique (EMI). De plus, les SRM nécessitent des convertisseurs avec une topologie spéciale pour leur fonctionnement et contrôle, ce qui peut poser des défis en termes de

coûts et de compatibilité.

1.3.4 Machine synchrone à aimant permanent (PMSM)

Les machines synchrones à aimants permanents (MSAP) ont gagné une attention significative dans diverses applications en raison de leur haut rendement, leur haute densité de puissance et leurs faibles besoins d'entretien. Les MSAP peuvent être classées en deux configurations principales en fonction de l'emplacement des aimants permanents : à aimants permanents internes (IPM) et à aimants permanents à surface montée (SPM). Les IPM offrent une meilleure capacité de surcharge et une robustesse mécanique, tandis que les SPM ont généralement des structures moins complexes.

Les avantages des MSAP incluent un haut rendement, une large plage de vitesse, un faible bruit, l'absence de pertes Joule dans le rotor, un encombrement réduit, une réponse rapide du couple et un faible entretien. Ces caractéristiques en font un choix idéal pour des applications exigeantes, telles que la traction électrique, les énergies renouvelables, et l'automatisation industrielle.

Cependant, ces machines présentent également certains inconvénients. Les MSAP ont une plage de vitesse à puissance constante plus limitée, La vitesse maximale est souvent environ deux fois la vitesse nominale. Une augmentation de la vitesse au-delà de la vitesse de base s'accompagne d'un affaiblissement du flux de l'aimant permanent, ce qui entraîne une réduction de l'efficacité de la machine. La présence d'aimants permanents, en particulier ceux situés dans le rotor, les rend très sensibles aux variations de température, ce qui peut entraîner une perte de performances ou une démagnétisation à haute température. Le coût des aimants permanents à haute température comme le samarium-cobalt (Sm-Co) reste élevé. De plus, La fragilité des aimants rend certaines structures mécaniques plus complexes à concevoir et à fabriquer.

Les MSAP à terres rares Fournissent des champs de haute intensité dans l'entrefer sans besoin d'excitation, offrant une haute densité de puissance. Cependant, ils sont sensibles à la température et vulnérables à la démagnétisation à haute température. *Les MSAP sans terres rares*, qui utilisent des matériaux ayant des densités de champ rémanent plus faibles, peuvent constituer une alternative plus économique, mais cette technologie n'est pas encore largement utilisée.

Les machines synchrones à excitation externe (MSAE) ne contiennent pas d'aimants

permanents et nécessitent une conversion DC/DC supplémentaire pour l'excitation du rotor. Bien que ces machines aient une structure robuste et puissent atteindre des vitesses élevées, elles présentent également des pertes Joule plus élevées dans les enroulements du rotor, nécessitant un système de dissipation thermique.

1.3.5 Moteur synchrone à réluctance (SynRM)

Les moteurs à réluctance synchrone (SynRM) représentent une alternative intéressante aux moteurs à courant continu et à induction. Leur fonctionnement repose sur le principe de réluctance magnétique : le rotor tend à s'aligner dans la position où la réluctance magnétique du circuit magnétique est minimale. Cette variation de réluctance, combinée à l'alimentation en courant sinusoïdal du stator, engendre un couple électromagnétique qui entraîne la rotation du rotor. Elles se distinguent par rapport aux machines à réluctance commutée (SRM) par leur alimentation en courants sinusoïdaux, qui crée un champ magnétique rotatif.

Elles ont une structure robuste avec un stator ressemblant à celui d'un moteur asynchrone et un rotor sans aimants ni enroulements en cuivre. Ces machines ont le potentiel d'être une solution à faible coût pour diverses applications. La simplicité de leur structurer

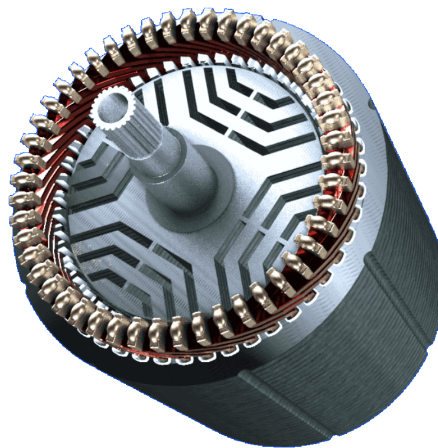


Fig 1.10: Moteur Synchrone à reluctance (SynRM)

confère aux SynRM une grande robustesse et un coût de fabrication réduit. Ils présentent également un rendement élevé et une bonne densité de puissance, particulièrement à haute vitesse. Grâce ces avantages, les moteurs SynRM offrent un potentiel de solution économique efficace pour une gamme d'applications industrielles et commerciales, où leur efficacité énergétique en font un choix de plus en plus prisé. Cependant, leur couple de

démarrage peut être limité et leur contrôle nécessite des algorithmes spécifiques pour assurer une bonne dynamique.

Leur robustesse et leur tolérance aux surcharges en font des candidats de choix pour les environnements industriels sévères. De plus, l'absence d'aimants permanents les rend moins sensibles aux températures élevées et aux champs magnétiques extérieurs. Les recherches actuelles portent notamment sur l'amélioration des performances des SynRM en termes de couple, de bruit et d'efficacité.

Avantages des SynRM:

- *Faible coût de fabrication.*
- *Rendement élevé grâce à l'absence de pertes Joule dans le rotor.*
- *Insensibilité à la température de fonctionnement.*
- *Topologie identique pour les circuits d'alimentation du stator et de l'onduleur aux moteurs asynchrones.*
- *Capacité de surcharge de courte durée.*
- *Structure simple et robuste.*
- *Fiabilité.*

Cependant, les SynRM présentent également quelques inconvénients :

- *Faible facteur de puissance.*
- *Plage de vitesse limitée.*
- *Ondulation de couple.*

La géométrie du rotor joue un rôle crucial dans la conception et l'optimisation des machines à réluctance synchrone pour diverses applications. Malgré les inconvénients, l'intérêt pour les moteurs synchrone à réluctance augmente rapidement en raison de leur potentiel à fournir des caractéristiques de performance similaires à celles des moteurs à induction et des moteurs à courant continu sans balais, mais à un coût inférieur [BOU23].

1.4 Historique de développement

Les origines des moteurs à réductance synchrone remontent aux années 1930, lorsque les chercheurs ont commencé à étudier les moteurs synchrones à pôles saillants non excités pour des applications nécessitant une vitesse précise et constante ainsi qu'un démarrage autonome. Bien que prometteurs, ces premiers modèles souffraient de performances limitées (faible facteur de puissance et faible rendement). Cependant, les années 1960 ont marqué un tournant et des avancées significatives avec l'émergence de nouvelles conceptions de rotor segmenté, de barrière de flux et de rotor laminé axialement, notamment en Angleterre et en France, visant à améliorer le rapport de saillance et la densité de couple. Depuis lors, les SynRM ont connu un développement continu, bénéficiant des progrès de l'électronique de puissance et des techniques de commande.

Le SynRM est aujourd'hui attractif grâce à sa simplicité de conception, son efficacité et ses faibles coûts de fabrication. Bien que des défis comme la réduction du bruit et l'optimisation de l'efficacité persistent, ces moteurs gagnent du terrain dans divers secteurs modernes, notamment dans l'industrie textile et des véhicules électriques. Ces améliorations nécessitent un travail constant en recherche et développement pour perfectionner les méthodes de conception et les techniques de contrôle.

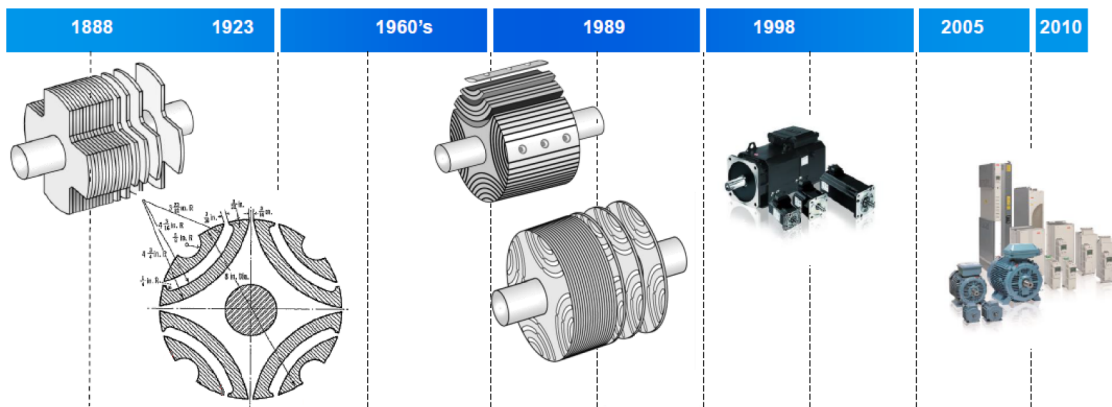


Fig 1.11: Historique de développement SynRM[BOU23].

1.5 Principe de fonctionnement SynRM

1.5.1 Concept de réluctance

Le principe de fonctionnement de SynRM repose sur :

- *l'effet de réluctance.*
- *L'application d'une force rotative générée par le stator.*

Le principe de réluctance est illustré à la Figure (1.12). Les objets (*a*) et (*b*) sont constitués d'un matériau magnétique et sont exposés à un champ magnétique imposé Ψ .

- L'objet (*a*), isotrope, présente des réluctances identiques selon les axes *d* et *q* . Par conséquent, aucun couple n'est produit.
- En revanche, l'objet (*b*) est anisotrope, ce qui implique que ses réluctances diffèrent sur les axes *d* et *q*. Lorsque l'axe *d* de l'objet (*b*) forme un angle de désalignement ε avec le champ magnétique Ψ , cela introduira une distorsion de champ qui est alignée avec l'axe *q* et augmentera la réluctance dans l'axe *d* et par conséquent une énergie potentielle électromagnétique est créée qui peut développer un couple électromécanique T_e agit de manière à forcer l'objet à s'aligner avec la réluctance minimale dans la direction du champ Ψ .

1.6 Principe de fonctionnement SynRM

1.6.1 Concept de réluctance

Le principe de fonctionnement de SynRM repose sur :

- *l'effet de réluctance.*
- *L'application d'une force rotative générée par le stator.*

Le principe de réluctance est illustré à la Figure (1.12). Les objets (*a*) et (*b*) sont constitués d'un matériau magnétique et sont exposés à un champ magnétique imposé Ψ .

- L'objet (*a*), isotrope, présente des réluctances identiques selon les axes *d* et *q* . Par conséquent, aucun couple n'est produit.

- En revanche, l'objet (b) est anisotrope, ce qui implique que ses réluctances diffèrent sur les axes d et q . Lorsque l'axe d de l'objet (b) forme un angle de désalignement ε avec le champ magnétique Ψ , cela introduira une distorsion de champ qui est alignée avec l'axe q et augmentera la réluctance dans l'axe d et par conséquent une énergie potentielle électromagnétique est créée qui peut développer un couple électromécanique T_e agit de manière à forcer l'objet à s'aligner avec la réluctance minimale dans la direction du champ Ψ .

Dans le cas de SynRM, ce même principe de variation de résistance créera le couple. Le rotor essaiera de s'aligner avec le champ magnétique créé par les bobines du stator. Comme le stator a une force rotative, le rotor tournera également en générant le mouvement.

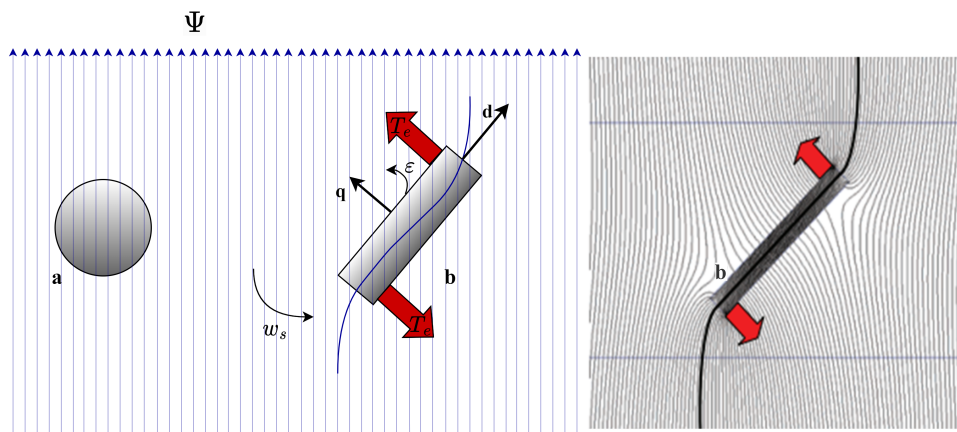


Fig 1.12: Principe de réluctance [BOU23]

1.6.2 Fonctionnement

Le SynRM est un type de moteur électrique qui fonctionne avec le principe du couple de réluctance. Il possède un stator avec des enroulements qui produisent un champ magnétique rotatif, similaire à celui d'un moteur asynchrone. Il est constitué d'un enroulement triphasé à p paires de pôles, qui est alimenté par un système de courant triphasé équilibré et distribué de manière à créer une force magnétomotrice rotative aussi sinusoïdale que possible w_s . Cependant, contrairement à un moteur synchrone à pôles saillants classique, le SynRM n'a pas d'enroulement d'excitation dans le rotor. Le rotor est construit uniquement de pôles saillants utilisant des entrefers et des segments en acier conçu avec une forme spéciale pour induire un couple par réluctance. Cette anisotropie géométrique du rotor lui permet de suivre en permanence le champ rotatif en régime permanent, ce qui donne un moteur

très efficace qui fournit un couple élevé et un contrôle précis à faible vitesse.

1.7 Impact du rapport de saillance L_d/L_q sur les performances de la machine

L'un des paramètres les plus critiques pour évaluer les performances d'un SynRM est le rapport de saillance, donné par l'équation :

$$\zeta = \frac{L_d}{L_q} \quad (1.20)$$

Pour concevoir un SynRM à hautes performances, l'objectif principal est d'obtenir une valeur L_d élevée et une valeur L_q faible, ce qui entraîne un flux maximal dans l'axe d et un flux minimal dans l'axe q . Le diagramme vectoriel est un outil essentiel pour visualiser et comprendre les principes de fonctionnement et les caractéristiques de performance du SynRM.

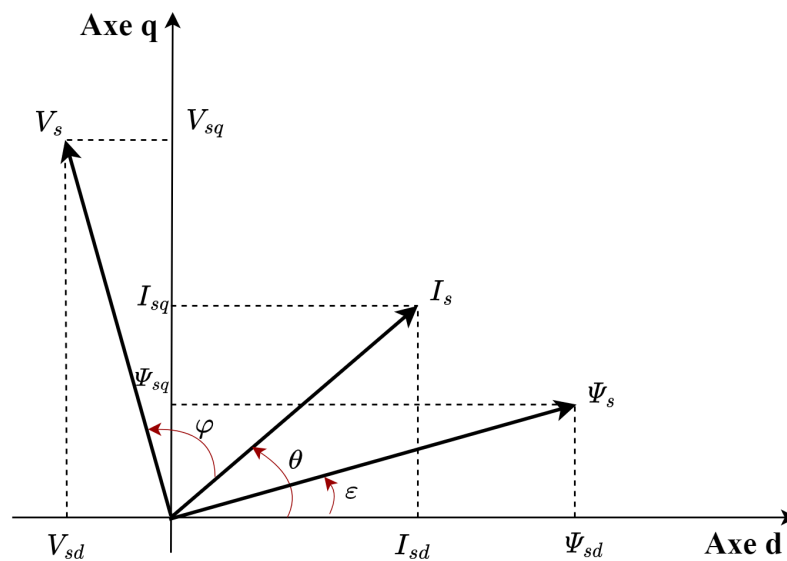


Fig 1.13: Le diagramme vectoriel du SynRM

Les composantes de l'axe d et de l'axe q du flux magnétique au niveau du rotor sont distinguées dans le diagramme vectoriel, l'axe d représentant le chemin à haute réluctance et l'axe q correspondant au chemin à faible réluctance. Le couple est généré en modifiant la réluctance entre ces axes. Dans le diagramme vectoriel, le vecteur de courant du stator est décomposé en ses composantes d'axe d et d'axe q , qui jouent un rôle crucial dans la

détermination de la production de couple et des performances globales du moteur.

Le couple électromagnétique produit par cette machine en régime permanent s'exprime comme suit:

$$T_e = n_p \cdot (L_d - L_q) \cdot I_{sq} \cdot I_{sd} \quad (1.21)$$

Dans l'équation (1.21), n_p désigne le nombre de paires de pôles, tandis que I_{sd} et I_{sq} représentent les composantes du courant statorique dans le cadre $d - q$ lié au rotor. Les inductances du stator d'axe d et q sont représentées respectivement par L_d et L_q . Pour augmenter le couple sans modifier la valeur du courant, il faut augmenter la différence entre l'inductance d'axe direct L_d et l'inductance d'axe quadrature L_q . En d'autres termes, pour augmenter le couple, il faut augmenter le rapport de saillance ζ .

L'angle θ , qui identifie la position du vecteur de courant statorique I_s par rapport à l'axe d (angle de courant), est représenté sur la figure (1.14). Le vecteur de courant statorique reste fixe en régime permanent.

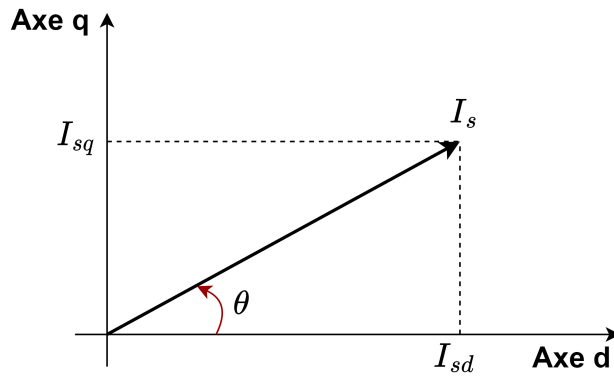


Fig 1.14: la position du vecteur de courant statorique I_s par rapport à l'axe d

L'amplitude du courant du stator est déterminée par l'équation suivante :

$$I_s = \sqrt{I_{sq}^2 + I_{sd}^2} \quad (1.22)$$

Le couple électromagnétique peut être exprimé en termes de θ et de courant I_s :

$$T_e = \frac{1}{2} n_p \cdot (L_d - L_q) I_s^2 \cdot \sin 2\theta \quad (1.23)$$

À partir des relations précédentes, il peut être démontré que lorsque le courant statorique est réglé sur une valeur spécifique, le couple maximal est atteint à $\theta = \pi/4$, correspondant

à $I_{sd} = I_{sq}T_e$, le mode de fonctionnement associé à une stratégie de contrôle particulière. En définissant $\theta = \pi/4$ à l'équation (1.23), l'équation (1.24) est obtenue:

$$T_e = \frac{1}{2}n_p \cdot L_d \cdot I_s^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{\zeta}\right) \quad (1.24)$$

La machine à réluctance synchrone est une machine à courant alternatif destinée à être alimentée par des courants sinusoïdaux triphasés en régime permanent. Le facteur de puissance de la machine, défini comme le cosinus de l'angle de déphasage entre le courant fondamental et la tension fondamentale. Ce facteur représente également le rapport entre la puissance active et la puissance apparente absorbée par la machine. Il est crucial que ce rapport soit aussi proche que possible de 1 pour limiter la puissance électrique de la source alimentant la machine. En négligeant les pertes dans le modèle de machine, nous pouvons obtenir une expression simple du facteur de puissance :

$$\cos \varphi = \frac{(\zeta - 1) \cdot \sin \theta}{\sqrt{(\zeta)^2 + \tan^2 \theta}} \quad (1.25)$$

En utilisant une stratégie de contrôle spécifique (en imposant $\tan \theta = \sqrt{\zeta}$), le facteur de puissance est maximisé et ne dépend que du rapport L_d/L_q . L'expression du facteur de puissance est alors donnée par la relation suivante:

$$\left(\cos \varphi\right)_{max} = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \quad (1.26)$$

La figure (1.15) montre que le facteur de puissance augmente de manière significative lorsque le rapport de saillance L_d/L_q dépasse 8. En effet, conformément aux équations (1.24) et (1.26), il est évident que pour optimiser les performances de la machine, il convient de maximiser l'inductance directe L_d et d'augmenter autant que possible le rapport de saillance.

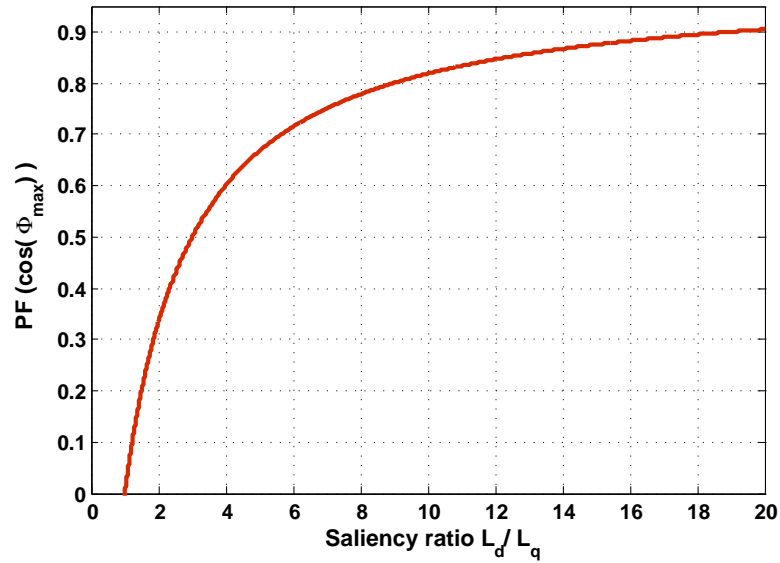


Fig 1.15: Facteur de puissance en fonction du rapport de saillance L_d/L_q

1.8 Types de géométrie de rotor

Dans cette section, nous avons évoqué des architectures de rotor permettant d'obtenir un rapport de saillance élevé. Nous allons présenter différents types de structures identifiés dans la littérature, les comparer et mettre en évidence leurs principaux avantages et inconvénients.

1.8.1 Rotor Massif

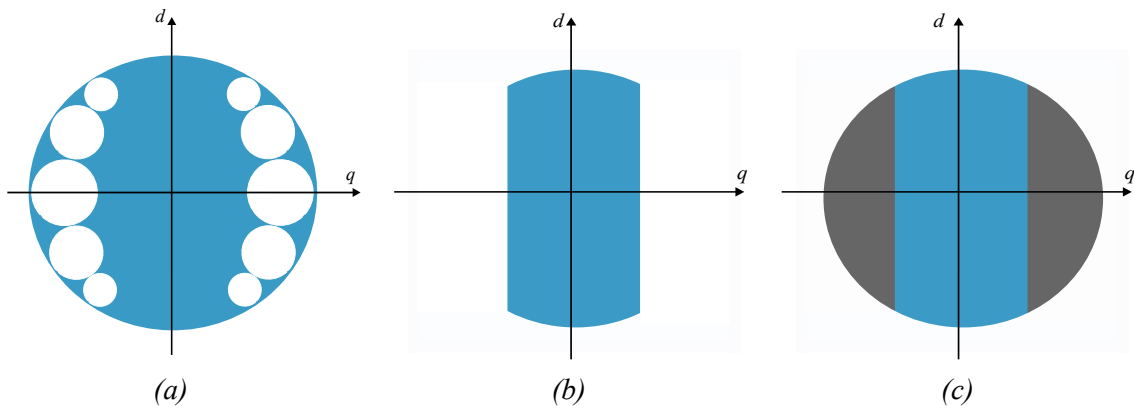


Fig 1.16: Différents types de rotor massifs

Le rotor massif, ou rotor à saillance simple, est un bloc de matériau ferromagnétique doté de découpes formant des saillies, ce qui en fait une structure simple, robuste et économique. Idéal pour des applications à haute vitesse grâce à sa résistance mécanique (un seul bloc non assemblé), ce rotor peut fonctionner avec une légère saturation magnétique, vu que la section de passage du flux selon l'axe d étant suffisamment large. En régime asynchrone, les courants de Foucault circulant axialement éliminent le besoin d'une cage d'amortissement, et les pertes aérodynamiques peuvent être réduites grâce à un carénage en matériau non magnétique ou perforé. Toutefois, ses performances sont limitées par un rapport de saillance modéré ($L_d/L_q \approx 4.5$) et un facteur de puissance relativement faible ($\approx 0,65$). Ces caractéristiques le rendent particulièrement adapté aux environnements exigeants et aux systèmes nécessitant une conception simple et fiable, malgré ses limitations en termes d'efficacité énergétique.

1.8.2 Rotor segmenté

Ces structures, composées de segments en fer assemblés sur une section non magnétique, sont particulièrement adaptées aux moteurs compacts de petite taille. Bien que la présence de pièces polaires réduise la robustesse mécanique du rotor par rapport à un rotor massif, cette conception permet d'atteindre un rapport de saillance maximal de 5, 1, ce qui améliore les performances globales du moteur.

1.8.3 Rotor avec barrières de flux

Afin d'améliorer les performances des moteurs synchrones à réluctance variable, des espaces vides ont été introduits dans le rotor. Ces trous, appelés *barrières de flux*, créent une dissymétrie magnétique en restreignant le flux magnétique dans une certaine direction (axe q), tout en le facilitant dans une autre (axe d). Cette dissymétrie augmente le rapport de saillance, qui représente le rapport entre l'inductance dans l'axe d et celle dans l'axe q . Un rapport de saillance élevé est essentiel pour obtenir un couple plus élevé et un meilleur facteur de puissance. En effet, il permet au moteur de produire un couple important même avec un courant relativement faible.

1.8.3.1 Rotor anisotrope laminé axialement (ALA)

La conception du rotor anisotrope laminé axialement (ALA) est largement utilisée dans les machines à synchrone réluctance pour optimiser leurs performances et leur efficacité. Contrairement au rotor laminé transversalement (radialement) (TLA), le rotor ALA repose sur des blocs massifs non laminés, maintenus par une vis, avec des laminations disposées axialement pour réduire les pertes par courants de Foucault. Sa structure anisotrope est obtenue en alternant des feuilles ferromagnétiques et non magnétiques, dont l'épaisseur peut être ajustée pour orienter le flux magnétique, augmentant ainsi la densité de couple. Cette conception a démontré des performances remarquables. Le rotor ALA peut même atteindre des rapports de saillance très élevés, jusqu'à 20 pour un moteur à deux pôles et 10 pour un moteur à quatre pôles.

Cependant, sa faible résistance mécanique limite son usage aux applications de basse vitesse et faible puissance. De plus, sa conception est complexe et coûteuse, impliquant des empilages alternés de couches laminées et isolantes, ce qui complique sa production industrielle à grande échelle. Malgré ces défis, le rotor ALA reste une solution prometteuse pour des applications spécifiques nécessitant des rapports de saillance élevés et une densité de couple accrue.

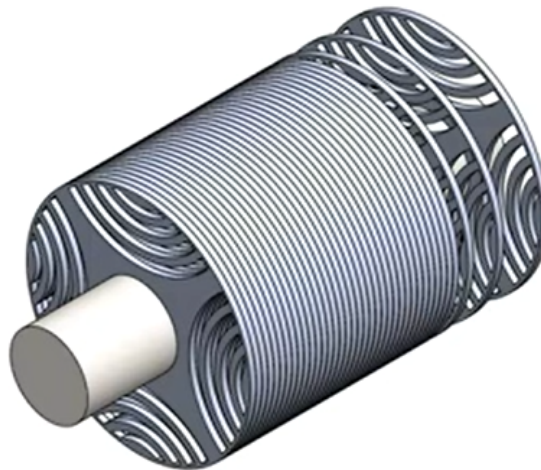


Fig 1.17: Rotor anisotrope laminé axialement (ALA)

1.8.3.2 Rotor anisotrope laminé radialement (TLA)

Cette conception comporte plusieurs barrières de flux par pôle, ce qui limite la circulation du flux dans l'axe q sans entraver la circulation dans l'axe d . La lamination du rotor est orientée transversalement et connectée par de fines nervures qui agissent comme des courts-circuits magnétiques. En conséquence, la conception du rotor TLA assure la faisabilité mécanique et la résistance du rotor, même pour les grands diamètres de rotor ou les applications à haute vitesse. De plus, la conception du rotor TLA est facile et peu coûteuse à fabriquer, et elle est adaptée au décalage rotor. Un façonnage approprié des barrières de flux et de leurs points d'accès à l'entrefer peut également optimiser le rotor TLA pour minimiser les harmoniques d'entrefer et leur effet sur l'ondulation de couple. Cependant, la conception du rotor TLA présente certains inconvénients, notamment la nécessité de ponts pour assurer la résistance mécanique, ce qui peut diminuer les performances de la machine. La conception du rotor TLA reste la topologie la plus adoptée dans la construction des machines synchrones à réluctance, offrant une solution prometteuse pour les améliorations futures de la conception des moteurs. La conception du rotor TLA peut augmenter le rapport de saillance d'une machine synchrone à réluctance jusqu'à environ 13 dans un moteur à deux pôles, ce qui en fait une option intéressante pour les applications à hautes performances.

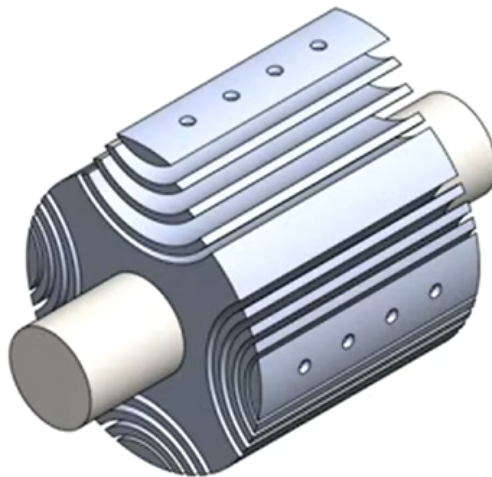


Fig 1.18: Rotor anisotrope laminé radialement

1.8.4 Le rotor à aimants permanents

Le rotor à aimants permanents des machines à réductance synchrone (PMSynRM) représente une avancée technologique majeure, intégrant des aimants permanents dans les barrières de flux pour améliorer les performances du moteur. Cette conception permet d'augmenter le rapport de saillance, la production de couple et le rendement global, tout en offrant une densité de puissance accrue et une plage de vitesse à puissance constante plus étendue par rapport aux moteurs SynRM classiques. L'utilisation d'aimants permanents, tels que ceux en terres rares ou en ferrite, améliore également le facteur de puissance, résolvant ainsi une faiblesse courante des moteurs à réductance synchrone traditionnels. Cependant, cette avancée s'accompagne de défis, notamment des coûts de fabrication plus élevés liés à l'utilisation des aimants permanents, une dépendance accrue aux matériaux rares, et des risques potentiels de démagnétisation. Malgré ces limites, les moteurs PMSynRM ont gagné en popularité dans des domaines comme l'automobile et l'industrie, grâce à leur efficacité énergétique et leurs performances supérieures.

Les aimants permanents dans le rotor empêchent de manière constante la circulation du flux dans l'axe q tout en affectant de manière minimale le flux dans l'axe d . Cette caractéristique conduit à une augmentation de la puissance, de l'efficacité et du couple du moteur.

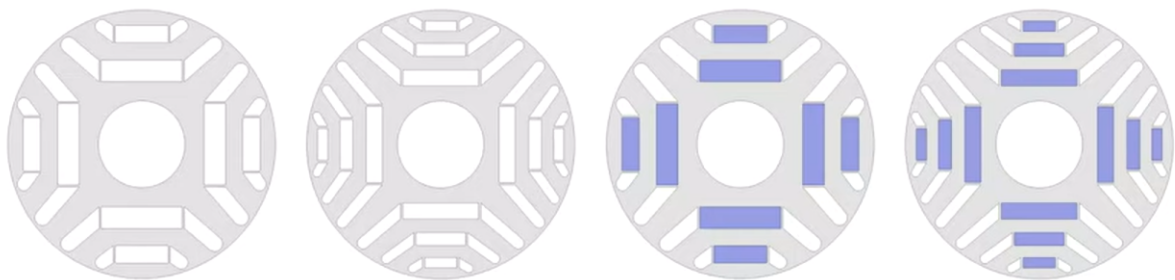


Fig 1.19: Le rotor à aimants permanents

1.8.5 Rotor avec assistance de supraconducteurs

Pour empêcher le passage du flux dans l'axe q , des matériaux supraconducteurs ont été utilisés. Ce type de machine permet de conserver l'inductance dans l'axe d et de réduire considérablement l'inductance dans l'axe q . Les résultats sont impressionnants ; la différence d'inductance des axes $d-q$ $L_d - L_q$ et le rapport de saillance L_d/L_q ont augmenté,

ce qui a entraîné une augmentation significative du couple et du facteur de puissance. Le matériau supraconducteur agit comme un véritable isolant magnétique ce qui signifie que ce type de moteur peut fonctionner dans les deux sens. Les principaux inconvénients de cette machine sont le prix et la complexité de la mise œuvre du refroidissement du matériau supraconducteur.

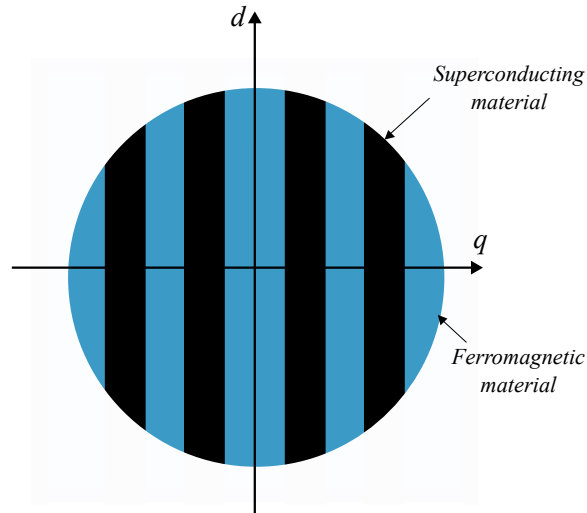








Fig 1.20: Rotor avec assistance de supraconducteurs

1.9 Comparaison des types de rotors

Le tableau ci-dessous compare entre les différents types de rotors des moteurs à réluctance synchrone en fonction de plusieurs facteurs importants : coût, rapport de saillance, résistance mécanique, complexité de fabrication, et rendement.

 SynRM	 Performance	 Prix	 Complexité	 Rapport de saillance	 Tenue mécanique
Rotor Massif	✓ XXX	✓✓✓✓	✓✓✓✓	✓ XXX	✓✓✓X
Rotor segmenté	✓✓XX	✓✓✓X	✓✓XX	✓✓XX	✓✓XX
Rotor Barrières de flux Axialement Laminé	✓✓✓✓	✓✓XX	✓XXX	✓✓✓✓	✓✓✓X
Rotor Barrières de flux Radialement Laminé	✓✓✓X	✓✓✓X	✓✓✓X	✓✓✓X	✓✓XX
Rotor à aimants	✓✓✓✓	✓✓XX	✓✓XX	✓✓✓✓	✓✓✓X
Rotor Barrières de flux Radialement Laminé	✓✓✓✓	✓XXX	✓XXX	✓✓✓✓	✓✓XX

1.10 Modèle dynamique du moteur synchrone à réluctance

1.10.1 Hypothèses de Simplification

Pour développer le modèle électrique équivalent de la machine, certaines hypothèses doivent être faites. La du moteur synchrone a réluctance modélisation repose sur les hypothèses simplificatrices suivantes :

- *L'hystérésis dans les parties magnétiques ainsi que les pertes ferriques sont négligées.*
- *Le circuit magnétique est supposé non saturé.*
- *Les harmoniques d'encoche et d'entrefer ne sont pas pris en compte.*
- *La distribution des forces magnéto-motrices dans l'entrefer est supposée sinusoïdale.*
- *L'effet de la température sur les valeurs de résistance est négligé.*

1.10.2 Équations électriques d'une machine à réluctance synchrone dans le repère abc

Les équations électriques régissant le fonctionnement d'une machine à réluctance synchrone dans un repère fixe lié au stator s'écrivent sous la forme suivante :

$$[V_{abc}] = [R_s] \cdot [I_{abc}] + \frac{d}{dt} [\Psi_{abc}] \quad (1.27)$$

$$\text{avec } [V_{abc}] = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}; [I_{abc}] = \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}; [\Psi_{abc}] = \begin{bmatrix} \Psi_a \\ \Psi_b \\ \Psi_c \end{bmatrix}; [R_s] = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix}$$

Le flux total des phases statoriques sont écrits dans le repère lié au stator sous la forme matricielle suivante :

$$[\Psi_{abc}] = [L] \cdot [I_{abc}] \quad (1.28)$$

Où $[L]$ est la matrice d'inductance is dépend de l'ongle θ

$$[L] = \begin{bmatrix} L_a(\theta) & M_{ab}(\theta) & M_{ac}(\theta) \\ M_{ba}(\theta) & L_b(\theta) & M_{bc}(\theta) \\ M_{ca}(\theta) & M_{cb}(\theta) & L_c(\theta) \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L_a(\theta) = L_f + L_0 + L_2 \cos(2\theta) \\ L_b(\theta) = L_f + L_0 + L_2 \cos(2\theta + 2\pi/3) \\ L_c(\theta) = L_f + L_0 + L_2 \cos(2\theta - 2\pi/3) \\ M_{ab}(\theta) = M_{ba} = M_0 + M_2 \cos(2\theta - 2\pi/3) \\ M_{ac}(\theta) = M_{ca} = M_0 + M_2 \cos(2\theta + 2\pi/3) \\ M_{bc}(\theta) = M_{cb} = M_0 + M_2 \cos(2\theta) \end{array} \right.$$

L_f est l'inductance de fuite d'une phase. Dans le même cadre d'hypothèses, on a les relations suivantes :

$$M_0 = -\frac{1}{2}L_0 \quad \text{et} \quad M_2 = L_2 \quad (1.30)$$

1.10.3 Équations électriques du SynRM dans le référentiel $d - q$

Le système d'équations électriques (2.12) est caractérisé par des paramètres variant périodiquement dans le temps, ce qui complique son analyse et sa résolution. En effet, il nécessite l'inversion de la matrice d'inductance à chaque pas de calcul, rendant le processus très lourd et limitant la simplicité de la synthèse des lois de commande. Pour surmonter ces difficultés, il est essentiel de développer un modèle équivalent avec des paramètres constants. La transformation de Park offre une solution efficace à ce problème en simplifiant les équations et en facilitant la conception des stratégies de commande.

$$[P] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

L'inverse de $[P]$ est:

$$[P]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

Si nous projetons toutes les grandeurs dans le repère $d - q$ lié au rotor en utilisant la transformation de Park, nous pouvons alors écrire, dans le cas général :

$$\begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix} = [P]^{-1} \begin{bmatrix} x_d \\ x_q \\ x_h \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

donc l'équation (2.11) devient:

$$[P]^{-1}[V_{dqh}] = [R_s][P]^{-1}[I_{dqh}] + [P]^{-1}\frac{d[\Psi_{dqh}]}{dt} + \frac{d[P]^{-1}}{dt}[\Psi_{dqh}] \quad (1.34)$$

où $[Xdqh]$ désigne un vecteur quelconque de grandeurs exprimées dans le repère lié au rotor.

La multiplication des deux membres de (1.34) par $[P]$ nous donne :

$$[V_{dqh}] = [R_s][I_{dqh}] + \frac{d[\Psi_{dqh}]}{dt} + n_p\Omega[P]\frac{d[P]^{-1}}{d\theta}[\Psi_{dqh}] \quad (1.35)$$

$$\text{avec } [P]\frac{d[P]^{-1}}{d\theta} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous arrivons finalement aux équations suivantes :

$$[V_{dqh}] = [R_s][I_{dqh}] + \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & L_h \end{bmatrix} \frac{d[I_{dqh}]}{dt} + n_p \Omega \begin{bmatrix} 0 & -L_q & 0 \\ L_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [I_{dqh}] \quad (1.36)$$

avec

$$\begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & L_h \end{bmatrix} = [P] [L] [P]^{-1} \quad (1.37)$$

Où

$$\begin{cases} L_d = L_f + \frac{3}{2}(L_0 + L_2) \\ L_q = L_f + \frac{3}{2}(L_0 - L_2) \\ L_h = L_f \end{cases}$$

Le neutre de la machine étant isolé, ce qui implique naturellement $i_h = 0$, nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s & -n_p \Omega L_q \\ n_p \Omega L_d & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_d & 0 \\ 0 & L_q \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Les équations de tension stator peuvent être décrites dans le repère tournant $d - q$ comme suit :

$$\begin{cases} V_d = R_s i_d - \Omega n_p L_q i_q + L_d \frac{di_d}{dt} \\ V_q = R_s i_q + \Omega n_p L_d i_d + L_q \frac{di_q}{dt} \end{cases} \quad (1.39)$$

ou, dans la forme d'équations d'état :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & \frac{n_p \Omega L_q}{L_d} \\ -\frac{n_p \Omega L_d}{L_q} & -\frac{R_s}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

1.10.4 Équations mécaniques

Le calcul du couple électromagnétique de la machine est basé sur la connaissance de la puissance instantanée totale $P_t(t)$:

$$P_t = \frac{3}{2}R_s(i_d^2 + i_q^2) + \frac{3}{2}\left(\frac{d\Psi_d}{dt}i_d + \frac{d\Psi_q}{dt}i_q\right) + \frac{3}{2}n_p\Omega(\Psi_d i_q + \Psi_q i_d) \quad (1.41)$$

où:

$$P_j = \frac{3}{2}R_s(i_d^2 + i_q^2)$$

représente les pertes par effet Joule dans les enroulements statoriques.

$$P_w = \frac{3}{2}\left(\frac{d\Psi_d}{dt}i_d + \frac{d\Psi_q}{dt}i_q\right)$$

représente les variations de l'énergie magnétique stockée dans la machine;

$$P_e = \frac{3}{2}n_p\Omega(\Psi_d i_q + \Psi_q i_d)$$

représente la puissance électrique transformée en puissance mécanique ou puissance électromagnétique.

Le couple électromagnétique est exprimé comme suit :

$$T_e = \frac{3}{2}n_p(L_d - L_q)i_d i_q \quad (1.42)$$

et

$$T_e = \frac{3}{2}n_p(\Psi_d i_q - \Psi_q i_d) \quad (1.43)$$

Le couple électromagnétique sera:

$$T_e = \frac{3}{2}n_p(L_d - L_q)i_d i_q \quad (1.44)$$

L'équation dynamique du moteur est exprimée par :

$$T_e = J\frac{d\Omega}{dt} + f\Omega + T_L \quad (1.45)$$

En combinant les équations (1.39-1.45), le modèle dynamique mathématique peut être décrit par l'équation différentielle (1.46):

$$\begin{cases} L_d \frac{di_d}{dt} = V_d - R_s i_d + \Omega n_p L_q i_q \\ L_q \frac{di_q}{dt} = V_q - R_s i_q - \Omega n_p L_d i_d \\ J \frac{d\Omega}{dt} = \frac{3}{2} n_p (L_d - L_q) i_d i_q - f \Omega - T_L \end{cases} \quad (1.46)$$

Les systèmes présentés dans l'équation (1.46) peuvent être écrits sous la forme d'un système linéaire à paramètres variables (LPV) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t)).x(t) + B.u(t) + E.\delta(t) \\ y(t) = C.x(t) \end{cases} \quad (1.47)$$

où

$$\begin{aligned} x(t) &= [i_d, i_q, \Omega]^T, \quad u(t) = [u_d, u_q]^T, \quad \delta(t) = T_L, \quad y(t) = [i_d, i_q]^T, \\ A(x(t)) &= \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & 0 & \frac{L_q}{L_d} i_q n_p \\ -\frac{L_d}{L_q} \Omega n_p & -\frac{R_s}{L_d} & 0 \\ \frac{3}{2.J} n_p (L_d - L_q) i_q & 0 & -\frac{f}{J} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Où R_s est la résistance statorique, J le moment d'inertie, f le coefficient de frottement, T_L le couple de charge, (L_d, L_q) les inductances d'axe direct et quadrature, et n_p le nombre de paires de pôles.

Le modèle d'état de la MSRv dans le repère $(d - q)$ s'écrit finalement:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_s}{L_d} & \frac{L_q}{L_d} N_p \Omega & 0 \\ -\frac{L_d}{L_q} N_p \Omega & -\frac{R_s}{L_d} & 0 \\ \frac{3}{2} \frac{N_p}{J} (L_d - L_q) i_q & 0 & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_d \\ V_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} [T_L] \quad (1.48)$$

1.11 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié en détail les caractéristiques et les fonctionnalités de diverses machines électriques, avec un accent particulier sur les moteurs à réluctance synchrone (SynRM). Le SynRM a émergé comme une technologie prometteuse en raison de ses avantages notables, notamment son efficacité énergétique, son faible coût et sa structure simplifiée. Malgré certains inconvénients, tels que les ondulations du couple et le faible facteur de puissance, les atouts du SynRM en font une alternative viable par rapport à d'autres machines électriques.

Nous avons également souligné l'importance de la géométrie du rotor et du paramètre L_d/L_q dans la conception et l'optimisation des SynRM pour diverses applications industrielles. Le développement de géométries de rotor avancées a permis d'améliorer considérablement les performances globales de la machine, en réduisant les pertes et en augmentant l'efficacité.

En résumé, ce chapitre met en lumière non seulement les avantages et les défis associés aux moteurs SynRM, mais aussi l'efficacité des stratégies de contrôle modernes pour améliorer leur performance dans des applications pratiques. Les avancées dans ce domaine ouvrent la voie à une adoption plus large des SynRM dans des secteurs nécessitant des solutions énergétiques efficaces et rentables.

CHAPITRE 2

LA REPRÉSENTATION PAR LES SYSTÈMES FLOUS DE T-S

2.1 Introduction

Au cours des deux dernières décennies, le modèle flou de Takagi-Sugeno (T-S) s'est imposé comme un outil fondamental pour l'approximation des systèmes non linéaires. Ce modèle repose sur un ensemble de règles floues permettant de décomposer un système non linéaire global en une série de modèles linéaires locaux, reliés par des fonctions d'appartenance floues.

Le modèle T-S inspire divers contrôleurs flous dans le cadre de la compensation parallèle-distribuée (PDC) et a été appliqué avec succès dans de nombreux domaines, notamment l'aérospatial et la gestion des processus. La méthode de contrôle flou T-S se distingue par sa conception intuitive, simple et efficace, la rendant complémentaire aux autres techniques de contrôle non linéaire. Ses caractéristiques principales incluent :

- L'absence de contraintes structurales rigides sur le modèle de processus.
- La conservation vers une logique linéaire aisément compréhensible.
- La capacité de décomposer le problème de contrôle global en sous-problèmes plus gérables, reflétant les interactions par des variables d'état physiques.
- L'aptitude à s'adapter rapidement aux conditions opérationnelles changeantes.

La méthode T-S vise à construire un contrôleur non linéaire en combinant des contrôleurs linéaires invariants dans le temps pour répondre à des critères dynamiques spécifiques.

Cette approche simplifie la conception de contrôle non linéaire en la réduisant à des sous-problèmes linéaires, rendant ainsi l'application de méthodes de conception linéaire plus accessible. Des avancées importantes ont été réalisées dans la conception de systèmes de contrôle flou, notamment grâce aux approches basées sur la fonction de Lyapunov. Ces approches ont permis de traiter des problèmes de contrôle robuste, orientés performance, en réseau et de systèmes à retards.

2.2 Importance de la Modélisation des Processus

L'élaboration de modèles d'état pour les processus s'appuie sur l'approche des variables d'état. Cette méthode enrichit la compréhension des systèmes et est cruciale pour leur analyse et conception. La sélection de variables pertinentes physiquement, comme la vitesse, la masse, la température ou l'accélération, est essentielle pour décrire adéquatement le processus. Ces variables permettent de formuler un ensemble d'équations différentielles et algébriques, qui ensemble constituent un modèle mathématique du processus physique [Zhu23].

Dans le domaine de l'ingénierie et de la production contemporaines, l'efficacité et l'innovation dépendent de la capacité à comprendre et manipuler des systèmes complexes. La modélisation des processus industriels répond à ce défi, offrant une représentation virtuelle des systèmes avant leur mise en œuvre réelle [Spo08, BR92].

La modélisation revêt plusieurs aspects essentiels :

- **Prévision et Simulation** : Elle permet de simuler des processus en temps réel, facilitant la prévision du comportement systémique sans risques ni coûts liés aux modifications physiques.
- **Optimisation des Ressources** : Elle aide à identifier les meilleures pratiques pour minimiser la consommation de ressources tout en maximisant la production.
- **Amélioration de la Qualité et de la Sécurité** : Elle contribue à garantir la qualité des produits et la sécurité des processus en anticipant et rectifiant les erreurs potentielles dès la phase de conception.
- **Développement de Produits** : Elle joue un rôle clé dans le développement et l'amélioration des produits, permettant l'expérimentation et l'ajustement des

paramètres dans un environnement virtuel.

- **Conformité Réglementaire** : Elle assure la conformité des processus aux normes environnementales et de sécurité en évaluant l'impact des processus avant leur déploiement.
- **Formation et Éducation** : Elle offre des outils pédagogiques essentiels pour former les ingénieurs et les opérateurs, facilitant la compréhension des processus complexes.

Ainsi, la modélisation est un pilier d'efficacité opérationnelle, d'innovation et de durabilité dans l'industrie moderne.

2.3 Modèles flous et systèmes flous

Les systèmes flous sont des structures ou mécanismes basés sur des concepts dérivés des ensembles flous, des règles condition-action floues (IF-THEN) et de la logique floue. Dans une application typique de la logique floue, un système flou est constitué de quatre éléments principaux : une base de connaissances, également appelée base de règles floues, un moteur d'inférence, une interface de fuzzification et une interface de défuzzification [Voi90].

La figure (2.1) présente la configuration en blocs d'un système flou.

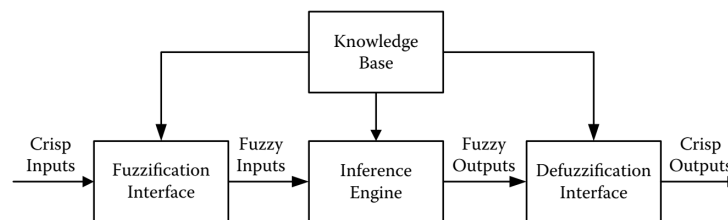


Fig 2.1: Structure de base des systèmes flous

2.3.1 Composants d'un système flou

Un système flou intègre quatre composants clés. La **base de connaissances** conserve les règles floues IF-THEN et les définitions des fonctions d'appartenance. Le **moteur d'inférence** applique ces règles pour déduire des conclusions à partir de données floues. L'**interface de fuzzification** convertit les entrées précises en ensembles flous, souvent via une méthode singleton, facilitant leur utilisation dans les systèmes de contrôle flou.

À l'opposé, l'**interface de défuzzification** transforme les ensembles flous en une sortie nette unique.

Une méthode de défuzzification fréquemment utilisée est le *centre de gravité*, défini par la formule :

$$z^* = \frac{\int_z \mu_{C'}(z)z dz}{\int_z \mu_{C'}(z) dz} \quad (2.1)$$

Où $\mu_{C'}(z)$ représente la fonction d'appartenance de l'ensemble flou après inférence.

Les systèmes flous sont essentiellement des mappages non linéaires de l'espace d'entrée vers l'espace de sortie, traduisant un ensemble de règles floues SI-ALORS en une fonction mathématique non linéaire. Leur aptitude à gérer l'imprécision les rend particulièrement utiles dans diverses applications, y compris dans le domaine du contrôle flou.

Parmi les systèmes flous, les modèles de Mamdani, de Takagi-Sugeno et les systèmes flous basés sur la technologie C-MOS se distinguent par leur utilisation en contrôle flou, chacun caractérisé par les spécificités de leurs règles floues.

2.3.1.1 Systèmes flous de Mamdani

Proposés par Mamdani et ses collègues [MA75][Mam76], ces systèmes emploient des règles floues qui établissent des relations linguistiques entre les entrées et les sorties. Le raisonnement de Mamdani s'appuie sur la méthode de la conclusion minimique, comme illustré dans la Figure (2.2), utilisant différentes règles IF-THEN.

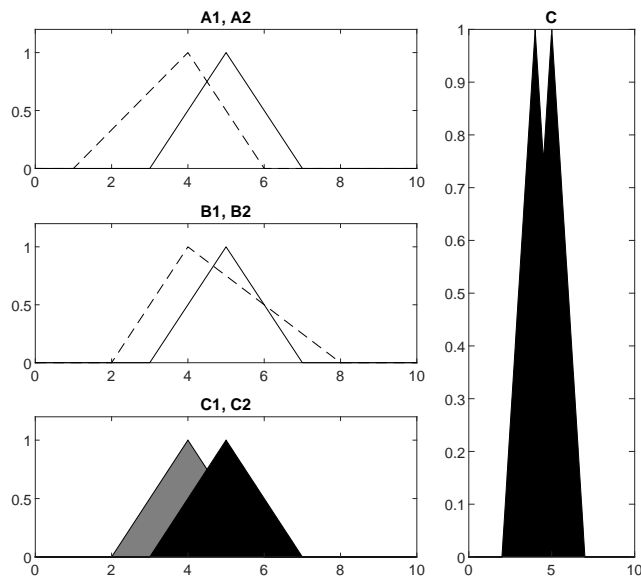


Fig 2.2: Raisonnement flou de Mamdani basé sur la méthode d'inférence max-min.

2.3.1.2 Systèmes flous de Takagi-Sugeno

Les systèmes flous de Takagi-Sugeno, conçus pour approximer des fonctions non linéaires, expriment leurs conséquences en utilisant des fonctions non linéaires. Ils sont souvent privilégiés pour leur efficacité et précision dans le domaine du contrôle flou.

2.3.1.3 Systèmes flous de fuzzy C-MOS (Fuzzy dynamic Systems)

Les systèmes flous C-MOS intègrent des opérations de logique floue au sein de circuits à transistors MOS, offrant une haute précision et une intégration aisée avec les circuits numériques.

En conclusion, les systèmes flous fournissent des solutions robustes pour le traitement de données incertaines et trouvent leur application dans une variété de domaines liés au contrôle flou.

2.3.2 Modèles Flous de Takagi-Sugeno

Les modèles flous Takagi-Sugeno (TS) combinent des règles d'inférence floues avec des modèles dynamiques linéaires analytiques locaux, comme décrit ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 R^l : \quad & \mathbf{SI} \quad z_1 \text{ est } F_1^l \text{ et } \dots z_v \text{ est } F_v^l \\
 & \mathbf{ALORS} \quad x(t+1) = A_l x(t) + B_l u(t) + a_l \\
 & \quad \quad \quad y(t) = C_l x(t) \\
 & l \in L := \{1, 2, \dots, m\},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Où R^l représente la l -ème règle d'inférence floue, m le nombre de règles d'inférence, $F_j^l (j = 1, 2, \dots, v)$ les ensembles flous, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^g$ le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie, et (A_l, B_l, a_l, C_l) les matrices du l -ème modèle local. Les variables de prémisse $z(t) := [z_1, z_2, \dots, z_v]$ sont des variables mesurables du système, comme les variables de sortie ou d'état. On suppose également, sans perte de généralité, que l'origine est l'équilibre du système flou T-S (2.2).

En appliquant une méthode d'inférence floue standard, c'est-à-dire un fuzzifieur singleton, une inférence floue de produit et un défuzzifieur de moyenne centrale, le modèle flou

T-S (2.2) peut être reformulé comme suit [Fen18], [CRF97]:

$$\begin{cases} x(t+1) &= A(\mu)x(t) + B(\mu)u(t) + a(\mu) \\ y(t) &= C(\mu)x(t), \end{cases} \quad (2.3)$$

où

$$A(\mu) = \sum_{l=1}^m \mu_l A_l, B(\mu) = \sum_{l=1}^m \mu_l B_l, a(\mu) = \sum_{l=1}^m \mu_l a_l, C(\mu) = \sum_{l=1}^m \mu_l C_l, \quad (2.4)$$

$\mu_l(z)$ est la fonction d'appartenance normalisée, définie par

$$\mu_l = \frac{\xi_l(z)}{\sum_{i=1}^m \xi_i(z)}, \quad \xi_i(z) = \prod_{i=1}^v F_i^l(z_i), \quad \mu_l \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m \mu_l = 1, \quad (2.5)$$

et $F_i^l(z_i)$ est le degré d'appartenance de z_i dans l'ensemble flou F_i^l . Le modèle (2.3) est naturellement non linéaire car les fonctions d'appartenance sont généralement des fonctions non linéaires des variables de prémisse, qui peuvent inclure certaines ou toutes les variables d'état. Le modèle flou T-S (2.3) est en réalité un modèle flou de l'espace d'état. De même, un modèle flou entrée-sortie peut également être défini de manière similaire [Fen18].

$$\begin{aligned} R^l : \mathbf{SI} \quad & z_1 \text{ est } F_1^l \text{ et } \dots z_r \text{ est } F_r^l \\ \mathbf{ALORS} \quad & y(t+1) = G_l(q^{-1})y(t) + H_l(q^{-1})u(t) + D_l \\ & G_l(q^{-1}) = G_1^l + G_2^l q^{-1} + \dots + G_n^l q^{-n+1}, \quad G_k^l = [g_{kj}^l]_{p \times p} \\ & H_l(q^{-1}) = H_0^l + H_1^l q^{-1} + \dots + H_{n-1}^l q^{-n+1}, \quad H_k^l = [h_{kj}^l]_{p \times g} \\ & l \in L := \{1, 2, \dots, m\}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Où, de manière analogue au modèle de l'espace d'état dans (2.2), R^l représente la l -ième règle d'inférence, m le nombre total de règles, $u(t) \in \mathbb{R}^s$ le vecteur d'entrée, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de sortie. Les matrices (G_l, H_l, D_l) correspondent au l -ième modèle local du système flou (2.6), q^{-1} est l'opérateur de décalage défini par $q^{-1}y(t) = y(t-1)$, et $z(t) := [z_1, z_2, \dots, z_r]$ désigne les variables de prémisse, soit les variables mesurables du système.

En employant un défuzzifieur de moyenne centrale, une inférence de produit et un fuzzifieur singleton, le modèle flou dynamique (2.6) peut être exprimé par le modèle global

suivant :

$$y(t+1) = G(q^{-1}, \mu(z))y(t) + H(q^{-1}, \mu(z))u(t) + D(\mu(z)), \quad (2.7)$$

2.4 Différentes structures multi-modèles

La représentation multi-modèle d'un système non linéaire offre diverses structures, chacune possédant des caractéristiques uniques. La représentation en état des sous-modèles permet de mettre en évidence leur compacité, leur simplicité et leur généralité, offrant un avantage sur les représentations basées sur des équations de régression entrée/sortie. Souvent, pour élaborer des lois de commande ou construire des observateurs non linéaires, une telle description est indispensable. Les structures multi-modèles d'un système non linéaire diffèrent selon la segmentation des entrées ou sorties et le type de couplage entre les modèles locaux. Trois structures principales sont identifiées :

- Structure couplée.
- Structure découplée.
- Structure hiérarchique.

2.4.1 Structure couplée

2.4.1.1 Modèle flou de Takagi-Sugeno

Introduit par [TS85], le modèle flou de Takagi-Sugeno représente un système non linéaire dans un espace compact à travers une combinaison convexe de sous-systèmes linéaires.

Ce modèle ,multi-modèle, flou est caractérisé par des règles floues de type SI-ALORS. La $i^{\text{ème}}$ règle du multi-modèle de Takagi-Sugeno s'énonce comme suit :

- Règle i : SI $\xi_1(t)$ est $F_{i,1}$ et $\xi_2(t)$ est $F_{i,2}$, ..., $\xi_r(t)$ est $F_{i,r}$, ALORS

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x(t) + B_i u(t) \\ y_i(t) = C_i x(t) + E_i u(t) \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (2.8)$$

Les prémisses de ce modèle sont basées sur des propositions linguistiques, ce qui facilite l'évaluation des fonctions de pondération μ_i . Les conséquences correspondent, quant à elles, aux sous-modèles linéaires.

Un avantage notable de ce modèle réside dans sa capacité à intégrer des connaissances a priori sur les systèmes durant la phase de modélisation, offrant une partition initiale floue de l'espace opérationnel.

Depuis son introduction, le modèle de Takagi-Sugeno a été largement étudié, menant à des avancées significatives et à des extensions dans les domaines du contrôle automatique et des modèles flous.

Le système décrit par (2.8) peut être représenté comme un multi-modèle flou global en utilisant la transformation de secteur non linéaire, comme illustré en figure(2.3) [BOU23].

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(x(t))) (A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = C_i x(t) + E_i u(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

Où $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, et $E_i \in \mathbb{R}^{n \times n_\delta}$ désignent respectivement les matrices d'état, d'entrée et d'influence. De même, $C_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ et $E_i \in \mathbb{R}^{n_y \times n}$ sont les matrices de sortie.

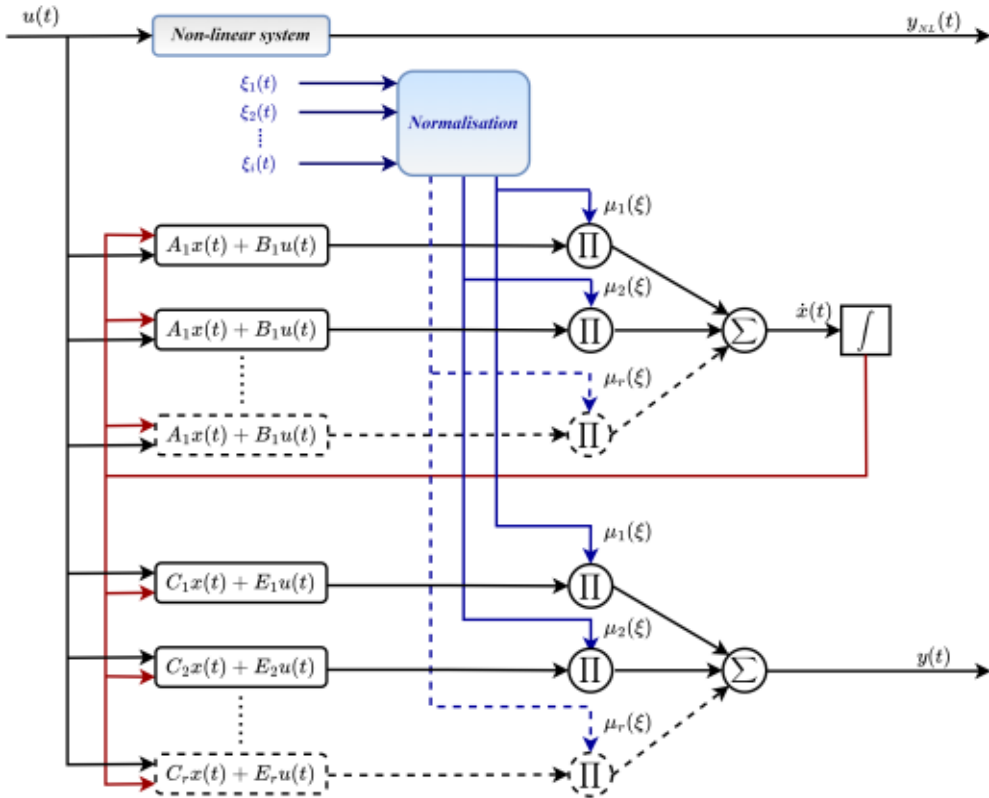


Fig 2.3: Architecture d'un modèle TS flou

Les différentes méthodes de modélisation des systèmes non linéaires partagent une structure commune, identifiée comme (2.8).

La distinction entre ces approches réside principalement dans le choix des sous-modèles

et des fonctions de pondération. Nombre de ces modèles exploitent cette structure de base.

2.4.1.2 Approche linéaire par morceaux

Cette approche utilise des sous-modèles linéaires avec des fonctions de pondération booléennes pour diviser l'espace opérationnel en zones distinctes. Néanmoins, elle peut entraîner une approximation discontinue du système non linéaire, ce qui peut s'avérer inadéquat dans certains cas [OMRM08].

2.4.1.3 Réseaux de fonctions à base radiale

Sous certaines conditions, ces réseaux sont équivalents aux multi-modèles T-S . Ils sont considérés comme des approximations universelles, mais peuvent nécessiter de nombreux sous-modèles et être sensibles aux paramètres choisis [BOU23].

2.4.1.4 Réseaux de modèles locaux

Depuis les travaux de [MSJ20], les multi-modèles sont imposés comme un outil essentiel dans la modélisation de systèmes fonctionnant sous différents régimes opérationnels. Le multi-modèle et le modèle flou de Takagi-Sugeno partagent de nombreuses similarités. En effet, lorsque le nombre de règles équivaut au nombre de sous-modèles, ces deux méthodes se confondent. Leur distinction réside dans les techniques utilisées pour définir les fonctions de pondération $\mu_i(\cdot)$ et dans l'interprétation qui en est faite. Dans les modèles flous, le partitionnement de l'espace opérationnel du système s'appuie souvent sur l'expertise humaine pour générer des propositions linguistiques conduisant à des sous-ensembles flous. En revanche, dans les multi-modèles, ce partitionnement est réalisé à l'aide de méthodes d'optimisation [Nag10].

2.4.1.5 Modèle linéaire à paramètres variables (LPV)

Les systèmes LPV sont caractérisés par des paramètres linéaires variant dans le temps [DIA19]. Dans la modélisation LPV classique, les fonctions de pondération sont généralement omises. Les variables de décision $\xi(t)$, mesurables et bornées, décrivent les conditions opérationnelles et peuvent être exogènes ou endogènes. Dans les systèmes quasi-LPV, $\xi(t)$ est une variable endogène, telle que la sortie du système. Les approches LPV et

quasi-LPV sont souvent analysées de manière similaire, où les fonctions de pondération influencent l'évolution des paramètres [OMRM08],[Nag10].

2.4.1.6 Modèle d'incertitude polytopique linéaire

Ce modèle suppose que les matrices du système, bien qu'inconnues, appartiennent à un ensemble borné. Les erreurs de modélisation sont représentées par un polytope formé de matrices sommet. Le comportement du système est alors une combinaison linéaire de ces matrices. En considérant ces matrices sommet comme des sous-modèles, l'analogie avec une structure multi-modèle devient évidente [Nag10].

2.4.2 Structure découplée

La structure découplée, ou modèles locaux multiples, repose sur une décomposition du processus en modèles locaux autonomes, chacun possédant son propre vecteur d'état [BOU23]. Les sorties $y_i(t)$ de ces sous-modèles sont des signaux de modélisation artificiels, dépourvus de signification physique et non mesurables, mais cruciaux pour la représentation du comportement non linéaire. Cette structure offre un avantage notable pour l'identification des paramètres, facilitant un réglage précis de la dimensionnalité des sous-modèles [Ham15].

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t))(A_i x_i(t) + B_i u(t)) \\ y_i(t) = C_i x_i(t) + E_i u(t) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) y_i(t) \end{cases} \quad (2.10)$$

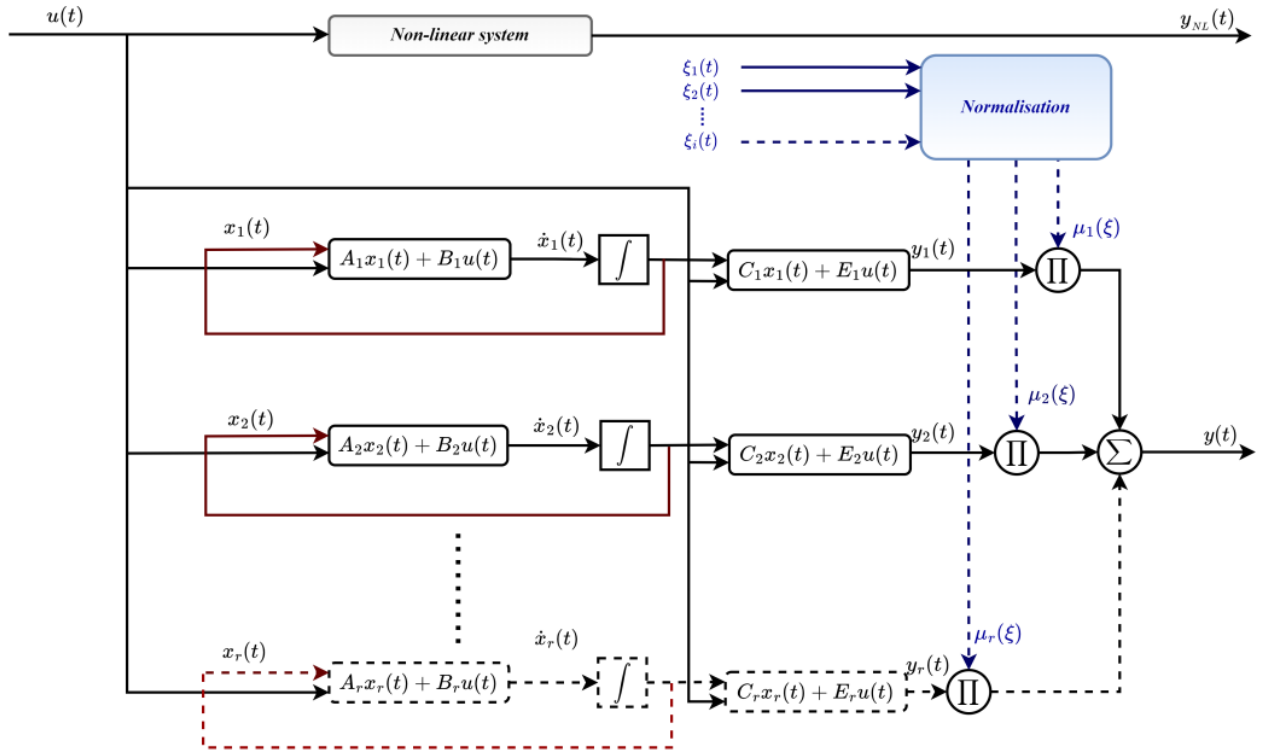


Fig 2.4: Architecture d'un modèle découplé

2.4.3 Structure Hiérarchique

Malgré le succès de l'approche multi-modèle dans divers domaines tels que le contrôle et le diagnostic, son application est limitée aux systèmes avec peu de variables, en raison de la croissance exponentielle du nombre de modèles locaux due à l'augmentation du nombre de variables. Par exemple, un modèle multi-modèle comportant r variables et m fonctions d'activation par variable comprendrait m^r modèles locaux [Akh04]. Pour surmonter cette contrainte, Raju et al. [RZK91] ont proposé une structure multi-modèle hiérarchique, qui se caractérise par une augmentation linéaire du nombre de modèles avec le nombre de variables.

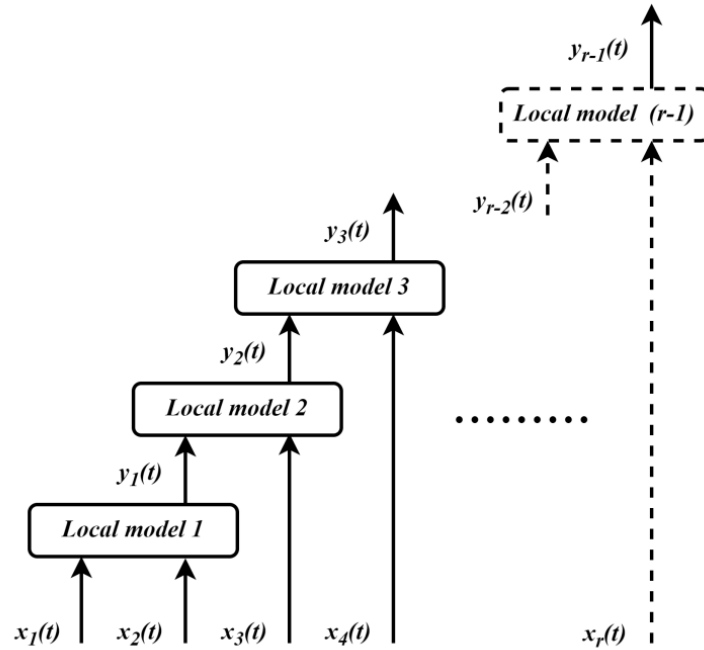


Fig 2.5: Architecture de la structure hiérarchique

2.5 Construction d'un modèle T-S flous

L'élaboration d'un modèle flou de Takagi-Sugeno est une étape clé dans la synthèse et la conception de contrôleurs basés sur les systèmes flous T-S. Quatre méthodes principales sont couramment employées pour développer ces systèmes :

- **Procédures de linéarisation** : Cette technique implique de simplifier les systèmes non linéaires en modèles linéaires locaux, puis de les combiner via la logique floue.
- **Identification à partir de données d'entrée/sortie** : Elle consiste à utiliser des techniques d'identification pour extraire les paramètres des modèles flous T-S à partir de données expérimentales, y compris l'analyse de séries temporelles et l'apprentissage automatique.
- **Approche neuronale** : Cette méthode fait appel à des réseaux de neurones pour déterminer la structure et les paramètres des modèles flous T-S à partir de données d'entrée/sortie.
- **Transformation polytopique convexe** : Elle représente le système non linéaire comme une combinaison de plusieurs systèmes linéaires en utilisant des nonlinéarités

sectorielles. Initialement introduite par [KTIT92] et développée par [TW04], cette méthode offre une approximation précise du modèle non linéaire et réduit le nombre de modèles nécessaire comparé à la méthode de linéarisation.

2.6 Transformation polytopique

La Figure 2.6 illustre le concept de non-linéarité sectorielle globale et locale. Supposons que le système non linéaire original satisfasse la condition de non-linéarité sectorielle [KTIT92], c'est-à-dire que les valeurs des termes non linéaires dans l'équation de l'espace d'état restent dans un secteur défini par des plans hyper-passant par l'origine. Une fonction $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est considérée comme appartenant au secteur $[a, b]$ si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y = f(x)$ se trouve entre s_1x et s_2x .

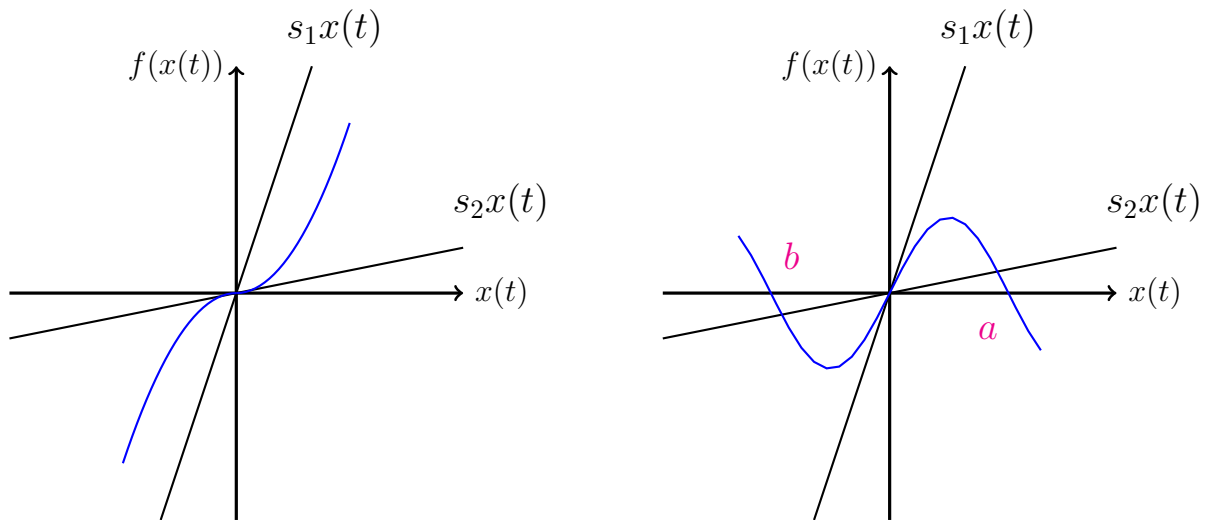


Fig 2.6: Secteurs non linéaires

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \quad (2.11)$$

Où $x(t)$, $y(t)$ et $u(t)$ représentent respectivement l'état du système, la sortie et la commande. Ce système (2.11) peut être exprimé sous une forme LPV (Linear Parameter-

Varying) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(\xi(t))x(t) + G(\xi(t))u(t) \\ y(t) = H(\xi(t))x(t) \end{cases} \quad (2.12)$$

Soient k le nombre de fonctions non linéaires dans le système (2.12), et f_i ces fonctions, où $i = 1, \dots, k$. Supposons qu'un compact C existe pour les variables $\xi(t)$, limitant les non-linéarités :

$$f_i \in [f_{\min}^i, f_{\max}^i], \text{ pour } i = 1, \dots, k \quad (2.13)$$

Les non-linéarités f_i peuvent être exprimées comme :

$$\begin{cases} f_i(\xi(t)) = f_{\min}^i w_{\max}^i(\xi(t)) + f_{\max}^i w_{\min}^i(\xi(t)) \\ w_{\max}^i(\xi(t)) = \frac{f_{\max}^i - f_i(\xi(t))}{f_{\max}^i - f_{\min}^i} \\ w_{\min}^i = 1 - w_{\max}^i(\xi(t)) \end{cases} \quad (2.14)$$

Les fonctions de poids w_{\max}^i, w_{\min}^i permettent de définir les fonctions d'activation $h_r(\xi(t))$:

$$h_r(\xi(t)) = \prod_{i=1}^k w_{\ell}^i(\xi(t)), \text{ pour } r = 1, \dots, 2^k \text{ et } \ell = 1, 2 \quad (2.15)$$

Le système (2.11), qui comporte $r = 2^k$ sous-modèles linéaires, se transforme en :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r=2^k} h_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r=2^k} h_i(\xi(t))C_i x(t) \end{cases} \quad (2.16)$$

Exemple:

Considérons le système non linéaire suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$$

Où

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ B(x_1(t)x_4^2(t) - G \sin(x_3(t))) \\ x_4(t) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } g(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nous définissons les variables de prémisses comme suit: $z_1 = \sin(x_3)$ et $z_2 = x_1 x_4^2$.
Supposons que $x_3 \in [-\pi/2, \pi/2]$, $x_1 x_4 \in [-d, d]$

alors

$$\left| \frac{2}{\pi} x \right| \leq z_1 \leq |x|,$$

$$-dx_4 \leq z_2 \leq dx_4.$$

D'après la propriété des fonctions d'appartenance,

$z_1 = \sin(x_3(t)) = \left(\sum_{i=1}^2 M_i(z_1(t)) b_i \right) x_3(t)$, nous pouvons obtenir les fonctions d'appartenance

$$M_1(z_1(t)) = \begin{cases} \frac{z_1(t) - (2/\pi) \sin(z_1(t))}{(1 - 2/\pi) \sin^{-1}(z_1(t))} & \text{si } z_1(t) \neq 0 \\ \text{si non } 1 \end{cases}$$

$$M_2(z_1(t)) = \begin{cases} \frac{\sin^{-1}(z_1(t)) - z_1(t)}{(1 - 2/\pi) \sin^{-1}(z_1(t))} & \text{si } z_1(t) \neq 0 \\ \text{si non } 0 \end{cases}$$

$z_2(t) = x_1(t)x_4(t)$ $z_2(t) = x_1(t)x_4(t) = \left(\sum_{i=1}^2 N_i(z_2(t)) \alpha_i \right) \alpha_i$

$$N_1(z_2(t)) = \frac{z_2(t) - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

$$N_2(z_2(t)) = \frac{\alpha_1 - z_2(t)}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 M_i(z_1(t)) N_j(z_2(t)) \times \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G b_i & D\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \right)$$

Où

$$\alpha_1 = d = \max((z_2(t))) \text{ et } \alpha_2 = -d = \min((z_2(t)))$$

$$\text{et } b_1 = 1, b_2 = 2/\pi$$

Les quatre règles sont données par:

Règle 1 : Si $z_1(t)$ is M_1 et $z_2(t)$ is N_1 Alors $\dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u(t)$,

Règle 2 : Si $z_1(t)$ is M_1 et $z_2(t)$ is N_2 Alors $\dot{x}(t) = A_2 x(t) + B_2 u(t)$,

Règle 3 : Si $z_1(t)$ is M_2 et $z_2(t)$ is N_1 Alors $\dot{x}(t) = A_3 x(t) + B_3 u(t)$,

Règle 4 : Si $z_1(t)$ is M_2 et $z_2(t)$ is N_2 Alors $\dot{x}(t) = A_4 x(t) + B_4 u(t)$

2.7 Conception du modèle Takagi-Sugeno pour la machine SynRM

Cette section analyse la conception et la mise en œuvre d'un multi-modèle Takagi-Sugeno (TS) appliqué au système SynRM. La transformation par secteur non linéaire est l'approche la plus utilisée pour élaborer le modèle Takagi-Sugeno. Elle permet de convertir avec précision un système non linéaire en un modèle flou constitué des sous-systèmes linéaires.

Les termes i_q, Ω contribuent principalement dans la non-linéarité du système. Par conséquent, il est logique de les considérer comme des variables prémisses.

$$\begin{cases} \xi_1(t) = i_q \\ \xi_2(t) = \Omega \end{cases}$$

Les termes non linéaires $\xi_1(t), \xi_2(t)$ peuvent être exprimés sous la forme suivante :

$$\xi_1(t) = F_{11}(t) \cdot \bar{\xi} + F_{21}(t) \cdot \underline{\xi} \quad (2.17)$$

$$\xi_2(t) = F_{12}(t) \cdot \bar{\xi} + F_{22}(t) \cdot \underline{\xi} \quad (2.18)$$

Où:

$$\begin{cases} F_{11} = \frac{\xi_1(t) - \underline{\xi}_1}{\bar{\xi}_1 - \underline{\xi}_1} \\ F_{21} = \frac{\bar{\xi}_1 - \xi_1(t)}{\bar{\xi}_1 - \underline{\xi}_1} \\ F_{12} = \frac{\xi_2(t) - \underline{\xi}_2}{\bar{\xi}_2 - \underline{\xi}_2} \\ F_{22} = \frac{\bar{\xi}_2 - \xi_2(t)}{\bar{\xi}_2 - \underline{\xi}_2} \end{cases} \quad (2.19)$$

le système équivalent exprimé sous la forme du modèle flou Takagi-Sugeno (TS) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + E_i \delta(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.20)$$

avec

$$h_1(\xi(t)) = M_1(\xi_1(t)) \times N_1(\xi_2(t)); \quad h_2(\xi(t)) = M_1(\xi_1(t)) \times N_2(\xi_2(t))$$

$$h_3(\xi(t)) = M_2(\xi_1(t)) \times N_1(\xi_2(t)); \quad h_4(\xi(t)) = M_2(\xi_1(t)) \times N_2(\xi_2(t))$$

Les matrices, qui caractérisent les quatre sous-systèmes linéaires, sont déterminées en utilisant la paire $(\bar{\xi}_j, \underline{\xi}_j)$.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 4.73 \\ -4644.4 & -38 & 0 \\ 317.5 & 0 & -0.02 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 4.73 \\ -84.4 & -38 & 0 \\ 317.5 & 0 & -0.02 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -4644.4 & -38 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 0 \\ -84.4 & -38 & 0 \\ 0 & 0 & -0.02 \end{bmatrix},$$

Les matrices non linéaires de l'équation (5.28) sont déterminées par

$$B_i = \begin{bmatrix} 5.26 & 0 \\ 0 & 22.22 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -73 \end{bmatrix}.$$

Le tableau suivant présente les caractéristiques de la machine SynRM (2.2 kW):

Puissance nominale	2.2KW
Vitesse nominale	1500rpm
Tension nominale	220/380V
Résistance du stator	1.71Ω
Inductance de l'axe direct d	0.15 H
Inductance de l'axe quadratique q	0.04 H
Nombre de paires de pôles	2
Moment d'inertie	0.0137Kg.m ²
Coefficient de friction	0.00036Nm/rad/s

Fig 2.7: Paramètres SynRM

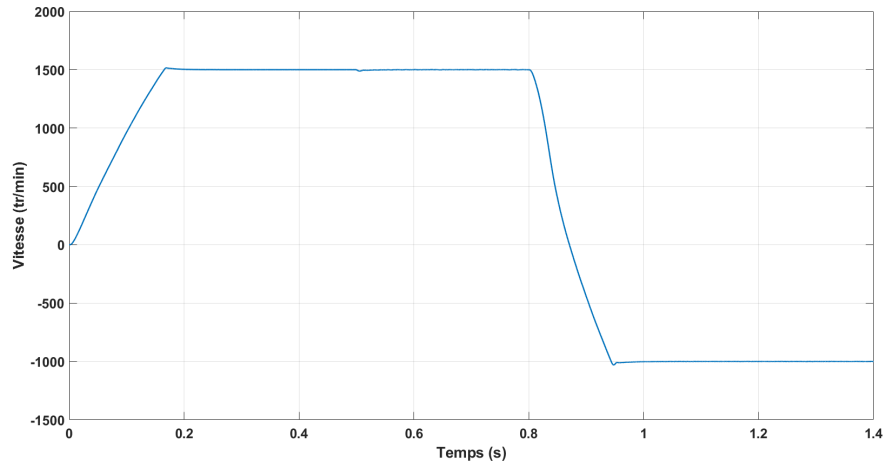


Fig 2.8: Vitesse de rotation par les multimodales floues TS

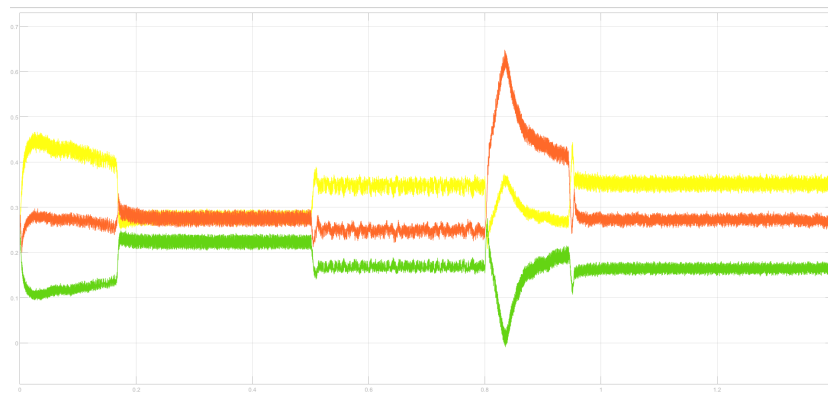


Fig 2.9: Les fonctions de pondération H_i

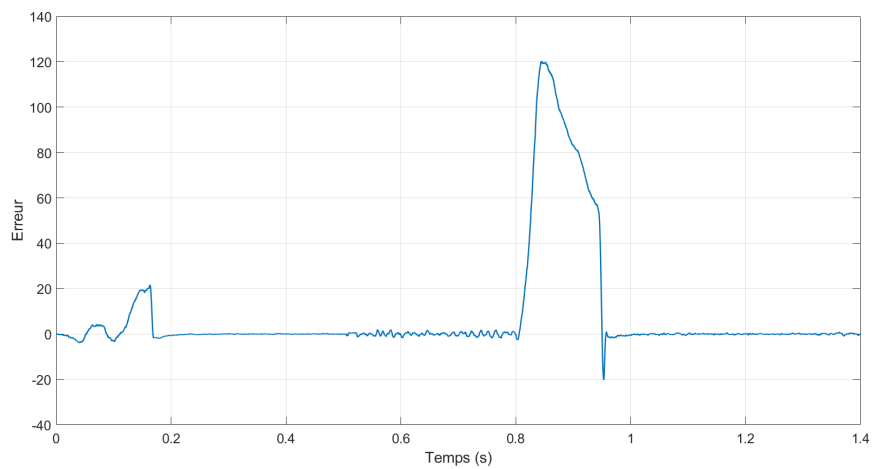


Fig 2.10: Erreur entre le système et le multi-modèle floue TS

2.8 Analyse de stabilité des systèmes flous TS

2.8.1 Inégalités Linéaires Matricielles

L'approche des modèles multiples en optimisation convexe joue un rôle crucial dans l'analyse et la synthèse de systèmes. Cette méthode offre deux avantages majeurs, découlant de la nature convexe de l'optimisation :

- La capacité de trouver des solutions dans un temps de calcul raisonnable.
- La garantie que la solution obtenue représente un minimum global unique.

La notion de convexité s'applique tant aux fonctions qu'aux ensembles convexes. Les définitions sont les suivantes :

- Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si, pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et pour tout couple $(x_1, x_2) \in E^2$, l'expression $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ appartient également à E :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall (x_1, x_2) \in E^2, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in E.$$

- Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, avec E un ensemble convexe de \mathbb{R}^n , est convexe si :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall (x_1, x_2) \in E^2, f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Ainsi, un problème d'optimisation convexe se formule comme suit : $\min_{x \in E} f(x)$, où E est un ensemble convexe et f une fonction convexe.

Toutefois, de nombreux problèmes en automatisation ne sont pas convexes. Pour ces cas, certaines méthodes permettent de reformuler ces problèmes sous une forme convexe. Il est important de reconnaître que transformer un problème non convexe en un problème convexe peut restreindre sa validité et imposer des contraintes plus conservatrices. Par conséquent, même si une solution obtenue par optimisation convexe est optimale pour le problème reformulé, elle n'est pas nécessairement la meilleure pour le problème initial. Une telle solution n'est optimale pour le problème initial que si la transformation de non convexe à convexe est équivalente. Cette considération est cruciale pour l'interprétation correcte des résultats obtenus par les méthodes d'optimisation [CB12].

2.8.1.1 Formulation des Inégalités Linéaires Matricielles

L'optimisation convexe, et plus particulièrement l'application des inégalités linéaires matricielles (LMI), a fait l'objet de nombreuses recherches en automatisation au fil des ans. Cette méthode est devenue populaire en raison de l'efficacité des méthodes numériques pour résoudre les LMI et de sa capacité à gérer la synthèse multicritère.

DÉFINITION

Soient P_0 et $P_i, i \in I_n$, une famille de matrices symétriques de $\mathbb{R}^{p \times p}$ et le vecteur $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Une inégalité linéaire matricielle (LMI) stricte (ou non stricte) en $x_i, i \in I_n$ s'exprime comme suit :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i > 0 \quad (\text{resp. } \geq 0).$$

Notez que l'ensemble E défini par $E = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) > 0\}$ est convexe.

Les types les plus courants de problèmes d'optimisation convexe sous forme d'LMI sont :

- *Problèmes de faisabilité* : Il s'agit de trouver un vecteur x tel que la contrainte convexe $F(x) > 0$ soit satisfaite. Ce problème peut être résolu en minimisant un scalaire t pour lequel :

$$-F(x) < t \cdot \mathcal{I}.$$

Si la valeur minimale de t est négative, le problème est dit réalisable.

- *Problèmes de valeurs propres* : Il s'agit de minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice symétrique A , sous une contrainte LMI linéaire en B :

– Minimiser λ

– Sous les contraintes

$$\begin{cases} \lambda \mathcal{I} - A > 0 \\ B > 0 \end{cases}$$

Ces problèmes d'optimisation convexe peuvent être résolus en utilisant diverses méthodes [BEGFB94], [CB12].

2.8.2 Inégalités Matricielles Bilinéaires

Les problèmes de conception, tels que le contrôle et l'observation, sont souvent formulés en tant qu'inégalités matricielles bilinéaires (BMI), qui posent des défis significatifs pour leur résolution avec les outils numériques conçus pour les inégalités matricielles linéaires (LMI). Jusqu'à présent, il n'existe aucune méthode exacte pour résoudre ces problèmes, bien que des algorithmes heuristiques aient été développés.

2.8.2.1 Formulation des Inégalités Matricielles Bilinéaires

Une BMI pour $x_i, i \in I_n$, se présente sous la forme d'une contrainte :

$$F(x) = P_0 + \sum_{i=1}^n x_i P_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j P_{ij} > 0 \quad (\text{resp. } \geq 0)$$

Où les matrices P_i et P_{ij} de $\mathbb{R}^{n \times n}$ sont symétriques. Les BMI, souvent non convexes, peuvent présenter de multiples solutions locales et ne se prêtent pas aux techniques d'optimisation convexe utilisées pour les LMI. Cependant, des approches heuristiques et des méthodes de simplification permettent de résoudre certains problèmes de BMI en les ramenant à des problèmes de LMI [RW06].

2.8.3 Conditions de stabilité

La stabilité est une préoccupation majeure dans les systèmes de contrôle. Un problème notable des systèmes de contrôle logique flou conventionnels est la difficulté d'analyser leur stabilité et de concevoir des lois de contrôle de manière systématique.

Avec l'introduction des modèles flous de Takagi-Sugeno (T-S), l'analyse de la stabilité des systèmes de contrôle flou est devenue plus accessible et peut être abordée de la même manière que pour les systèmes de contrôle conventionnels. En particulier, l'analyse de la stabilité des systèmes flous T-S s'appuie largement sur la théorie de la stabilité de Lyapunov, en utilisant diverses fonctions de Lyapunov, notamment les fonctions de Lyapunov quadratiques communes (ou globales) et non quadratiques.

2.8.3.1 Analyse de Stabilité Basée sur les Fonctions de Lyapunov Quadratiques Communes

Nous devons nous concentrer sur l'analyse de la stabilité des modèles flous autonomes de Takagi-Sugeno (T-S) mentionnés ci-dessous :

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^r h_i(\xi) A_i x \quad (2.21)$$

La forme la plus couramment utilisée de fonctions de Lyapunov dans l'étude de la stabilité, du contrôle et de l'estimation d'état des systèmes flous de type Takagi-Sugeno (TS) est la forme quadratique. En effet, cette classe de fonctions joue un rôle très important dans le contrôle des systèmes représentés par les systèmes flous TS. L'expression d'une telle fonction prend la forme suivante [HBRA15] :

$$V(x) = x^T P x \quad P = P^T > 0 \quad (2.22)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov quadratique le long des trajectoires du système (2.21), est donnée par :

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i(z) (A_i^T P + P A_i) \right) x \quad (2.23)$$

Le théorème suivant résume les conditions de stabilité LMIs proposées par [TS92] :

Théorème: Le modèle flou T-S décrit par l'équation (2.21) est considéré comme asymptotiquement stable, s'il existe une matrice définie positive P telle que les inégalités linéaires matricielles (LMI) suivantes soient satisfaites pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$:

$$A_i^T P + P A_i < 0$$

2.8.3.2 Analyse de Stabilité Non Quadratique :

Sélection de la fonction de Lyapunov

Les deux formes les plus couramment utilisées de la fonction de Lyapunov non quadratique sont les fonctions par morceaux et polyquadratiques, bien qu'il en existe d'autres.

- **Fonctions de Lyapunov continues par morceaux** : il existe deux modèles dans cette forme de fonctions :

1. Le premier type est utilisé uniquement dans le contexte des systèmes flous TS avec des fonctions d'activation à support local. Son principe consiste à partitionner l'espace d'état contenant l'origine [Fen03].

$$V(x(t)) = \begin{cases} \{x^T(t)P_i x(t)\} & \text{pour } x(t) \in \{X_i\}, i \in I_0 \\ \left[\begin{array}{c|c} x(t) & 1 \end{array} \right]^T \bar{P}_i \left[\begin{array}{c|c} x(t) & 1 \end{array} \right] & \text{pour } x(t) \in \{X_i\}, i \in I_1 \end{cases} \quad (2.24)$$

2. Le deuxième type, est pour les fonctions d'activation à support global, où le partitionnement dans ce cas est impossible à réaliser. Il est donné par [CB12].

$$V(x(t)) = \max (V_1(x(t)), V_2(x(t)), \dots, V_r(x(t))), \quad (2.25)$$

$$V_i(x(t)) = x^T P_i x, \quad P_i \geq 0, \quad i \in I_r$$

- **Fonctions de Lyapunov polyquadratiques** Ce type de candidat à la fonction de Lyapunov est basé sur l'interpolation de plusieurs fonctions quadratiques. Il existe deux types :

1. *Fonction de Lyapunov floue* : c'est la forme la plus connue elle partage les mêmes fonctions d'appartenance que celles du système flou.

Elle est défini par [MGBK16]:

$$V(x(t)) = x^T(t) \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) P_i x(t) \quad (2.26)$$

2. *Fonction de Lyapunov Intégrale Linéaire (LILF)* : [MPA09], [RW06] ont proposé une nouvelle forme basée sur l'intégration des fonctions de Lyapunov floues comme fonction d'intégrale curviligne. Cette fonction a la structure suivante :

$$V(x(t)) = 2 \int_{\Gamma(0,x)} \mathfrak{S}(\phi) d\phi \quad (2.27)$$

Où $\Gamma(0, x)$ représente n'importe quel chemin de l'origine à l'état actuel x , $\phi \in \mathbb{R}^{n_x}$ est un vecteur fictif pour l'intégrale, et $d\phi \in \mathbb{R}^{n_x}$ est un vecteur de déplacement infinitésimal. $\mathfrak{S} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur dépendant de l'état $x(t)$, qui peut être considéré physiquement comme un vecteur de force.

De plus, pour que la fonction (2.27) soit une fonction candidate de Lyapunov,

l'intégrale curviligne doit être indépendante du chemin.

En supposant $\mathfrak{S}(x) = [\mathfrak{S}_1(x) \dots \mathfrak{S}_n(x)]^T$, une condition nécessaire et suffisante pour confirmer l'indépendance du chemin de (2.27) peut être dérivée du lemme suivant :

Lemme

Si $\mathfrak{S}(x)$ est une fonction indépendante du chemin, alors

$$\frac{\partial \mathfrak{S}_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial \mathfrak{S}_j(x)}{\partial x_i} = 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 \text{ avec } i \neq j \quad (2.28)$$

La fonction vectorielle est $\mathfrak{S}(x)$.

S'appuyant sur ce lemme, Rhee et Won ont démontré que la LILF (2.27) est indépendante du chemin en imposant la structure suivante pour $\mathfrak{S}(x)$ [RW06]:

$$\mathfrak{S}(x) = \sum_1^r h_i(x) P_i x \quad (2.29)$$

avec

$$P_i = \begin{bmatrix} d_{1,1}^{\alpha_{i1}} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{1,2} & d_{2,2}^{\alpha_{i2}} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_{n-1,n} \\ p_{1,n} & \cdots & p_{n-1,n} & d_{n,n}^{\alpha_{in}} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

• **Fonctions de Lyapunov Polyhédriques**

Cette classe de fonctions de Lyapunov, basée sur la norme ∞ de l'état, est structurée comme suit [AAA12] :

$$V(x) = \|P^T x\|_\infty \quad (2.31)$$

Où $P \in \mathbb{R}^{n_x \times s}$ est une matrice de plein rang par lignes. Bien que les conditions de stabilité, à la fois nécessaires et suffisantes, puissent être extraites en utilisant des fonctions de Lyapunov polyhédriques.

Ces fonctions sont uniquement adaptées aux systèmes à Paramètres Variant Linéairement (LPV) dont les paramètres varient à un rythme arbitrairement rapide. En outre, ces fonctions entraînent un cadre de contrôle non convexe, ce qui peut poser des défis computationnels.

Cette spécificité les rend particulièrement utiles dans les contextes où les paramètres du système peuvent changer rapidement et de manière imprévisible, mais elle implique

également une complexité accrue lors de la conception et de l'analyse des systèmes de contrôle qui les utilisent.

- **Fonctions de Lyapunov Homogènes**, sont formulées comme suit :

$$V_m(x) = x^T P_m x \quad (2.32)$$

où $P_m \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ représente une matrice homogène de degré m . Cela signifie que les entrées de la matrice sont des formes homogènes de degré m dans le réel à q variables. Ce type de fonctions de Lyapunov peut être vu comme une extension des fonctions de Lyapunov floues (2.26), et leur compétence à réduire le conservatisme par rapport à (2.26) a été confirmée. Malgré leur efficacité, ces fonctions posent un défi significatif pour l'analyse de stabilité. La demande computationnelle associée à leur construction augmente exponentiellement avec la dimension du système et le nombre de sommets dans le polytope matriciel [CGTV03].

Pour les systèmes à Paramètre Variant (LPV) avec des paramètres qui varient à un rythme arbitrairement rapide, les fonctions de Lyapunov polyédriques sont également utilisées. Cependant, ces fonctions résultent en un cadre de contrôle non convexe, ce qui peut poser des défis computationnels.

1. Stabilité non quadratique dépendant des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance :

L'utilisation d'une fonction de Lyapunov floue entraîne l'apparition des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance sous les conditions de stabilité, ce qui provoque la perte de la propriété de convexité (dans le cas continu).

Pour résoudre ce problème, diverses méthodes ont été proposées. Une approche consiste à supposer que les limites des dérivées temporelles sont connues, comme suggéré dans des études telles que [Bla01],[THW03] .

La dérivée temporelle de (2.26) est donnée par :

$$\dot{V}(x) = x^T A_\xi^T P_\xi x + x^T P_\xi A_\xi x + x^T \dot{P}_\xi x \quad (2.33)$$

Où $P_\xi = \sum_{i=1}^r h_i(\xi) P_i$ et $\dot{P}_\xi = \sum_{i=1}^r \dot{h}_i(\xi) P_i$

Le système flou autonome TS (2.21) est alors stable si :

$$A_z^T P_z + P_z A_z + \dot{P}_z < 0 \quad (2.34)$$

en supposant que $|\dot{h}_k(\xi(t))| \leq \phi_k$ alors:

$$\sum_{k=1}^r h_k(\xi(t)) P_k \leq \sum_{k=1}^r \phi_k(x^i(t)) P_k \quad (2.35)$$

Ainsi, parmi les premières conditions LMI pour l'analyse de stabilité non quadratique des systèmes flous TS, nous trouvons celles données par les théorèmes suivants :

Théorème:

Supposons que $|\dot{h}_k(\xi(t))| \leq \phi_k$ pour $k \in \{1, \dots, r-1\}$. Le système flou autonome TS (2.26) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P_i = P_i^T > 0$ telles que [THW03] :

$$\begin{aligned} P_k &\geq P_r, \quad k \in \{1, \dots, r-1\} \\ \sum_{k=1}^{r-1} \phi_k (P_k - P_r) + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) &< 0, \quad i \leq j \end{aligned} \quad (2.36)$$

D'autres conditions moins conservatrices sont proposées par [MPSM09] en introduisant une matrice de relaxation présentée dans le théorème suivant

Théorème

Supposons que $|\dot{h}_k(\xi(t))| \leq \phi_k$ pour $\forall k \in \{1, \dots, r\}$. Le modèle T-S autonome (2.26) est stable s'il existe des matrices $P_i = P_i^T > 0$ et X telles que [MPSM09] :

$$\begin{aligned} P_i + X &\geq 0, \quad k \in \{1, \dots, r\} \\ \sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + X) + \frac{1}{2} (A_j^T P_i + P_i A_j + A_i^T P_j + P_j A_i) &< 0, \quad i \leq j \end{aligned} \quad (2.37)$$

Toujours [MPSM09] proposé autre conditions supplémentaires, cette fois en incorporant plusieurs matrices de relaxation. Ces conditions ont facilité la dérivation des points clés encapsulés dans le théorème suivant :

Théorème

Supposez que $|\dot{h}_k(\xi(t))| \leq \phi_k$ pour $k = \{1, \dots, r\}$. Le système flou autonome TS (1.34) est stable s'il existe des matrices symétriques $P_i = P_i^T > 0$, M_1, M_2 et M_3 telles que [MPA09] :

$$\begin{aligned} & P_i + M_3 > 0, \quad i \in \{1, \dots, r\} \\ & \left[\begin{array}{cc} \sum_{k=1}^r \phi_k (P_k + M_3) - M_1 A_i - A_i^T M_1^T & (*) \\ P_i - M_2 A_i + M_1^T & M_2 + M_2^T \end{array} \right] < 0, \quad i \in \{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (2.38)$$

La stratégie consistant à utiliser des bornes pour contourner le problème des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance conduit à des résultats locaux. Plus précisément, la dérivée des fonctions d'appartenance peut être reformulée comme suit [Che17] :

$$\dot{h}_i(\xi(t)) = \sum_{j=1}^q \dot{\xi}_j(t) \frac{\partial h_i(\xi_j(t))}{\partial \xi_j(t)}$$

2. Stabilité non quadratique indépendante des dérivées temporelles des fonctions d'appartenance :

Dans le même esprit, et afin d'éviter l'apparition de dérivées temporelles des fonctions d'appartenance sous les conditions de stabilisation, les auteurs de [RW06] et [Gue14] ont proposé des conditions de stabilité basées sur la fonction de Lyapunov définie à partir de l'intégrale curviligne (2.27).

$$\tilde{V}(x) = \dot{x} \sum_{i=1}^r h_i(x) P_i x + x \sum_{i=1}^r h_i(x) P_i \dot{x} < 0 \quad (2.39)$$

Pour établir les conditions de stabilité du système flou susmentionné (2.21), le lemme suivant est essentiel.

Lemme

Les fonctions d'appartenance des règles floues satisfont à l'inégalité (2.40), et le nombre maximum de règles floues actives à un instant donné est η .

$$\sum_{i=1}^r h_i^2(x) - \frac{2}{(\eta - 1)} \sum_{i=1}^r \sum_{j>i} h_i(x) h_j(x) \geq 0 \quad (2.40)$$

Où $1 < \eta \leq r$

Les premières conditions de stabilité proposées à partir d'une LILF sont ensuite rappelées par le théorème suivant.

Théorème

Le système flou autonome TS (2.21) est globalement asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P_i > 0$ (comme défini dans (2.30)) et $X \geq 0$ telles que [RW06] :

$$\begin{aligned} P_i A_i + A_i^T P_i + (\eta - 1)X &< 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / 1 < s \leq r \\ P_i A_j + A_j^T P_i + P_j A_i + A_i^T P_j - 2X &< 0, \quad i < j \end{aligned} \quad (2.41)$$

où η représente le nombre maximum de règles floues simultanément actives ($1 < \eta \leq r$).

Pour réduire le conservatisme dans les conditions de stabilité proposées par [RW06] et [Gue14] a offert de nouvelles conditions relaxées présentées dans le théorème suivant. **Théorème**

Le système flou autonome T-S (2.21) est globalement asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P_1 > 0$ (comme défini dans (2.30)), U_z et V_z telles que [Gue14] :

$$\begin{aligned} \Xi_{ii} &< 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} \\ \frac{2}{r-1}\Xi_{ii} + \Xi_{ij} + \Xi_{ji} &< 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, r\}^2 / i \neq j \end{aligned} \quad (2.42)$$

Avec

$$\Xi_{ij} = \begin{bmatrix} U_j A_i + A_i^T U_j^T & (*) \\ P_i + V_j A_i - U_j^T & -V_j - V_j^T \end{bmatrix}$$

3. Stabilité Non Quadratique Basée sur des Fonctions Morceaux Continus :

Comparée à la forme quadratique (2.22), les conditions de stabilité obtenues à partir de fonctions morceaux continus (2.24) sont moins restrictives.

Le premier travail enregistré dans ce contexte est celui de [JRA99] où il a écrit les conditions de stabilité des modèles TSF affines ($\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(t)) (A_i x(t) + a_i)$) sous forme d'ILM, en utilisant la fonction (2.25) et le lemme de la procédure fournissant les résultats suivants :

Théorème

Le système flou T-S (1.34) est asymptotiquement stable, s'il existe des matrices

$P_i = P_i^T > 0, i = 1 \dots r$ et des scalaires $\tau_{ijk} \geq 0$, tels que [Cha02]:

$$A_i^T P_j + P_j A_i + \sum_{k=1}^r \eta_{ijk} (P_j - P_k) < 0, \quad \forall (i, j) \in I_r^2 \quad (2.43)$$

Exemple :

Dans cet exemple, nous comparons l'analyse de stabilité d'un système flou autonome TS (2.21) en utilisant la fonction de Lyapunov quadratique et la fonction de Lyapunov d'intégrale linéaire, qui est l'objectif principal de cette thèse.

Considérons le système flou de Takagi-Sugeno (TS) suivant avec deux variables de prémisses :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ \frac{1}{5}(3b-2) & \frac{1}{5}(3a-4) \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ \frac{1}{5}(2b-3) & \frac{1}{5}(2a-6) \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ b-2 & \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'appartenance pour $i = 1, 2$ sont :

$$w_i^1(x_i) = \begin{cases} (1 - \sin(x_i)) / 2 & \text{pour } |x_i| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{pour } x_i > \pi/2 \\ 1 & \text{pour } x_i < -\pi/2 \end{cases}$$

$$w_i^2(x_i) = 1 - w_i^1(x_i)$$

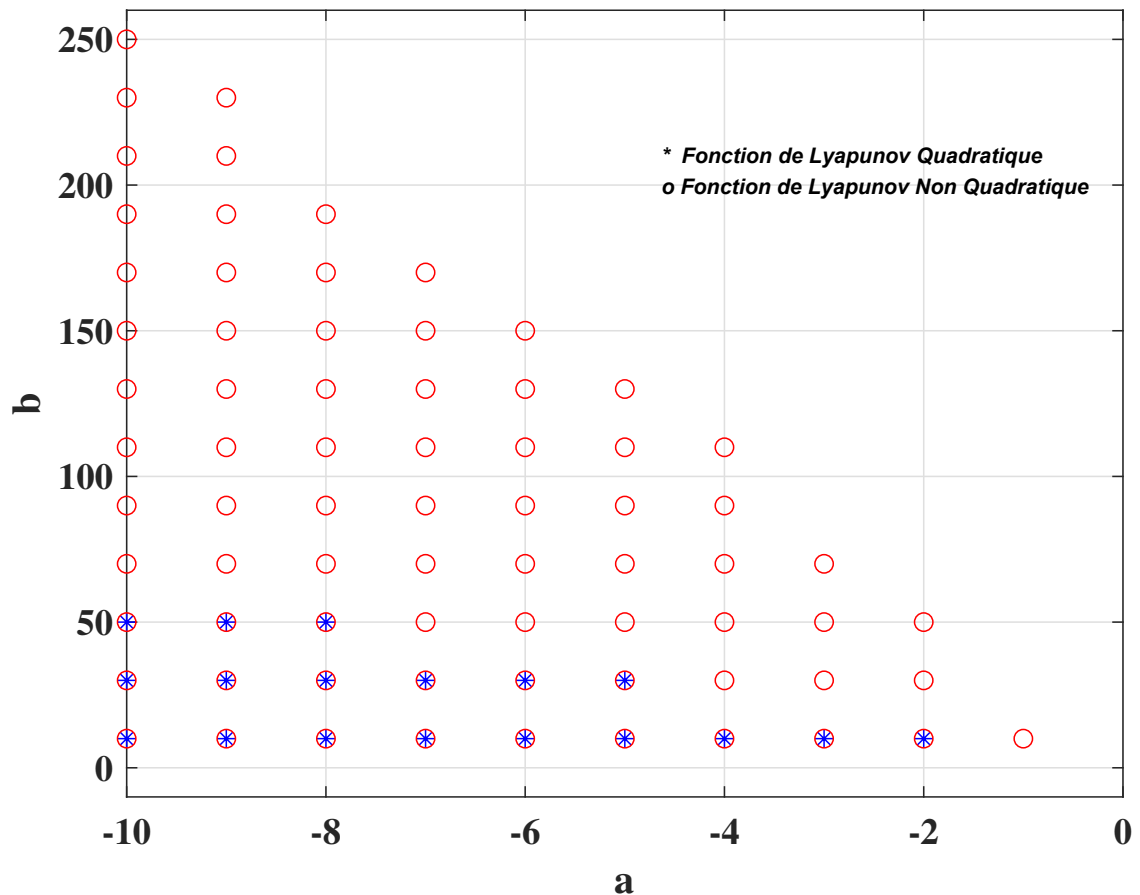


Fig 2.11: Région de stabilité

En utilisant la boîte à outils Yalmip conjointement avec le solveur mosek, nous avons étudié les régions de stabilité pour diverses valeurs de a et b .

Comme illustré dans la (2.11) la région assurant la stabilité en adoptant la méthodologie de la fonction de Lyapunov d'intégrale linéaire référencée comme le théorème 2, marquée par (o), et les régions de l'approche conventionnelle de la fonction de Lyapunov sont marquées par (*).

À l'examen, il est évident que la fonction de Lyapunov d'intégrale linéaire établit un ensemble de prérequis de stabilité plus relaxés par rapport à l'approche conventionnelle.

2.9 Conclusion

Ce chapitre a offert une exploration approfondie des systèmes flous, en se concentrant particulièrement sur les systèmes de type Takagi-Sugeno (TS). Il a débuté par une introduction aux fondamentaux des modèles flous, établissant une base conceptuelle solide

pour appréhender leur complexité et leur polyvalence. Par la suite, diverses structures multi-modèles ont été examinées, mettant en relief les méthodes de construction et d'adaptation des systèmes TS flous à différents contextes.

La construction des modèles TS flous a été explorée en détail, en présentant les étapes essentielles et les considérations clés pour développer des modèles précis et performants. L'importance de la transformation polytopique dans la manipulation et l'analyse de ces modèles a été mise en avant, soulignant son rôle dans leur simplification et leur amélioration.

Par ailleurs, ce chapitre a également abordé les systèmes non linéaires et leurs méthodes de commande, en mettant en lumière leur nature spécifique. Il a notamment mis en évidence les défis posés par l'absence de superposition et la présence de multiples points d'équilibre, nécessitant des approches adaptées.

L'analyse de la stabilité des systèmes TS flous a constitué un volet majeur de ce chapitre. Les conditions de stabilité ont été discutées sous des aspects tant quadratiques que non quadratiques. Cette section a non seulement clarifié les critères de stabilité des systèmes TS flous, mais elle a également insisté sur la nécessité d'une approche rigoureuse pour garantir leur fiabilité et leur efficacité.

En résumé, ce chapitre a mis en évidence la complexité et l'efficacité des systèmes TS flous. Il a souligné l'importance d'une compréhension approfondie de leur structure et de leur fonctionnement, menant à des applications robustes et significatives dans les domaines du contrôle et de l'analyse des systèmes. La flexibilité des modèles TS, combinée à une méthodologie d'analyse rigoureuse, leur confère une applicabilité étendue face aux défis complexes de l'ingénierie et de la recherche.

Commande des systèmes non-linéaires et du

SynRM

Introduction

Le contrôle des systèmes non linéaires constitue un défi majeur en ingénierie en raison de leur comportement complexe. Les approches classiques de commande, bien que performantes dans certaines conditions, montrent rapidement leurs limites face aux incertitudes et aux dynamiques fortement non linéaires. De plus, la nécessité de disposer d'un modèle précis du système pose un problème, car les erreurs de modélisation sont souvent inévitables en pratique. Il est donc essentiel d'adopter des stratégies de commande adaptées pour garantir la stabilité et les performances des systèmes non linéaires.

Pour répondre à ces enjeux, cette partie explore différentes stratégies de commande adaptées aux systèmes non linéaires et flous en se focalisant sur la conception de contrôleurs. Nous aborderons dans un premier temps des méthodes classiques, telles que la commande linéarisante entrée-sortie et le Backstepping, qui permettent de transformer un système non linéaire en un système linéaire équivalent sous certaines hypothèses. Toutefois, ces approches restent sensibles aux variations des paramètres et aux perturbations extérieures, ce qui souligne la nécessité de techniques plus robustes.

Ainsi, nous introduirons des approches avancées de commande robuste, dont la commande par mode glissant, la méthode de réaménagement de Lyapunov et la commande Backstepping robuste. Ces techniques visent à garantir la stabilité malgré des incertitudes et des perturbations en s'appuyant sur des concepts d'approximation adaptative et de compensation des incertitudes.

Enfin, une attention particulière sera portée à la synthèse de contrôleurs pour les systèmes flous de type TS, qui repose principalement sur l'utilisation de la fonction de

Lyapunov. Nous présenterons deux approches majeures : les fonctions quadratiques communes et les fonctions non quadratiques, qui permettent d'assurer la stabilité asymptotique des systèmes flous en boucle fermée et d'adapter dynamiquement la commande en fonction des variations du système.

L'objectif de cette partie est d'offrir une vision approfondie et comparative des différentes stratégies de commande des systèmes non linéaires et flous, en mettant en évidence leurs principes fondamentaux, leurs avantages et leurs domaines d'application

CHAPITRE 3

LES COMMANDES NON LINÉAIRES ET ROBUSTES

3.1 Introduction

Les systèmes non linéaires posent des défis majeurs en matière de commande en raison de leur complexité et de l'inapplicabilité du principe de superposition. Les méthodes traditionnelles de commande, basées sur des modèles linéaires, bien qu'efficaces dans certains cas, s'avèrent souvent inadaptées lorsque les non-linéarités du système sont significatives. De plus, ces approches reposent généralement sur l'hypothèse que le modèle du système est parfaitement connu, ce qui est rarement le cas en pratique.

Dans ce chapitre, nous explorerons différentes stratégies de commande adaptées aux systèmes non linéaires. Nous commencerons par examiner des techniques classiques telles que la commande linéarisante entrée-sortie et le Backstepping, qui permettent de transformer un système non linéaire en un équivalent linéaire sous certaines conditions. Nous analyserons ensuite les limites de ces méthodes face aux incertitudes et aux erreurs de modélisation.

Pour pallier ces limitations, nous nous intéresserons aux approches de contrôle robustes, qui offrent une meilleure résilience face aux perturbations et aux imprécisions du modèle. En particulier, nous présenterons trois techniques majeures : la commande par mode glissant, la méthode de réaménagement de Lyapunov (Lyapunov redesign method) et la commande Backstepping robuste. Ces méthodes s'appuient sur des concepts d'approximation adaptative et de compensation des incertitudes afin de garantir la stabilité du système, même en présence de variations dynamiques importantes.

L'objectif de ce chapitre est ainsi de fournir une vue d'ensemble des approches mod-

ernes de commande des systèmes non linéaires, en mettant en lumière leurs principes fondamentaux, leurs avantages et leurs domaines d'application.

Ce chapitre expose également une série des résultats pertinents en matière de synthèse de contrôleurs stabilisateurs pour les systèmes flous TS, en s'appuyant sur ces deux types de fonctions de Lyapunov et en intégrant le théorème des valeurs moyennes.

3.2 Méthodes de commande des systèmes non linéaires

Dans le domaine de la commande des processus, il existe deux grandes catégories de méthodes, en fonction de la nature des systèmes considérés. La première catégorie concerne les systèmes linéaires stationnaires, qui se subdivisent en trois phases principales [DH11]:

Les méthodes fréquentielles classiques (1930-60) : Ces méthodes, basées sur des principes théoriques et des critères graphiques, sont utilisées pour évaluer la robustesse des systèmes.

Les méthodes optimales (années 60) : Introduisant des techniques basées sur la représentation d'état des systèmes, elles incluent notamment les méthodes LQ (linéaires quadratiques).

La renaissance des méthodes fréquentielles (années 80) : Cette période marque un retour à l'accent sur la robustesse, avec un intérêt particulier pour les contraintes sur certaines normes matricielles, menant au développement de la méthode H^∞ .

La seconde catégorie concerne les méthodes de commande adaptées aux systèmes non linéaires. Ces systèmes présentent de nombreux défis, et les approches existantes comprennent la linéarisation entrée-sortie, l'intégrateur Backstepping, la passivité et la commande basée sur la fonction de Lyapunov. Toutefois, ces méthodes présentent des limites, notamment en termes de robustesse.

Parmi les stratégies d'amélioration de la commande des systèmes non linéaires, la méthode H^∞ se distingue. Elle représente une extension des méthodes linéaires aux contextes non linéaires, et a conduit au développement des méthodes de séquençement de gains. Les méthodes LPV (Linear Parameter-Varying) offrent également un potentiel significatif pour traiter la robustesse et la performance dans des scénarios non linéaires.

Il est difficile de couvrir exhaustivement les méthodes de conception et d'analyse du contrôle non linéaire dans un seul chapitre, d'où la nécessité de simplifier certains

détails techniques. Les sections suivantes de ce chapitre se concentrent sur des méthodes spécifiques de contrôle des systèmes non linéaires, incluant la commande par linéarisation petit signal, la commande par rétroaction, et l'intégrateur Backstepping.

3.2.1 Commande par linéarisation en régime de petit signal

La linéarisation en petit signal est une méthode employée pour simplifier les systèmes complexes en négligeant les termes non linéaires. Cette approche est particulièrement utile pour l'analyse des amplificateurs de puissance et des circuits électroniques [Ham19, Nob17]. Elle consiste à linéariser le système autour d'un point d'équilibre spécifique, puis à développer un contrôleur stabilisateur en utilisant une rétroaction d'état linéaire, souvent via des techniques telles que le placement de pôles.

Considérons un système non linéaire défini par :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (3.1)$$

Où la fonction $f(x, u)$ est continûment dérivable dans un domaine $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Nous commençons par linéariser le système autour d'un point d'équilibre x_e , assumé pour simplifier à l'origine, soit $x = 0, u = 0$. Ensuite, nous étudions la linéarisation autour d'une trajectoire nominale $x^*(t)$. Finalement, nous introduisons le concept de programmation de gain, une technique de contrôler par rétroaction basée sur la linéarisation en plusieurs points de fonctionnement.

L'objectif de la linéarisation est d'approximer le système non linéaire donné par l'équation (3.1) à l'aide d'un modèle linéaire de la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.2)$$

Avec A et B étant des matrices de dimensions respectives $n \times n$ et $n \times m$. Il est important de noter que ce modèle linéaire représente une approximation précise du système non linéaire uniquement à proximité du point de linéarisation.

- **Validité de l'approximation linéaire** : Le modèle linéarisé est une bonne approximation de la fonction non linéaire seulement lorsque x est proche du point d'équilibre x_e . Cependant, si x s'éloigne significativement de x_e , l'approximation

devient moins précise. Ainsi, en cas d'erreurs de modélisation ou de perturbations externes, une loi de commande linéaire basée sur cette approximation peut se révéler inadéquate si la trajectoire s'écarte trop de l'équilibre.

- ***Efficacité des techniques de commande par retour*** : Ces techniques, fondées sur le modèle linéaire, sont particulièrement efficaces pour les systèmes non linéaires lorsque l'incertitude est faible. Elles permettent au contrôleur de maintenir la trajectoire à proximité du point d'équilibre x_e . Les contrôleurs linéaires conçus via la linéarisation en petit signal se révèlent performants en boucle fermée, notamment lorsque les non-linéarités du système sont limitées ou ne conduisent pas à une déstabilisation significative.

3.2.1.1 Linéarisation autour d'un point d'équilibre

La linéarisation autour d'un point d'équilibre consiste à approximer une fonction ou un système d'équations différentielles près d'un point d'équilibre en utilisant des approximations du premier ordre. Cette technique est particulièrement utile pour simplifier les calculs et pour l'analyse des systèmes non linéaires proches de leur point d'équilibre.

Lorsque nous linéarisons le système non linéaire donné par l'équation (3.1) autour du point $(x, u) = (0, 0)$, le modèle linéaire résultant est décrit par l'équation (3.2). Dans ce modèle, les matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont définies comme suit :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right|_{x=0, u=0} ; \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right|_{x=0, u=0} . \quad (3.3)$$

Si on considère que la paire (A, B) peut être stabilisée, alors il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que les valeurs propres de $(A + BK)$ se situent strictement dans le demi-plan gauche du plan complexe.

Ainsi, en choisissant la loi de commande $u = Kx$, le modèle linéaire en boucle fermée est représenté par:

$$\dot{x} = (A + BK)x. \quad (3.4)$$

Étant donné que toutes les valeurs propres de $(A + BK)$ se situent dans le demi-plan gauche, la trajectoire $x(t)$ converge asymptotiquement vers zéro.

Toutefois, il est important de noter que la stabilité asymptotique obtenue par linéarisation est localement limitée. Cela signifie que la convergence asymptotique de $x(t)$ vers

zéro est garantie seulement si la condition initiale $x(0)$ est suffisamment proche de $x = 0$. Si cette condition n'est pas satisfaite, la trajectoire pourrait ne pas converger vers zéro, voire devenir illimitée.

Considérons à présent un système non linéaire défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ y = h(x, u), \end{cases} \quad (3.5)$$

Où $h(x, u)$ est continûment différentiable dans un domaine $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

La linéarisation de ce système autour de $x = 0, u = 0$ aboutit à un modèle linéaire décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (3.6)$$

Avec A, B définis comme précédemment, et les matrices $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ obtenues par les dérivées partielles de h :

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) \right|_{x=0, u=0} ; \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) \right|_{x=0, u=0} .$$

Si la paire (A, B) est stabilisable et que (A, C) est détectable, il est alors possible de concevoir un contrôleur de retour de sortie dynamique à partir du modèle linéaire, pour assurer la régulation du système.

Exemple

Considérons un système non linéaire défini par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1 x_3 - x_2 u, \\ \dot{x}_3 = x_1 + u + x_3 u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, u^* = 0$ constitue un point d'équilibre pour ce système.

La linéarisation du système autour de ce point d'équilibre donne:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Supposez que nous visons à réguler la sortie avec des pôles en boucle fermée placés à $s = -1 \pm j$ et $s = -2$, alors l'équation caractéristique désirée est donc :

$$s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0.$$

Pour cela, nous sélectionnons la loi de commande suivante :

$$u = -5x_1 - 6x_2 - 4x_3.$$

Alors la dynamique en boucle fermée devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1x_3 + 5x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 5x_1x_3 - 6x_2x_3 - 4x_3^2. \end{cases}$$

La linéarisation de ce système en boucle fermée, représentée par les équations ci-dessus, donne :

$$\tilde{A} = A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de \tilde{A} , comme attendu, sont $\lambda_{1,2} = -1 \pm j$ et $\lambda_3 = -2$.

3.2.1.2 Linéarisation Autour d'une Trajectoire

Considérons le système non linéaire donné par l'équation (3.1). Notre objectif est de concevoir une loi de commande qui guide l'état $x(t)$ pour qu'il suive un signal désiré $x_d(t)$.

L'erreur de suivi est définie par $e(t) = x(t) - x_d(t)$. Lorsqu'un contrôleur de suivi est élaboré en se basant sur une linéarisation effective autour d'un point opérationnel $x_e \in \mathbb{R}^n$, l'état $x(t)$ tend à suivre $x_d(t)$.

Cependant, si la différence entre $x(t)$ et x_e augmente, l'approximation linéaire peut devenir moins précise. En conséquence, un contrôleur linéaire conçu sous cette approximation pourrait ne plus être approprié, risquant d'éloigner davantage $x(t)$ de l'équilibre x_e .

Pour un suivi efficace, il est souvent préférable de concevoir une loi de commande basée sur la linéarisation autour de la trajectoire souhaitée $x_d(t)$. Cette approche implique que $x_d(t)$ soit connu à l'avance. Dans le cas où $x_d(t)$ n'est pas directement accessible et doit être généré dynamiquement, éventuellement par un contrôleur externe, une stratégie consiste à appliquer une linéarisation en petit signal autour d'une trajectoire nominale $x^*(t)$.

Cette trajectoire nominale $x^*(t)$ est établie en relation avec un signal de commande nominal $u^*(t)$ et des conditions initiales $x^*(0) = x_0^*$, de manière à ce que $x^*(t)$ soit conforme à la dynamique du système.

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t)), \quad x^*(0) = x_0^*.$$

Soit $\tilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$ et $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*(t)$. Alors

$$\dot{\tilde{x}} = f(x, u) - f(x^*, u^*) = f(\tilde{x} + x^*, \tilde{u} + u^*) - f(x^*, u^*). \quad (3.7)$$

En appliquant le développement en série de Taylor à $f(\tilde{x} + x^*, \tilde{u} + u^*)$ autour de (x^*, u^*) , nous obtenons :

$$f(\tilde{x} + x^*, \tilde{u} + u^*) = f(x^*, u^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*) \tilde{x} + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*) \tilde{u} + \mathcal{F}(t, \tilde{x}, \tilde{u})$$

où \mathcal{F} désigne les termes d'ordre supérieur de la série de Taylor. Ces termes satisfont à la condition :

$$\lim_{\|(\tilde{x}, \tilde{u})\| \rightarrow 0} \left(\sup_{i \geq 0} \frac{\|\mathcal{F}(t, \tilde{x}, \tilde{u})\|}{\|(\tilde{x}, \tilde{u})\|^i} \right) = 0$$

Cela signifie que, lorsque \tilde{x} et \tilde{u} diminuent, \mathcal{F} tend vers zéro plus rapidement que

$\|(\tilde{x}, \tilde{u})\|$. Avec cette expansion, l'équation (3.7) peut être réécrite comme :

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*) \tilde{x} + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*) \tilde{u} + \mathcal{F}(t, \tilde{x}, \tilde{u}).$$

Dans une approximation linéaire, on néglige les termes d'ordre supérieur. Ainsi, la linéarisation petit signal de (3.1) autour de la trajectoire nominale $x^*(t)$ s'écrit :

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)\tilde{u},$$

Où z représente l'état du modèle linéaire et les matrices $A(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ sont définies comme :

$$\begin{aligned} A(t) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right|_{x=x^*, u=u^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*, u^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*, u^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*, u^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*, u^*) \end{bmatrix}, \\ B(t) &= \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right|_{x=x^*, u=u^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(x^*, u^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m}(x^*, u^*) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(x^*, u^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m}(x^*, u^*) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

En choisissant la loi de commande $\tilde{u} = K(t)z(t)$, la dynamique en boucle fermée est :

$$\dot{z} = [A(t) + B(t)K(t)]z(t). \quad (3.9)$$

Si la paire $(A(t), B(t))$ est uniformément entièrement contrôlable, il existe alors un $K(t)$ tel que le système en boucle fermée (3.9) soit asymptotiquement stable, impliquant que $z(t) \rightarrow 0$, et donc $x(t) \rightarrow x^*(t)$. Si la trajectoire nominale $x^*(t)$ coïncide avec le signal vectoriel désiré $x_d(t)$, cela conduit à une convergence asymptotique de l'erreur de suivi vers zéro.

Il convient de noter que ces arguments de stabilité sont basés sur le modèle linéaire. En appliquant la même loi de commande au système non linéaire, nous avons :

$$u(t) = K(t)(x(t) - x_d(t)) + u^*(t),$$

et donc :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), K(t)(x(t) - x_d(t)) + u^*(t)).$$

En linéarisant à nouveau le système en boucle fermée autour de $x = x^* = x_d, u = u^*$, nous obtenons :

$$\dot{e}(t) = (A(t) + B(t)K(t))e(t).$$

Lorsqu'on applique une loi de commande linéaire à un système non linéaire, cela résulte en un système en boucle fermée localement stable de manière asymptotique. La notion de localité ici est définie en relation avec la proximité de la trajectoire nominale, c'est-à-dire que la distance $\|x(t) - x^*(t)\|$ doit rester suffisamment faible pour tout $t > 0$.

Si le système non linéaire inclut une fonction de sortie, alors il est également possible de déduire les matrices $C(t)$ et $D(t)$. En linéarisant le système non linéaire (3.5) autour d'une trajectoire nominale $x^*(t)$, on obtient un modèle linéaire exprimé par :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(t)z + B(t)\tilde{u}, \\ \tilde{y} &= C(t)z + D(t)\tilde{u}, \end{aligned}$$

Où $A(t)$ et $B(t)$ sont définies précédemment, alors que $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sont calculées comme suit :

$$C(t) = \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) \right|_{x=x^*(t), u=u^*(t)} ; \quad D(t) = \left. \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) \right|_{x=x^*(t), u=u^*(t)}.$$

Cette approche montre que la linéarisation autour d'une trajectoire offre des résultats semblables à ceux obtenus en linéarisant autour d'un point d'équilibre, la principale différence étant que dans le premier cas, le modèle linéaire change avec le temps.

Remarque : Il est important de noter que la linéarisation en régime de petit signal est une approximation et qu'elle ne peut pas être précise pour tous les cas. Dans la plupart des cas, il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes de commande.

3.2.2 Linéarisation par Rétroaction

Cette section se penche sur la méthode de transformation des non-linéarités en systèmes linéaires par l'application de la rétroaction et le changement de coordonnées. Cette technique, connue sous le nom de linéarisation par rétroaction, est largement reconnue

et fréquemment utilisée dans le domaine du contrôle non linéaire [HS97, HG17, KALL23, WWAD20]. Elle se concentre principalement sur la linéarisation de l'état d'entrée (*input-output linearization*) [AKM⁺20, ACPS15] ou celle de l'espace d'état (*state-space linearization*) [WL⁺07].

Dans la linéarisation de l'état-d'entrée, l'objectif est d'établir une relation linéaire entre les entrées virtuelles (v) et les sorties réelles (y) [Kad00]. Un contrôleur linéaire est ensuite conçu pour le modèle d'entrée-état linéarisé. Cependant, une partie du système reste non linéarisée, exprimée par :

$$\dot{\eta} = q(\eta, \xi) \quad (3.10)$$

Où η est un vecteur de dimension $(n - r)$ composé de variables d'état transformées et q un vecteur de dimension $(n - r)$ de fonctions non linéaires. Les approches de linéarisation entrée-sortie sont limitées aux cas où ces dynamiques résiduelles sont stables.

En ce qui concerne la linéarisation de l'espace d'état, l'objectif est de linéariser la relation entre les entrées modifiées et l'ensemble des variables d'état transformées. Ceci est réalisé en définissant des sorties artificielles, permettant de générer un modèle de rétroaction linéarisé où la dimension d'état est $r = n$.

Un contrôleur linéaire est alors élaboré pour ce modèle linéaire d'entrée-état. Néanmoins, cette méthode peut ne pas simplifier la conception du contrôleur, car la relation entre les entrées modifiées et les sorties originales (y) demeure généralement non linéaire. Ainsi, pour de nombreuses applications de contrôle de processus, la linéarisation entrée-sortie est souvent préférée à la linéarisation de l'espace d'état.

Dans certains cas, il est possible de linéariser simultanément les relations entrée-état et entrée-sortie, si les sorties originales permettent de former un modèle linéaire avec une dimension $r = n$.

3.2.2.1 Linéarisation entrée-état

Considérez une classe de systèmes non linéaires à entrée unique et sortie unique de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.11)$$

Où $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^1$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, et le domaine \mathcal{D} contient l'origine. Maintenant, nous abordons deux questions clés :

1. Existe-t-il un changement de variables non linéaire $z = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = T(x)$, et une entrée de contrôle $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, qui transformeraient le système non linéaire dans la forme partiellement linéaire suivante ?

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = A\xi + Bv \\ y = C\xi \end{cases} \quad (3.12)$$

2. Existe-t-il un changement de variables non linéaire $z = T(x)$ et une entrée de contrôle $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ qui transformeraient le système non linéaire dans la forme complètement linéaire suivante ?

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}v \quad (3.13)$$

Si la réponse à la deuxième question est affirmative, alors nous disons que le système (3.11) est linéarisable par rétroaction.

Si la réponse à la première question est affirmative, alors le système (3.11) est considéré comme linéarisable entrée-sortie.

Ces deux scénarios offrent des avantages significatifs pour la conception du contrôle, car dans les deux cas, il est possible de se baser sur des techniques de conception linéaires pour assurer la stabilité du système en boucle fermée.

Étant donné que tous les systèmes non linéaires ne possèdent pas nécessairement de telles propriétés de linéarisation par rétroaction, il est crucial de comprendre les propriétés structurelles requises pour qu'un système non linéaire soit susceptible d'être linéarisé par rétroaction.

Exemple de linéarisation par retour état-entrée d'un bras manipulateur

Prenons l'exemple d'un bras robotique avec une seule articulation, où l'objectif est de contrôler la position angulaire θ afin de suivre une trajectoire désirée.

La dynamique d'un tel bras robotique peut être représentée par l'équation non linéaire suivante :

$$\tau = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c \sin(\theta)$$

Où :

- θ représente la position angulaire de l'articulation.
- $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ sont respectivement la vitesse et l'accélération angulaires.
- τ est le couple appliqué à l'articulation.
- J est le moment d'inertie du bras.
- b est le coefficient de frottement visqueux.
- c est un coefficient lié à la force gravitationnelle agissant sur le bras.

Pour linéariser cette dynamique, nous pouvons appliquer une technique de retour état-entrée. Cette méthode vise à concevoir un contrôleur qui, en agissant sur le couple τ , permette à l'articulation de suivre précisément la trajectoire souhaitée, malgré la nature non linéaire de sa dynamique. La stratégie de linéarisation implique généralement de définir un nouvel ensemble de variables d'état et de choisir une entrée de contrôle appropriée qui transforme le système non linéaire original en un système linéaire, facilitant ainsi la conception du contrôleur.

Nous visons à concevoir une entrée de contrôle τ qui linéarise le système et nous permet d'appliquer des techniques de contrôle linéaire.

1. Introduisons les variables d'état $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J}(\tau - bx_2 - c \sin(x_1)) \end{cases}$$

2. Choisissons une loi de commande par retour $\tau = \alpha(x) + \beta(x)v$ avec :

$$\begin{cases} \alpha(x) = bx_2 + c \sin(x_1) \\ \beta(x) = J \end{cases}$$

Et une nouvelle entrée v qui est le signal de contrôle que nous utiliserons pour concevoir notre stratégie de contrôle.

3. En appliquant l'entrée de contrôle au système, nous obtenons :

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J}(Jv)$$

En simplifiant, nous avons un système linéaire :

$$\dot{x}_2 = v$$

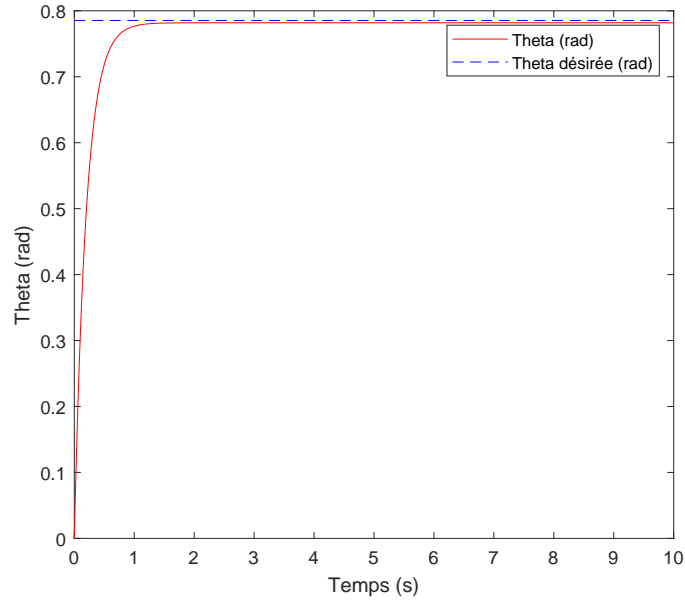


Fig 3.1: Suivi de la position du bras robotique

La représentation dans l'espace d'état du système linéarisé est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

Ce système linéaire peut maintenant être contrôlé en utilisant des méthodes de contrôle linéaire standard, telles que le contrôle PID, pour suivre la trajectoire désirée pour θ .

En utilisant l'entrée de contrôle $\tau = \alpha(x) + \beta(x)v$, nous avons effectivement annulé la non-linéarité du système et créé un double intégrateur, qui est un système bien compris et facilement contrôlable dans le domaine du génie de contrôle.

Exemple de contrôle en altitude d'un quadricoptère par retour état-entrée

Considérons le cas du contrôle en altitude d'un quadricoptère UAV (Véhicule Aérien Sans Pilote). Un quadricoptère est équipé de quatre rotors qui génèrent de la portance et contrôlent la position et l'orientation du véhicule dans l'espace. Pour cet exemple, nous nous concentrons sur le contrôle de l'altitude, un système à une seule entrée et une seule sortie (SISO).

La dynamique verticale du quadricoptère peut être décrite par la seconde loi de Newton,

avec la poussée comme entrée de contrôle et la gravité comme force externe constante.

$$m\ddot{z} = u - mg$$

Où :

- z est l'altitude du quadricoptère.
- \ddot{z} est l'accélération verticale.
- m est la masse du quadricoptère.
- u est la poussée totale générée par les rotors.
- g est l'accélération due à la gravité.

Pour linéariser ce système autour d'un état de vol stationnaire, adoptons une entrée de contrôle qui neutralise la force gravitationnelle et permet un contrôle direct de l'accélération verticale.

1. Avec les variables d'état $x_1 = z$ et $x_2 = \dot{z}$, nous avons :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u}{m} - g$$

2. Concevons l'entrée de contrôle u de la manière suivante :

$$u = m(g + v)$$

Où v est une nouvelle entrée de contrôle virtuelle visant à atteindre l'altitude désirée.

3. En intégrant cette entrée de contrôle dans le système, nous obtenons :

$$\dot{x}_2 = v$$

Le système est ainsi transformé en un double intégrateur, un modèle linéaire facile à contrôler. Cette linéarisation permet l'application de techniques de contrôle linéaire classiques, telles que le contrôle PID, pour atteindre et maintenir l'altitude souhaitée efficacement.

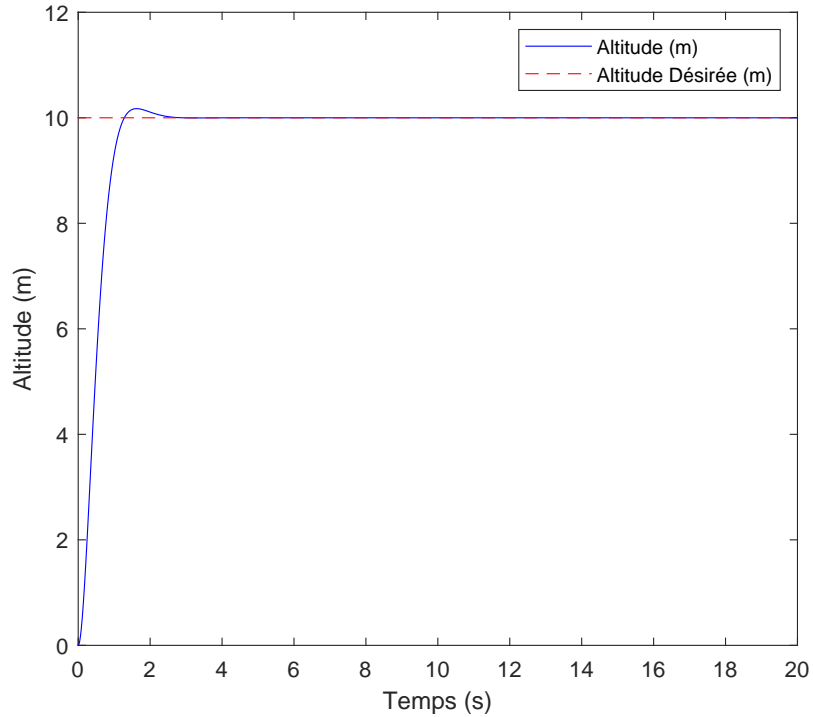


Fig 3.2: Contrôle en altitude d'un quadrotor

3.2.2.2 Linéarisation par Rétroaction Entrée-Sortie

La linéarisation par rétroaction a été largement explorée dans les recherches sur les systèmes non linéaires, comme en témoignent diverses publications [ACPS15],[SKH93],[LML⁺11]. Dans cette sous-section, nous introduisons le principe de linéarisation entrée-sortie.

Considérons le système non linéaire à entrée unique et sortie unique (SISO) suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.14)$$

Où $u \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^n$ et f , g et h sont définies de manière lisse dans $D \subset \mathbb{R}^n$.

La dérivée temporelle de $y = h(x)$ est donnée par

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}(x)f(x) + \frac{\partial h}{\partial x}(x)g(x)u.$$

Si $\frac{\partial h}{\partial x}(x)g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D_0$, alors le système non linéaire est dit avoir un degré relatif de un sur D_0 . Cela indique que la variable de commande u affecte directement la première dérivée de la sortie y ; en d'autres termes, l'entrée et la sortie sont connectées par un seul intégrateur.

Si $\frac{\partial h}{\partial x}(x)g(x) = 0$ (c'est-à-dire, u n'influence pas directement y), alors nous continuons à différencier la sortie jusqu'à ce que u apparaisse explicitement. Pour définir les dérivées de second, troisième ordre, etc., il est pratique d'utiliser le concept de dérivée de Lie, employé en calcul différentiel avancé.

La notation pour la dérivée de Lie de h par rapport à f est définie comme

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x}(x)f(x).$$

Cette notation est utile pour traiter des dérivées successives, comme le montre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} L_f^k h(x) &= L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(L_f^{k-1} h(x) \right) f(x) \\ L_g L_f^k h(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(L_f^k h(x) \right) g(x) \end{aligned}$$

Selon la définition de la dérivée de Lie, si

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x}(x)g(x) = 0,$$

Nous continuons la prise de dérivées jusqu'à ce que $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$, ce qui signifie que l'entrée de commande u apparaît explicitement pour la première fois dans l'équation de la dérivée d'ordre r de la sortie, notée $y^{(r)}$.

On dit que le système non linéaire (3.14) possède un degré relatif r dans une région $D_0 \subset D$ si les conditions suivantes sont remplies pour tout $x \in D_0$:

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h(x) &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-2 \\ L_g L_f^{r-1} h(x) &\neq 0. \end{aligned}$$

Si un système possède un degré relatif r , alors

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u.$$

En conséquence, le système peut être linéarisé en entrée-sortie, car le contrôle par retour d'état

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \left[-L_f^r h(x) + v \right] \quad (3.15)$$

produit la cartographie linéaire entrée-sortie suivante :

$$y^{(r)} = v.$$

Cela correspond simplement à une chaîne de r intégrateurs, qui peuvent être aisément contrôlés par une sélection appropriée de v . Cependant, à moins que $r = n$, il existe d'autres états dans le système qui ne sont pas influencés par l'entrée de commande u . La dynamique de cet ensemble d'états $n - r$ définit ce qu'on appelle les dynamiques zéro du système, qui sont discutées ci-dessous.

En utilisant des outils de géométrie différentielle, on peut démontrer que pour un système avec un degré relatif r , il existe un difféomorphisme $z = T(x)$ qui transforme le système non linéaire (3.14) dans la forme canonique linéarisable entrée-sortie

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \phi(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta} = A_0\zeta + B_0\beta_0^{-1}(\eta, \zeta) [u - \alpha_0(\eta, \zeta)] \\ \dot{y} = C_0\zeta \end{cases} \quad (3.16)$$

Où $z = [\eta^\top \zeta^\top]^\top$, avec $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$, $\zeta \in \mathbb{R}^r$, et (A_0, B_0, C_0) est une représentation sous forme canonique d'un système composé de r intégrateurs en série :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Le difféomorphisme $z = T(x)$, avec $T(0) = 0$, qui transforme le système non linéaire (3.14) dans la forme canonique (3.16) est caractérisé par

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial x} g(x) &= 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n - r \\ T_{n-r+1} &= h(x) \\ T_{n-r+2} &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ T_n &= L_f^{r-1} h(x). \end{aligned}$$

Le système transformé, décrit par les équations (3.16), est considéré comme étant sous une forme normale. En essence, le système non linéaire est décomposé en deux composantes : la dynamique de ζ , qui est linéarisable par un feedback, et les variables η , qui décrivent la dynamique interne du système. La dynamique de ζ peut être linéarisée et contrôlée en employant un contrôleur de feedback de la forme

$$u = \alpha_0(\eta, \zeta) + \beta_0(\eta, \zeta)v$$

Où v peut être ajusté pour déterminer le taux de convergence de la dynamique de ζ ou pour réaliser le suivi d'une consigne. Les fonctions de contrôle de linéarisation par feedback α_0 et β_0 sont déterminées à partir des dérivées de Lie calculées en différentiant la variable de sortie :

$$\alpha_0(\eta, \zeta) = \frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \Big|_{x=T^{-1}(\eta, \zeta)}$$

$$\beta_0(\eta, \zeta) = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \Big|_{x=T^{-1}(\eta, \zeta)} .$$

Les dynamiques zéro sont obtenues en fixant $\zeta = 0$ dans les équations de η :

$$\dot{\eta} = \phi(\eta, 0). \quad (3.18)$$

Un système non linéaire est qualifié de phase minimale si les dynamiques zéro, décrites par l'équation (3.18), possèdent un point d'équilibre asymptotiquement stable dans D .

Les notions telles que le degré relatif, la décomposition en dynamiques η et ζ , la phase minimale, les dynamiques zéro, etc., possèdent des équivalents dans les systèmes linéaires. Pour ces derniers, la fonction de transfert caractérise la stabilité du système entrée-sortie (par la localisation des racines du polynôme dénominateur, soit les pôles) ainsi que la stabilité des dynamiques internes (par les racines du polynôme numérateur, soit les zéros). Considérons un système linéaire d'ordre n décrit par la fonction de transfert

$$H(s) = k \frac{s^{n-r} + b_{n-r-1}s^{n-r-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Où r représente le degré relatif du système, c'est-à-dire, la différence entre l'ordre du dénominateur et celui du numérateur.

Un modèle d'état (non unique) pour ce système est donné par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

En supposant que $r \geq 1$, donc la matrice D est nulle. En dérivant la sortie $y(t)$ par rapport au temps, on obtient

$$\dot{y} = CAx + CBu.$$

Si $r = 1$ (degré relatif 1), alors $CB \neq 0$. En revanche, si $CB = 0$, le degré relatif est supérieur à 1 et nous devons continuer à dériver la sortie. En suivant cette procédure, on peut montrer que pour les systèmes linéaires de degré relatif r ,

$$\begin{aligned}CA^i B &= 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, r-2 \\ CA^{r-1} B &\neq 0\end{aligned}$$

La dérivée d'ordre r de $y(t)$ obéit à l'équation

$$y^{(r)} = CA^r x + CA^{r-1} Bu.$$

En outre, la dynamique du système linéaire peut être divisée en deux parties comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = P\eta + Q\zeta \\ \dot{\zeta} = A_0\zeta + B_0 [C_\zeta^\top \zeta + C_\eta^\top \eta + ku] \\ y = C_0\zeta \end{cases} \quad (3.19)$$

Où $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$ et $\zeta \in \mathbb{R}^r$, et le triplet (A_0, B_0, C_0) représente une forme canonique de r intégrateurs, comme décrit dans (3.17). Les matrices P et Q ont des dimensions appropriées, C_ζ est un vecteur de dimension r , et C_η est un vecteur de dimension $(n-r)$.

Les équations (3.19) représentent un cas linéaire particulier de la forme normale décrite par (3.16). Les dynamiques zéro du système linéaire, définies précédemment pour la forme normale générale des systèmes non linéaires, sont obtenues en fixant $\zeta = 0$ dans (3.19), ce qui conduit à

$$\dot{\eta} = P\eta. \quad (3.20)$$

La stabilité des dynamiques zéro est déterminée par les valeurs propres de P . On

considère que le modèle est en phase minimale si toutes les valeurs propres se trouvent dans le demi-plan complexe gauche. Notons que les valeurs propres de P coïncident avec les racines du numérateur de la fonction de transfert $H(s)$, ce qui justifie le terme de dynamiques zéro pour les systèmes non linéaires.

Une question qui peut se poser est de savoir si tous les systèmes non linéaires peuvent être mis sous cette forme normale canonique. En général, la réponse est non, car pour certains systèmes, le degré relatif n'est pas défini, comme dans le cas où $L_g L_f^i h(x) = k_0 x_1$ avec k_0 une constante scalaire, indiquant que $L_g L_f^i h(x)$ est nul pour $x_1 = 0$ mais non nul à proximité de $x_1 = 0$.

Nous abordons ensuite la conception du contrôle de suivi pour les systèmes linéarisables par feedback entrée-sortie. Supposons que l'objectif de contrôle soit de faire suivre à $y(t)$ un signal désiré $y_d(t)$. Définissons l'erreur de suivi par $e(t) = y(t) - y_d(t)$. Partant de la forme normale (3.16), nous concevons la loi de contrôle par feedback

$$u = \alpha_0(\eta, \zeta) + \beta_0(\eta, \zeta)v = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)}v \quad (3.21)$$

Où v est choisi comme suit :

$$\begin{aligned} v &= y_d^{(r)} - k_{r-1}e^{(r-1)} - k_{r-2}e^{(r-2)} - \dots - k_1\dot{e} - k_0e \\ &= y_d^{(r)} - \sum_{j=0}^{r-1} k_j (L_f^j h(x) - y_d^{(j)}) . \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ces lois de contrôle (3.21), (3.22) entraîne une dynamique linéaire de l'erreur

$$e^{(r)} + k_{r-1}e^{(r-1)} + k_{r-2}e^{(r-2)} + \dots + k_1\dot{e} + k_0e = 0.$$

Ainsi, en choisissant judicieusement les coefficients $\{k_0, k_1, \dots, k_{r-2}, k_{r-1}\}$, on peut déterminer de façon arbitraire les racines de l'équation caractéristique :

$$s^r + k_{r-1}s^{r-1} + k_{r-2}s^{r-2} + \dots + k_1s + k_0 = 0.$$

Cette approche permet de faire converger l'erreur de suivi vers zéro de manière asymptotique et exponentiellement rapide.

En considérant la forme normale (3.16), il est à noter que cette stratégie de contrôle se concentre uniquement sur les variables ζ . Il est également crucial de s'assurer que la

dynamique interne, définie par $\dot{\eta} = \phi(\eta, \zeta)$, demeure limitée lorsque la loi de commande est appliquée aux dynamiques de ζ .

Si $\bar{y}_d(t)$ reste borné pour tout $t \geq 0$ et que la solution de

$$\dot{\eta} = \phi(\eta, \bar{y}_d(t)), \quad \eta(0) = 0$$

est bien définie, bornée et stable de manière asymptotique et uniforme, l'application de la loi de commande (3.21), (3.22) assure que l'état global reste borné et que l'erreur de suivi $e(t)$ tend vers zéro de façon exponentiellement rapide.

Dans le cas particulier de la régulation vers l'origine, c'est-à-dire lorsque $y_d(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, il est impératif que la dynamique zéro, exprimée par

$$\dot{\eta} = \phi(\eta, 0),$$

soit stable asymptotiquement pour garantir la limitation des états globaux du système et la convergence de l'erreur de suivi vers zéro.

En conclusion, pour les systèmes linéarisables en entrée-sortie, il est essentiel de gérer deux aspects :

- La dynamique de ζ , qui peut être linéarisée via la variable de commande u .
- La dynamique de η , ou dynamique interne, qui est masquée par le u défini dans (3.15) mais qui doit présenter certaines propriétés de stabilité (phase minimale) pour assurer un contrôle stable du système dans son ensemble.

Exemple

Prenons l'exemple d'un système non linéaire à trois états, où l'objectif est de contrôler le système en utilisant une commande linéarisante par rétroaction entrée-sortie.

Considérons un système non linéaire défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} \cdot \mu \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 + \mu \\ y = x_2 \end{cases}$$

Pour calculer le degré relatif :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g h(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot g(x) = 0 \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) &= \mathcal{L}_g \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot f(x) \right\} \\ &= \mathcal{L}_g(x_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g(x) = 1\end{aligned}$$

En conséquence, la dynamique interne du Système sera régie par

$$\eta^\circ = m(\eta, 0)$$

Dynamique zéro stable implique un système linéarisé par retour d'état stable.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g h(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot g(x) = 0 \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) &= \mathcal{L}_g \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot f(x) \right\} \\ &= \mathcal{L}_g(x_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g(x) = 1\end{aligned}$$

Le degré relatif est $r = 2 < n = 3$. La dynamique interne est d'ordre $n - r = 1$.

La matrice de transformation :

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \psi_s(x) \end{bmatrix}$$

Où $T_1(x) = h(x) = x_2$,

nous avons

$$T_2(x) = L_f h(x) = x_3$$

$$\text{Avec } \begin{cases} z_s = x_2 \\ z_2 = x_3 \end{cases} = D \begin{cases} \dot{z}_s = z_2 \\ \dot{z}_2 = v, \quad \mu = v - x_1 x_3 \end{cases}$$

$$\xi = A\xi + Bv \quad \text{où} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = C\xi \quad \text{et} \quad \xi = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix}$$

Maintenant, nous devons trouver la dynamique interne, pour cela, nous devons trouver $\psi_s(x)$, $\psi_1(x)$ est choisi de sorte que $\mathcal{L}_g \psi_1(x) = 0$ (normal à n)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot g(x) = 0 \Rightarrow \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0$$

$$\text{Assumer } \Psi(x) = m_1(x) + x_2(x)$$

$$\frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} \frac{dm_1}{dx_1} = -1 \frac{dm_2}{dx_3} = D \begin{cases} \frac{dm_1}{dx_1} = 1 \\ \frac{dm_2}{dx_3} = \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} \end{cases}$$

$$\int dm_s = \int -dx_s \Rightarrow m_s = -x_s + C_s$$

$$\frac{dm_2}{dx_3} = 1 + \frac{1}{1 + x_3^2} \Rightarrow \int dm_2 = \int \left(1 + \frac{1}{1 + x_3^2} \right) dx_3$$

$$\Rightarrow m_2 = x_3 + \tan^{-1}(x_3) + C_2$$

$$\psi(x) = m_s + m_2 = -x_1 + x_3 + \tan^{-1}(x_3) + C_1 + C_2$$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow \Psi(x) = -x_1 + x_3 + \tan^{-1}(x_3)$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -x_1 + x_3 + \tan^{-1}(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{La dynamique interne } \dot{\eta} = \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot f(x)$$

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 + \frac{1}{1+x_3^2} \end{bmatrix} \cdot f(x) = x_1 + x_1 x_3 + \frac{x_1 x_3}{1 + x_3^2}$$

$$\xi_1 = T_1(x) = x_2$$

$$\xi_2 = T_2(x) = x_3$$

$$\eta = -x_1 + x_3 + \tan^{-1}(x_3) \Rightarrow \dot{\eta} = \left(-\frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \tan^{-1}(\xi_2) \right) \left[1 + \xi_2 \left(\frac{2 + \xi_2^2}{1 + \xi_2^2} \right) \right]$$

ũ

Commande par rétroaction d'une machine synchrone à aimants permanents

La dynamique d'une MSAP peut être décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \omega_r \\ \dot{\omega}_r &= \frac{1}{J} \left(-b\omega_r + \frac{3}{2}p\lambda i_q + \tau_L \right) \\ v_d &= R i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_r L_q i_q \\ v_q &= R i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_r L_d i_d + \omega_r \lambda \end{cases} \quad (3.23)$$

Où :

- θ est l'angle du rotor.
- ω_r est la vitesse angulaire.
- J est le moment d'inertie.
- b est le coefficient d'amortissement.
- p est le nombre de paires de pôles.
- λ est le flux de liaison.
- i_d et i_q sont les courants sur les axes d et q, respectivement.
- v_d et v_q sont les tensions sur les axes d et q, respectivement.
- R , L_d et L_q sont la résistance et les inductances sur les axes d et q.
- τ_L est le couple de charge.

Notre objectif est de réguler la vitesse du moteur, ω_r , tout en maintenant un couple optimal. Pour cela, nous gardons la composante longitudinale du courant statorique, i_d , constante. Nous mettons en oeuvre une stratégie de linéarisation entrée-sortie sur le modèle du moteur, permettant un découplage complet entre les commandes et les réponses du système. Dans ce contexte, les variables de sortie à contrôler sont la vitesse du rotor ω_r et le courant i_d .

$$y_1 = i_d, \quad y_2 = \omega_r. \quad (3.24)$$

Ces sorties doivent suivre des trajectoires prédéfinies. Dans la stratégie de fonctionnement à couple maximal, on impose $i_{d_{\text{ref}}} = 0$, tandis que la vitesse ω_r doit suivre sa référence, notée ω_{ref} , qui peut être constante ou une fonction du temps.

Pour la sortie i_d , la relation est :

$$y_1 = i_d = h_1(x), \quad \text{où} \quad \nabla h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= L_f h_1(x) + L_{g_1} h_1(x) u_d + L_{g_2} h_1(x) u_q \\ &= \frac{\partial h_1}{\partial x} \cdot f(x) + \frac{\partial h_1}{\partial x} \cdot g_1(x) \cdot u_d + \frac{\partial h_1}{\partial x} \cdot g_2(x) \cdot u_q \\ &= -\frac{R}{L_d} i_d + \frac{L_q}{L_d} p \omega_r i_q + \frac{1}{L_d} u_d. \end{aligned}$$

L'entrée u_d est intégrée dans l'équation de la dérivée de y_1 .

Pour la sortie y_1 , on identifie un degré relatif $r_1 = 1$. Concernant la seconde sortie y_2 , elle est définie par :

$$y_2 = \omega_r = h_2(x), \quad \text{où} \quad \nabla h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La dérivation de cette expression donne :

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= L_f h_2(x) + L_{g_1} h_2(x) u_d + L_{g_2} h_2(x) u_q \\ &= \frac{\partial h_2}{\partial x} \cdot f(x) + \frac{\partial h_2}{\partial x} \cdot g_1(x) \cdot u_d + \frac{\partial h_2}{\partial x} \cdot g_2(x) \cdot u_q \\ &= \frac{3p}{2J} (\Phi_v i_q + (L_d - L_q) i_d i_q) - \frac{B}{J} \omega_r. \end{aligned}$$

Cette formulation n'inclut aucune entrée, nécessitant ainsi une dérivation supplémentaire :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 &= L_f^2 h_2(x) + L_{g_1} (L_f h_2(x)) \cdot u_d + L_{g_2} (L_f h_2(x)) \cdot u_q \\ &= \Lambda(L_d - L_q) i_q f_1(x) + \Lambda(\Phi_v + (L_d - L_q) i_d) f_2(x) - \frac{B}{J} f_3(x) + \\ &\quad \frac{\Lambda(L_d - L_q)}{L_d} i_q u_d + \frac{\Lambda(\Phi_v + (L_d - L_q) i_d)}{L_q} u_q, \end{aligned}$$

où $\Lambda = \frac{3p}{2j}$, et $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sont définis dans le système (3.23).

Les deux entrées u_d et u_q établissent un degré relatif $r_2 = 2$.

Le degré relatif total du système est donc $r = r_1 + r_2 = n = 3$, ce qui permet une linéarisation exacte sans la nécessité de considérer une dynamique interne.

En combinant les équations des deux dérivées de sortie, nous obtenons la forme linéarisée suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \zeta(x) + D(x) \cdot u, \quad (3.26)$$

où

$$\zeta(x) = \begin{bmatrix} L_f h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_d} i_d + \frac{L_q}{L_d} p \omega_r i_q \\ \Lambda(L_d - L_q) i_q f_1(x) + \Lambda(\Phi_v + (L_d - L_q) i_d) f_2(x) - \frac{B}{J} f_3(x) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

et

$$D(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ \frac{\Lambda(L_d - L_q) i_q}{L_d} & \frac{\Lambda(\Phi_v + (L_d - L_q) i_d)}{L_q} \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

La matrice $D(x)$ est inversible si et seulement si $\det[D(x)] = \frac{\Lambda(\Phi_v + (L_d - L_q) i_d)}{L_q L_d} \neq 0$, ce qui se traduit par $\Phi_v \neq (L_q - L_d) i_d$.

Par conséquent, la loi de commande linéarisante assurant le découplage est donnée par :

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = D(x)^{-1} \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \zeta(x) \right), \quad (3.29)$$

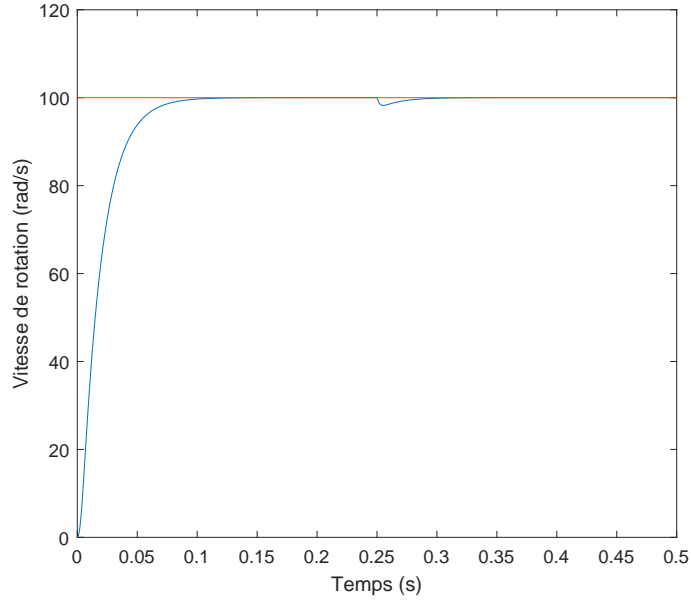


Fig 3.3: Vitesse de rotation

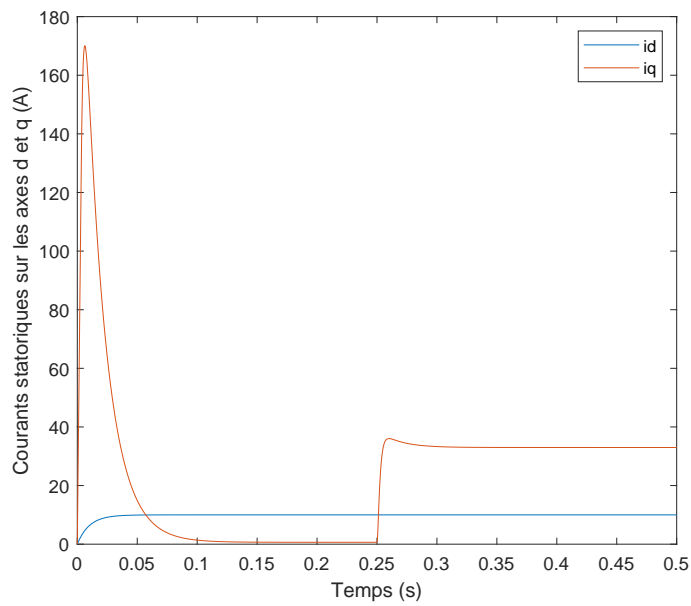


Fig 3.4: Courants statoriques sur l'axes d et q

D'après les figures Fig(3.3) et Fig(3.4), nous observons que la vitesse de rotation de la machine synchrone à aimants permanents, suit parfaitement sa référence, même en présence d'un couple résistant. Cela indique que le système de commande par rétroaction entrée-sortie a été efficacement conçu et mis en oeuvre.

3.2.3 Linéarisation de l'espace d'état

Nous commençons par identifier une fonction de sortie \hat{y} , définie par :

$$\hat{y} = \hat{C}x \quad (3.30)$$

Où l'objectif est d'obtenir un degré relatif $r = n$, égal à l'ordre du système. Ici, \hat{y} représente une sortie artificielle, distincte de la sortie réelle y .

La détermination de la sortie artificielle \hat{y} implique la résolution d'un système de n équations linéaires pour le vecteur \hat{C} :

$$\hat{C} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \beta \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Avec β étant une constante non nulle. L'existence d'une solution est conditionnée par le fait que la matrice $\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ doit avoir un rang complet, ce qui est synonyme de la contrôlabilité de la paire (A, B) . Notons que la solution n'est pas unique, car $\hat{C}A^{n-1}B$ peut prendre n'importe quelle valeur non nulle.

Ensuite, nous établissons la loi de commande, en partant du principe que la sortie artificielle \hat{y} a été définie.

Nous introduisons le changement de coordonnées suivant :

$$\xi = Tx = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}A \\ \vdots \\ \hat{C}A^{n-1} \end{bmatrix} x \quad (3.32)$$

Dans ces nouvelles coordonnées, le système linéaire peut être représenté sous la forme normale suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = R\xi + ku \\ y = \xi_1 \end{cases} \quad (3.33)$$

Où $R = \hat{C}A^nT^{-1}$ et $k = CA^{n-1}B$.

La commande en retour d'état statique s'exprime par :

$$u = \frac{v - R\xi}{k} \quad (3.34)$$

Cette loi modifie la dernière équation dans (3.33) pour devenir : $\dot{\xi}_n = v$. L'entrée de commande v est définie pour stabiliser le système transformé :

$$v = -\alpha_n \xi_n - \alpha_{n-1} \xi_{n-1} - \dots - \alpha_1 \xi_1 \quad (3.35)$$

Dans les coordonnées originales, le contrôleur prend la forme :

$$u = \frac{-\hat{C}A^n x - \alpha_n \hat{C}A^{n-1}x - \dots - \alpha_1 \hat{C}x}{\hat{C}A^{n-1}B} \quad (3.36)$$

Le système transformé présente alors l'équation caractéristique en boucle fermée suivante :

$$s^n + \alpha_n s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s + \alpha_1 = 0 \quad (3.37)$$

La stabilité nominale du système transformé, ainsi que celle du système original, est assurée en sélectionnant les α_i de manière à ce que le polynôme caractéristique soit de Hurwitz. Il est important de souligner que la stabilité nominale pour l'approche de linéarisation entrée-sortie est garantie seulement si le système linéaire est de phase minimale. Cependant, la linéarisation de l'espace d'état présente les contraintes suivantes :

- Le système linéaire doit être contrôlable.
- Il peut être difficile d'atteindre les objectifs de suivi de la sortie, car la relation entre la sortie réelle et les variables d'état transformées est : $y = CT^{-1}\xi$. Ces considérations s'appliquent aussi dans le cas non linéaire.

3.2.3.1 Conception du Contrôleur

Le défi de la linéarisation de l'espace d'état réside dans la détermination, si possible, d'un difféomorphisme et d'une commande en retour d'état statique qui rendent linéaire la correspondance entre l'entrée transformée et l'ensemble des variables d'état transformées [HS97]. Ce problème a été posé initialement par Korobov et une solution complète pour les cas à entrée unique a été apportée par Brockett [Bro78].

Une approche alternative facilitant la construction de transformations linéarisantes a également été proposée [Tse87]. Dans cette section, nous présentons la solution au problème de linéarisation de l'espace d'état pour les systèmes à entrée unique ; le cas multivariable est traité dans d'autres travaux [IMDL86].

3.2.3.2 Exemple illustratif

Les équations du mouvement d'un pendule inversé sur un chariot peuvent être présentées sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F+m_p \sin(\theta)(l\dot{\theta}^2+g \cos(\theta))}{m_c+m_p \sin^2(\theta)} \\ \ddot{\theta} = \frac{-F \cos(\theta)-m_p l \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta)-(m_c+m_p)g \sin(\theta)}{l(m_c+m_p \sin^2(\theta))} \end{cases}$$

les deux lois de commande prennent la forme suivante :

$$u = \frac{v-L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$$

$$v = -\alpha_r L_f^{r-1} h(x) - \alpha_{r-1} L_f^{r-2} h(x) \cdots \alpha_1 h(x)$$

Le système est linéarisé autour de la position verticale, où $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$. Les équations linéarisées autour de ce point de fonctionnement sont obtenues en prenant la première dérivée des équations non linéaires par rapport à chaque variable d'état et à l'entrée, évaluées au point d'équilibre.

Le modèle d'espace d'état linéarisé résultant est de la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Où $x = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T$ est le vecteur d'état, $u = F$ est l'entrée (force), et y est la sortie (qui pourrait être la position du chariot ou l'angle du pendule).

Avec le modèle linéarisé, des techniques de contrôle linéaire standard telles que le contrôle PID, la rétroaction d'état ou le RQL (Régulateur Quadratique Linéaire) peuvent être appliquées. Par exemple, concevoir un contrôleur RQL implique de sélectionner un gain de rétroaction d'état K pour minimiser une fonction de coût, typiquement de la forme

:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Où Q et R sont des matrices de pondération.

La loi de commande est alors donnée par $u = -Kx$, et la dynamique en boucle fermée devient $\dot{x} = (A - BK)x$.

Cette conception de contrôle linéarisée est valide tant que le système fonctionne près du point de linéarisation. Pour des écarts plus importants, des techniques de contrôle non linéaires ou de programmation des gains (utilisant différents modèles linéaires et contrôleurs pour différents points de fonctionnement) peuvent être nécessaires.

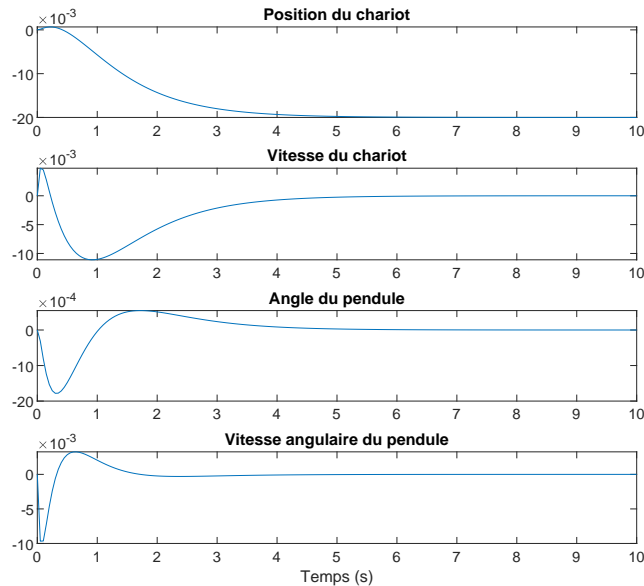


Fig 3.5: Les états du pendule inversé

3.2.4 Commande par Backstepping

Cette section décrit la procédure de conception de commande par Backstepping. Cette méthode a été développée pour surmonter les défis inhérents à la gestion de la non-linéarité dans les systèmes de contrôle.

L'idée fondamentale du Backstepping consiste à diviser le système en plusieurs sous-systèmes, chacun étant stabilisé séparément en utilisant une fonction de Lyapunov. La méthode utilise une approche récursive pour stabiliser chaque sous-système en utilisant les entrées virtuelles générées par les sous-systèmes précédents. Cette approche permet de stabiliser le système global en utilisant une série de sous-systèmes stabilisés [Ben02],

[FNS15]. Cette méthode est largement utilisée dans l'industrie pour la commande de systèmes mécaniques, électriques et aéronautiques [FNS15], [Ben09], [WAB+23], [YH08]. Pour illustrer le concept du contrôleur par Backstepping, nous commençons avec le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) + g(z)\xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \quad (3.38)$$

On souhaite concevoir une loi de contrôle par feedback d'état pour stabiliser l'origine. Supposons qu'on puisse stabiliser asymptotiquement le premier système,

$$\dot{z} = f(z) + g(z)\xi \quad (3.39)$$

avec une loi de contrôle $\xi = \phi(z)$ telle que $\phi(0) = 0$. Cela implique que l'origine de premier système est asymptotiquement stable.

$$\dot{z} = f(z) + g(z)\phi(z) \quad (3.40)$$

Supposons également qu'on connaisse une fonction de Lyapunov $V(z)$ qui satisfait l'inégalité,

$$\frac{\partial V}{\partial z}[f + g\phi] \leq -W(z) \quad (3.41)$$

Où $W(z)$ est défini positif. Ajoutez et soustrayez $g(z)\phi(z)$ pour obtenir

$$\begin{cases} \dot{z} = [f(z) + g(z)\phi(z)] + g(z)[\xi - \phi(z)] \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \quad (3.42)$$

Ce système résultant est représenté sur la figure Fig(3.6).

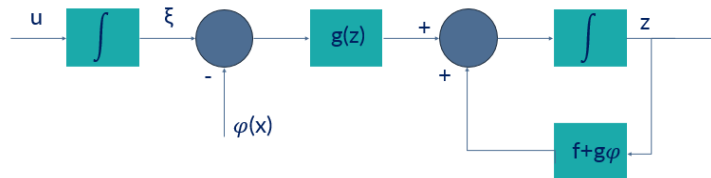


Fig 3.6: Introduction du Contrôle

On introduit maintenant le changement de variables,

$$y = \xi - \phi(z) \quad (3.43)$$

ce qui génère les équations du système suivantes

$$\begin{cases} \dot{z} = [f(z) + g(z)\phi(z)] + g(z)y \\ \dot{y} = u - \dot{\phi}(z) \end{cases} \quad (3.44)$$

comme illustré dans la figure Fig(3.7).

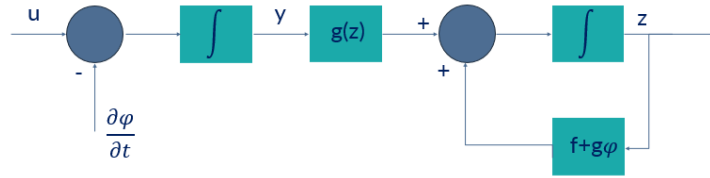


Fig 3.7: Contrôle par Backstepping à travers un Intégrateur

Ce changement de variables est souvent appelé "Backstepping" car il "recule" la commande $-\phi(z)$ à travers l'intégrateur.

Puisque f, g , et ϕ sont connus, la dérivée peut s'écrire comme

$$\dot{\phi}(z) = \frac{\partial \phi}{\partial z} [f(z) + g(z)\xi] \quad (3.45)$$

En posant $v = u - \dot{\phi}$, notre système se réduit à

$$\begin{cases} \dot{z} = [f(z) + g(z)\phi(z)] + g(z)y \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (3.46)$$

ce qui a la même "forme" que le système de départ, à l'exception que nous savons maintenant que le premier système est asymptotiquement stable à l'origine.

Cette propriété modulaire du Backstepping sera exploitée pour stabiliser le système global.

Ceci est réalisé en considérant une fonction candidate de Lyapunov

$$\begin{aligned} V_c(z, \xi) &= V(z) + \frac{1}{2}y^2 \\ &= V(z) + \frac{1}{2}(\xi - \phi(z))^2 \end{aligned}$$

La dérivée de V_c est

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= \frac{\partial V}{\partial z}[f(z) + g(z)\phi(z)] + \frac{\partial V}{\partial z}g(z)y + yv \\ &\leq -W(z) + \frac{\partial V}{\partial z}g(z)y + yv\end{aligned}$$

Choisissez

$$v = -\frac{\partial V}{\partial z}g(z) - ky$$

où $k > 0$. Ceci implique que

$$\dot{V}_c \leq -W(z) - ky^2$$

ce qui implique que l'origine est asymptotiquement stable ($z = 0, y = 0$). Puisque $\phi(0) = 0$, cela implique également que $z = 0$ et $\xi = 0$ sont aussi asymptotiquement stables.

Lemme du Backstepping : Considérez le système

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) + g(z)\xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \quad (3.47)$$

Soit $\phi(z)$ une loi de commande en retour d'état stabilisatrice pour le système dans l'équation (3.47) où $\phi(0) = 0$. Soit $V(z)$ une fonction de Lyapunov telle que

$$\frac{\partial V}{\partial z}[f(z) + g(z)\phi(z)] \leq -W(z)$$

pour une certaine fonction W définie positive. Alors la loi de commande

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial z}[f + g\xi] - \frac{\partial V}{\partial z}g(z) - k[\xi - \phi(z)]$$

pour $k > 0$ stabilise l'origine avec la fonction de Lyapunov

$$V(z) = \frac{1}{2}[\xi - \phi(z)]^2$$

Exemple 01 : Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{z} = z^2 - z^3 + \xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases}$$

Considérez le système scalaire,

$$\dot{z} = z^2 - z^3 + \xi$$

et concevez une loi de commande en retour qui pourrait être

$$\xi = \phi(z) = -z^2 - z$$

(annule le terme quadratique et ajoute un peu d'amortissement). Cela implique que

$$\dot{z} = -z - z^3$$

avec la fonction candidate de Lyapunov $V(z) = z^2/2$. Remarquez que

$$\dot{V} = -z^2 - z^4 \leq -z^2$$

ce qui implique que $z = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Maintenant, utilisez le changement de variables de Backstepping,

$$y = \xi - \phi(z) = \xi + z + z^2$$

pour transformer notre système en

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -z - z^3 + y \\ \dot{y} &= u + (1 + 2z)(-z - z^3 + y)\end{aligned}$$

et posez

$$V_c = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}y^2$$

Alors

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= z(-z - z^3 + y) + y(u + (1 + 2z)(-z - z^3 + y)) \\ &= -z^2 - z^4 + y(z + (1 + 2z)(-z - z^3 + y) + u)\end{aligned}$$

et choisissez

$$u = -z - (1 + 2z)(-z - z^3 + y) - y$$

pour forcer

$$\dot{V}_c = -z^2 - z^4 - y^2$$

Ceci est clairement défini négatif, donc le point $(z, y) = (0, 0)$ est asymptotiquement stable.

La commande réelle dans nos coordonnées d'origine est

$$\begin{aligned} u &= -z - (1 + 2z) \left(-z - z^3 + \xi + z + z^2 \right) \\ &\quad - \xi - z - z^2 \\ &= -z - (1 + 2z) \left(z^2 - z^3 + \xi \right) - \xi - z - z^2 \end{aligned}$$

La véritable valeur du Backstepping se manifeste dans les systèmes d'ordre supérieur où nous pouvons exploiter la modularité de l'approche.

Exemple 02 Considérons le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^2 - z_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 = \xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases}$$

Ce système contient le système du second ordre de l'exemple précédent avec un intégrateur supplémentaire en tant qu'entrée.

Après le premier backstep, nous savons que le système du second ordre

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^2 - z_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 = \xi \end{cases}$$

peut être stabilisé globalement par la commande

$$\begin{aligned} \xi &= -z_1 - (1 + 2z_1) \left(z_1^2 - z_1^3 + z_2 \right) - (z_2 + z_1 + z_1^2) \\ &= \phi(z_1, z_2) \end{aligned}$$

avec la fonction de Lyapunov

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}(z_2 + z_1 + z_1^2)^2$$

Pour effectuer le second backstep, nous appliquons le changement de variables

$$y = \xi - \phi(z_1, z_2)$$

pour obtenir

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^2 - z_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 = \phi(z_1, z_2) + y \\ \dot{y} = u - \frac{\partial \phi}{\partial z_1}(z_1^2 - z_1^3 + z_2) - \frac{\partial \phi}{\partial z_2}(\phi + y) \end{cases}$$

en utilisant $V_c = V + \frac{1}{2}z_3^2$ comme fonction de Lyapunov candidate, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= \frac{\partial V}{\partial z_1}(z_1^2 - z_1^3 + z_2) + \frac{\partial V}{\partial z_2}(y + \phi) \\ &\quad + y \left[u - \frac{\partial \phi}{\partial z_1}(z_1^2 - z_1^3 + z_2) - \frac{\partial \phi}{\partial z_2}(y + \phi) \right] \\ &= -z_1^2 - z_1^4 - (z_2 + z_1 + z_1^2)^2 \\ &\quad + y \left[\frac{\partial V}{\partial z_2} - \frac{\partial \phi}{\partial z_1}(z_1^2 - z_1^3 + z_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \phi}{\partial z_2}(y + \phi) + u \right] \end{aligned}$$

Nous choisissons donc

$$u = -\frac{\partial V}{\partial z_2} + \frac{\partial \phi}{\partial z_1}(z_1^2 - z_1^3 + z_2) + \frac{\partial \phi}{\partial z_2}(y + \phi) - y$$

pour forcer $\dot{V}_c < 0$ et ainsi stabiliser l'origine.

Cas générale

Nous considérons maintenant le système plus général

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) + g(z)\xi \\ \dot{\xi} = f_a(z, \xi) + g_a(z, \xi)u \end{cases} \quad (3.48)$$

Ce système peut être ramené à notre forme originale en utilisant l'entrée de commande

$$u = \frac{1}{g_a(z, \xi)} [v - f_a(z, \xi)]$$

de sorte que $\dot{\xi} = v$. L'application récursive du Backstepping nous permet de stabiliser des

systèmes qui sont sous forme de rétroaction stricte

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f_0(x) + g_0(x)z_1 \\ \dot{z}_1 = f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2 \\ \dot{z}_2 = f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2)z_3 \\ \vdots = \vdots \\ \dot{z}_{k-1} = f_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1}) + g_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1})z_k \\ \dot{z}_k = f_k(x, z_1, \dots, z_k) + g(x, z_1, \dots, z_k)u \end{array} \right. \quad (3.49)$$

Notez que dans cette forme, \dot{z}_i ne dépend que des états x, z_1 , jusqu'à z_i .

L'application récursive du Backstepping à ce système avec

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)z_1$$

(considérant z_1 comme l'entrée). Il est important que nous trouvions une loi de commande (d'une manière ou d'une autre) qui stabilise ce système. Mais une fois cela fait, nous pouvons simplement appliquer les récursions de Backstepping pour trouver une commande qui stabilise l'ensemble du système.

3.3 Méthodes de commandes robustes

3.3.1 Commande basée sur le réaménagement de Lyapunov

La gestion des incertitudes appariées peut être effectuée à l'aide d'une technique classique, le réaménagement de Lyapunov, tel que présenté dans [Kha02]. Bien que cette méthode soit reconnue pour son efficacité, elle aboutit à une loi de commande discontinue. Nous proposons une version améliorée de cette méthode qui permet d'obtenir une loi de commande de classe C^1 (continue avec sa première dérivée). Cette procédure s'applique aux systèmes qui répondent à la condition d'appariement, à savoir :

$$\dot{x} = f(x, t) + G(x, t)[u + \Delta(x, u, t)] \quad (3.50)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$. Notons que Δ représente une fonction inconnue regroupant diverses incertitudes, tant structurées que non structurées, et respectant la condition

d'appariement, car elle intervient dans le domaine de l'entrée de commande. Supposons que le système nominal soit stabilisé par une loi de commande nominale connue, telle que la linéarisation par rétroaction ou le Backstepping, où $u = \psi(x, t)$.

Cette rétroaction d'état rend le système en boucle fermée nominal uniformément globalement asymptotiquement stable (UGAS).

$$\dot{x} = f(x, t) + G(x, t)\psi(x, t) \quad (3.51)$$

Supposons également que nous disposions d'une fonction de Lyapunov pour le système exprimé dans (3.51). Cette fonction, notée $V(x, t)$, est continûment différentiable et doit satisfaire à des inégalités spécifiques. Ces inégalités sont cruciales pour démontrer la stabilité du système en boucle fermée. La fonction $V(x, t)$ est définie de manière à respecter les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) &\leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}[f(x, t) + G(x, t)\psi(x, t)] &\leq -\alpha_3(\|x\|) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Où α_1, α_2 sont des fonctions de classe \mathcal{K}_∞ et α_3 est une fonction de classe \mathcal{K} . Supposons que, avec $u = \psi(x, t) + v$, le terme incertain satisfait l'inégalité :

$$\|\Delta(x, \psi(x, t) + v, t)\| \leq \rho(x, t) + k_0\|v\|, \quad 0 \leq k_0 < 1 \quad (3.53)$$

Où ρ est une fonction continue non négative.

L'inégalité précédemment établie définit la fonction de limitation pour le terme incertain Δ , et elle constitue la seule information nécessaire à son sujet.

La fonction de limitation, désignée par ρ , indique la taille maximale que peut prendre l'incertitude. Il n'est pas nécessaire que cette taille soit réduite, mais elle doit être connue. Notre but est de trouver une expression pour v de sorte que, sous la commande totale $u = \psi(x, t) + \varepsilon$, le système incertain exprimé dans (3.50) soit Uniformément Globalement Asymptotiquement Stable (UGAS).

Le système incertain en boucle fermée sous la rétroaction u est donné par:

$$\dot{x} = f(x, t) + G(x, t)\psi(x, t) + G(x, t)[\varepsilon + \Delta(x, \psi(x, t) + \varepsilon, t)]. \quad (3.54)$$

Nous exploitons la même fonction de Lyapunov du système nominal (d'où le nom "réaménagement") en tant que fonction de Lyapunov de commande robuste pour le système incertain. La dérivée le long du mouvement prend la forme (en omettant pour des raisons de concision les arguments des diverses fonctions) :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(f + G\psi) + \frac{\partial V}{\partial x}G(v + \Delta) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \frac{\partial V}{\partial x}G(v + \Delta). \quad (3.55)$$

Définissons d'abord $w^T = \frac{\partial V}{\partial x}G$. Ainsi, l'inégalité précédente peut être réécrite comme suit :

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|) + w^T v + w^T \Delta. \quad (3.56)$$

Il est important de noter que, en raison des conditions de correspondance, le terme incertain Δ apparaît du côté droit de l'équation au même endroit que v .

Par conséquent, nous pouvons choisir v pour annuler l'effet (potentiellement déstabilisant) de Δ sur \dot{V} . En utilisant l'inégalité (3.53), nous obtenons :

$$w^T v + w^T \Delta \leq w^T v + \|w\| \|\Delta\| \leq w^T v + \|w\| [\rho(x, t) + k_0 \|v\|]. \quad (3.57)$$

En prenant

$$v = -\eta(x, t) \cdot \frac{w}{\|w\|} \quad (3.58)$$

Où η est une fonction non négative, nous obtenons :

$$w^T v + w^T \Delta \leq -\eta \|w\| + \rho \|w\| + k_0 \eta \|w\| = -\eta(1 - k_0) \|w\| + \rho \|w\|. \quad (3.59)$$

En choisissant ensuite

$$\eta(x, t) \geq \frac{\rho(x, t)}{1 - k_0} \quad (3.60)$$

pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$, nous obtenons :

$$w^T v + w^T \Delta \leq -\rho \|w\| + \rho \|w\| = 0. \quad (3.61)$$

Ainsi, sous le contrôle robuste non linéaire (3.58), la dérivée le long des trajectoires du système en boucle fermée incertain (3.54) est négativement définie, et donc le système de rétroaction obtenu est UGAS.

La loi de commande (3.53) est clairement discontinue en $w = 0$. Ceci peut poser des problèmes sérieux d'implémentation, notamment le problème de chatter. Remarquons que dans le cas scalaire, (3.53) prend la forme simple :

$$v = -\eta(x, t) \cdot \text{sign}(w). \quad (3.62)$$

Exemple

Considérons le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -u - \eta(x), \end{cases}$$

Où η est inconnu mais satisfait à l'inégalité

$$\|\eta(x)\|_\infty \leq \bar{\eta}(t, x)$$

pour une certaine borne connue $\bar{\eta}$. Ce modèle du deuxième ordre représente un système de compression de moteur à réaction sans décrochage [KKK95], basé sur l'approximation de Galerkin du modèle d'EDP non linéaire [MG86].

L'état x_1 correspond au débit massique et x_2 est l'augmentation de pression.

La première étape consiste à concevoir la loi de commande nominale $u = p_0(x)$ pour le cas où $\eta = 0$. Cela peut être réalisé par la linéarisation de la rétroaction (notez que cela peut également être réalisé par la méthode de backstepping).

Considérons le changement de coordonnées $z = T(x)$ où

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = -x_2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3. \end{cases}$$

La dynamique dans les coordonnées z est décrite par

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = u - 3z_1z_2 - \frac{3}{2}z_1^2z_2 + \pi_z(z), \end{cases}$$

Où $\eta_z(z) = \eta(x)|_{z=T^{-1}(z)}$.

Un contrôleur nominal stabilisant est donné par

$$u = p_0(z) = -z_1 - 2z_2 + 3z_1z_2 + \frac{3}{2}z_1^2z_2.$$

Une fonction de Lyapunov nominale associée au contrôleur nominal ci-dessus est donnée par

$$V_0(z) = 2z_1^2 + (z_1 + z_2)^2$$

dont la dérivée temporelle est donnée par

$$\dot{V}_0 = -2(z_1^2 + z_2^2).$$

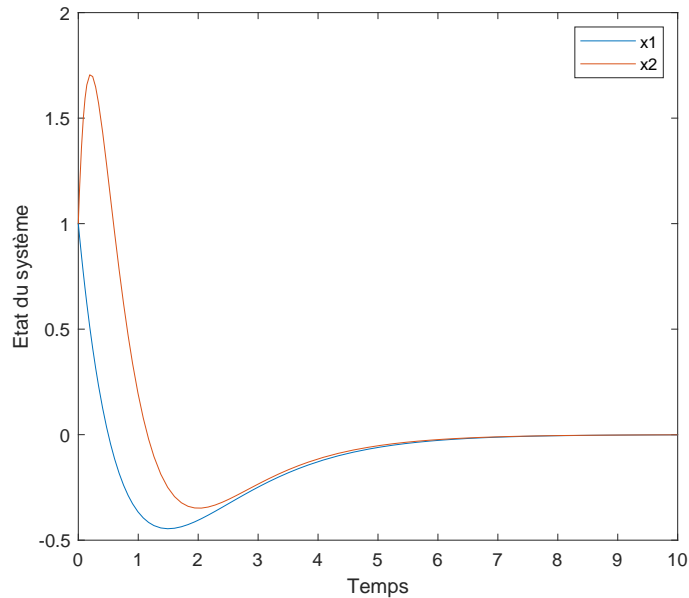


Fig 3.8: Réponse du Système avec Commande par Lyapunov Redesign

La loi de commande corrective obtenue en utilisant la méthode de réaménagement de Lyapunov est donnée par

$$p^*(z) = -\eta_z(z) \operatorname{sgn}(z_1 + z_2),$$

Où $\bar{\eta}_z$ est la borne supposée sur η . La loi de commande ci-dessus peut être rendue continue en utilisant l'approximation suivante

$$p^*(z) = -\eta_z(z) \tanh\left(\frac{z_1 + z_2}{\varepsilon}\right),$$

Où $\varepsilon > 0$ est une petite constante de conception.

3.3.2 Commande par Mode Glissant

La commande par mode glissant est une approche robuste qui repose sur l'idée qu'il est plus facile de contrôler un système de premier ordre qu'un système d'ordre supérieur. Cette méthode vise à transformer un problème de contrôle complexe en un problème plus simple, où des techniques de commande à rétroaction éprouvées peuvent être utilisées.

Toutefois, cette simplification peut nécessiter un effort de commande important, ce qui peut conduire à des défis supplémentaires, notamment face au bruit de mesure ou aux dynamiques à haute fréquence non modélisées.

La commande en mode glissant peut être appliquée à divers types de systèmes non linéaires, et nous nous focalisons ici sur son application aux systèmes linéarisables par rétroaction.

Soit un système non linéaire d'ordre n de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \vdots & \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u \end{cases} \quad (3.63)$$

Où f et g sont des fonctions inconnues, et $g(x) \geq g_0 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

L'objectif est que $y(t) = x_1(t)$ suive un signal cible $y_d(t)$.

On définit l'erreur de suivi par $e = y - y_d$. La surface de glissement s est alors définie comme

$$s = e^{(n-1)} + \lambda_{n-1}e^{(n-2)} + \dots + \lambda_2\dot{e} + \lambda_1e = 0, \quad (3.64)$$

avec les coefficients $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}\}$ choisis de manière à ce que le polynôme caractéristique soit de Hurwitz

$$p^{n-1} + \lambda_{n-1}p^{n-2} + \dots + \lambda_2p + \lambda_1 = 0 \quad (3.65)$$

signifiant que toutes ses racines sont dans le demi-plan complexe gauche.

La variété définie par $s = 0$ est la surface de glissement, de dimension $(n - 1)$.

L'objectif de la commande en mode glissant est de diriger la trajectoire vers cette surface.

Si x se trouve sur la surface définie par $s = 0$, alors

$$e^{(n-1)} = -\lambda_{n-1}e^{(n-2)} - \dots - \lambda_2\dot{e} - \lambda_1e. \quad (3.66)$$

Comme le polynôme en (3.65) est de Hurwitz, une fois sur la surface de glissement, l'erreur de suivi converge vers zéro avec un comportement transitoire déterminé par les coefficients $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}\}$, soit de manière exponentiellement rapide.

L'objectif de la commande en mode glissant est atteint si la loi de commande u est telle que

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} s^2 \leq -k|s|,$$

Où $k > 0$. Dans ce cas, la dérivée supérieure droite de $|s(t)|$ respecte l'inégalité différentielle

$$\frac{d^+}{dt} |s(t)| \leq -k,$$

ce qui garantit que la trajectoire atteint la surface $s = 0$ en un temps fini. Suivant l'équation (3.64), la dérivée de $s(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{s} &= e^{(n)} + \lambda_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + \lambda_2\ddot{e} + \lambda_1\dot{e} \\ &= f(x) + g(x)u - y_d^{(n)} + \lambda_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + \lambda_2\ddot{e} + \lambda_1\dot{e}. \end{aligned}$$

Si f et g étaient connues, la loi de commande pourrait être

$$u = \frac{1}{g(x)} \left[-f(x) + y_d^{(n)} - \lambda_{n-1}e^{(n-1)} - \dots - \lambda_2\dot{e} - \lambda_1e - k \operatorname{sgn}(s) \right],$$

Où $k > 0$ est une variable de conception. La fonction signe $\operatorname{sgn}(\cdot)$ est définie par

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

Lorsqu'on applique cette règle de commande, la dérivée de $s(t)$ répond à l'équation

$$\dot{s} = -\kappa \operatorname{sgn}(s),$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} s^2 &= s \dot{s} \\ &= -s \kappa \operatorname{sgn}(s) \\ &= -\kappa |s|. \end{aligned}$$

Examinons la situation où les fonctions f et g sont inconnues mais où le concepteur dispose d'une limite supérieure connue $\eta(x, t)$ telle que

$$\left| \frac{f(x) - y_d^{(n)} + \lambda_{n-1} e^{(n-1)} + \dots + \lambda_2 \ddot{e} + \lambda_1 \dot{e}}{g(x)} \right| \leq \eta(x, t).$$

Imaginons que la loi de commande soit définie comme

$$u = -(\eta(x, t) + \eta_0) \operatorname{sgn}(s) \quad (3.67)$$

Où $\eta_0 > 0$ est une constante de conception. Prenons

$$V = \frac{1}{2} s^2$$

comme candidat à la fonction de Lyapunov. La dérivée de V se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s \dot{s} \\ &= s \left(f(x) - y_d^{(n)} + \lambda_{n-1} e^{(n-1)} + \dots + \lambda_2 \ddot{e} + \lambda_1 \dot{e} \right) + s g(x) u \\ &\leq |s| \eta(x, t) g(x) + s g(x) u \\ &= -\eta_0 |s|, \end{aligned}$$

L'objectif est de conduire la trajectoire vers la surface de glissement en un temps fini est atteint. Il est remarquable que cet objectif soit réalisé sans connaître précisément f et g , en se basant uniquement sur la borne supérieure $\eta(x, t)$.

Malgré les avantages en termes de stabilité et de convergence de la commande en mode glissant, cette technique présente deux principaux inconvénients dans sa forme standard.

La loi de commande en mode glissant, illustrée par (3.67), comprend deux éléments : le gain $\eta(x, t) + \eta_0$ et la fonction de commutation $\text{sgn}(s)$. Ces deux éléments peuvent poser des problèmes :

- (Gain Élevé) Le gain est le résultat de l'utilisation d'une borne supérieure pour l'incertitude. En général, cela conduit à une commande à rétroaction à gain élevé, pouvant être problématique en présence de bruit de mesure et de dynamiques à haute fréquence non modélisées.
- (Vibrations) La fonction de commutation $\text{sgn}(s)$ provoque un basculement du gain de commande de $\eta(x, t) + \eta_0$ à $-(\eta(x, t) + \eta_0)$ à chaque fois que la trajectoire traverse la surface de glissement.

Des recherches sur la commande en mode glissant ont développé des techniques pour pallier ces problèmes. Le problème du gain élevé peut être atténué en exploitant autant d'informations a priori que possible, en annulant les non-linéarités connues et en appliquant une borne supérieure uniquement aux parties inconnues des non-linéarités.

Le problème des vibrations peut être partiellement résolu en utilisant une approximation continue de la fonction signe. Cependant, l'utilisation de cette approximation implique que seule la bornitude uniforme des solutions peut être démontrée.

Malgré ces solutions, la méthode de mode glissant repose sur le principe de limiter l'incertitude par une fonction plus grande, et est donc une approche de commande conservatrice.

3.3.3 Backstepping Robuste

Le backstepping robuste est une technique de pointe en contrôle automatique, spécialement adaptée aux systèmes dynamiques non linéaires. Cette méthode se caractérise par son efficacité dans la gestion des incertitudes et des perturbations, grâce à la décomposition du système en sous-systèmes plus simples. Elle emploie une démarche itérative pour élaborer des contrôleurs adaptatifs qui réagissent aux variations du système. Ainsi, elle fournit une solution à la fois performante et souple pour la régulation de systèmes complexes dans des conditions variables. La méthode est utile dans divers secteurs, notamment en robotique, en ingénierie aéronautique et dans la gestion des systèmes énergétiques, où la robustesse et la précision sont essentielles.

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z) + g(z)\xi + \delta_z(z, \xi) \\ \dot{\xi} &= u + \delta_\xi(z, \xi) \end{cases} \quad (3.68)$$

Où

$$\begin{cases} \|\delta_z(z, \xi)\|_2 < a_1\|z\|_2 \\ \|\delta_\xi(z, \xi)\|_2 < a_2\|z\|_2 + a_3\|\xi\|_2 \end{cases} \quad (3.69)$$

(Note : δ_z et δ_ξ sont des incertitudes de modèle bornées)

Soit $\phi(z)$ une commande de retour d'état stabilisante pour le système en question. On peut alors supposer l'existence d'une fonction de Lyapunov positive, V , telle que

$$\frac{\partial V}{\partial z}[f(z) + g(z)\phi(z) + \delta_z(z, 0)] \leq -W(z) \quad (3.70)$$

Où W est également définie positive. En réécrivant le système, nous mettons en lumière la variation par rapport à ce contrôle stabilisant. Le système reformulé s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} &= [f(z) + g(z)\phi(z)] + g(z)[\xi - \phi(z)] + \delta_z \\ \dot{\xi} &= u + \delta_\xi \end{cases} \quad (3.71)$$

et nous définissons

$$\begin{cases} y &= \xi - \phi(z) \\ v &= u - \dot{\phi}(z) \end{cases} \quad (3.72)$$

Pour que nous puissions réécrire le système ci-dessus comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} &= [f + g\phi] + gy + \delta_z(z, y) \\ \dot{y} &= v + \delta_\zeta(z, y) \end{cases} \quad (3.73)$$

Notez que cette formulation est similaire à celle du système original, avec la différence que le système supérieur est maintenant asymptotiquement stable lorsque $y = 0$. Dans notre approche originale de backstepping, nous avons défini

$$v = -\frac{\partial V}{\partial z}g(z) - ky$$

et considéré la fonction

$$V_c = V(z) + \frac{1}{2}y^2$$

pour montrer que $\dot{V}_c < 0$, établissant ainsi la stabilité asymptotique de l'ensemble du système. Cependant, cette approche supposait l'absence de δ_z et δ_ζ .

Avec ces incertitudes, l'expression pour \dot{V}_c devient

$$\dot{V}_c < -W(z) - ky^2 + \frac{\partial V}{\partial z}\delta_z + y\delta_\xi$$

Il est incertain que \dot{V}_c reste négativement défini en raison de ces termes additionnels. Cette situation suggère que notre approche antérieure du backstepping pourrait être limitée puisqu'elle repose sur des annulations exactes. Une solution consiste à traiter le système comme une interconnexion de deux sous-systèmes et à appliquer le théorème du petit gain pour garantir la stabilité asymptotique. Le système supérieur

$$\dot{z} = [f(z) + g(z)\phi(z)] + g(z)y + \delta_z(z, y)$$

est déjà connu pour être asymptotiquement stable lorsque $y = 0$, avec une fonction de Lyapunov connue V . Cette V est également une fonction de Lyapunov ISS, ce qui signifie que le système supérieur est stable en entrée-à-état. Il doit donc exister des fonctions de classe \mathcal{K} γ_1 et de classe \mathcal{KL} β_1 telles que

$$\|z(t)\|_\infty \leq \max \{ \beta_1 (\|z_0\|, t), \gamma_1 (\|y\|_\infty) \}$$

Notre objectif est de choisir v dans le système inférieur pour que celui-ci soit également ISS. Cela impliquerait l'existence d'une fonction de classe \mathcal{KL} β_2 et d'une fonction de classe \mathcal{K} γ_2 , satisfaisant

$$\|y(t)\|_\infty \leq \max \{ \beta_2 (\|y_0\|, t), \gamma_2 (\|z\|_\infty) \}$$

Si nous démontrons que $\gamma_1\gamma_2 < 1$, alors le système interconnecté est stable selon le théorème du petit gain ISS. Procédons à l'établissement de cette condition de manière formelle.

Considérons le système original comme précédemment.

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z) + g(z)\xi + \delta_1(z, \xi) \\ \dot{\xi} &= u + \delta_2(z, \xi) \end{cases} \quad (3.74)$$

et comme avant, nous posons $y = \xi - \phi(z)$ où $\phi(z)$ stabilise le système supérieur. Cela signifie que nous pouvons réécrire le système ci-dessus comme

$$\begin{cases} \dot{z} &= [f(z) + g(z)\phi(z)] + g(z)y + \delta_1(z, y) \\ \dot{y} &= u - \dot{\phi}(z) + \delta_2(z, y) \end{cases} \quad (3.75)$$

Notre choix de contrôle garantit qu'il existe des fonctions de classe \mathcal{K} et \mathcal{KL} γ_1 et β_1 telles que

$$\|z(t)\|_\infty \leq \max \{ \beta_1 (\|z_0\|, t), \gamma_1 (\|y\|_\infty) \}$$

Maintenant, supposons que

$$\begin{cases} |\delta_1(z, y)| &= a_1|y| \\ |\delta_2(z, y)| &= \rho(z) + |y|^2 \end{cases}$$

Où $\rho(\cdot)$ est de classe \mathcal{K} . Considérons maintenant la fonction candidate ISS-Lyapunov

$$V(y) = \frac{1}{2}y^2$$

La dérivée de V est

$$\dot{V} = y\dot{y} = y(u - \dot{\phi}(z) + \delta_2(z, y))$$

et nous considérons le contrôle

$$u = k(y) = -y - \alpha(y)$$

Où α est de classe \mathcal{K} et $\alpha(-y) = -\alpha(y)$. Cela signifie que $y\alpha(y)$ est toujours positif si $y \neq 0$. Calculons la dérivée temporelle avec ce u particulier

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= y(-y - \alpha(y) - \dot{\phi}(z) + \delta_2(z, y)) \\ &= -|y|^2 - |y|\alpha(|y|) + y\delta_2(z, y) - y\dot{\phi}(z) \end{aligned}$$

Notez que

$$-y\dot{\phi}(z) \leq |y|^2 + |\dot{\phi}(z)|^2$$

de sorte que l'inégalité ci-dessus peut être réécrite comme

$$\dot{V}(y) \leq -|y|^2 - |y|\alpha(|y|) + |y|^2 + |\dot{\phi}(z)|^2 + |y| |\delta_2(z, y)|$$

Si nous choisissons

$$\alpha(|y|) > \rho(z) + |y|$$

alors

$$-|y|\alpha(|y|) + |y|^2 + |y| |\delta_2(z, y)| < 0$$

ce qui implique que

$$\dot{V}(y) \leq -|y|^2 + |\dot{\phi}(z)|^2$$

Pour tout $\epsilon > 0$ si nous laissons

$$|y| > \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} |\dot{\phi}(z)|$$

nous trouvons que

$$\dot{V}(y) \leq -|y|^2 + |\dot{\phi}(z)|^2 \leq -\epsilon|y|^2$$

ce qui implique que $V(y)$ est une fonction ISS-Lyapunov pour le système inférieur et donc

$$|y(t)| \leq \max \{ \beta_2(|y_0|, t), \gamma_{21}(|z|), \gamma_{22}(|u|) \}$$

Nos choix libres pour $\alpha(|y|)$ déterminent la taille de γ_{21} et γ_{22} de sorte que plus α_i est grand, plus γ est petit. Ainsi, nous pouvons toujours trouver un contrôleur qui satisfait au théorème du petit gain ISS et ce système en boucle fermée peut être stabilisé.

Lemme de Backstepping Robuste : Considérons le système suivant;

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z, \xi, \mu) \\ \dot{\xi} &= \phi(z, \xi, \mu) + b(z, \xi, \mu)u \end{cases} \quad (3.76)$$

dans lequel $f(0, 0, \mu) = 0$ et $\phi(0, 0, \mu) = 0$. Supposons que :

- Pour chaque μ (paramètre), le système supérieur est ISS-stable et il existe une fonction de classe \mathcal{K}_∞ γ (indépendante de μ) telle que

$$\|z\|_\infty \leq \max \{ \beta(\|z_0\|, t), \gamma(\|\xi\|_\infty) \}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| \leq \gamma \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| \right)$$

pour une certaine fonction de classe \mathcal{KL} $\beta(\cdot, \cdot)$.

- Il existe $b_0 > 0$ tel que $b(z, \xi, \mu) \geq b_0$ pour tous z, ξ et μ .
- Il existe des fonctions de classe \mathcal{K} ρ_0 et ρ_1 qui sont localement Lipschitz à l'origine telles que

$$\max \{ |\phi(z, \xi, \mu)|, |\xi| b(z, \xi, \mu)^2 \} \leq \max \{ \rho_0(|\xi|), \rho_1(\|z\|) \}$$

pour tous z, ξ et μ .

- La fonction $\rho_1(\gamma(\cdot))$ est localement Lipschitz à l'origine Alors il existe $K(\xi)$ avec $K(0) = 0$ tel que sous la loi de contrôle

$$u = k(\xi) + v$$

Le système en boucle fermée avec entrée v et état (z, ξ) est stable ISS. La preuve est similaire à celle présentée précédemment, où nous choisissons

$$K(\xi) = -y - \alpha(y)$$

avec α étant une fonction de classe \mathcal{K} telle que $y\alpha(y) > 0$ lorsque $y \neq 0$. Ce lemme fournit tous les éléments nécessaires pour établir une procédure de conception récursive pour la stabilisation robuste des systèmes en forme de feedback (triangulaire inférieure).

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z, \xi_1, \mu) \\ \dot{\xi}_1 &= q_1(z, \xi_1, \mu) + b_1(z, \xi_1, \mu) \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= q_2(z, \xi_1, \xi_2, \mu) + b_2(z, \xi_1, \xi_2, \mu) \xi_s \\ \dots &= \dots \\ \dot{\xi}_r &= q_r(z, \xi_1, \dots, \xi_r, \mu) + b_r(z, \xi_1, \dots, \xi_r, \mu) u \end{cases} \quad (3.77)$$

Ce lemme stipule que, sous certaines hypothèses techniques, si le système supérieur est stable ISS, une loi de feedback $k(\xi)$ peut être conçue de sorte que l'ensemble du système soit stable ISS avec le contrôle $u = k(\xi) + v$. Pour illustrer comment la récursion pourrait être mise en oeuvre, considérons un système modélisé, par exemple, par les équations

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z, \xi, \mu) \\ \dot{\xi} &= \phi(z, \xi, \mu) + b(z, \xi, \mu)\zeta \\ \dot{\zeta} &= \chi(z, \xi, \zeta, \mu) + d(z, \xi, \zeta, \mu)u \end{cases} \quad (3.78)$$

Le changement de variables

$$v = \zeta - k(\xi) \quad (3.79)$$

transforme notre système original en la forme

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z, \xi, \mu) \\ \dot{\xi} &= \phi(z, \xi, \mu) + b(z, \xi, \mu)k(\xi) + b(z, \xi, \mu)v \\ \dot{v} &= \bar{\chi}(z, \xi, v, \mu) + \bar{d}(z, \xi, v, \mu)u \end{cases} \quad (3.80)$$

Ce système, avec état (z, ξ) et entrée v , répond aux conditions du lemme. En supposant que les fonctions $\bar{\chi}$, \bar{d} et le gain γ satisfont aux exigences techniques du lemme, celui-ci garantit l'existence d'un contrôle.

$$u = \bar{k}(v) + w \quad (3.81)$$

tel que l'ensemble du système est stable ISS.

Exemple

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} &= -az^2 \operatorname{sgn}(z) + bz(\xi + \xi^2) \\ \dot{\xi} &= z + u \end{cases}$$

Où les paramètres a et b sont contraints par $0 < a_0 \leq a \leq a_1$ et $|b| \leq b_0$. Ce système est un cas particulier de

$$\begin{cases} \dot{z} &= -az^k \operatorname{sgn}(z) + bx^p \phi(u) \end{cases}$$

Avec k pair et $p < k$. Comme nous l'avons démontré précédemment, ce système est

ISS. Plus spécifiquement, la fonction de gain pour le système supérieur est donnée par

$$\gamma(r) = \frac{|b|}{a-\epsilon} (r + r^2) < k (r + r^2)$$

pour $0 < \epsilon < a$. La troisième condition du lemme est remplie, étant donné que

$$\max\{|z|, |\xi|\} \leq \max\{|\xi|, |z|\}$$

Nous sélectionnons une fonction de gain $g(\cdot)$ de classe \mathcal{K}_∞ telle que

$$\gamma \circ g(r) < r$$

pour tout $r > 0$, ce qui implique

$$\gamma(r) < g^{-1}(r)$$

Par conséquent, nous choisissons

$$g^{-1}(r) = 2k (r + r^2)$$

et définissons

$$\alpha(\xi) = \begin{cases} 3k(\xi + \xi^2) & \text{si } \xi \geq 0 \\ -\alpha(-\xi) & \text{si } \xi \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi, le contrôle robuste pour ce système est

$$\begin{cases} u = -\xi - \alpha(\xi) + v \end{cases}$$

3.4 Stabilisation par contrôle distribué parallèle

Le contrôle distribué parallèle (PDC) est une stratégie efficace pour stabiliser les systèmes modélisés par des modèles flous de Takagi-Sugeno (T-S), qui interpolent entre différents systèmes dynamiques linéaires. Cette méthode implique la création d'un système de contrôle flou dont les prémices des règles sont identiques à celles du système flou de la plante. Dans ce cadre, chaque règle de contrôle est associée à une loi de commande spécifique pour gérer le système linéaire correspondant de la plante, et la loi de commande globale résulte de la combinaison pondérée de ces lois individuelles.

Le PDC joue un rôle crucial dans la gestion des systèmes non linéaires, offrant la possibilité d'un contrôle adaptatif en temps réel, en particulier lorsque le système non linéaire est identifié en ligne comme un système flou T-S.

Considérons le système flou de type Takagi-Sugeno (TS), formulé comme suit:

$$\text{SI } z_1 \text{ est } F_1^i, \text{ ET } \dots, \text{ ET } z_r \text{ est } F_r^i, \text{ ALORS } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t). \end{cases} \quad (3.82)$$

Le contrôleur PDC pour ce système se définit par R règles de la forme :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^M \mu_i(z(t)) K_i x(t) \quad (3.83)$$

En boucle fermée, le modèle TS flou avec la loi de commande PDC se représente comme

:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad (3.84)$$

La stabilité de ce système en boucle fermée nécessite de trouver des gains de commande tels que la dérivée de la fonction de Lyapunov quadratique $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, avec $P > 0$, soit négative. Cette dérivée, le long des trajectoires du système (3.84), est définie par :

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) x(t)^T (A_i - B_i K_j)^T P + P (A_i - B_i K_j) x(t) < 0 \quad (3.85)$$

En posant $G_{ij} = (A_i - B_i K_j)$, nous énonçons les conditions suffisantes suivantes.

Théorème 4.1 [XQ03] : Le multi-modèles en boucle fermée (3.84) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique $P > 0$ et des matrices Q_{ij} avec $Q_{ji} = Q_{ij}^T$, satisfaisant les inégalités suivantes :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + Q_{ii} < 0, \quad (3.86)$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + Q_{ij} + Q_{ij}^T \leq 0 \quad \text{pour } i < j, \quad (3.87)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{M1} & \cdots & Q_{MM} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.88)$$

pour $i, j = 1, 2, \dots, M$, à l'exception des paires (i, j) pour lesquelles $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) = 0$.

Démonstration

Soit $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ une fonction de Lyapunov quadratique. Sa dérivée temporelle, calculée le long du système (3.84), est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x(t)^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) (G_{ij}^T P + P G_{ij}) x(t) \\ &= x(t)^T \sum_{i=1}^N \mu_i^2(z) (G_{ii}^T P + P G_{ii}) x(t) \\ &\quad + x(t)^T \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \mu_i(z)\mu_j(z) ((G_{ij} + G_{ji})^T P + P (G_{ij} + G_{ji})) x(t) \end{aligned}$$

Les conditions 3.86 et 3.87 garantissent que $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ décroît, soit $\dot{V}(x(t)) < 0$

1. Conception du contrôleur flou stable

En utilisant les inégalités matricielles linéaires (LMI) suivantes pour des systèmes flous continus, il est possible de déterminer les gains de retour d'état F_i et la matrice P (si une solution existe).

Trouver $X > 0$ et $M_i (i = 1, \dots, r)$ tels que :

$$\begin{aligned} -X A_i^T - A_i X + M_i^T B_i^T + B_i M_i &> 0, \\ -X A_i^T - A_i X - X A_j^T - A_j X \\ + M_j^T B_i^T + B_i M_j + M_i^T B_j^T + B_j M_i &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.89)$$

pour $i < j$ et $h_i \cap h_j \neq \emptyset$

où

$$X = P^{-1}, \quad M_i = F_i X. \quad (3.90)$$

Les F_i et une P commune sont obtenus comme suit :

$$P = X^{-1}, \quad F_i = M_i X^{-1} \quad (3.91)$$

à partir des solutions X et M_i .

2. Conception de contrôleur flou avec des conditions de stabilité relaxées

Trouver $X > \mathbf{0}$, $Y \geq \mathbf{0}$, et $M_i (i = 1, \dots, r)$ satisfaisant

$$\begin{aligned} -XA_i^\top - A_iX + M_i^\top B_i^\top + B_iM_i - (s-1)Y &> 0, \\ 2Y - XA_i^\top - A_iX - XA_j^\top - A_jX \\ + M_j^\top B_i^\top + B_iM_j + M_i^\top B_j^\top + B_jM_i &\geq 0, \\ \text{pour } i < j \text{ et } h_i \cap h_j &\neq \phi, \end{aligned} \quad (3.92)$$

où

$$X = P^{-1}, \quad M_i = F_i X, \quad Y = XQX. \quad (3.93)$$

Les F_i , une P commune, et une Q commune sont obtenus comme suit :

$$P = X^{-1}, \quad F_i = M_i X^{-1}, \quad Q = PYP$$

à partir des solutions X , Y , et M_i .

3. Conception de contrôleur flou avec un taux de décroissance

La condition de taux de décroissance $\dot{V}(x(t)) \leq -2\alpha V(x(t))$ pour toutes les trajectoires est équivalente à :

$$G_{ii}^\top P + PG_{ii} + 2\alpha P < 0 \quad (3.94)$$

pour tout i , et

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^\top P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + 2\alpha P \leq 0 \quad (3.95)$$

pour $i < j$ à l'exception des paires (i, j) telles que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0, \forall t$, où $\alpha > 0$.

Pour maximiser α , résolvez le problème de minimisation de la valeur propre généralisée

(GEVP) suivant :

$$\underset{X, M_1, \dots, M_r}{\text{maximiser } \alpha} \quad (3.96)$$

sous réserve de

$$\begin{aligned} X &> 0, \\ -XA_i^\top - A_iX + M_i^\top B_i^\top + B_iM_i - 2\alpha X &> 0, \\ -XA_i^\top - A_iX - XA_j^\top - A_jX & \\ + M_j^\top B_i^\top + B_iM_j + M_i^\top B_j^\top + B_jM_i - 4\alpha X &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.97)$$

pour $i < j$ et $h_i \cap h_j \neq \phi$,

où

$$X = P^{-1}, \quad M_i = F_i X.$$

4. Conception de contrôleur flou avec un taux de décroissance dans des conditions de stabilité relaxées

La condition de taux de décroissance est donnée par :

$$\begin{aligned} G_{ii}^\top P + PG_{ii} + (s-1)Q + 2\alpha P &< 0, \\ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)^\top P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right) - Q + 2\alpha P &\leq 0, \end{aligned} \quad (3.98)$$

pour $i < j$ et $h_i \cap h_j \neq \phi$,

où $\alpha > 0$.

Pour maximiser α , résolvez le GEVP suivant :

$$\underset{X, Y, M_1, \dots, M_r}{\text{maximiser } \alpha} \quad (3.99)$$

sous réserve de

$$\begin{aligned}
 & X > 0, \quad Y \geq 0, \\
 & -XA_i^\top - A_iX + M_i^\top B_i^\top + B_iM_i - (s-1)Y - 2\alpha X > 0, \\
 & 2Y - XA_i^\top - A_iX - XA_j^\top - A_jX \\
 & \quad + M_j^\top B_i^\top + B_iM_j + M_i^\top B_j^\top + B_jM_i - 4\alpha X \geq 0, \\
 & \text{pour } i < j \text{ et } h_i \cap h_j \neq \phi,
 \end{aligned} \tag{3.100}$$

où

$$X = P^{-1}, \quad M_i = F_iX, \quad Y = XQX$$

5. Conception de contrôleur flou avec contrainte sur l'entrée

Théorème 4.2

Supposons que la condition initiale $x(0)$ soit connue. La contrainte $\|u(t)\|_2 \leq \mu$ est respectée à tout moment $t \geq 0$ si les inéquations matricielles linéaires (LMI) suivantes sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^\top \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \tag{3.101}$$

$$\begin{bmatrix} X & M_i^\top \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.102}$$

où $X = P^{-1}$ et $M_i = F_iX$.

Preuve.

Supposons que $V(x(t)) = x^\top(t)Px(t)$ soit une fonction de Lyapunov et

$$x^\top(0)Px(0) \leq 1.$$

Alors,

$$1 - x^\top(0)X^{-1}x(0) \geq 0, \tag{3.103}$$

où $X = P^{-1}$. L'inégalité (3.103) est transformée en (3.101) par la procédure du complément de Schur.

La dérivation de (3.102) est la suivante : à partir de $\|u(t)\|_2 \leq \mu$,

$$u^\top(t)u(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t)F_i^\top F_j x(t) \leq \mu^2.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t)F_i^\top F_j x(t) \leq 1. \quad (3.104)$$

Puisque $x^\top(t)X^{-1}x(t) < x^\top(0)X^{-1}x(0) \leq 1$ pour $t > 0$, si

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t)F_i^\top F_j x(t) \leq x^\top(t)X^{-1}x(t), \quad (3.105)$$

alors (3.104) est vérifiée. Par conséquent, nous avons

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t) \left(\frac{1}{\mu^2} F_i^\top F_j - X^{-1} \right) x(t) \leq 0. \quad (3.106)$$

À partir du côté gauche de (3.106),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t) \left(\frac{1}{\mu^2} F_i^\top F_j + \frac{1}{\mu^2} F_j^\top F_i - 2X^{-1} \right) x(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t) \\ & \quad \times \left[\frac{1}{\mu^2} (F_i^\top F_i + F_j^\top F_j) - \frac{1}{\mu^2} (F_i^\top - F_j^\top) (F_i - F_j) - 2X^{-1} \right] x(t) \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t) \left[\frac{1}{\mu^2} (F_i^\top F_i + F_j^\top F_j) - 2X^{-1} \right] x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))x^\top(t) \left(\frac{1}{\mu^2} F_i^\top F_i - X^{-1} \right) x(t). \end{aligned} \quad (3.107)$$

Si

$$\frac{1}{\mu^2} F_i^\top F_i - X^{-1} \leq \mathbf{0}, \quad (3.108)$$

alors (3.106) est vérifiée. En définissant $M_i = F_i X$ pour (3.108), nous obtenons

$$\frac{1}{\mu^2} M_i^\top M_i - X \leq \mathbf{0}.$$

L'inégalité (3.102) peut être obtenue à partir de l'inégalité ci-dessus par la procédure du complément de Schur. Une autre solution pour obtenir (3.102) est la suivante. À partir de (3.106), nous avons

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} X^{-1} & F_i^\top \\ F_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0.$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par le bloc-diagonal $\begin{bmatrix} X & I \end{bmatrix}$, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} X & M_i^\top \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Ainsi, nous arrivons à la condition (3.102). Cette dérivation est plus directe et compacte.

Exemple

Considérons un système dynamique non linéaire à deux états décrit par le système flou de Takagi-Sugeno (T-S) :

- Si x_1 est P_1^1 et x_2 est P_2^1 , alors $\dot{x}^1(t) = A_1 x(t) + b_1 u(t)$.
- Si x_1 est P_1^1 et x_2 est P_2^2 , alors $\dot{x}^2(t) = A_2 x(t) + b_2 u(t)$.
- Si x_1 est P_1^2 et x_2 est P_2^1 , alors $\dot{x}^3(t) = A_3 x(t) + b_3 u(t)$.
- Si x_1 est P_1^2 et x_2 est P_2^2 , alors $\dot{x}^4(t) = A_4 x(t) + b_4 u(t)$.

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notez que chaque système conséquent est contrôlable mais instable.

Les valeurs propres de A_1 sont $1 \pm j$, celles de A_2 sont $1 \pm j\sqrt{2}$, celles de A_3 sont $0.5 \pm j1.32$, et celles de A_4 sont $0.5 \pm j1.66$.

Par conséquent, ce système flou T-S est non linéaire et instable.

Pour le stabiliser, nous concevons un contrôleur de placement de pôles distribué parallèle avec des lois de commande de feedback d'état pour placer les valeurs propres en boucle fermée de chaque système à $-1 \pm j$.

Le contrôleur distribué parallèle est donné par :

- Si $x_1(t)$ est P_1^1 et $x_2(t)$ est P_2^1 , alors $u^1(t) = -k_1x(t)$.
- Si $x_1(t)$ est P_1^1 et $x_2(t)$ est P_2^2 , alors $u^2(t) = -k_2x(t)$.
- Si $x_1(t)$ est P_1^2 et $x_2(t)$ est P_2^1 , alors $u^3(t) = -k_3x(t)$.
- Si $x_1(t)$ est P_1^2 et $x_2(t)$ est P_2^2 , alors $u^4(t) = -k_4x(t)$.

où $k_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$, $k_2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$, $k_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$, et $k_4 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$.

La loi de commande appliquée à la plante est donc :

$$u(t) = -[k_1\xi_1(t) + k_2\xi_2(t) + k_3\xi_3(t) + k_4\xi_4(t)]x(t)$$

La condition (3.98) pour la stabilité se traduit par 16 inégalités pour ce problème particulier.

$$\begin{aligned} G(A_1 - b_1k_1) + (A_1 - b_1k_1)^T G &< 0, \\ G(A_1 - b_1k_2) + (A_1 - b_1k_2)^T G &< 0, \\ &\vdots \\ G(A_4 - b_4k_4) + (A_4 - b_4k_4)^T G &< 0. \end{aligned}$$

Il a été vérifié que la matrice

$$G = \begin{bmatrix} 1509 & 347 \\ 347 & 653 \end{bmatrix}$$

satisfait ces 16 inégalités linéaires matricielles (LMIs).

Cette matrice G a été trouvée à l'aide de la boîte à outils Matlab LMI Control Toolbox.

Par conséquent, nous sommes assurés que le contrôleur distribué parallèle ci-dessus rend le point $\underline{x} = \underline{0}$ globalement asymptotiquement stable dans le système en boucle fermée susmentionné.

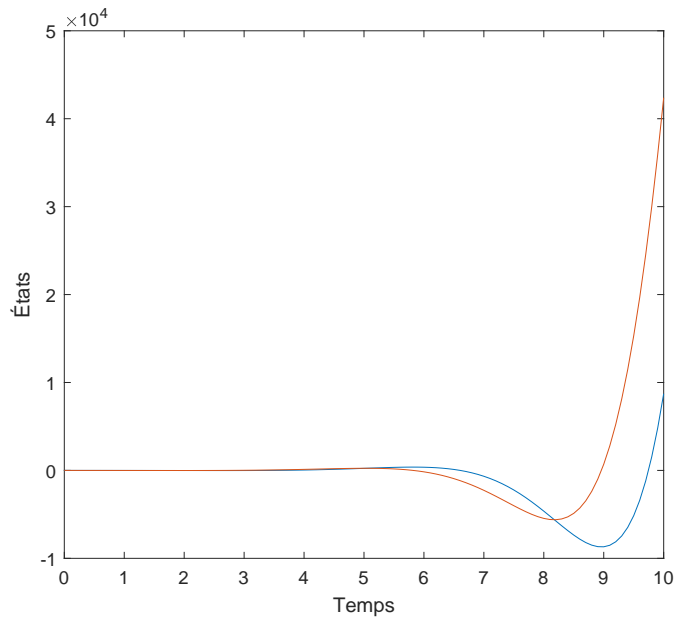


Fig 3.9: Trajectoires d'état du système en boucle ouverte

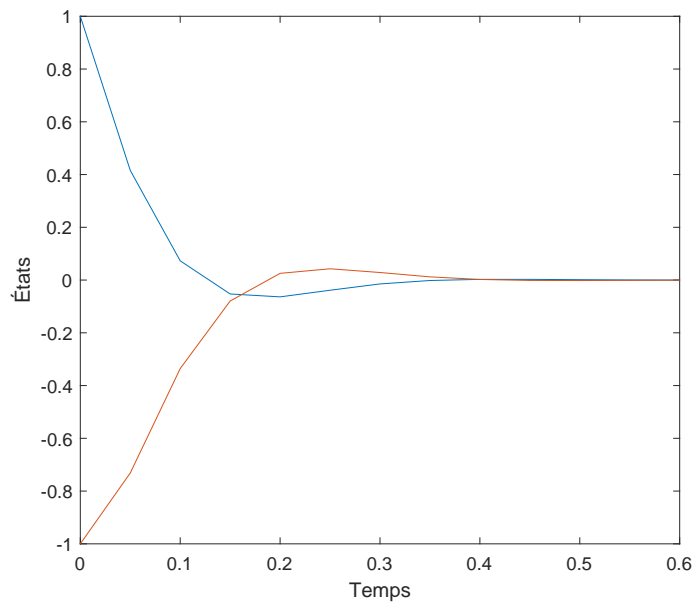


Fig 3.10: Trajectoires d'état du système sous le contrôle distribué parallèle

3.5 Stabilisation par Retour de Sortie

Les lois de commande traditionnelles nécessitent un accès complet aux variables d'état du système. En absence de cet accès, une commande par retour de sortie, qu'elle soit statique ou dynamique, peut être mise en oeuvre. Cette approche a été largement étudiée récemment, comme le souligne [Oud08].

Cette section est divisée en deux parties. La première aborde les conditions de stabilité pour un multi-modèle avec une commande par retour de sortie statique, en utilisant des fonctions

commande par retour de sortie dynamique basée sur un observateur.

La loi de commande statique est définie par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(z(t)) F_i y(t), \quad (3.109)$$

et pour le multi-modèle en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (A_i + B_i F_j C) x(t). \quad (3.110)$$

Selon le Théorème 4.1, la synthèse de la commande par retour de sortie statique est effectuée en remplaçant G_{ij} par $\bar{A}_{ij} = A_i + B_i F_j C$.

Les conditions de stabilité sont :

$$\bar{A}_{ii}^\top P + P \bar{A}_{ii} + Q_{ii} < 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, M \quad (3.111)$$

$$\left(\frac{\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}}{2} \right)^\top P + P \left(\frac{\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}}{2} \right) + Q_{ij} + Q_{ji} \leq 0 \quad \text{pour } i < j \quad (3.112)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{M1} & \dots & Q_{MM} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.113)$$

avec $Q_{ji} = Q_{ij}^\top$.

Ces conditions, non linéaires en P et F_i , ne peuvent être linéarisées par un changement de variables. Toutefois, si la matrice de sortie C est de plein rang ligne, une formulation convexe peut être proposée.

Théorème 4.3 : Supposons l'existence de matrices $X > 0$, N_i , M , et Q_{ij} avec $Q_{ji} = Q_{ij}^\top$, satisfaisant :

$$\bar{A}_{ii}^\top P + P \bar{A}_{ii} + Q_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, M \quad (3.114)$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^\top + (B_i N_j + B_j N_i)C + C^\top (B_i N_j + B_j N_i)^\top + Q_{ij} + Q_{ji} \leq 0, i < j \quad (3.115)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{M1} & \cdots & Q_{MM} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.116)$$

Si $CX = MX$, le multi-modèle est globalement asymptotiquement stable, et le retour de sortie non linéaire est donné par :

$$F_i = N_i M^{-1}.$$

Il est supposé que la matrice de sortie C est identique pour tous les modèles locaux.

3.5.1 Stabilisation par Retour d'État Reconstitué

La loi de commande basée sur observateur est :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^M \mu_i(z(t)) K_i \hat{x}(t). \quad (3.117)$$

Le modèle augmenté, incluant l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, est :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \begin{pmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

Si $CX = MX$, le multi-modèle est globalement asymptotiquement stable, et le retour de sortie non linéaire est donné par :

$$F_i = N_i M^{-1}.$$

Étant donnée que toutes les variables de décision $z(t)$ sont mesurables, il a été démontré que le principe de séparation est garantie [MSH98].

On peut donc déterminer les gains du multicontrôleur K_i et les gains du multiobservateur L_i séparément à partir des conditions suivantes

$$G_{ii}^T P_1 + P_1 G_{ii} + Q_{ii} < 0 \quad (3.119)$$

$$\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P_1 + P_1 \left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) + Q_{ij} + Q_{ji} \leq 0 \quad i < j \quad (3.120)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{M1} & \cdots & Q_{MM} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.121)$$

$$(A_i - L_i C_i)^T + P(A_i - L_i C_i) + S_{ii} < 0; \quad i = 1, \dots, M \quad (3.122)$$

$$\left(\frac{A_i - L_i C_j + A_j - L_j C_i}{2}\right)^T P + P \left(\frac{A_i - L_i C_j + A_j - L_j C_i}{2}\right) + S_{ij} + S_{ji} \leq 0 \quad i < j \quad (3.123)$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{M1} & \cdots & S_{MM} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.124)$$

où $G_{ij} = A_i - B_i K_j$, $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, $Q_{ji} = Q_{ij}^T$ et $S_{ji} = S_{ij}^T$.

3.6 Stabilisation quadratique et non quadratique

3.6.1 Théorème des valeurs moyennes différentielles

Dans cette section, nous examinons l'approche basée sur le théorème des valeurs moyennes différentielles (DMVT) pour les fonctions à valeurs scalaires et vectorielles. Cette méthode permet de représenter la dynamique non linéaire de l'erreur d'estimation sous la forme d'un système Linéaire à Paramètres Variants (LPV), une approche qui sera exploitée dans la suite.

Considérons $f(x) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction continue sur l'intervalle $[a, b] \in \mathbb{R}^n$ et différentiable dans $Co(a, b)$. Alors, il existe un vecteur $c \in Co(a, b)$, avec $c_i \neq a$, $c_i \neq b$ pour $i = 1, \dots, n$, tel que [IMRM10] :

$$f(a) - f(b) = \left[\sum_{i,j,k=1}^{n,n,2} H_{ijk}(c_j) \delta_{ijk} \right] (a - b) \quad (3.125)$$

Où $H_{ijk}(c_j)$ représente les éléments de la matrice Jacobienne de f évaluée en c et δ_{ijk} sont des coefficients appropriés qui dépendent des dérivées de f . Cette représentation est utile pour analyser et contrôler les systèmes dynamiques non linéaires en les approchant par des systèmes LPV.

tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij1} = \frac{[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)]^{max} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)}{[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)]^{max} - [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)]^{min}} \\ \delta_{ij2} = \frac{[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)]^{min} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)}{[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)]^{max} - [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)]^{min}} \end{array} \right. \quad (3.126)$$

$$\delta_{ijk} \geq 0 \quad \text{et} \quad \delta_{ij1} + \delta_{ij2} = 1$$

$$H_{ij1} = e_n(i)e_n^T(j) \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j) \right]^{max} \quad (3.127)$$

$$H_{ij1} = \begin{array}{c} j \\ \left[\begin{array}{cccccc} & & i & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ : & & : & : & & & : \\ 0 & \dots & [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]^{max} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ : & & : & : & & & : \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (3.128)$$

$$H_{ij2} = e_n(i)e_n^T(j) \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j) \right]^{min} \quad (3.129)$$

$$H_{ij2} = \begin{array}{c} j \\ \left[\begin{array}{cccccc} & & i & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ : & & : & : & & & : \\ 0 & \dots & [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]^{min} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ : & & : & : & & & : \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (3.130)$$

Exemple d'illustration

Soit une fonction bidimensionnel $f(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, continue et différentiable sur $Co(X, Y)$ tel que :

$$f(x) = [f_1(x) \ f_2(x)]^T, \text{ avec } X = [X_1 \ X_2]^T \text{ et } Y = [Y_1 \ Y_2]^T.$$

D'après le théorème des valeurs moyennes, on peut écrire:

$$\begin{aligned} f(X) - f(Y) = & \left(\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\frac{\partial f_1}{\partial x_1}]^{max} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \delta_{111} + \begin{bmatrix} 0 & [\frac{\partial f_1}{\partial x_2}]^{max} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \delta_{121} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [\frac{\partial f_2}{\partial x_1}]^{max} & 0 \end{bmatrix} \times \delta_{211} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\frac{\partial f_2}{\partial x_2}]^{max} \end{bmatrix} \times \delta_{221} + \begin{bmatrix} [\frac{\partial f_1}{\partial x_1}]^{min} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \delta_{112} + \begin{bmatrix} 0 & [\frac{\partial f_1}{\partial x_2}]^{min} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \delta_{122} + \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [\frac{\partial f_2}{\partial x_1}]^{min} & 0 \end{bmatrix} \times \delta_{212} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\frac{\partial f_2}{\partial x_2}]^{min} \end{bmatrix} \times \delta_{222} \end{aligned} \right) \times \left[\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

3.6.2 Stabilisation par retour de sortie quadratique

L'objectif de cette section est de concevoir un contrôleur à retour d'état basé sur des états estimés pour assurer la stabilité du système non linéaire en boucle fermée.

Avant de présenter la conception de notre contrôleur, nous introduisons l'hypothèse suivante, non restrictive :

Hypothèse

- Nous supposons que le signal de référence est borné.
- Les paires (A_i, B) sont contrôlables.

Considérons le système flou de type Takagi-Sugeno suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(x(t))) (A_i x(t) + B_i u(t)) + F(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.131)$$

où $F(t)$ représente le vecteur d'entrée inconnu. Ensuite, l'observateur d'état correspon-

nant est représenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(\hat{x}(t))) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ y(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3.132)$$

La loi de commande pour le système donné par (3.131) est définie par un retour d'état

$$u(t) = -K \left((\hat{x}(t) - x_c(t)) + \int (\hat{x}(t) - x_c(t)) \right) \quad (3.133)$$

Définissons l'erreur de suivi comme :

$$e_c(t) = x(t) - x_c(t) \quad (3.134)$$

Alors, la relation (3.133) devient :

$$u(t) = -K \left((e_c(t) - \tilde{e}(t)) + \int (e_c(t) - \tilde{e}(t)) \right) \quad (3.135)$$

En substituant (3.135), nous obtenons la dynamique de l'erreur de suivi :

$$\begin{aligned} \dot{e}_c(t) = \sum_{i=1}^r h_i(t) [(A_i - B_i K) e_c(t) + B_i K \tilde{e}(t) \\ - B_i K / (e_c(t) - \tilde{e}(t)) dt + \bar{E} \cdot \bar{F}(t)] \end{aligned} \quad (3.136)$$

où

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} A_i & I \end{bmatrix} \text{ et } \bar{F}(t) = \begin{bmatrix} x_c(t) \\ F(t) \end{bmatrix}$$

Définissons le vecteur augmenté $e_a(t)$ comme :

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} \tilde{e}(t) \\ e_c(t) \\ \int (e_c(t) - \tilde{e}(t)) dt \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

Après manipulation, la dynamique du système augmenté devient la suivante :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^r h_i(t) (A_a e_a(t) + B_a U_a(t)) \quad (3.138)$$

$$\text{où } A_a = \begin{bmatrix} A_i - LC & 0 & 0 \\ B_i K & A_i - B_i K & -B_i K \\ -I & I & 0 \end{bmatrix} \quad B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{E}{0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } U_a = \begin{bmatrix} F \\ \bar{F} \end{bmatrix}$$

L'estimation d'état et l'erreur de suivi peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}(t) = (A_0 - LC) \tilde{e}(t) + (\Phi(x) - \Phi(\hat{x})) \\ \dot{e}_c(t) = (A_0 - B_0 K) e_c(t) + B_0 K \tilde{e}(t) \\ \quad + B_0 K / (e_c(t) - \tilde{e}(t)) + \bar{E} \cdot \bar{F}(t) + \Phi(\hat{x}, x_c) \end{cases} \quad (3.139)$$

où :

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{x}, x_c) &= \sum_{i=1}^r h_i \left((\bar{A} - \bar{B}K) e_c(t) + \bar{B}K e(t) \right. \\ &\quad \left. - \bar{B}\bar{K} \int (e_c(t) - \tilde{e}(t)) \right) \end{aligned}$$

En utilisant l'approche du théorème des valeurs moyennes:

$$\Phi(\hat{x}, x_c) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{\xi} (\hat{x} - x_c) \quad (3.140)$$

où $\xi \in]\hat{x} - x_c[$ Maintenant, nous appliquons la transformation de non-linéarité sectorielle, le système augmenté 3.139 peut s'exprimer comme :

$$e_a(t) = \sum_{i=1}^r h_i(t) \bar{A}_a e_a(t) + B_a U_a(t) \quad (3.141)$$

où

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} A_0 + \mathcal{A}_i - LC & 0 & 0 \\ B_0 K & A_0 + \mathcal{A}_i - B_0 K & -B_0 K \\ -I & I & 0 \end{bmatrix}$$

La présence de perturbations d'entrée $U_a(t)$ affecte la performance de contrôle du système global. Par conséquent, une performance de suivi H^∞ a été considérée.

Théorème 4.4

Le système en boucle fermée (3.141) est asymptotiquement stable avec une performance de suivi garantie H^∞ , s'il existe des matrices $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ et un γ^2 prescrit tel que l'inégalité matricielle suivante soit réalisable

$$\bar{A}_a^T \tilde{P} + \tilde{P} \bar{A}_a + \frac{1}{(\gamma)^2} \tilde{P} \bar{B}_a \bar{B}_a^T \tilde{P} + \tilde{Q} < 0 \quad (3.142)$$

3.6.3 Stabilisation non quadratique

Le contrôleur est conçu en utilisant le retour d'état classique.

$$u(t) = -F(x(t) - x_c(t)) \quad (3.143)$$

où F est le gain du contrôleur à concevoir, $(x(t), x_c(t))$ sont respectivement les états réel et désiré.

Tout au long de cette section, nous supposons que $(dx_c(t)/dt = 0)$, et ensuite, le théorème suivant est utilisé pour dériver les critères de stabilité.

Théorème 4.5 Pour tout $i, j = 1, \dots, r$, s'il existe $\bar{H}, E_i, \mathcal{N}_i$, et $Q \geq 0$, qui rendent les inégalités matricielles linéaires (3.144)-(3.146) valides, le modèle descripteur TSF (3.131) avec le contrôleur à retour d'état (3.133) est asymptotiquement stable

$$\mathcal{H}_i = \bar{H} + E_i > 0 \quad (3.144)$$

$$\mathcal{H}_i \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i^T \mathcal{H}_i - B_i \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_i^T B_i^T + (n-1)Q < 0 \quad (3.145)$$

$$\mathcal{H}_i \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_j^T \mathcal{H}_i + \mathcal{H}_j \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i^T \mathcal{H}_j - B_j \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_i^T B_j^T - B_i \mathcal{N}_j - \mathcal{N}_j^T B_i^T - Q \leq 0 \quad (3.146)$$

où $\mathcal{N} = F\mathcal{H}_i$ et \bar{H}, E_i sont définis par (3.144).

Preuve.

La boucle fermée du système TSF (3.131) avec la loi de contrôle (3.133) devient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x) (A_i - B_i F) x(t)$$

la dynamique de l'erreur d'état peut être représentée comme :

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_c(t)$$

alors

$$\dot{e}(t) = (A_0 - B_0 F) e(t) + B_0 F x_c(t) + \{Y(x(t)) - Y(x_c(t))\}$$

où

$$A_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r A_i, B_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r B_i$$

$$\bar{A}_i = A_i - A_0, \bar{B}_i = B_i - B_0$$

$$\Upsilon(x(t)) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x) (\bar{A}_i x(t) - \bar{B}_i F) e(t)$$

$$\Upsilon(x_c(t)) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x) (\bar{A}_i - \bar{B}_i F) x_c(t)$$

Le théorème des valeurs moyennes a été exploité pour définir les termes non linéaires comme :

$$Y(x(t)) - Y(x_c(t)) = \frac{\partial Y(x)}{\partial x}(c) (x(t) - x_c(t)) \mid_{x(t) < c < x_c(t)}$$

alors,

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{q=2n^2} \mu_i(x) (\mathcal{A}_i - B_i F) e(t) + \{B_0 F x_c(t) + \gamma(x_c(t))\}$$

Soit $V(x)$ une fonction de Lyapunov intégrale de ligne, et sa dérivée temporelle est

$$\dot{V}(x) = x(t)^T \{ \mathcal{P}_i \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i^T \mathcal{P}_i^T - \mathcal{P}_i B_i F - F^T B_i^T \mathcal{P}_i \} x(t)$$

soit

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x) \mu_j(x) \{ \mathcal{P}_i (\mathcal{A}_j - B_j F) + (\mathcal{A}_j^T - F^T B_j^T) \mathcal{P}_i \} \\ \Pi(x) &= \sum_{i=1}^r \mu_i^2(x) \{ \mathcal{P}_i (\mathcal{A}_i - B_i F) + (\mathcal{A}_i^T - F^T B_i^T) \mathcal{P}_i \} \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j>i}^r \mu_i(x) \mu_j(x) \{ \mathcal{P}_i (\mathcal{A}_j - B_j F) + (\mathcal{A}_j^T - F^T B_j^T) \mathcal{P}_i \\ &\quad + \mathcal{P}_j (\mathcal{A}_i - B_i F) + (\mathcal{A}_i^T - F^T B_i^T) \mathcal{P}_j \} \end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire $\Pi(x)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \Pi(x) &\leq 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j>i}^r \mu_i(x) \mu_j(x) Q + \sum_{i=1}^r \mu_i^2(x) \{ \mathcal{P}_i (\mathcal{A}_i - B_i F) + (\mathcal{A}_i^T - F^T B_i^T) \mathcal{P}_i \} \\ &\leq \sum_{i=1}^r \mu_i^2(x) \{ \mathcal{P}_i (\mathcal{A}_i - B_i F) + (\mathcal{A}_i^T - F^T B_i^T) \mathcal{P}_i \} + (n-1)Q < 0 \end{aligned}$$

alors, pour tout $x \neq 0$, $\dot{V}(x) = x(t)^T \Pi(x) x(t) < 0$.

3.7 Exemple

Un exemple numérique est fourni pour montrer l'efficacité des conditions de stabilité et de stabilisation proposées.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x) (A_i x(t) + B_i u(t))$$

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.7 & -5a + 2b \\ 1.4b + a & -7 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & -5a + 2b \\ -0.2b + a & -7 \end{bmatrix}$$

$$h_1(t) = \frac{x_1(t) + 1}{8}$$

$$h_2(t) = \frac{7 - x_2(t)}{8};$$

La paire $(a \in [-15, -5]$ et $b \in [-10, 10])$ est ajustée pour comparer les zones réalisables pour les Théorèmes basées sur les fonctions quadratiques et non quadratique.

L'inégalité (3.144)-(3.146) permet de calculer les matrices P_1, P_2 , et Q

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0351 & 0.1276 \\ 0.1276 & 0.7454 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.1457 & 0.1161 \\ 0.1161 & 0.6799 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0710 & -0.0068 \\ -0.0068 & 0.2172 \end{bmatrix}$$

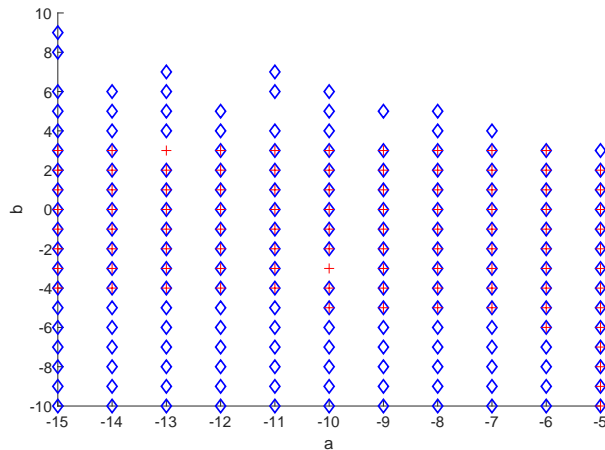


Fig 3.11: Domaine de faisabilité

La Figure (3.11) représente la région stable des LMIs via les Théorèmes basées sur les fonctions quadratiques et non quadratiques. La région réalisable obtenue avec le Théorème 4.5 couvre la région stable donnée par le Théorème de la fonction quadratique, ce qui démontre que les contraintes LMI via des fonctions non quadratiques sont moins conservatrices que la forme quadratique classique. Lorsque $a = -14$ et $b = 10$, les critères de stabilisation à travers la première Théorème sont irréalisables, signifiant qu'un contrôleur stable ne peut pas être obtenu par ces approches. Cependant, en utilisant le Théorème 4.5, les conditions de stabilisation sont résolues sous les régions LMIs. Les matrices positives sont obtenues comme suit :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0110 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0109 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0110 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0118 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2315 & 0.0384 \\ 0.0384 & 0.2028 \end{bmatrix}$$

et les gains du contrôleur

$$F = [0.4433 \quad -0.1695]$$

La Figure (3.12) représente les résultats de simulation des réponses d'état en boucle fermée lorsque les conditions initiales sont $x(0) = [-3 \ 1]$. Les réponses d'état montrent que le contrôleur proposé est stable. Le signal de commande $u(t)$ est montré dans la Figure (3.13).

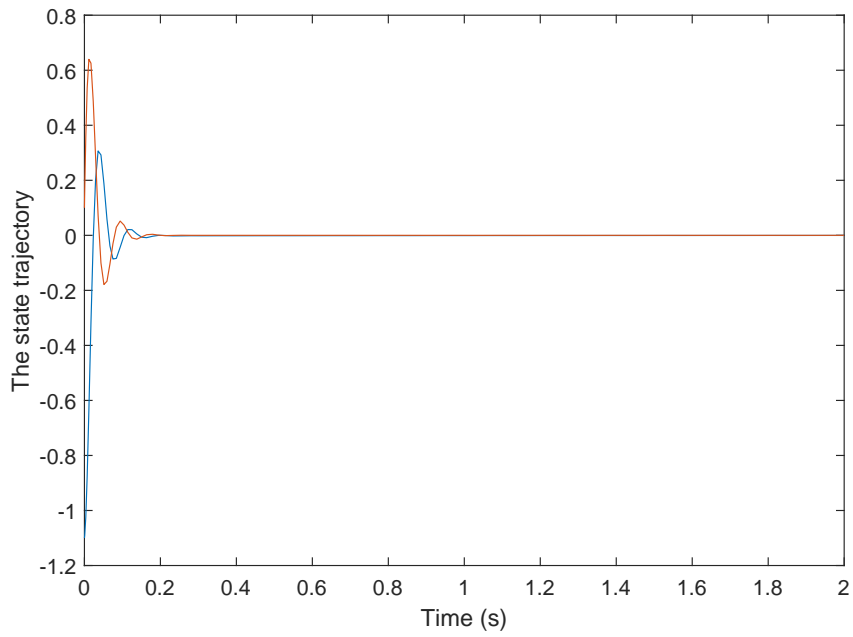


Fig 3.12: Trajectoires d'état du système

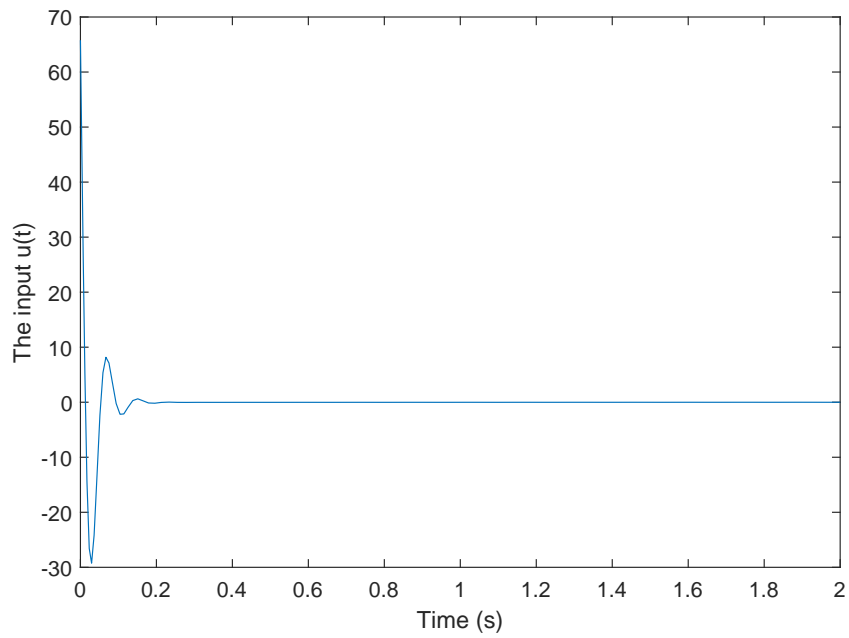


Fig 3.13: Signal de commande $u(t)$

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré des méthodes avancées de contrôle des systèmes non linéaires, notamment la linéarisation par rétroaction, l'intégrateur par Backstepping et la commande par mode glissant. Une attention particulière a été accordée à la méthode de réaménagement de Lyapunov, qui joue un rôle clé dans la stabilisation des systèmes non linéaires et permet de garantir leur robustesse face aux incertitudes. Ce chapitre a mis en évidence les limites des méthodes traditionnelles de commande, qui reposent sur l'hypothèse d'une connaissance parfaite du modèle du système. Or, dans de nombreuses applications pratiques, ces hypothèses sont difficiles à satisfaire, rendant les approches classiques inefficaces face aux incertitudes et aux erreurs de modélisation. Ce constat souligne l'importance du développement de stratégies de commande robustes et adaptatives, capables de s'ajuster dynamiquement aux variations et perturbations du système. À cet égard, les techniques de commande robuste, telles que la commande par mode glissant et la commande Backstepping robuste, offrent des solutions performantes pour atténuer les effets des incertitudes et améliorer la stabilité des systèmes non linéaires en boucle fermée. Ces approches permettent non seulement de garantir une stabilité asymptotique, mais aussi de rendre les systèmes plus résilients aux perturbations et aux variations des paramètres, ce qui est essentiel dans des domaines critiques tels que l'automobile, l'aérospatial, la robotique et les réseaux électriques intelligents. En conclusion, l'évolution des méthodes de commande non linéaires ouvre de nouvelles perspectives pour le contrôle des systèmes complexes. La combinaison de techniques robustes et adaptatives constitue un levier stratégique pour le développement de systèmes autonomes et intelligents, capables de fonctionner efficacement dans des environnements incertains. L'optimisation continue de ces approches représentent une voie prometteuse pour la conception de systèmes de commande toujours plus performants et adaptatifs.

Ce chapitre a abordé également de manière approfondie la conception de contrôleurs stabilisateurs pour les systèmes flous de type Takagi-Sugeno, un élément clé dans le domaine des systèmes et de la régulation automatique. En mettant l'accent sur les fonctions de Lyapunov, à la fois quadratiques et non quadratiques, nous avons exploré diverses méthodes innovantes pour la synthèse de contrôleurs. L'utilisation de ces fonctions dans le contexte des systèmes TS a prouvé leur efficacité pour assurer la stabilité globale

asymptotique en boucle fermée.

CHAPITRE 4

APPLICATION DE LA COMMANDE ROBUSTE AU MOTEUR SYNCHRONE À RÉLUCTANCE

4.1 Introduction

Les systèmes non linéaires posent des défis majeurs en matière de commande en raison de leur complexité et de l'inapplicabilité du principe de superposition. Les méthodes traditionnelles de commande, basées sur des modèles linéaires, bien qu'efficaces dans certains cas, s'avèrent souvent inadaptées lorsque les non-linéarités du système sont significatives. De plus, ces approches reposent généralement sur l'hypothèse que le modèle du système est parfaitement connu, ce qui est rarement le cas en pratique.

Dans ce chapitre, nous explorerons différentes stratégies de commande adaptées aux systèmes non linéaires. Nous commencerons par examiner des techniques classiques telles que la commande linéarisante entrée-sortie et le Backstepping, qui permettent de transformer un système non linéaire en un équivalent linéaire sous certaines conditions. Nous analyserons ensuite les limites de ces méthodes face aux incertitudes et aux erreurs de modélisation.

Pour pallier ces limitations, nous nous intéresserons aux approches de contrôle robustes, qui offrent une meilleure résilience face aux perturbations et aux imprécisions du modèle. En particulier, nous présenterons trois techniques majeures : la commande par mode glissant, la méthode de réaménagement de Lyapunov (Lyapunov redesign method) et la commande Backstepping robuste. Ces méthodes s'appuient sur des concepts d'approximation adaptative et de compensation des incertitudes afin de garantir la stabilité du système,

même en présence de variations dynamiques importantes.

L'objectif de ce chapitre est ainsi de fournir une vue d'ensemble des approches modernes de commande des systèmes non linéaires, en mettant en lumière leurs principes fondamentaux, leurs avantages et leurs domaines d'application.

Ce chapitre expose également une série des résultats pertinents en matière de synthèse de contrôleurs stabilisateurs pour les systèmes flous TS, en s'appuyant sur ces deux types de fonctions de Lyapunov et en intégrant le théorème des valeurs moyennes.

4.2 Méthodes de commande des systèmes non linéaires

Dans le domaine de la commande des processus, il existe deux grandes catégories de méthodes, en fonction de la nature des systèmes considérés. La première catégorie concerne les systèmes linéaires stationnaires, qui se subdivisent en trois phases principales [DH11]:

Les méthodes fréquentielles classiques (1930-60) : Ces méthodes, basées sur des principes théoriques et des critères graphiques, sont utilisées pour évaluer la robustesse des systèmes.

Les méthodes optimales (années 60) : Introduisant des techniques basées sur la représentation d'état des systèmes, elles incluent notamment les méthodes LQ (linéaires quadratiques).

La renaissance des méthodes fréquentielles (années 80) : Cette période marque un retour à l'accent sur la robustesse, avec un intérêt particulier pour les contraintes sur certaines normes matricielles, menant au développement de la méthode H^∞ .

La seconde catégorie concerne les méthodes de commande adaptées aux systèmes non linéaires. Ces systèmes présentent de nombreux défis, et les approches existantes comprennent la linéarisation entrée-sortie, l'intégrateur Backstepping, la passivité et la commande basée sur la fonction de Lyapunov. Toutefois, ces méthodes présentent des limites, notamment en termes de robustesse.

Parmi les stratégies d'amélioration de la commande des systèmes non linéaires, la méthode H^∞ se distingue. Elle représente une extension des méthodes linéaires aux contextes non linéaires, et a conduit au développement des méthodes de séquençement de gains. Les méthodes LPV (Linear Parameter-Varying) offrent également un potentiel significatif pour traiter la robustesse et la performance dans des scénarios non linéaires.

Il est difficile de couvrir exhaustivement les méthodes de conception et d'analyse du contrôle non linéaire dans un seul chapitre, d'où la nécessité de simplifier certains détails techniques. Les sections suivantes de ce chapitre se concentrent sur des méthodes spécifiques de contrôle des systèmes non linéaires, incluant la commande par linéarisation petit signal, la commande par rétroaction, et l'intégrateur Backstepping.

4.2.1 Commande par linéarisation en régime de petit signal

La linéarisation en petit signal est une méthode employée pour simplifier les systèmes complexes en négligeant les termes non linéaires. Cette approche est particulièrement utile pour l'analyse des amplificateurs de puissance et des circuits électroniques [Ham19, Nob17]. Elle consiste à linéariser le système autour d'un point d'équilibre spécifique, puis à développer un contrôleur stabilisateur en utilisant une rétroaction d'état linéaire, souvent via des techniques telles que le placement de pôles.

Considérons un système non linéaire défini par :

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{4.1}$$

Où la fonction $f(x, u)$ est continûment dérivable dans un domaine $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Nous commençons par linéariser le système autour d'un point d'équilibre x_e , assumé pour simplifier à l'origine, soit $x = 0, u = 0$. Ensuite, nous étudions la linéarisation autour d'une trajectoire nominale $x^*(t)$. Finalement, nous introduisons le concept de programmation de gain, une technique de contrôler par rétroaction basée sur la linéarisation en plusieurs points de fonctionnement.

L'objectif de la linéarisation est d'approximer le système non linéaire donné par l'équation (3.1) à l'aide d'un modèle linéaire de la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.2}$$

Avec A et B étant des matrices de dimensions respectives $n \times n$ et $n \times m$. Il est important de noter que ce modèle linéaire représente une approximation précise du système non linéaire uniquement à proximité du point de linéarisation.

- **Validité de l'approximation linéaire** : Le modèle linéarisé est une bonne

approximation de la fonction non linéaire seulement lorsque x est proche du point d'équilibre x_e . Cependant, si x s'éloigne significativement de x_e , l'approximation devient moins précise. Ainsi, en cas d'erreurs de modélisation ou de perturbations externes, une loi de commande linéaire basée sur cette approximation peut se révéler inadéquate si la trajectoire s'écarte trop de l'équilibre.

- **Efficacité des techniques de commande par retour** : Ces techniques, fondées sur le modèle linéaire, sont particulièrement efficaces pour les systèmes non linéaires lorsque l'incertitude est faible. Elles permettent au contrôleur de maintenir la trajectoire à proximité du point d'équilibre x_e . Les contrôleurs linéaires conçus via la linéarisation en petit signal se révèlent performants en boucle fermée, notamment lorsque les non-linéarités du système sont limitées ou ne conduisent pas à une déstabilisation significative.

4.2.1.1 Linéarisation autour d'un point d'équilibre

La linéarisation autour d'un point d'équilibre consiste à approximer une fonction ou un système d'équations différentielles près d'un point d'équilibre en utilisant des approximations du premier ordre. Cette technique est particulièrement utile pour simplifier les calculs et pour l'analyse des systèmes non linéaires proches de leur point d'équilibre.

Lorsque nous linéarisons le système non linéaire donné par l'équation (3.1) autour du point $(x, u) = (0, 0)$, le modèle linéaire résultant est décrit par l'équation (3.2). Dans ce modèle, les matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ sont définies comme suit :

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right|_{x=0, u=0} ; \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right|_{x=0, u=0} . \quad (4.3)$$

Si on considère que la paire (A, B) peut être stabilisée, alors il existe une matrice $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que les valeurs propres de $(A + BK)$ se situent strictement dans le demi-plan gauche du plan complexe.

Ainsi, en choisissant la loi de commande $u = Kx$, le modèle linéaire en boucle fermée est représenté par:

$$\dot{x} = (A + BK)x. \quad (4.4)$$

Étant donné que toutes les valeurs propres de $(A + BK)$ se situent dans le demi-plan gauche, la trajectoire $x(t)$ converge asymptotiquement vers zéro.

Toutefois, il est important de noter que la stabilité asymptotique obtenue par linéarisation est localement limitée. Cela signifie que la convergence asymptotique de $x(t)$ vers zéro est garantie seulement si la condition initiale $x(0)$ est suffisamment proche de $x = 0$. Si cette condition n'est pas satisfaite, la trajectoire pourrait ne pas converger vers zéro, voire devenir illimitée.

Considérons à présent un système non linéaire défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), \\ y = h(x, u), \end{cases} \quad (4.5)$$

Où $h(x, u)$ est continûment différentiable dans un domaine $\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_u \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

La linéarisation de ce système autour de $x = 0, u = 0$ aboutit à un modèle linéaire décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \quad (4.6)$$

Avec A, B définis comme précédemment, et les matrices $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ obtenues par les dérivées partielles de h :

$$C = \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) \right|_{x=0, u=0} ; \quad D = \left. \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) \right|_{x=0, u=0} .$$

Si la paire (A, B) est stabilisable et que (A, C) est détectable, il est alors possible de concevoir un contrôleur de retour de sortie dynamique à partir du modèle linéaire, pour assurer la régulation du système.

Exemple

Considérons un système non linéaire défini par:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1 x_3 - x_2 u, \\ \dot{x}_3 = x_1 + u + x_3 u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, u^* = 0$ constitue un point d'équilibre pour ce système.

La linéarisation du système autour de ce point d'équilibre donne:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Supposez que nous visons à réguler la sortie avec des pôles en boucle fermée placés à $s = -1 \pm j$ et $s = -2$, alors l'équation caractéristique désirée est donc :

$$s^3 + 4s^2 + 6s + 4 = 0.$$

Pour cela, nous sélectionnons la loi de commande suivante :

$$u = -5x_1 - 6x_2 - 4x_3.$$

Alors la dynamique en boucle fermée devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_3 + x_1x_3 + 5x_1x_2 + 6x_2^2 + 4x_2x_3, \\ \dot{x}_3 = -4x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 5x_1x_3 - 6x_2x_3 - 4x_3^2. \end{cases}$$

La linéarisation de ce système en boucle fermée, représentée par les équations ci-dessus, donne :

$$\tilde{A} = A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de \tilde{A} , comme attendu, sont $\lambda_{1,2} = -1 \pm j$ et $\lambda_3 = -2$.

4.2.1.2 Linéarisation Autour d'une Trajectoire

Considérons le système non linéaire donné par l'équation (3.1). Notre objectif est de concevoir une loi de commande qui guide l'état $x(t)$ pour qu'il suive un signal désiré $x_d(t)$.

L'erreur de suivi est définie par $e(t) = x(t) - x_d(t)$. Lorsqu'un contrôleur de suivi est élaboré en se basant sur une linéarisation effective autour d'un point opérationnel $x_e \in \mathbb{R}^n$, l'état $x(t)$ tend à suivre $x_d(t)$.

Cependant, si la différence entre $x(t)$ et x_e augmente, l'approximation linéaire peut devenir moins précise. En conséquence, un contrôleur linéaire conçu sous cette approximation pourrait ne plus être approprié, risquant d'éloigner davantage $x(t)$ de l'équilibre x_e .

Pour un suivi efficace, il est souvent préférable de concevoir une loi de commande basée sur la linéarisation autour de la trajectoire souhaitée $x_d(t)$. Cette approche implique que $x_d(t)$ soit connu à l'avance. Dans le cas où $x_d(t)$ n'est pas directement accessible et doit être généré dynamiquement, éventuellement par un contrôleur externe, une stratégie consiste à appliquer une linéarisation en petit signal autour d'une trajectoire nominale $x^*(t)$.

Cette trajectoire nominale $x^*(t)$ est établie en relation avec un signal de commande nominal $u^*(t)$ et des conditions initiales $x^*(0) = x_0^*$, de manière à ce que $x^*(t)$ soit conforme à la dynamique du système.

$$\dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t)), \quad x^*(0) = x_0^*.$$

Soit $\tilde{x}(t) = x(t) - x^*(t)$ et $\tilde{u}(t) = u(t) - u^*(t)$. Alors

$$\dot{\tilde{x}} = f(x, u) - f(x^*, u^*) = f(\tilde{x} + x^*, \tilde{u} + u^*) - f(x^*, u^*). \quad (4.7)$$

En appliquant le développement en série de Taylor à $f(\tilde{x} + x^*, \tilde{u} + u^*)$ autour de (x^*, u^*) , nous obtenons :

$$f(\tilde{x} + x^*, \tilde{u} + u^*) = f(x^*, u^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*) \tilde{x} + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*) \tilde{u} + \mathcal{F}(t, \tilde{x}, \tilde{u})$$

où \mathcal{F} désigne les termes d'ordre supérieur de la série de Taylor. Ces termes satisfont à la condition :

$$\lim_{\|(\tilde{x}, \tilde{u})\| \rightarrow 0} \left(\sup_{i \geq 0} \frac{\|\mathcal{F}(t, \tilde{x}, \tilde{u})\|}{\|(\tilde{x}, \tilde{u})\|^i} \right) = 0$$

Cela signifie que, lorsque \tilde{x} et \tilde{u} diminuent, \mathcal{F} tend vers zéro plus rapidement que

$\|(\tilde{x}, \tilde{u})\|$. Avec cette expansion, l'équation (3.7) peut être réécrite comme :

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, u^*) \tilde{x} + \frac{\partial f}{\partial u}(x^*, u^*) \tilde{u} + \mathcal{F}(t, \tilde{x}, \tilde{u}).$$

Dans une approximation linéaire, on néglige les termes d'ordre supérieur. Ainsi, la linéarisation petit signal de (3.1) autour de la trajectoire nominale $x^*(t)$ s'écrit :

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)\tilde{u},$$

Où z représente l'état du modèle linéaire et les matrices $A(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B(t) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ sont définies comme :

$$\begin{aligned} A(t) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right|_{x=x^*, u=u^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*, u^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*, u^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x^*, u^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x^*, u^*) \end{bmatrix}, \\ B(t) &= \left. \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) \right|_{x=x^*, u=u^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(x^*, u^*) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m}(x^*, u^*) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1}(x^*, u^*) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m}(x^*, u^*) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.8)$$

En choisissant la loi de commande $\tilde{u} = K(t)z(t)$, la dynamique en boucle fermée est :

$$\dot{z} = [A(t) + B(t)K(t)]z(t). \quad (4.9)$$

Si la paire $(A(t), B(t))$ est uniformément entièrement contrôlable, il existe alors un $K(t)$ tel que le système en boucle fermée (3.9) soit asymptotiquement stable, impliquant que $z(t) \rightarrow 0$, et donc $x(t) \rightarrow x^*(t)$. Si la trajectoire nominale $x^*(t)$ coïncide avec le signal vectoriel désiré $x_d(t)$, cela conduit à une convergence asymptotique de l'erreur de suivi vers zéro.

Il convient de noter que ces arguments de stabilité sont basés sur le modèle linéaire. En appliquant la même loi de commande au système non linéaire, nous avons :

$$u(t) = K(t)(x(t) - x_d(t)) + u^*(t),$$

et donc :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), K(t)(x(t) - x_d(t)) + u^*(t)).$$

En linéarisant à nouveau le système en boucle fermée autour de $x = x^* = x_d, u = u^*$, nous obtenons :

$$\dot{e}(t) = (A(t) + B(t)K(t))e(t).$$

Lorsqu'on applique une loi de commande linéaire à un système non linéaire, cela résulte en un système en boucle fermée localement stable de manière asymptotique. La notion de localité ici est définie en relation avec la proximité de la trajectoire nominale, c'est-à-dire que la distance $\|x(t) - x^*(t)\|$ doit rester suffisamment faible pour tout $t > 0$.

Si le système non linéaire inclut une fonction de sortie, alors il est également possible de déduire les matrices $C(t)$ et $D(t)$. En linéarisant le système non linéaire (3.5) autour d'une trajectoire nominale $x^*(t)$, on obtient un modèle linéaire exprimé par :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(t)z + B(t)\tilde{u}, \\ \tilde{y} &= C(t)z + D(t)\tilde{u}, \end{aligned}$$

Où $A(t)$ et $B(t)$ sont définies précédemment, alors que $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$ et $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ sont calculées comme suit :

$$C(t) = \left. \frac{\partial h}{\partial x}(x, u) \right|_{x=x^*(t), u=u^*(t)} ; \quad D(t) = \left. \frac{\partial h}{\partial u}(x, u) \right|_{x=x^*(t), u=u^*(t)}.$$

Cette approche montre que la linéarisation autour d'une trajectoire offre des résultats semblables à ceux obtenus en linéarisant autour d'un point d'équilibre, la principale différence étant que dans le premier cas, le modèle linéaire change avec le temps.

Remarque : Il est important de noter que la linéarisation en régime de petit signal est une approximation et qu'elle ne peut pas être précise pour tous les cas. Dans la plupart des cas, il est nécessaire d'utiliser d'autres méthodes de commande.

4.2.2 Linéarisation par Rétroaction

Cette section se penche sur la méthode de transformation des non-linéarités en systèmes linéaires par l'application de la rétroaction et le changement de coordonnées. Cette technique, connue sous le nom de linéarisation par rétroaction, est largement reconnue

et fréquemment utilisée dans le domaine du contrôle non linéaire [HS97, HG17, KALL23, WWAD20]. Elle se concentre principalement sur la linéarisation de l'état d'entrée (*input-output linearization*) [AKM⁺20, ACPS15] ou celle de l'espace d'état (*state-space linearization*) [WL⁺07].

Dans la linéarisation de l'état-d'entrée, l'objectif est d'établir une relation linéaire entre les entrées virtuelles (v) et les sorties réelles (y) [Kad00]. Un contrôleur linéaire est ensuite conçu pour le modèle d'entrée-état linéarisé. Cependant, une partie du système reste non linéarisée, exprimée par :

$$\dot{\eta} = q(\eta, \xi) \quad (4.10)$$

Où η est un vecteur de dimension $(n - r)$ composé de variables d'état transformées et q un vecteur de dimension $(n - r)$ de fonctions non linéaires. Les approches de linéarisation entrée-sortie sont limitées aux cas où ces dynamiques résiduelles sont stables.

En ce qui concerne la linéarisation de l'espace d'état, l'objectif est de linéariser la relation entre les entrées modifiées et l'ensemble des variables d'état transformées. Ceci est réalisé en définissant des sorties artificielles, permettant de générer un modèle de rétroaction linéarisé où la dimension d'état est $r = n$.

Un contrôleur linéaire est alors élaboré pour ce modèle linéaire d'entrée-état. Néanmoins, cette méthode peut ne pas simplifier la conception du contrôleur, car la relation entre les entrées modifiées et les sorties originales (y) demeure généralement non linéaire. Ainsi, pour de nombreuses applications de contrôle de processus, la linéarisation entrée-sortie est souvent préférée à la linéarisation de l'espace d'état.

Dans certains cas, il est possible de linéariser simultanément les relations entrée-état et entrée-sortie, si les sorties originales permettent de former un modèle linéaire avec une dimension $r = n$.

4.2.2.1 Linéarisation entrée-état

Considérez une classe de systèmes non linéaires à entrée unique et sortie unique de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.11)$$

Où $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, $u, y \in \mathbb{R}^1$, $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$, et le domaine \mathcal{D} contient l'origine. Maintenant, nous abordons deux questions clés :

1. Existe-t-il un changement de variables non linéaire $z = \begin{bmatrix} \eta \\ \xi \end{bmatrix} = T(x)$, et une entrée de contrôle $u = \alpha(x) + \beta(x)v$, qui transformeraient le système non linéaire dans la forme partiellement linéaire suivante ?

$$\begin{cases} \dot{\eta} = f_0(\eta, \xi) \\ \dot{\xi} = A\xi + Bv \\ y = C\xi \end{cases} \quad (4.12)$$

2. Existe-t-il un changement de variables non linéaire $z = T(x)$ et une entrée de contrôle $u = \alpha(x) + \beta(x)v$ qui transformeraient le système non linéaire dans la forme complètement linéaire suivante ?

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}v \quad (4.13)$$

Si la réponse à la deuxième question est affirmative, alors nous disons que le système (3.11) est linéarisable par rétroaction.

Si la réponse à la première question est affirmative, alors le système (3.11) est considéré comme linéarisable entrée-sortie.

Ces deux scénarios offrent des avantages significatifs pour la conception du contrôle, car dans les deux cas, il est possible de se baser sur des techniques de conception linéaires pour assurer la stabilité du système en boucle fermée.

Étant donné que tous les systèmes non linéaires ne possèdent pas nécessairement de telles propriétés de linéarisation par rétroaction, il est crucial de comprendre les propriétés structurelles requises pour qu'un système non linéaire soit susceptible d'être linéarisé par rétroaction.

Exemple de linéarisation par retour état-entrée d'un bras manipulateur

Prenons l'exemple d'un bras robotique avec une seule articulation, où l'objectif est de contrôler la position angulaire θ afin de suivre une trajectoire désirée.

La dynamique d'un tel bras robotique peut être représentée par l'équation non linéaire suivante :

$$\tau = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + c \sin(\theta)$$

Où :

- θ représente la position angulaire de l'articulation.
- $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ sont respectivement la vitesse et l'accélération angulaires.
- τ est le couple appliqué à l'articulation.
- J est le moment d'inertie du bras.
- b est le coefficient de frottement visqueux.
- c est un coefficient lié à la force gravitationnelle agissant sur le bras.

Pour linéariser cette dynamique, nous pouvons appliquer une technique de retour état-entrée. Cette méthode vise à concevoir un contrôleur qui, en agissant sur le couple τ , permette à l'articulation de suivre précisément la trajectoire souhaitée, malgré la nature non linéaire de sa dynamique. La stratégie de linéarisation implique généralement de définir un nouvel ensemble de variables d'état et de choisir une entrée de contrôle appropriée qui transforme le système non linéaire original en un système linéaire, facilitant ainsi la conception du contrôleur.

Nous visons à concevoir une entrée de contrôle τ qui linéarise le système et nous permet d'appliquer des techniques de contrôle linéaire.

1. Introduisons les variables d'état $x_1 = \theta$ et $x_2 = \dot{\theta}$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{J}(\tau - bx_2 - c \sin(x_1)) \end{cases}$$

2. Choisissons une loi de commande par retour $\tau = \alpha(x) + \beta(x)v$ avec :

$$\begin{cases} \alpha(x) = bx_2 + c \sin(x_1) \\ \beta(x) = J \end{cases}$$

Et une nouvelle entrée v qui est le signal de contrôle que nous utiliserons pour concevoir notre stratégie de contrôle.

3. En appliquant l'entrée de contrôle au système, nous obtenons :

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{J}(Jv)$$

En simplifiant, nous avons un système linéaire :

$$\dot{x}_2 = v$$

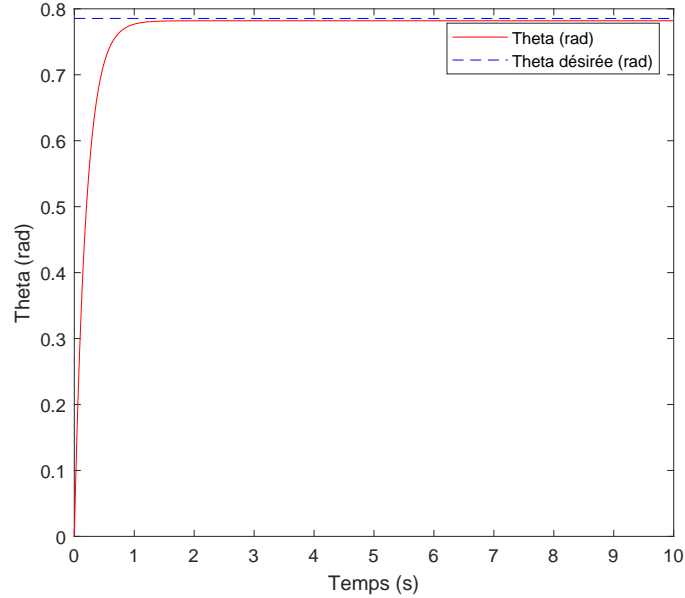


Fig 4.1: Suivi de la position du bras robotique

La représentation dans l'espace d'état du système linéarisé est :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

Ce système linéaire peut maintenant être contrôlé en utilisant des méthodes de contrôle linéaire standard, telles que le contrôle PID, pour suivre la trajectoire désirée pour θ .

En utilisant l'entrée de contrôle $\tau = \alpha(x) + \beta(x)v$, nous avons effectivement annulé la non-linéarité du système et créé un double intégrateur, qui est un système bien compris et facilement contrôlable dans le domaine du génie de contrôle.

Exemple de contrôle en altitude d'un quadricoptère par retour état-entrée

Considérons le cas du contrôle en altitude d'un quadricoptère UAV (Véhicule Aérien Sans Pilote). Un quadricoptère est équipé de quatre rotors qui génèrent de la portance et contrôlent la position et l'orientation du véhicule dans l'espace. Pour cet exemple, nous nous concentrons sur le contrôle de l'altitude, un système à une seule entrée et une seule sortie (SISO).

La dynamique verticale du quadricoptère peut être décrite par la seconde loi de Newton,

avec la poussée comme entrée de contrôle et la gravité comme force externe constante.

$$m\ddot{z} = u - mg$$

Où :

- z est l'altitude du quadricoptère.
- \ddot{z} est l'accélération verticale.
- m est la masse du quadricoptère.
- u est la poussée totale générée par les rotors.
- g est l'accélération due à la gravité.

Pour linéariser ce système autour d'un état de vol stationnaire, adoptons une entrée de contrôle qui neutralise la force gravitationnelle et permet un contrôle direct de l'accélération verticale.

1. Avec les variables d'état $x_1 = z$ et $x_2 = \dot{z}$, nous avons :

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{u}{m} - g$$

2. Concevons l'entrée de contrôle u de la manière suivante :

$$u = m(g + v)$$

Où v est une nouvelle entrée de contrôle virtuelle visant à atteindre l'altitude désirée.

3. En intégrant cette entrée de contrôle dans le système, nous obtenons :

$$\dot{x}_2 = v$$

Le système est ainsi transformé en un double intégrateur, un modèle linéaire facile à contrôler. Cette linéarisation permet l'application de techniques de contrôle linéaire classiques, telles que le contrôle PID, pour atteindre et maintenir l'altitude souhaitée efficacement.

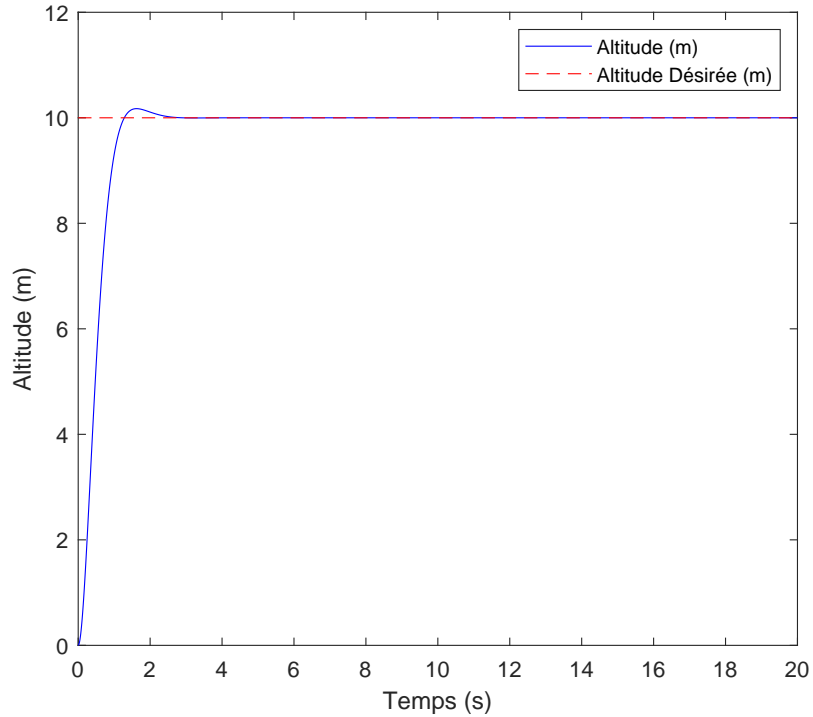


Fig 4.2: Contrôle en altitude d'un quadrotor

4.2.2.2 Linéarisation par Rétroaction Entrée-Sortie

La linéarisation par rétroaction a été largement explorée dans les recherches sur les systèmes non linéaires, comme en témoignent diverses publications [ACPS15],[SKH93],[LML⁺11]. Dans cette sous-section, nous introduisons le principe de linéarisation entrée-sortie.

Considérons le système non linéaire à entrée unique et sortie unique (SISO) suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (4.14)$$

Où $u \in \mathbb{R}^1$, $y \in \mathbb{R}^1$, $x \in \mathbb{R}^n$ et f , g et h sont définies de manière lisse dans $D \subset \mathbb{R}^n$.

La dérivée temporelle de $y = h(x)$ est donnée par

$$\dot{y} = \frac{\partial h}{\partial x}(x)f(x) + \frac{\partial h}{\partial x}(x)g(x)u.$$

Si $\frac{\partial h}{\partial x}(x)g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D_0$, alors le système non linéaire est dit avoir un degré relatif de un sur D_0 . Cela indique que la variable de commande u affecte directement la première dérivée de la sortie y ; en d'autres termes, l'entrée et la sortie sont connectées par un seul intégrateur.

Si $\frac{\partial h}{\partial x}(x)g(x) = 0$ (c'est-à-dire, u n'influence pas directement y), alors nous continuons à différencier la sortie jusqu'à ce que u apparaisse explicitement. Pour définir les dérivées de second, troisième ordre, etc., il est pratique d'utiliser le concept de dérivée de Lie, employé en calcul différentiel avancé.

La notation pour la dérivée de Lie de h par rapport à f est définie comme

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x}(x)f(x).$$

Cette notation est utile pour traiter des dérivées successives, comme le montre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} L_f^k h(x) &= L_f L_f^{k-1} h(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(L_f^{k-1} h(x) \right) f(x) \\ L_g L_f^k h(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(L_f^k h(x) \right) g(x) \end{aligned}$$

Selon la définition de la dérivée de Lie, si

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x}(x)g(x) = 0,$$

Nous continuons la prise de dérivées jusqu'à ce que $L_g L_f^{r-1} h(x) \neq 0$, ce qui signifie que l'entrée de commande u apparaît explicitement pour la première fois dans l'équation de la dérivée d'ordre r de la sortie, notée $y^{(r)}$.

On dit que le système non linéaire (3.14) possède un degré relatif r dans une région $D_0 \subset D$ si les conditions suivantes sont remplies pour tout $x \in D_0$:

$$\begin{aligned} L_g L_f^i h(x) &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, r-2 \\ L_g L_f^{r-1} h(x) &\neq 0. \end{aligned}$$

Si un système possède un degré relatif r , alors

$$y^{(r)} = L_f^r h(x) + L_g L_f^{r-1} h(x)u.$$

En conséquence, le système peut être linéarisé en entrée-sortie, car le contrôle par retour d'état

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \left[-L_f^r h(x) + v \right] \quad (4.15)$$

produit la cartographie linéaire entrée-sortie suivante :

$$y^{(r)} = v.$$

Cela correspond simplement à une chaîne de r intégrateurs, qui peuvent être aisément contrôlés par une sélection appropriée de v . Cependant, à moins que $r = n$, il existe d'autres états dans le système qui ne sont pas influencés par l'entrée de commande u . La dynamique de cet ensemble d'états $n - r$ définit ce qu'on appelle les dynamiques zéro du système, qui sont discutées ci-dessous.

En utilisant des outils de géométrie différentielle, on peut démontrer que pour un système avec un degré relatif r , il existe un difféomorphisme $z = T(x)$ qui transforme le système non linéaire (3.14) dans la forme canonique linéarisable entrée-sortie

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \phi(\eta, \zeta) \\ \dot{\zeta} = A_0\zeta + B_0\beta_0^{-1}(\eta, \zeta) [u - \alpha_0(\eta, \zeta)] \\ \dot{y} = C_0\zeta \end{cases} \quad (4.16)$$

Où $z = [\eta^\top \zeta^\top]^\top$, avec $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$, $\zeta \in \mathbb{R}^r$, et (A_0, B_0, C_0) est une représentation sous forme canonique d'un système composé de r intégrateurs en série :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Le difféomorphisme $z = T(x)$, avec $T(0) = 0$, qui transforme le système non linéaire (3.14) dans la forme canonique (3.16) est caractérisé par

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial x} g(x) &= 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n - r \\ T_{n-r+1} &= h(x) \\ T_{n-r+2} &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ T_n &= L_f^{r-1} h(x). \end{aligned}$$

Le système transformé, décrit par les équations (3.16), est considéré comme étant sous une forme normale. En essence, le système non linéaire est décomposé en deux composantes

qui décrivent la dynamique interne du système. La dynamique de ζ peut être linéarisée et contrôlée en employant un contrôleur de feedback de la forme

$$u = \alpha_0(\eta, \zeta) + \beta_0(\eta, \zeta)v$$

Où v peut être ajusté pour déterminer le taux de convergence de la dynamique de ζ ou pour réaliser le suivi d'une consigne. Les fonctions de contrôle de linéarisation par feedback α_0 et β_0 sont déterminées à partir des dérivées de Lie calculées en différentiant la variable de sortie :

$$\alpha_0(\eta, \zeta) = \left. \frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \right|_{x=T^{-1}(\eta, \zeta)}$$

$$\beta_0(\eta, \zeta) = \left. \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)} \right|_{x=T^{-1}(\eta, \zeta)} .$$

Les dynamiques zéro sont obtenues en fixant $\zeta = 0$ dans les équations de η :

$$\dot{\eta} = \phi(\eta, 0). \quad (4.18)$$

Un système non linéaire est qualifié de phase minimale si les dynamiques zéro, décrites par l'équation (3.18), possèdent un point d'équilibre asymptotiquement stable dans D .

Les notions telles que le degré relatif, la décomposition en dynamiques η et ζ , la phase minimale, les dynamiques zéro, etc., possèdent des équivalents dans les systèmes linéaires. Pour ces derniers, la fonction de transfert caractérise la stabilité du système entrée-sortie (par la localisation des racines du polynôme dénominateur, soit les pôles) ainsi que la stabilité des dynamiques internes (par les racines du polynôme numérateur, soit les zéros). Considérons un système linéaire d'ordre n décrit par la fonction de transfert

$$H(s) = k \frac{s^{n-r} + b_{n-r-1}s^{n-r-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

Où r représente le degré relatif du système, c'est-à-dire, la différence entre l'ordre du dénominateur et celui du numérateur.

Un modèle d'état (non unique) pour ce système est donné par

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx,\end{aligned}$$

En supposant que $r \geq 1$, donc la matrice D est nulle. En dérivant la sortie $y(t)$ par rapport au temps, on obtient

$$\dot{y} = CAx + CBu.$$

Si $r = 1$ (degré relatif 1), alors $CB \neq 0$. En revanche, si $CB = 0$, le degré relatif est supérieur à 1 et nous devons continuer à dériver la sortie. En suivant cette procédure, on peut montrer que pour les systèmes linéaires de degré relatif r ,

$$\begin{aligned}CA^i B &= 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, r-2 \\ CA^{r-1} B &\neq 0\end{aligned}$$

La dérivée d'ordre r de $y(t)$ obéit à l'équation

$$y^{(r)} = CA^r x + CA^{r-1} Bu.$$

En outre, la dynamique du système linéaire peut être divisée en deux parties comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\eta} = P\eta + Q\zeta \\ \dot{\zeta} = A_0\zeta + B_0 [C_\zeta^\top \zeta + C_\eta^\top \eta + ku] \\ y = C_0\zeta \end{cases} \quad (4.19)$$

Où $\eta \in \mathbb{R}^{n-r}$ et $\zeta \in \mathbb{R}^r$, et le triplet (A_0, B_0, C_0) représente une forme canonique de r intégrateurs, comme décrit dans (3.17). Les matrices P et Q ont des dimensions appropriées, C_ζ est un vecteur de dimension r , et C_η est un vecteur de dimension $(n-r)$.

Les équations (3.19) représentent un cas linéaire particulier de la forme normale décrite par (3.16). Les dynamiques zéro du système linéaire, définies précédemment pour la forme normale générale des systèmes non linéaires, sont obtenues en fixant $\zeta = 0$ dans (3.19), ce qui conduit à

$$\dot{\eta} = P\eta. \quad (4.20)$$

La stabilité des dynamiques zéro est déterminée par les valeurs propres de P . On

considère que le modèle est en phase minimale si toutes les valeurs propres se trouvent dans le demi-plan complexe gauche. Notons que les valeurs propres de P coïncident avec les racines du numérateur de la fonction de transfert $H(s)$, ce qui justifie le terme de dynamiques zéro pour les systèmes non linéaires.

Une question qui peut se poser est de savoir si tous les systèmes non linéaires peuvent être mis sous cette forme normale canonique. En général, la réponse est non, car pour certains systèmes, le degré relatif n'est pas défini, comme dans le cas où $L_g L_f^i h(x) = k_0 x_1$ avec k_0 une constante scalaire, indiquant que $L_g L_f^i h(x)$ est nul pour $x_1 = 0$ mais non nul à proximité de $x_1 = 0$.

Nous abordons ensuite la conception du contrôle de suivi pour les systèmes linéarisables par feedback entrée-sortie. Supposons que l'objectif de contrôle soit de faire suivre à $y(t)$ un signal désiré $y_d(t)$. Définissons l'erreur de suivi par $e(t) = y(t) - y_d(t)$. Partant de la forme normale (3.16), nous concevons la loi de contrôle par feedback

$$u = \alpha_0(\eta, \zeta) + \beta_0(\eta, \zeta)v = -\frac{L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)} + \frac{1}{L_g L_f^{r-1} h(x)}v \quad (4.21)$$

Où v est choisi comme suit :

$$\begin{aligned} v &= y_d^{(r)} - k_{r-1}e^{(r-1)} - k_{r-2}e^{(r-2)} - \dots - k_1\dot{e} - k_0e \\ &= y_d^{(r)} - \sum_{j=0}^{r-1} k_j (L_f^j h(x) - y_d^{(j)}) . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ces lois de contrôle (3.21), (3.22) entraîne une dynamique linéaire de l'erreur

$$e^{(r)} + k_{r-1}e^{(r-1)} + k_{r-2}e^{(r-2)} + \dots + k_1\dot{e} + k_0e = 0.$$

Ainsi, en choisissant judicieusement les coefficients $\{k_0, k_1, \dots, k_{r-2}, k_{r-1}\}$, on peut déterminer de façon arbitraire les racines de l'équation caractéristique :

$$s^r + k_{r-1}s^{r-1} + k_{r-2}s^{r-2} + \dots + k_1s + k_0 = 0.$$

Cette approche permet de faire converger l'erreur de suivi vers zéro de manière asymptotique et exponentiellement rapide.

En considérant la forme normale (3.16), il est à noter que cette stratégie de contrôle se concentre uniquement sur les variables ζ . Il est également crucial de s'assurer que la

dynamique interne, définie par $\dot{\eta} = \phi(\eta, \zeta)$, demeure limitée lorsque la loi de commande est appliquée aux dynamiques de ζ .

Si $\bar{y}_d(t)$ reste borné pour tout $t \geq 0$ et que la solution de

$$\dot{\eta} = \phi(\eta, \bar{y}_d(t)), \quad \eta(0) = 0$$

est bien définie, bornée et stable de manière asymptotique et uniforme, l'application de la loi de commande (3.21), (3.22) assure que l'état global reste borné et que l'erreur de suivi $e(t)$ tend vers zéro de façon exponentiellement rapide.

Dans le cas particulier de la régulation vers l'origine, c'est-à-dire lorsque $y_d(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$, il est impératif que la dynamique zéro, exprimée par

$$\dot{\eta} = \phi(\eta, 0),$$

soit stable asymptotiquement pour garantir la limitation des états globaux du système et la convergence de l'erreur de suivi vers zéro.

En conclusion, pour les systèmes linéarisables en entrée-sortie, il est essentiel de gérer deux aspects :

- La dynamique de ζ , qui peut être linéarisée via la variable de commande u .
- La dynamique de η , ou dynamique interne, qui est masquée par le u défini dans (3.15) mais qui doit présenter certaines propriétés de stabilité (phase minimale) pour assurer un contrôle stable du système dans son ensemble.

Exemple

Prenons l'exemple d'un système non linéaire à trois états, où l'objectif est de contrôler le système en utilisant une commande linéarisante par rétroaction entrée-sortie.

Considérons un système non linéaire défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \frac{2+x_3^2}{1+x_3^2} \cdot \mu \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = x_1 x_3 + \mu \\ y = x_2 \end{cases}$$

Pour calculer le degré relatif :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g h(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot g(x) = 0 \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) &= \mathcal{L}_g \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot f(x) \right\} \\ &= \mathcal{L}_g(x_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g(x) = 1\end{aligned}$$

En conséquence, la dynamique interne du Système sera régie par

$$\eta^\circ = m(\eta, 0)$$

Dynamique zéro stable implique un système linéarisé par retour d'état stable.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_g h(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot g(x) = 0 \\ \mathcal{L}_g \mathcal{L}_f h(x) &= \mathcal{L}_g \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot f(x) \right\} \\ &= \mathcal{L}_g(x_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot g(x) = 1\end{aligned}$$

Le degré relatif est $r = 2 < n = 3$. La dynamique interne est d'ordre $n - r = 1$.

La matrice de transformation :

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \psi_s(x) \end{bmatrix}$$

Où $T_1(x) = h(x) = x_2$,

nous avons

$$T_2(x) = L_f h(x) = x_3$$

$$\text{Avec } \begin{cases} z_s = x_2 \\ z_2 = x_3 \end{cases} = D \begin{cases} \dot{z}_s = z_2 \\ \dot{z}_2 = v, \quad \mu = v - x_1 x_3 \end{cases}$$

$$\xi = A\xi + Bv \quad \text{où} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y = C\xi \quad \text{et} \quad \xi = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix}$$

Maintenant, nous devons trouver la dynamique interne, pour cela, nous devons trouver $\psi_s(x)$, $\psi_1(x)$ est choisi de sorte que $\mathcal{L}_g \psi_1(x) = 0$ (normal à n)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot g(x) = 0 \Rightarrow \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0$$

$$\text{Assumer } \Psi(x) = m_1(x) + x_2(x)$$

$$\frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} \frac{dm_1}{dx_1} = -1 \frac{dm_2}{dx_3} = D \begin{cases} \frac{dm_1}{dx_1} = 1 \\ \frac{dm_2}{dx_3} = \frac{2 + x_3^2}{1 + x_3^2} \end{cases}$$

$$\int dm_s = \int -dx_s \Rightarrow m_s = -x_s + C_s$$

$$\frac{dm_2}{dx_3} = 1 + \frac{1}{1 + x_3^2} \Rightarrow \int dm_2 = \int \left(1 + \frac{1}{1 + x_3^2} \right) dx_3$$

$$\Rightarrow m_2 = x_3 + \tan^{-1}(x_3) + C_2$$

$$\psi(x) = m_s + m_2 = -x_1 + x_3 + \tan^{-1}(x_3) + C_1 + C_2$$

$$\Psi(0) = 0 \Rightarrow \Psi(x) = -x_1 + x_3 + \tan^{-1}(x_3)$$

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -x_1 + x_3 + \tan^{-1}(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{La dynamique interne } \dot{\eta} = \dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot f(x)$$

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 + \frac{1}{1+x_3^2} \end{bmatrix} \cdot f(x) = x_1 + x_1 x_3 + \frac{x_1 x_3}{1 + x_3^2}$$

$$\xi_1 = T_1(x) = x_2$$

$$\xi_2 = T_2(x) = x_3$$

$$\eta = -x_1 + x_3 + \tan^{-1}(x_3) \Rightarrow \dot{\eta} = \left(-\frac{\xi_1}{2} + \xi_2 + \tan^{-1}(\xi_2) \right) \left[1 + \xi_2 \left(\frac{2 + \xi_2^2}{1 + \xi_2^2} \right) \right]$$

ũ

Commande par rétroaction d'une machine synchrone à aimants permanents

La dynamique d'une MSAP peut être décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\theta} &= \omega_r \\ \dot{\omega}_r &= \frac{1}{J} \left(-b\omega_r + \frac{3}{2}p\lambda i_q + \tau_L \right) \\ v_d &= R i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_r L_q i_q \\ v_q &= R i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_r L_d i_d + \omega_r \lambda \end{cases} \quad (4.23)$$

Où :

- θ est l'angle du rotor.
- ω_r est la vitesse angulaire.
- J est le moment d'inertie.
- b est le coefficient d'amortissement.
- p est le nombre de paires de pôles.
- λ est le flux de liaison.
- i_d et i_q sont les courants sur les axes d et q, respectivement.
- v_d et v_q sont les tensions sur les axes d et q, respectivement.
- R , L_d et L_q sont la résistance et les inductances sur les axes d et q.
- τ_L est le couple de charge.

Notre objectif est de réguler la vitesse du moteur, ω_r , tout en maintenant un couple optimal. Pour cela, nous gardons la composante longitudinale du courant statorique, i_d , constante. Nous mettons en oeuvre une stratégie de linéarisation entrée-sortie sur le modèle du moteur, permettant un découplage complet entre les commandes et les réponses du système. Dans ce contexte, les variables de sortie à contrôler sont la vitesse du rotor ω_r et le courant i_d .

$$y_1 = i_d, \quad y_2 = \omega_r. \quad (4.24)$$

Ces sorties doivent suivre des trajectoires prédéfinies. Dans la stratégie de fonctionnement à couple maximal, on impose $i_{d_{\text{ref}}} = 0$, tandis que la vitesse ω_r doit suivre sa référence, notée ω_{ref} , qui peut être constante ou une fonction du temps.

Pour la sortie i_d , la relation est :

$$y_1 = i_d = h_1(x), \quad \text{où} \quad \nabla h_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= L_f h_1(x) + L_{g_1} h_1(x) u_d + L_{g_2} h_1(x) u_q \\ &= \frac{\partial h_1}{\partial x} \cdot f(x) + \frac{\partial h_1}{\partial x} \cdot g_1(x) \cdot u_d + \frac{\partial h_1}{\partial x} \cdot g_2(x) \cdot u_q \\ &= -\frac{R}{L_d} i_d + \frac{L_q}{L_d} p \omega_r i_q + \frac{1}{L_d} u_d. \end{aligned}$$

L'entrée u_d est intégrée dans l'équation de la dérivée de y_1 .

Pour la sortie y_1 , on identifie un degré relatif $r_1 = 1$. Concernant la seconde sortie y_2 , elle est définie par :

$$y_2 = \omega_r = h_2(x), \quad \text{où} \quad \nabla h_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La dérivation de cette expression donne :

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= L_f h_2(x) + L_{g_1} h_2(x) u_d + L_{g_2} h_2(x) u_q \\ &= \frac{\partial h_2}{\partial x} \cdot f(x) + \frac{\partial h_2}{\partial x} \cdot g_1(x) \cdot u_d + \frac{\partial h_2}{\partial x} \cdot g_2(x) \cdot u_q \\ &= \frac{3p}{2J} (\Phi_v i_q + (L_d - L_q) i_d i_q) - \frac{B}{J} \omega_r. \end{aligned}$$

Cette formulation n'inclut aucune entrée, nécessitant ainsi une dérivation supplémentaire :

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 &= L_f^2 h_2(x) + L_{g_1} (L_f h_2(x)) \cdot u_d + L_{g_2} (L_f h_2(x)) \cdot u_q \\ &= \Lambda(L_d - L_q) i_q f_1(x) + \Lambda(\Phi_v + (L_d - L_q) i_d) f_2(x) - \frac{B}{J} f_3(x) + \\ &\quad \frac{\Lambda(L_d - L_q)}{L_d} i_q u_d + \frac{\Lambda(\Phi_v + (L_d - L_q) i_d)}{L_q} u_q, \end{aligned}$$

où $\Lambda = \frac{3p}{2J}$, et $f_2(x)$ et $f_3(x)$ sont définis dans le système (3.23).

Les deux entrées u_d et u_q établissent un degré relatif $r_2 = 2$.

Le degré relatif total du système est donc $r = r_1 + r_2 = n = 3$, ce qui permet une linéarisation exacte sans la nécessité de considérer une dynamique interne.

En combinant les équations des deux dérivées de sortie, nous obtenons la forme linéarisée suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \zeta(x) + D(x) \cdot u, \quad (4.26)$$

où

$$\zeta(x) = \begin{bmatrix} L_f h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L_d} i_d + \frac{L_q}{L_d} p \omega_r i_q \\ \Lambda(L_d - L_q) i_q f_1(x) + \Lambda(\Phi_v + (L_d - L_q) i_d) f_2(x) - \frac{B}{J} f_3(x) \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

et

$$D(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_d} & 0 \\ \frac{\Lambda(L_d - L_q) i_q}{L_d} & \frac{\Lambda(\Phi_v + (L_d - L_q) i_d)}{L_q} \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

La matrice $D(x)$ est inversible si et seulement si $\det[D(x)] = \frac{\Lambda(\Phi_v + (L_d - L_q) i_d)}{L_q L_d} \neq 0$, ce qui se traduit par $\Phi_v \neq (L_q - L_d) i_d$.

Par conséquent, la loi de commande linéarisante assurant le découplage est donnée par :

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = D(x)^{-1} \left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} - \zeta(x) \right), \quad (4.29)$$

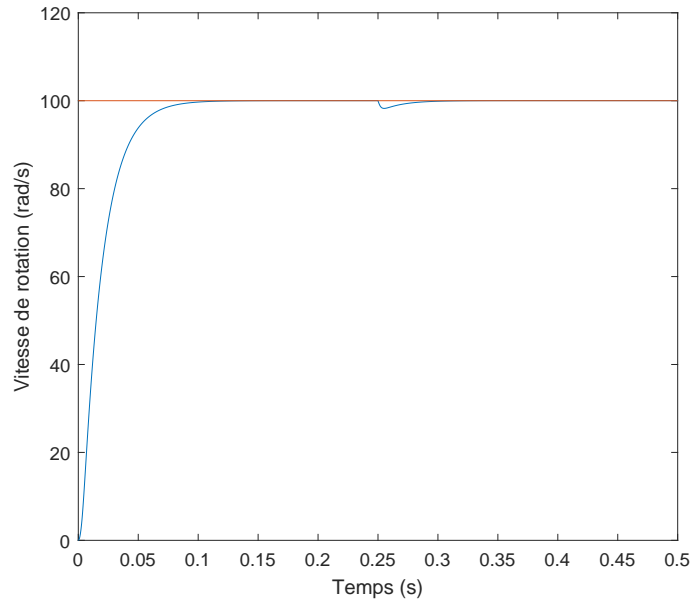


Fig 4.3: Vitesse de rotation

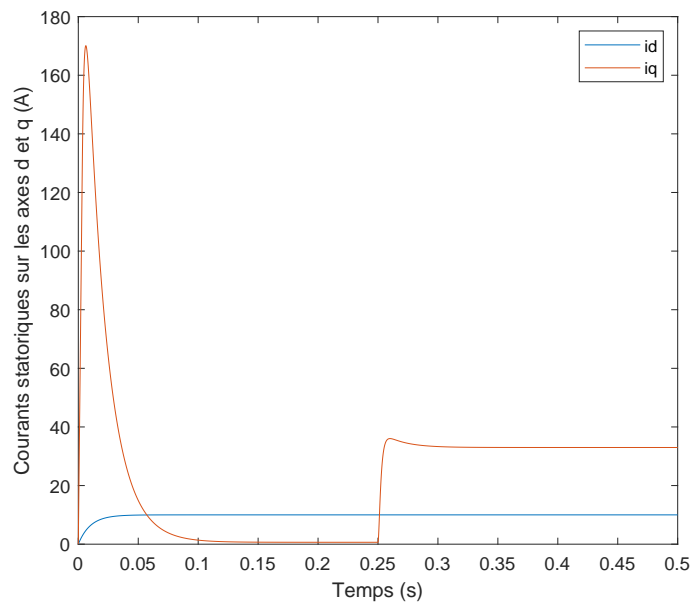


Fig 4.4: Courants statoriques sur l'axes d et q

D'après les figures Fig(3.3) et Fig(3.4), nous observons que la vitesse de rotation de la machine synchrone à aimants permanents, suit parfaitement sa référence, même en présence d'un couple résistant. Cela indique que le système de commande par rétroaction entrée-sortie a été efficacement conçu et mis en oeuvre.

4.2.3 Linéarisation de l'espace d'état

Nous commençons par identifier une fonction de sortie \hat{y} , définie par :

$$\hat{y} = \hat{C}x \quad (4.30)$$

Où l'objectif est d'obtenir un degré relatif $r = n$, égal à l'ordre du système. Ici, \hat{y} représente une sortie artificielle, distincte de la sortie réelle y .

La détermination de la sortie artificielle \hat{y} implique la résolution d'un système de n équations linéaires pour le vecteur \hat{C} :

$$\hat{C} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \beta \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Avec β étant une constante non nulle. L'existence d'une solution est conditionnée par le fait que la matrice $\begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ doit avoir un rang complet, ce qui est synonyme de la contrôlabilité de la paire (A, B) . Notons que la solution n'est pas unique, car $\hat{C}A^{n-1}B$ peut prendre n'importe quelle valeur non nulle.

Ensuite, nous établissons la loi de commande, en partant du principe que la sortie artificielle \hat{y} a été définie.

Nous introduisons le changement de coordonnées suivant :

$$\xi = Tx = \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}A \\ \vdots \\ \hat{C}A^{n-1} \end{bmatrix} x \quad (4.32)$$

Dans ces nouvelles coordonnées, le système linéaire peut être représenté sous la forme normale suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = R\xi + ku \\ y = \xi_1 \end{cases} \quad (4.33)$$

Où $R = \hat{C}A^nT^{-1}$ et $k = CA^{n-1}B$.

La commande en retour d'état statique s'exprime par :

$$u = \frac{v - R\xi}{k} \quad (4.34)$$

Cette loi modifie la dernière équation dans (3.33) pour devenir : $\dot{\xi}_n = v$. L'entrée de commande v est définie pour stabiliser le système transformé :

$$v = -\alpha_n \xi_n - \alpha_{n-1} \xi_{n-1} - \dots - \alpha_1 \xi_1 \quad (4.35)$$

Dans les coordonnées originales, le contrôleur prend la forme :

$$u = \frac{-\hat{C}A^n x - \alpha_n \hat{C}A^{n-1}x - \dots - \alpha_1 \hat{C}x}{\hat{C}A^{n-1}B} \quad (4.36)$$

Le système transformé présente alors l'équation caractéristique en boucle fermée suivante :

$$s^n + \alpha_n s^{n-1} + \dots + \alpha_2 s + \alpha_1 = 0 \quad (4.37)$$

La stabilité nominale du système transformé, ainsi que celle du système original, est assurée en sélectionnant les α_i de manière à ce que le polynôme caractéristique soit de Hurwitz. Il est important de souligner que la stabilité nominale pour l'approche de linéarisation entrée-sortie est garantie seulement si le système linéaire est de phase minimale. Cependant, la linéarisation de l'espace d'état présente les contraintes suivantes :

- Le système linéaire doit être contrôlable.
- Il peut être difficile d'atteindre les objectifs de suivi de la sortie, car la relation entre la sortie réelle et les variables d'état transformées est : $y = CT^{-1}\xi$. Ces considérations s'appliquent aussi dans le cas non linéaire.

4.2.3.1 Conception du Contrôleur

Le défi de la linéarisation de l'espace d'état réside dans la détermination, si possible, d'un difféomorphisme et d'une commande en retour d'état statique qui rendent linéaire la correspondance entre l'entrée transformée et l'ensemble des variables d'état transformées [HS97]. Ce problème a été posé initialement par Korobov et une solution complète pour les cas à entrée unique a été apportée par Brockett [Bro78].

Une approche alternative facilitant la construction de transformations linéarisantes a également été proposée [Tse87]. Dans cette section, nous présentons la solution au problème de linéarisation de l'espace d'état pour les systèmes à entrée unique ; le cas multivariable est traité dans d'autres travaux [IMDL86].

4.2.3.2 Exemple illustratif

Les équations du mouvement d'un pendule inversé sur un chariot peuvent être présentées sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{F+m_p \sin(\theta)(l\dot{\theta}^2+g \cos(\theta))}{m_c+m_p \sin^2(\theta)} \\ \ddot{\theta} = \frac{-F \cos(\theta)-m_p l \dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta)-(m_c+m_p)g \sin(\theta)}{l(m_c+m_p \sin^2(\theta))} \end{cases}$$

les deux lois de commande prennent la forme suivante :

$$u = \frac{v-L_f^r h(x)}{L_g L_f^{r-1} h(x)}$$

$$v = -\alpha_r L_f^{r-1} h(x) - \alpha_{r-1} L_f^{r-2} h(x) \cdots \alpha_1 h(x)$$

Le système est linéarisé autour de la position verticale, où $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0$. Les équations linéarisées autour de ce point de fonctionnement sont obtenues en prenant la première dérivée des équations non linéaires par rapport à chaque variable d'état et à l'entrée, évaluées au point d'équilibre.

Le modèle d'espace d'état linéarisé résultant est de la forme :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Où $x = [x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}]^T$ est le vecteur d'état, $u = F$ est l'entrée (force), et y est la sortie (qui pourrait être la position du chariot ou l'angle du pendule).

Avec le modèle linéarisé, des techniques de contrôle linéaire standard telles que le contrôle PID, la rétroaction d'état ou le RQL (Régulateur Quadratique Linéaire) peuvent être appliquées. Par exemple, concevoir un contrôleur RQL implique de sélectionner un gain de rétroaction d'état K pour minimiser une fonction de coût, typiquement de la forme

:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

Où Q et R sont des matrices de pondération.

La loi de commande est alors donnée par $u = -Kx$, et la dynamique en boucle fermée devient $\dot{x} = (A - BK)x$.

Cette conception de contrôle linéarisée est valide tant que le système fonctionne près du point de linéarisation. Pour des écarts plus importants, des techniques de contrôle non linéaires ou de programmation des gains (utilisant différents modèles linéaires et contrôleurs pour différents points de fonctionnement) peuvent être nécessaires.

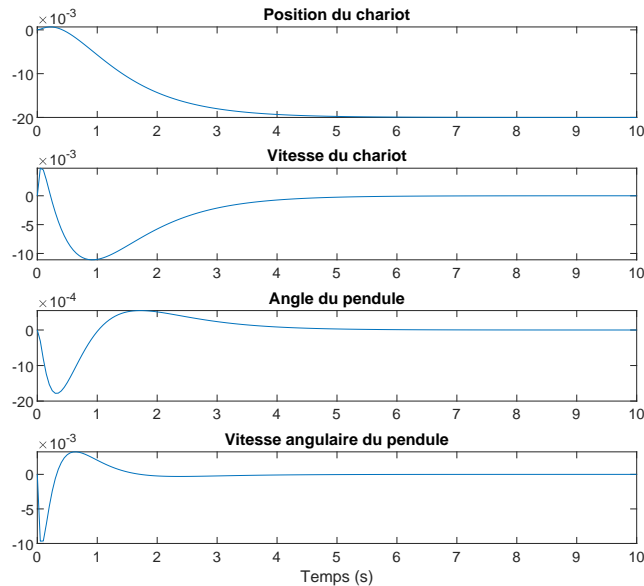


Fig 4.5: Les états du pendule inversé

4.2.4 Commande par Backstepping

Cette section décrit la procédure de conception de commande par Backstepping. Cette méthode a été développée pour surmonter les défis inhérents à la gestion de la non-linéarité dans les systèmes de contrôle.

L'idée fondamentale du Backstepping consiste à diviser le système en plusieurs sous-systèmes, chacun étant stabilisé séparément en utilisant une fonction de Lyapunov. La méthode utilise une approche récursive pour stabiliser chaque sous-système en utilisant les entrées virtuelles générées par les sous-systèmes précédents. Cette approche permet de stabiliser le système global en utilisant une série de sous-systèmes stabilisés [Ben02],

[FNS15]. Cette méthode est largement utilisée dans l'industrie pour la commande de systèmes mécaniques, électriques et aéronautiques [FNS15], [Ben09], [WAB+23], [YH08]. Pour illustrer le concept du contrôleur par Backstepping, nous commençons avec le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) + g(z)\xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \quad (4.38)$$

On souhaite concevoir une loi de contrôle par feedback d'état pour stabiliser l'origine. Supposons qu'on puisse stabiliser asymptotiquement le premier système,

$$\dot{z} = f(z) + g(z)\xi \quad (4.39)$$

avec une loi de contrôle $\xi = \phi(z)$ telle que $\phi(0) = 0$. Cela implique que l'origine de premier système est asymptotiquement stable.

$$\dot{z} = f(z) + g(z)\phi(z) \quad (4.40)$$

Supposons également qu'on connaisse une fonction de Lyapunov $V(z)$ qui satisfait l'inégalité,

$$\frac{\partial V}{\partial z}[f + g\phi] \leq -W(z) \quad (4.41)$$

Où $W(z)$ est défini positif. Ajoutez et soustrayez $g(z)\phi(z)$ pour obtenir

$$\begin{cases} \dot{z} = [f(z) + g(z)\phi(z)] + g(z)[\xi - \phi(z)] \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \quad (4.42)$$

Ce système résultant est représenté sur la figure Fig(3.6).

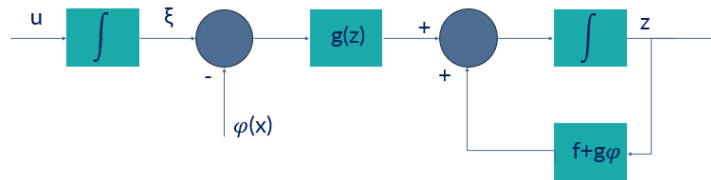


Fig 4.6: Introduction du Contrôle

On introduit maintenant le changement de variables,

$$y = \xi - \phi(z) \quad (4.43)$$

ce qui génère les équations du système suivantes

$$\begin{cases} \dot{z} = [f(z) + g(z)\phi(z)] + g(z)y \\ \dot{y} = u - \dot{\phi}(z) \end{cases} \quad (4.44)$$

comme illustré dans la figure Fig(3.7).

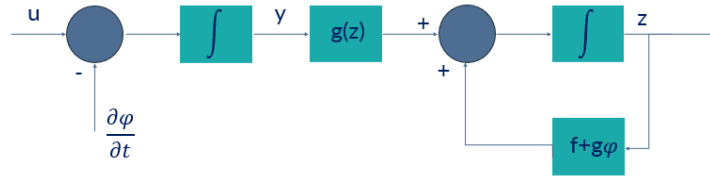


Fig 4.7: Contrôle par Backstepping à travers un Intégrateur

Ce changement de variables est souvent appelé "Backstepping" car il "recule" la commande $-\phi(z)$ à travers l'intégrateur.

Puisque f, g , et ϕ sont connus, la dérivée peut s'écrire comme

$$\dot{\phi}(z) = \frac{\partial \phi}{\partial z} [f(z) + g(z)\xi] \quad (4.45)$$

En posant $v = u - \dot{\phi}$, notre système se réduit à

$$\begin{cases} \dot{z} = [f(z) + g(z)\phi(z)] + g(z)y \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (4.46)$$

ce qui a la même "forme" que le système de départ, à l'exception que nous savons maintenant que le premier système est asymptotiquement stable à l'origine.

Cette propriété modulaire du Backstepping sera exploitée pour stabiliser le système global.

Ceci est réalisé en considérant une fonction candidate de Lyapunov

$$\begin{aligned} V_c(z, \xi) &= V(z) + \frac{1}{2}y^2 \\ &= V(z) + \frac{1}{2}(\xi - \phi(z))^2 \end{aligned}$$

La dérivée de V_c est

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= \frac{\partial V}{\partial z}[f(z) + g(z)\phi(z)] + \frac{\partial V}{\partial z}g(z)y + yv \\ &\leq -W(z) + \frac{\partial V}{\partial z}g(z)y + yv\end{aligned}$$

Choisissez

$$v = -\frac{\partial V}{\partial z}g(z) - ky$$

où $k > 0$. Ceci implique que

$$\dot{V}_c \leq -W(z) - ky^2$$

ce qui implique que l'origine est asymptotiquement stable ($z = 0, y = 0$). Puisque $\phi(0) = 0$, cela implique également que $z = 0$ et $\xi = 0$ sont aussi asymptotiquement stables.

Lemme du Backstepping : Considérez le système

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) + g(z)\xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \quad (4.47)$$

Soit $\phi(z)$ une loi de commande en retour d'état stabilisatrice pour le système dans l'équation (3.47) où $\phi(0) = 0$. Soit $V(z)$ une fonction de Lyapunov telle que

$$\frac{\partial V}{\partial z}[f(z) + g(z)\phi(z)] \leq -W(z)$$

pour une certaine fonction W définie positive. Alors la loi de commande

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial z}[f + g\xi] - \frac{\partial V}{\partial z}g(z) - k[\xi - \phi(z)]$$

pour $k > 0$ stabilise l'origine avec la fonction de Lyapunov

$$V(z) = \frac{1}{2}[\xi - \phi(z)]^2$$

Exemple 01 : Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{z} = z^2 - z^3 + \xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases}$$

Considérez le système scalaire,

$$\dot{z} = z^2 - z^3 + \xi$$

et concevez une loi de commande en retour qui pourrait être

$$\xi = \phi(z) = -z^2 - z$$

(annule le terme quadratique et ajoute un peu d'amortissement). Cela implique que

$$\dot{z} = -z - z^3$$

avec la fonction candidate de Lyapunov $V(z) = z^2/2$. Remarquez que

$$\dot{V} = -z^2 - z^4 \leq -z^2$$

ce qui implique que $z = 0$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Maintenant, utilisez le changement de variables de Backstepping,

$$y = \xi - \phi(z) = \xi + z + z^2$$

pour transformer notre système en

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -z - z^3 + y \\ \dot{y} &= u + (1 + 2z)(-z - z^3 + y)\end{aligned}$$

et posez

$$V_c = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}y^2$$

Alors

$$\begin{aligned}\dot{V}_c &= z(-z - z^3 + y) + y(u + (1 + 2z)(-z - z^3 + y)) \\ &= -z^2 - z^4 + y(z + (1 + 2z)(-z - z^3 + y) + u)\end{aligned}$$

et choisissez

$$u = -z - (1 + 2z)(-z - z^3 + y) - y$$

pour forcer

$$\dot{V}_c = -z^2 - z^4 - y^2$$

Ceci est clairement défini négatif, donc le point $(z, y) = (0, 0)$ est asymptotiquement stable.

La commande réelle dans nos coordonnées d'origine est

$$\begin{aligned} u &= -z - (1 + 2z) \left(-z - z^3 + \xi + z + z^2 \right) \\ &\quad - \xi - z - z^2 \\ &= -z - (1 + 2z) \left(z^2 - z^3 + \xi \right) - \xi - z - z^2 \end{aligned}$$

La véritable valeur du Backstepping se manifeste dans les systèmes d'ordre supérieur où nous pouvons exploiter la modularité de l'approche.

Exemple 02 Considérons le système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^2 - z_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 = \xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases}$$

Ce système contient le système du second ordre de l'exemple précédent avec un intégrateur supplémentaire en tant qu'entrée.

Après le premier backstep, nous savons que le système du second ordre

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^2 - z_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 = \xi \end{cases}$$

peut être stabilisé globalement par la commande

$$\begin{aligned} \xi &= -z_1 - (1 + 2z_1) \left(z_1^2 - z_1^3 + z_2 \right) - (z_2 + z_1 + z_1^2) \\ &= \phi(z_1, z_2) \end{aligned}$$

avec la fonction de Lyapunov

$$V(z_1, z_2) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}(z_2 + z_1 + z_1^2)^2$$

Pour effectuer le second backstep, nous appliquons le changement de variables

$$y = \xi - \phi(z_1, z_2)$$

pour obtenir

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_1^2 - z_1^3 + z_2 \\ \dot{z}_2 = \phi(z_1, z_2) + y \\ \dot{y} = u - \frac{\partial \phi}{\partial z_1}(z_1^2 - z_1^3 + z_2) - \frac{\partial \phi}{\partial z_2}(\phi + y) \end{cases}$$

en utilisant $V_c = V + \frac{1}{2}z_3^2$ comme fonction de Lyapunov candidate, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V}_c &= \frac{\partial V}{\partial z_1}(z_1^2 - z_1^3 + z_2) + \frac{\partial V}{\partial z_2}(y + \phi) \\ &\quad + y \left[u - \frac{\partial \phi}{\partial z_1}(z_1^2 - z_1^3 + z_2) - \frac{\partial \phi}{\partial z_2}(y + \phi) \right] \\ &= -z_1^2 - z_1^4 - (z_2 + z_1 + z_1^2)^2 \\ &\quad + y \left[\frac{\partial V}{\partial z_2} - \frac{\partial \phi}{\partial z_1}(z_1^2 - z_1^3 + z_2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \phi}{\partial z_2}(y + \phi) + u \right] \end{aligned}$$

Nous choisissons donc

$$u = -\frac{\partial V}{\partial z_2} + \frac{\partial \phi}{\partial z_1}(z_1^2 - z_1^3 + z_2) + \frac{\partial \phi}{\partial z_2}(y + \phi) - y$$

pour forcer $\dot{V}_c < 0$ et ainsi stabiliser l'origine.

Cas générale

Nous considérons maintenant le système plus général

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) + g(z)\xi \\ \dot{\xi} = f_a(z, \xi) + g_a(z, \xi)u \end{cases} \quad (4.48)$$

Ce système peut être ramené à notre forme originale en utilisant l'entrée de commande

$$u = \frac{1}{g_a(z, \xi)} [v - f_a(z, \xi)]$$

de sorte que $\dot{\xi} = v$. L'application récursive du Backstepping nous permet de stabiliser des

systèmes qui sont sous forme de rétroaction stricte

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f_0(x) + g_0(x)z_1 \\ \dot{z}_1 = f_1(x, z_1) + g_1(x, z_1)z_2 \\ \dot{z}_2 = f_2(x, z_1, z_2) + g_2(x, z_1, z_2)z_3 \\ \vdots = \vdots \\ \dot{z}_{k-1} = f_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1}) + g_{k-1}(x, z_1, \dots, z_{k-1})z_k \\ \dot{z}_k = f_k(x, z_1, \dots, z_k) + g(x, z_1, \dots, z_k)u \end{array} \right. \quad (4.49)$$

Notez que dans cette forme, \dot{z}_i ne dépend que des états x, z_1 , jusqu'à z_i .

L'application récursive du Backstepping à ce système avec

$$\dot{x} = f_0(x) + g_0(x)z_1$$

(considérant z_1 comme l'entrée). Il est important que nous trouvions une loi de commande (d'une manière ou d'une autre) qui stabilise ce système. Mais une fois cela fait, nous pouvons simplement appliquer les récursions de Backstepping pour trouver une commande qui stabilise l'ensemble du système.

4.3 Méthodes de commandes robustes

4.3.1 Commande basée sur le réaménagement de Lyapunov

La gestion des incertitudes appariées peut être effectuée à l'aide d'une technique classique, le réaménagement de Lyapunov, tel que présenté dans [Kha02]. Bien que cette méthode soit reconnue pour son efficacité, elle aboutit à une loi de commande discontinue. Nous proposons une version améliorée de cette méthode qui permet d'obtenir une loi de commande de classe C^1 (continue avec sa première dérivée). Cette procédure s'applique aux systèmes qui répondent à la condition d'appariement, à savoir :

$$\dot{x} = f(x, t) + G(x, t)[u + \Delta(x, u, t)] \quad (4.50)$$

Où $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$. Notons que Δ représente une fonction inconnue regroupant diverses incertitudes, tant structurées que non structurées, et respectant la condition

d'appariement, car elle intervient dans le domaine de l'entrée de commande. Supposons que le système nominal soit stabilisé par une loi de commande nominale connue, telle que la linéarisation par rétroaction ou le Backstepping, où $u = \psi(x, t)$.

Cette rétroaction d'état rend le système en boucle fermée nominal uniformément globalement asymptotiquement stable (UGAS).

$$\dot{x} = f(x, t) + G(x, t)\psi(x, t) \quad (4.51)$$

Supposons également que nous disposions d'une fonction de Lyapunov pour le système exprimé dans (3.51). Cette fonction, notée $V(x, t)$, est continûment différentiable et doit satisfaire à des inégalités spécifiques. Ces inégalités sont cruciales pour démontrer la stabilité du système en boucle fermée. La fonction $V(x, t)$ est définie de manière à respecter les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_1(\|x\|) &\leq V(x, t) \leq \alpha_2(\|x\|), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}[f(x, t) + G(x, t)\psi(x, t)] &\leq -\alpha_3(\|x\|) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Où α_1, α_2 sont des fonctions de classe \mathcal{K}_∞ et α_3 est une fonction de classe \mathcal{K} . Supposons que, avec $u = \psi(x, t) + v$, le terme incertain satisfait l'inégalité :

$$\|\Delta(x, \psi(x, t) + v, t)\| \leq \rho(x, t) + k_0\|v\|, \quad 0 \leq k_0 < 1 \quad (4.53)$$

Où ρ est une fonction continue non négative.

L'inégalité précédemment établie définit la fonction de limitation pour le terme incertain Δ , et elle constitue la seule information nécessaire à son sujet.

La fonction de limitation, désignée par ρ , indique la taille maximale que peut prendre l'incertitude. Il n'est pas nécessaire que cette taille soit réduite, mais elle doit être connue. Notre but est de trouver une expression pour v de sorte que, sous la commande totale $u = \psi(x, t) + \varepsilon$, le système incertain exprimé dans (3.50) soit Uniformément Globalement Asymptotiquement Stable (UGAS).

Le système incertain en boucle fermée sous la rétroaction u est donné par:

$$\dot{x} = f(x, t) + G(x, t)\psi(x, t) + G(x, t)[\varepsilon + \Delta(x, \psi(x, t) + \varepsilon, t)]. \quad (4.54)$$

Nous exploitons la même fonction de Lyapunov du système nominal (d'où le nom "réaménagement") en tant que fonction de Lyapunov de commande robuste pour le système incertain. La dérivée le long du mouvement prend la forme (en omettant pour des raisons de concision les arguments des diverses fonctions) :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}(f + G\psi) + \frac{\partial V}{\partial x}G(v + \Delta) \leq -\alpha_3(\|x\|) + \frac{\partial V}{\partial x}G(v + \Delta). \quad (4.55)$$

Définissons d'abord $w^T = \frac{\partial V}{\partial x}G$. Ainsi, l'inégalité précédente peut être réécrite comme suit :

$$\dot{V} \leq -\alpha_3(\|x\|) + w^T v + w^T \Delta. \quad (4.56)$$

Il est important de noter que, en raison des conditions de correspondance, le terme incertain Δ apparaît du côté droit de l'équation au même endroit que v .

Par conséquent, nous pouvons choisir v pour annuler l'effet (potentiellement déstabilisant) de Δ sur \dot{V} . En utilisant l'inégalité (3.53), nous obtenons :

$$w^T v + w^T \Delta \leq w^T v + \|w\| \|\Delta\| \leq w^T v + \|w\| [\rho(x, t) + k_0 \|v\|]. \quad (4.57)$$

En prenant

$$v = -\eta(x, t) \cdot \frac{w}{\|w\|} \quad (4.58)$$

Où η est une fonction non négative, nous obtenons :

$$w^T v + w^T \Delta \leq -\eta \|w\| + \rho \|w\| + k_0 \eta \|w\| = -\eta(1 - k_0) \|w\| + \rho \|w\|. \quad (4.59)$$

En choisissant ensuite

$$\eta(x, t) \geq \frac{\rho(x, t)}{1 - k_0} \quad (4.60)$$

pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$, nous obtenons :

$$w^T v + w^T \Delta \leq -\rho \|w\| + \rho \|w\| = 0. \quad (4.61)$$

Ainsi, sous le contrôle robuste non linéaire (3.58), la dérivée le long des trajectoires du système en boucle fermée incertain (3.54) est négativement définie, et donc le système de rétroaction obtenu est UGAS.

La loi de commande (3.53) est clairement discontinue en $w = 0$. Ceci peut poser des problèmes sérieux d'implémentation, notamment le problème de chatter. Remarquons que dans le cas scalaire, (3.53) prend la forme simple :

$$v = -\eta(x, t) \cdot \text{sign}(w). \quad (4.62)$$

Exemple

Considérons le système non linéaire

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -u - \eta(x), \end{cases}$$

Où η est inconnu mais satisfait à l'inégalité

$$\|\eta(x)\|_\infty \leq \bar{\eta}(t, x)$$

pour une certaine borne connue $\bar{\eta}$. Ce modèle du deuxième ordre représente un système de compression de moteur à réaction sans décrochage [KKK95], basé sur l'approximation de Galerkin du modèle d'EDP non linéaire [MG86].

L'état x_1 correspond au débit massique et x_2 est l'augmentation de pression.

La première étape consiste à concevoir la loi de commande nominale $u = p_0(x)$ pour le cas où $\eta = 0$. Cela peut être réalisé par la linéarisation de la rétroaction (notez que cela peut également être réalisé par la méthode de backstepping).

Considérons le changement de coordonnées $z = T(x)$ où

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = -x_2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^3. \end{cases}$$

La dynamique dans les coordonnées z est décrite par

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = u - 3z_1z_2 - \frac{3}{2}z_1^2z_2 + \pi_z(z), \end{cases}$$

Où $\eta_z(z) = \eta(x)|_{z=T^{-1}(z)}$.

Un contrôleur nominal stabilisant est donné par

$$u = p_0(z) = -z_1 - 2z_2 + 3z_1z_2 + \frac{3}{2}z_1^2z_2.$$

Une fonction de Lyapunov nominale associée au contrôleur nominal ci-dessus est donnée par

$$V_0(z) = 2z_1^2 + (z_1 + z_2)^2$$

dont la dérivée temporelle est donnée par

$$\dot{V}_0 = -2(z_1^2 + z_2^2).$$

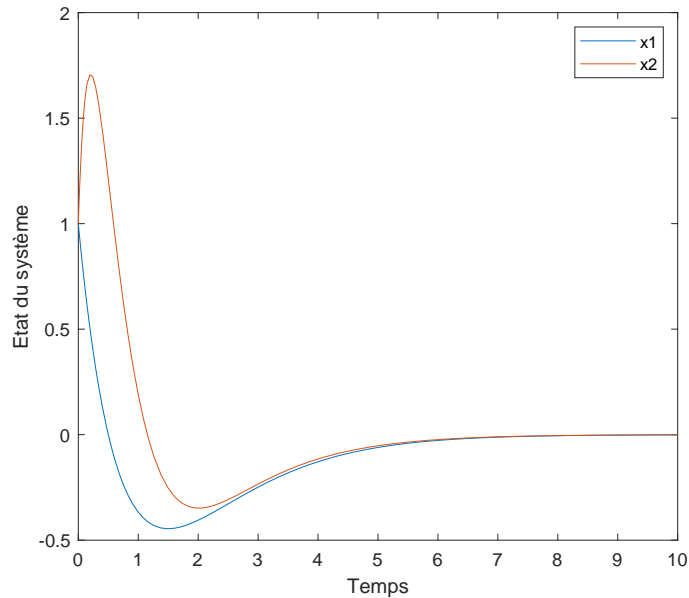


Fig 4.8: Réponse du Système avec Commande par Lyapunov Redesign

La loi de commande correctrice obtenue en utilisant la méthode de réaménagement de Lyapunov est donnée par

$$p^*(z) = -\eta_z(z) \operatorname{sgn}(z_1 + z_2),$$

Où $\bar{\eta}_z$ est la borne supposée sur η . La loi de commande ci-dessus peut être rendue continue en utilisant l'approximation suivante

$$p^*(z) = -\eta_z(z) \tanh\left(\frac{z_1 + z_2}{\varepsilon}\right),$$

Où $\varepsilon > 0$ est une petite constante de conception.

4.3.2 Commande par Mode Glissant

La commande par mode glissant est une approche robuste qui repose sur l'idée qu'il est plus facile de contrôler un système de premier ordre qu'un système d'ordre supérieur. Cette méthode vise à transformer un problème de contrôle complexe en un problème plus simple, où des techniques de commande à rétroaction éprouvées peuvent être utilisées.

Toutefois, cette simplification peut nécessiter un effort de commande important, ce qui peut conduire à des défis supplémentaires, notamment face au bruit de mesure ou aux dynamiques à haute fréquence non modélisées.

La commande en mode glissant peut être appliquée à divers types de systèmes non linéaires, et nous nous focalisons ici sur son application aux systèmes linéarisables par rétroaction.

Soit un système non linéaire d'ordre n de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \vdots & \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u \end{cases} \quad (4.63)$$

Où f et g sont des fonctions inconnues, et $g(x) \geq g_0 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

L'objectif est que $y(t) = x_1(t)$ suive un signal cible $y_d(t)$.

On définit l'erreur de suivi par $e = y - y_d$. La surface de glissement s est alors définie comme

$$s = e^{(n-1)} + \lambda_{n-1}e^{(n-2)} + \dots + \lambda_2\dot{e} + \lambda_1e = 0, \quad (4.64)$$

avec les coefficients $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}\}$ choisis de manière à ce que le polynôme caractéristique soit de Hurwitz

$$p^{n-1} + \lambda_{n-1}p^{n-2} + \dots + \lambda_2p + \lambda_1 = 0 \quad (4.65)$$

signifiant que toutes ses racines sont dans le demi-plan complexe gauche.

La variété définie par $s = 0$ est la surface de glissement, de dimension $(n - 1)$.

L'objectif de la commande en mode glissant est de diriger la trajectoire vers cette surface.

Si x se trouve sur la surface définie par $s = 0$, alors

$$e^{(n-1)} = -\lambda_{n-1}e^{(n-2)} - \dots - \lambda_2\dot{e} - \lambda_1e. \quad (4.66)$$

Comme le polynôme en (3.65) est de Hurwitz, une fois sur la surface de glissement, l'erreur de suivi converge vers zéro avec un comportement transitoire déterminé par les coefficients $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m-1}\}$, soit de manière exponentiellement rapide.

L'objectif de la commande en mode glissant est atteint si la loi de commande u est telle que

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} s^2 \leq -k|s|,$$

Où $k > 0$. Dans ce cas, la dérivée supérieure droite de $|s(t)|$ respecte l'inégalité différentielle

$$\frac{d^+}{dt} |s(t)| \leq -k,$$

ce qui garantit que la trajectoire atteint la surface $s = 0$ en un temps fini. Suivant l'équation (3.64), la dérivée de $s(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{s} &= e^{(n)} + \lambda_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + \lambda_2\ddot{e} + \lambda_1\dot{e} \\ &= f(x) + g(x)u - y_d^{(n)} + \lambda_{n-1}e^{(n-1)} + \dots + \lambda_2\ddot{e} + \lambda_1\dot{e}. \end{aligned}$$

Si f et g étaient connues, la loi de commande pourrait être

$$u = \frac{1}{g(x)} \left[-f(x) + y_d^{(n)} - \lambda_{m-1}e^{(n-1)} - \dots - \lambda_2\dot{e} - \lambda_1e - k \operatorname{sgn}(s) \right],$$

Où $k > 0$ est une variable de conception. La fonction signe $\operatorname{sgn}(\cdot)$ est définie par

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s > 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \\ -1 & \text{si } s < 0 \end{cases}$$

Lorsqu'on applique cette règle de commande, la dérivée de $s(t)$ répond à l'équation

$$\dot{s} = -\kappa \operatorname{sgn}(s),$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} s^2 &= s \dot{s} \\ &= -s \kappa \operatorname{sgn}(s) \\ &= -\kappa |s|. \end{aligned}$$

Examinons la situation où les fonctions f et g sont inconnues mais où le concepteur dispose d'une limite supérieure connue $\eta(x, t)$ telle que

$$\left| \frac{f(x) - y_d^{(n)} + \lambda_{n-1} e^{(n-1)} + \dots + \lambda_2 \ddot{e} + \lambda_1 \dot{e}}{g(x)} \right| \leq \eta(x, t).$$

Imaginons que la loi de commande soit définie comme

$$u = -(\eta(x, t) + \eta_0) \operatorname{sgn}(s) \quad (4.67)$$

Où $\eta_0 > 0$ est une constante de conception. Prenons

$$V = \frac{1}{2} s^2$$

comme candidat à la fonction de Lyapunov. La dérivée de V se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s \dot{s} \\ &= s \left(f(x) - y_d^{(n)} + \lambda_{n-1} e^{(n-1)} + \dots + \lambda_2 \ddot{e} + \lambda_1 \dot{e} \right) + s g(x) u \\ &\leq |s| \eta(x, t) g(x) + s g(x) u \\ &= -\eta_0 |s|, \end{aligned}$$

L'objectif est de conduire la trajectoire vers la surface de glissement en un temps fini est atteint. Il est remarquable que cet objectif soit réalisé sans connaître précisément f et g , en se basant uniquement sur la borne supérieure $\eta(x, t)$.

Malgré les avantages en termes de stabilité et de convergence de la commande en mode glissant, cette technique présente deux principaux inconvénients dans sa forme standard.

La loi de commande en mode glissant, illustrée par (3.67), comprend deux éléments : le gain $\eta(x, t) + \eta_0$ et la fonction de commutation $\text{sgn}(s)$. Ces deux éléments peuvent poser des problèmes :

- (Gain Élevé) Le gain est le résultat de l'utilisation d'une borne supérieure pour l'incertitude. En général, cela conduit à une commande à rétroaction à gain élevé, pouvant être problématique en présence de bruit de mesure et de dynamiques à haute fréquence non modélisées.
- (Vibrations) La fonction de commutation $\text{sgn}(s)$ provoque un basculement du gain de commande de $\eta(x, t) + \eta_0$ à $-(\eta(x, t) + \eta_0)$ à chaque fois que la trajectoire traverse la surface de glissement.

Des recherches sur la commande en mode glissant ont développé des techniques pour pallier ces problèmes. Le problème du gain élevé peut être atténué en exploitant autant d'informations a priori que possible, en annulant les non-linéarités connues et en appliquant une borne supérieure uniquement aux parties inconnues des non-linéarités.

Le problème des vibrations peut être partiellement résolu en utilisant une approximation continue de la fonction signe. Cependant, l'utilisation de cette approximation implique que seule la bornitude uniforme des solutions peut être démontrée.

Malgré ces solutions, la méthode de mode glissant repose sur le principe de limiter l'incertitude par une fonction plus grande, et est donc une approche de commande conservatrice.

4.3.3 Backstepping Robuste

Le backstepping robuste est une technique de pointe en contrôle automatique, spécialement adaptée aux systèmes dynamiques non linéaires. Cette méthode se caractérise par son efficacité dans la gestion des incertitudes et des perturbations, grâce à la décomposition du système en sous-systèmes plus simples. Elle emploie une démarche itérative pour élaborer des contrôleurs adaptatifs qui réagissent aux variations du système. Ainsi, elle fournit une solution à la fois performante et souple pour la régulation de systèmes complexes dans des conditions variables. La méthode est utile dans divers secteurs, notamment en robotique, en ingénierie aéronautique et dans la gestion des systèmes énergétiques, où la robustesse et la précision sont essentielles.

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z) + g(z)\xi + \delta_z(z, \xi) \\ \dot{\xi} &= u + \delta_\xi(z, \xi) \end{cases} \quad (4.68)$$

Où

$$\begin{cases} \|\delta_z(z, \xi)\|_2 < a_1\|z\|_2 \\ \|\delta_\xi(z, \xi)\|_2 < a_2\|z\|_2 + a_3\|\xi\|_2 \end{cases} \quad (4.69)$$

(Note : δ_z et δ_ξ sont des incertitudes de modèle bornées)

Soit $\phi(z)$ une commande de retour d'état stabilisante pour le système en question. On peut alors supposer l'existence d'une fonction de Lyapunov positive, V , telle que

$$\frac{\partial V}{\partial z}[f(z) + g(z)\phi(z) + \delta_z(z, 0)] \leq -W(z) \quad (4.70)$$

Où W est également définie positive. En réécrivant le système, nous mettons en lumière la variation par rapport à ce contrôle stabilisant. Le système reformulé s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} &= [f(z) + g(z)\phi(z)] + g(z)[\xi - \phi(z)] + \delta_z \\ \dot{\xi} &= u + \delta_\xi \end{cases} \quad (4.71)$$

et nous définissons

$$\begin{cases} y &= \xi - \phi(z) \\ v &= u - \dot{\phi}(z) \end{cases} \quad (4.72)$$

Pour que nous puissions réécrire le système ci-dessus comme suit :

$$\begin{cases} \dot{z} &= [f + g\phi] + gy + \delta_z(z, y) \\ \dot{y} &= v + \delta_\zeta(z, y) \end{cases} \quad (4.73)$$

Notez que cette formulation est similaire à celle du système original, avec la différence que le système supérieur est maintenant asymptotiquement stable lorsque $y = 0$. Dans notre approche originale de backstepping, nous avons défini

$$v = -\frac{\partial V}{\partial z}g(z) - ky$$

et considéré la fonction

$$V_c = V(z) + \frac{1}{2}y^2$$

pour montrer que $\dot{V}_c < 0$, établissant ainsi la stabilité asymptotique de l'ensemble du système. Cependant, cette approche supposait l'absence de δ_z et δ_ζ .

Avec ces incertitudes, l'expression pour \dot{V}_c devient

$$\dot{V}_c < -W(z) - ky^2 + \frac{\partial V}{\partial z}\delta_z + y\delta_\xi$$

Il est incertain que \dot{V}_c reste négativement défini en raison de ces termes additionnels. Cette situation suggère que notre approche antérieure du backstepping pourrait être limitée puisqu'elle repose sur des annulations exactes. Une solution consiste à traiter le système comme une interconnexion de deux sous-systèmes et à appliquer le théorème du petit gain pour garantir la stabilité asymptotique. Le système supérieur

$$\dot{z} = [f(z) + g(z)\phi(z)] + g(z)y + \delta_z(z, y)$$

est déjà connu pour être asymptotiquement stable lorsque $y = 0$, avec une fonction de Lyapunov connue V . Cette V est également une fonction de Lyapunov ISS, ce qui signifie que le système supérieur est stable en entrée-à-état. Il doit donc exister des fonctions de classe \mathcal{K} γ_1 et de classe \mathcal{KL} β_1 telles que

$$\|z(t)\|_\infty \leq \max \{ \beta_1 (\|z_0\|, t), \gamma_1 (\|y\|_\infty) \}$$

Notre objectif est de choisir v dans le système inférieur pour que celui-ci soit également ISS. Cela impliquerait l'existence d'une fonction de classe \mathcal{KL} β_2 et d'une fonction de classe \mathcal{K} γ_2 , satisfaisant

$$\|y(t)\|_\infty \leq \max \{ \beta_2 (\|y_0\|, t), \gamma_2 (\|z\|_\infty) \}$$

Si nous démontrons que $\gamma_1\gamma_2 < 1$, alors le système interconnecté est stable selon le théorème du petit gain ISS. Procédons à l'établissement de cette condition de manière formelle.

Considérons le système original comme précédemment.

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) + g(z)\xi + \delta_1(z, \xi) \\ \dot{\xi} = u + \delta_2(z, \xi) \end{cases} \quad (4.74)$$

et comme avant, nous posons $y = \xi - \phi(z)$ où $\phi(z)$ stabilise le système supérieur. Cela signifie que nous pouvons réécrire le système ci-dessus comme

$$\begin{cases} \dot{z} = [f(z) + g(z)\phi(z)] + g(z)y + \delta_1(z, y) \\ \dot{y} = u - \dot{\phi}(z) + \delta_2(z, y) \end{cases} \quad (4.75)$$

Notre choix de contrôle garantit qu'il existe des fonctions de classe \mathcal{K} et \mathcal{KL} γ_1 et β_1 telles que

$$\|z(t)\|_\infty \leq \max \{ \beta_1 (\|z_0\|, t), \gamma_1 (\|y\|_\infty) \}$$

Maintenant, supposons que

$$\begin{cases} |\delta_1(z, y)| = a_1|y| \\ |\delta_2(z, y)| = \rho(z) + |y|^2 \end{cases}$$

Où $\rho(\cdot)$ est de classe \mathcal{K} . Considérons maintenant la fonction candidate ISS-Lyapunov

$$V(y) = \frac{1}{2}y^2$$

La dérivée de V est

$$\dot{V} = y\dot{y} = y(u - \dot{\phi}(z) + \delta_2(z, y))$$

et nous considérons le contrôle

$$u = k(y) = -y - \alpha(y)$$

Où α est de classe \mathcal{K} et $\alpha(-y) = -\alpha(y)$. Cela signifie que $y\alpha(y)$ est toujours positif si $y \neq 0$. Calculons la dérivée temporelle avec ce u particulier

$$\begin{aligned} \dot{V}(y) &= y(-y - \alpha(y) - \dot{\phi}(z) + \delta_2(z, y)) \\ &= -|y|^2 - |y|\alpha(|y|) + y\delta_2(z, y) - y\dot{\phi}(z) \end{aligned}$$

Notez que

$$-y\dot{\phi}(z) \leq |y|^2 + |\dot{\phi}(z)|^2$$

de sorte que l'inégalité ci-dessus peut être réécrite comme

$$\dot{V}(y) \leq -|y|^2 - |y|\alpha(|y|) + |y|^2 + |\dot{\phi}(z)|^2 + |y| |\delta_2(z, y)|$$

Si nous choisissons

$$\alpha(|y|) > \rho(z) + |y|$$

alors

$$-|y|\alpha(|y|) + |y|^2 + |y| |\delta_2(z, y)| < 0$$

ce qui implique que

$$\dot{V}(y) \leq -|y|^2 + |\dot{\phi}(z)|^2$$

Pour tout $\epsilon > 0$ si nous laissons

$$|y| > \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon}} |\dot{\phi}(z)|$$

nous trouvons que

$$\dot{V}(y) \leq -|y|^2 + |\dot{\phi}(z)|^2 \leq -\epsilon|y|^2$$

ce qui implique que $V(y)$ est une fonction ISS-Lyapunov pour le système inférieur et donc

$$|y(t)| \leq \max \{ \beta_2(|y_0|, t), \gamma_{21}(|z|), \gamma_{22}(|u|) \}$$

Nos choix libres pour $\alpha(|y|)$ déterminent la taille de γ_{21} et γ_{22} de sorte que plus α_i est grand, plus γ est petit. Ainsi, nous pouvons toujours trouver un contrôleur qui satisfait au théorème du petit gain ISS et ce système en boucle fermée peut être stabilisé.

Lemme de Backstepping Robuste : Considérons le système suivant;

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z, \xi, \mu) \\ \dot{\xi} &= \phi(z, \xi, \mu) + b(z, \xi, \mu)u \end{cases} \quad (4.76)$$

dans lequel $f(0, 0, \mu) = 0$ et $\phi(0, 0, \mu) = 0$. Supposons que :

- Pour chaque μ (paramètre), le système supérieur est ISS-stable et il existe une fonction de classe \mathcal{K}_∞ γ (indépendante de μ) telle que

$$\|z\|_\infty \leq \max \{ \beta(\|z_0\|, t), \gamma(\|\xi\|_\infty) \}$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| \leq \gamma \left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\xi(t)\| \right)$$

pour une certaine fonction de classe \mathcal{KL} $\beta(\cdot, \cdot)$.

- Il existe $b_0 > 0$ tel que $b(z, \xi, \mu) \geq b_0$ pour tous z, ξ et μ .
- Il existe des fonctions de classe \mathcal{K} ρ_0 et ρ_1 qui sont localement Lipschitz à l'origine telles que

$$\max \{ |\phi(z, \xi, \mu)|, |\xi| b(z, \xi, \mu)^2 \} \leq \max \{ \rho_0(|\xi|), \rho_1(\|z\|) \}$$

pour tous z, ξ et μ .

- La fonction $\rho_1(\gamma(\cdot))$ est localement Lipschitz à l'origine Alors il existe $K(\xi)$ avec $K(0) = 0$ tel que sous la loi de contrôle

$$u = k(\xi) + v$$

Le système en boucle fermée avec entrée v et état (z, ξ) est stable ISS. La preuve est similaire à celle présentée précédemment, où nous choisissons

$$K(\xi) = -y - \alpha(y)$$

avec α étant une fonction de classe \mathcal{K} telle que $y\alpha(y) > 0$ lorsque $y \neq 0$. Ce lemme fournit tous les éléments nécessaires pour établir une procédure de conception récursive pour la stabilisation robuste des systèmes en forme de feedback (triangulaire inférieure).

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z, \xi_1, \mu) \\ \dot{\xi}_1 &= q_1(z, \xi_1, \mu) + b_1(z, \xi_1, \mu) \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 &= q_2(z, \xi_1, \xi_2, \mu) + b_2(z, \xi_1, \xi_2, \mu) \xi_s \\ \dots &= \dots \\ \dot{\xi}_r &= q_r(z, \xi_1, \dots, \xi_r, \mu) + b_r(z, \xi_1, \dots, \xi_r, \mu) u \end{cases} \quad (4.77)$$

Ce lemme stipule que, sous certaines hypothèses techniques, si le système supérieur est stable ISS, une loi de feedback $k(\xi)$ peut être conçue de sorte que l'ensemble du système soit stable ISS avec le contrôle $u = k(\xi) + v$. Pour illustrer comment la récursion pourrait être mise en oeuvre, considérons un système modélisé, par exemple, par les équations

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z, \xi, \mu) \\ \dot{\xi} &= \phi(z, \xi, \mu) + b(z, \xi, \mu)\zeta \\ \dot{\zeta} &= \chi(z, \xi, \zeta, \mu) + d(z, \xi, \zeta, \mu)u \end{cases} \quad (4.78)$$

Le changement de variables

$$v = \zeta - k(\xi) \quad (4.79)$$

transforme notre système original en la forme

$$\begin{cases} \dot{z} &= f(z, \xi, \mu) \\ \dot{\xi} &= \phi(z, \xi, \mu) + b(z, \xi, \mu)k(\xi) + b(z, \xi, \mu)v \\ \dot{v} &= \bar{\chi}(z, \xi, v, \mu) + \bar{d}(z, \xi, v, \mu)u \end{cases} \quad (4.80)$$

Ce système, avec état (z, ξ) et entrée v , répond aux conditions du lemme. En supposant que les fonctions $\bar{\chi}$, \bar{d} et le gain γ satisfont aux exigences techniques du lemme, celui-ci garantit l'existence d'un contrôle.

$$u = \bar{k}(v) + w \quad (4.81)$$

tel que l'ensemble du système est stable ISS.

Exemple

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} &= -az^2 \operatorname{sgn}(z) + bz(\xi + \xi^2) \\ \dot{\xi} &= z + u \end{cases}$$

Où les paramètres a et b sont contraints par $0 < a_0 \leq a \leq a_1$ et $|b| \leq b_0$. Ce système est un cas particulier de

$$\begin{cases} \dot{z} &= -az^k \operatorname{sgn}(z) + bx^p \phi(u) \end{cases}$$

Avec k pair et $p < k$. Comme nous l'avons démontré précédemment, ce système est

ISS. Plus spécifiquement, la fonction de gain pour le système supérieur est donnée par

$$\gamma(r) = \frac{|b|}{a-\epsilon} (r + r^2) < k (r + r^2)$$

pour $0 < \epsilon < a$. La troisième condition du lemme est remplie, étant donné que

$$\max\{|z|, |\xi|\} \leq \max\{|\xi|, |z|\}$$

Nous sélectionnons une fonction de gain $g(\cdot)$ de classe \mathcal{K}_∞ telle que

$$\gamma \circ g(r) < r$$

pour tout $r > 0$, ce qui implique

$$\gamma(r) < g^{-1}(r)$$

Par conséquent, nous choisissons

$$g^{-1}(r) = 2k (r + r^2)$$

et définissons

$$\alpha(\xi) = \begin{cases} 3k(\xi + \xi^2) & \text{si } \xi \geq 0 \\ -\alpha(-\xi) & \text{si } \xi \leq 0 \end{cases}$$

Ainsi, le contrôle robuste pour ce système est

$$\begin{cases} u = -\xi - \alpha(\xi) + v \end{cases}$$

4.4 Stabilisation par contrôle distribué parallèle

Le contrôle distribué parallèle (PDC) est une stratégie efficace pour stabiliser les systèmes modélisés par des modèles flous de Takagi-Sugeno (T-S), qui interpolent entre différents systèmes dynamiques linéaires. Cette méthode implique la création d'un système de contrôle flou dont les prémices des règles sont identiques à celles du système flou de la plante. Dans ce cadre, chaque règle de contrôle est associée à une loi de commande spécifique pour gérer le système linéaire correspondant de la plante, et la loi de commande globale résulte de la combinaison pondérée de ces lois individuelles.

Le PDC joue un rôle crucial dans la gestion des systèmes non linéaires, offrant la possibilité d'un contrôle adaptatif en temps réel, en particulier lorsque le système non linéaire est identifié en ligne comme un système flou T-S.

Considérons le système flou de type Takagi-Sugeno (TS), formulé comme suit:

$$\text{SI } z_1 \text{ est } F_1^i, \text{ ET } \dots, \text{ ET } z_r \text{ est } F_r^i, \text{ ALORS } \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \\ y(t) = C_i x(t). \end{cases} \quad (4.82)$$

Le contrôleur PDC pour ce système se définit par R règles de la forme :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^M \mu_i(z(t)) K_i x(t) \quad (4.83)$$

En boucle fermée, le modèle TS flou avec la loi de commande PDC se représente comme

:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (A_i - B_i K_j) x(t) \quad (4.84)$$

La stabilité de ce système en boucle fermée nécessite de trouver des gains de commande tels que la dérivée de la fonction de Lyapunov quadratique $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, avec $P > 0$, soit négative. Cette dérivée, le long des trajectoires du système (3.84), est définie par :

$$\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) x(t)^T (A_i - B_i K_j)^T P + P (A_i - B_i K_j) x(t) < 0 \quad (4.85)$$

En posant $G_{ij} = (A_i - B_i K_j)$, nous énonçons les conditions suffisantes suivantes.

Théorème 4.1 [XQ03] : Le multi-modèles en boucle fermée (3.84) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique $P > 0$ et des matrices Q_{ij} avec $Q_{ji} = Q_{ij}^T$, satisfaisant les inégalités suivantes :

$$G_{ii}^T P + P G_{ii} + Q_{ii} < 0, \quad (4.86)$$

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + Q_{ij} + Q_{ij}^T \leq 0 \quad \text{pour } i < j, \quad (4.87)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{M1} & \cdots & Q_{MM} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.88)$$

pour $i, j = 1, 2, \dots, M$, à l'exception des paires (i, j) pour lesquelles $\mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) = 0$.

Démonstration

Soit $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ une fonction de Lyapunov quadratique. Sa dérivée temporelle, calculée le long du système (3.84), est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x(t)^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mu_i(z(t))\mu_j(z(t)) (G_{ij}^T P + P G_{ij}) x(t) \\ &= x(t)^T \sum_{i=1}^N \mu_i^2(z) (G_{ii}^T P + P G_{ii}) x(t) \\ &\quad + x(t)^T \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \mu_i(z)\mu_j(z) ((G_{ij} + G_{ji})^T P + P (G_{ij} + G_{ji})) x(t) \end{aligned}$$

Les conditions 3.86 et 3.87 garantissent que $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$ décroît, soit $\dot{V}(x(t)) < 0$

1. Conception du contrôleur flou stable

En utilisant les inégalités matricielles linéaires (LMI) suivantes pour des systèmes flous continus, il est possible de déterminer les gains de retour d'état F_i et la matrice P (si une solution existe).

Trouver $X > 0$ et $M_i (i = 1, \dots, r)$ tels que :

$$\begin{aligned} -X A_i^T - A_i X + M_i^T B_i^T + B_i M_i &> 0, \\ -X A_i^T - A_i X - X A_j^T - A_j X \\ + M_j^T B_i^T + B_i M_j + M_i^T B_j^T + B_j M_i &\geq 0, \end{aligned} \quad (4.89)$$

pour $i < j$ et $h_i \cap h_j \neq \emptyset$

où

$$X = P^{-1}, \quad M_i = F_i X. \quad (4.90)$$

Les F_i et une P commune sont obtenus comme suit :

$$P = X^{-1}, \quad F_i = M_i X^{-1} \quad (4.91)$$

à partir des solutions X et M_i .

2. Conception de contrôleur flou avec des conditions de stabilité relaxées

Trouver $X > \mathbf{0}$, $Y \geq \mathbf{0}$, et $M_i (i = 1, \dots, r)$ satisfaisant

$$\begin{aligned} -XA_i^\top - A_iX + M_i^\top B_i^\top + B_iM_i - (s-1)Y &> 0, \\ 2Y - XA_i^\top - A_iX - XA_j^\top - A_jX \\ + M_j^\top B_i^\top + B_iM_j + M_i^\top B_j^\top + B_jM_i &\geq 0, \\ \text{pour } i < j \text{ et } h_i \cap h_j &\neq \phi, \end{aligned} \quad (4.92)$$

où

$$X = P^{-1}, \quad M_i = F_i X, \quad Y = XQX. \quad (4.93)$$

Les F_i , une P commune, et une Q commune sont obtenus comme suit :

$$P = X^{-1}, \quad F_i = M_i X^{-1}, \quad Q = PYP$$

à partir des solutions X , Y , et M_i .

3. Conception de contrôleur flou avec un taux de décroissance

La condition de taux de décroissance $\dot{V}(x(t)) \leq -2\alpha V(x(t))$ pour toutes les trajectoires est équivalente à :

$$G_{ii}^\top P + PG_{ii} + 2\alpha P < 0 \quad (4.94)$$

pour tout i , et

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^\top P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) + 2\alpha P \leq 0 \quad (4.95)$$

pour $i < j$ à l'exception des paires (i, j) telles que $h_i(z(t))h_j(z(t)) = 0, \forall t$, où $\alpha > 0$.

Pour maximiser α , résolvez le problème de minimisation de la valeur propre généralisée

(GEVP) suivant :

$$\underset{X, M_1, \dots, M_r}{\text{maximiser}} \alpha \quad (4.96)$$

sous réserve de

$$\begin{aligned} X &> 0, \\ -XA_i^\top - A_iX + M_i^\top B_i^\top + B_iM_i - 2\alpha X &> 0, \\ -XA_i^\top - A_iX - XA_j^\top - A_jX & \\ + M_j^\top B_i^\top + B_iM_j + M_i^\top B_j^\top + B_jM_i - 4\alpha X &\geq 0, \end{aligned} \quad (4.97)$$

pour $i < j$ et $h_i \cap h_j \neq \phi$,

où

$$X = P^{-1}, \quad M_i = F_i X.$$

4. Conception de contrôleur flou avec un taux de décroissance dans des conditions de stabilité relaxées

La condition de taux de décroissance est donnée par :

$$\begin{aligned} G_{ii}^\top P + PG_{ii} + (s-1)Q + 2\alpha P &< 0, \\ \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right)^\top P + P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2}\right) - Q + 2\alpha P &\leq 0, \end{aligned} \quad (4.98)$$

pour $i < j$ et $h_i \cap h_j \neq \phi$,

où $\alpha > 0$.

Pour maximiser α , résolvez le GEVP suivant :

$$\underset{X, Y, M_1, \dots, M_r}{\text{maximiser}} \alpha \quad (4.99)$$

sous réserve de

$$\begin{aligned}
 & X > 0, \quad Y \geq 0, \\
 & -XA_i^\top - A_iX + M_i^\top B_i^\top + B_iM_i - (s-1)Y - 2\alpha X > 0, \\
 & 2Y - XA_i^\top - A_iX - XA_j^\top - A_jX \\
 & + M_j^\top B_i^\top + B_iM_j + M_i^\top B_j^\top + B_jM_i - 4\alpha X \geq 0, \\
 & \text{pour } i < j \text{ et } h_i \cap h_j \neq \phi,
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

où

$$X = P^{-1}, \quad M_i = F_iX, \quad Y = XQX$$

5. Conception de contrôleur flou avec contrainte sur l'entrée

Théorème 4.2

Supposons que la condition initiale $x(0)$ soit connue. La contrainte $\|u(t)\|_2 \leq \mu$ est respectée à tout moment $t \geq 0$ si les inéquations matricielles linéaires (LMI) suivantes sont vérifiées :

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^\top \\ x(0) & X \end{bmatrix} \geq 0, \tag{4.101}$$

$$\begin{bmatrix} X & M_i^\top \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{4.102}$$

où $X = P^{-1}$ et $M_i = F_iX$.

Preuve.

Supposons que $V(x(t)) = x^\top(t)Px(t)$ soit une fonction de Lyapunov et

$$x^\top(0)Px(0) \leq 1.$$

Alors,

$$1 - x^\top(0)X^{-1}x(0) \geq 0, \tag{4.103}$$

où $X = P^{-1}$. L'inégalité (3.103) est transformée en (3.101) par la procédure du complément de Schur.

La dérivation de (3.102) est la suivante : à partir de $\|u(t)\|_2 \leq \mu$,

$$u^\top(t)u(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t)F_i^\top F_j x(t) \leq \mu^2.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t)F_i^\top F_j x(t) \leq 1. \quad (4.104)$$

Puisque $x^\top(t)X^{-1}x(t) < x^\top(0)X^{-1}x(0) \leq 1$ pour $t > 0$, si

$$\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t)F_i^\top F_j x(t) \leq x^\top(t)X^{-1}x(t), \quad (4.105)$$

alors (3.104) est vérifiée. Par conséquent, nous avons

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t) \left(\frac{1}{\mu^2} F_i^\top F_j - X^{-1} \right) x(t) \leq 0. \quad (4.106)$$

À partir du côté gauche de (3.106),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t) \left(\frac{1}{\mu^2} F_i^\top F_j + \frac{1}{\mu^2} F_j^\top F_i - 2X^{-1} \right) x(t) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t) \\ & \quad \times \left[\frac{1}{\mu^2} (F_i^\top F_i + F_j^\top F_j) - \frac{1}{\mu^2} (F_i^\top - F_j^\top) (F_i - F_j) - 2X^{-1} \right] x(t) \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))x^\top(t) \left[\frac{1}{\mu^2} (F_i^\top F_i + F_j^\top F_j) - 2X^{-1} \right] x(t) \\ &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t))x^\top(t) \left(\frac{1}{\mu^2} F_i^\top F_i - X^{-1} \right) x(t). \end{aligned} \quad (4.107)$$

Si

$$\frac{1}{\mu^2} F_i^\top F_i - X^{-1} \leq \mathbf{0}, \quad (4.108)$$

alors (3.106) est vérifiée. En définissant $M_i = F_i X$ pour (3.108), nous obtenons

$$\frac{1}{\mu^2} M_i^\top M_i - X \leq \mathbf{0}.$$

L'inégalité (3.102) peut être obtenue à partir de l'inégalité ci-dessus par la procédure du complément de Schur. Une autre solution pour obtenir (3.102) est la suivante. À partir de (3.106), nous avons

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} X^{-1} & F_i^\top \\ F_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0.$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par le bloc-diagonal $\begin{bmatrix} X & I \end{bmatrix}$, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \begin{bmatrix} X & M_i^\top \\ M_i & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Ainsi, nous arrivons à la condition (3.102). Cette dérivation est plus directe et compacte.

Exemple

Considérons un système dynamique non linéaire à deux états décrit par le système flou de Takagi-Sugeno (T-S) :

- Si x_1 est P_1^1 et x_2 est P_2^1 , alors $\dot{x}^1(t) = A_1 x(t) + b_1 u(t)$.
- Si x_1 est P_1^1 et x_2 est P_2^2 , alors $\dot{x}^2(t) = A_2 x(t) + b_2 u(t)$.
- Si x_1 est P_1^2 et x_2 est P_2^1 , alors $\dot{x}^3(t) = A_3 x(t) + b_3 u(t)$.
- Si x_1 est P_1^2 et x_2 est P_2^2 , alors $\dot{x}^4(t) = A_4 x(t) + b_4 u(t)$.

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notez que chaque système conséquent est contrôlable mais instable.

Les valeurs propres de A_1 sont $1 \pm j$, celles de A_2 sont $1 \pm j\sqrt{2}$, celles de A_3 sont $0.5 \pm j1.32$, et celles de A_4 sont $0.5 \pm j1.66$.

Par conséquent, ce système flou T-S est non linéaire et instable.

Pour le stabiliser, nous concevons un contrôleur de placement de pôles distribué parallèle avec des lois de commande de feedback d'état pour placer les valeurs propres en boucle fermée de chaque système à $-1 \pm j$.

Le contrôleur distribué parallèle est donné par :

- Si $x_1(t)$ est P_1^1 et $x_2(t)$ est P_2^1 , alors $u^1(t) = -k_1x(t)$.
- Si $x_1(t)$ est P_1^1 et $x_2(t)$ est P_2^2 , alors $u^2(t) = -k_2x(t)$.
- Si $x_1(t)$ est P_1^2 et $x_2(t)$ est P_2^1 , alors $u^3(t) = -k_3x(t)$.
- Si $x_1(t)$ est P_1^2 et $x_2(t)$ est P_2^2 , alors $u^4(t) = -k_4x(t)$.

où $k_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$, $k_2 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix}$, $k_3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$, et $k_4 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \end{bmatrix}$.

La loi de commande appliquée à la plante est donc :

$$u(t) = -[k_1\xi_1(t) + k_2\xi_2(t) + k_3\xi_3(t) + k_4\xi_4(t)]x(t)$$

La condition (3.98) pour la stabilité se traduit par 16 inégalités pour ce problème particulier.

$$\begin{aligned} G(A_1 - b_1k_1) + (A_1 - b_1k_1)^T G &< 0, \\ G(A_1 - b_1k_2) + (A_1 - b_1k_2)^T G &< 0, \\ &\vdots \\ G(A_4 - b_4k_4) + (A_4 - b_4k_4)^T G &< 0. \end{aligned}$$

Il a été vérifié que la matrice

$$G = \begin{bmatrix} 1509 & 347 \\ 347 & 653 \end{bmatrix}$$

satisfait ces 16 inégalités linéaires matricielles (LMIs).

Cette matrice G a été trouvée à l'aide de la boîte à outils Matlab LMI Control Toolbox.

Par conséquent, nous sommes assurés que le contrôleur distribué parallèle ci-dessus rend le point $\underline{x} = \underline{0}$ globalement asymptotiquement stable dans le système en boucle fermée susmentionné.

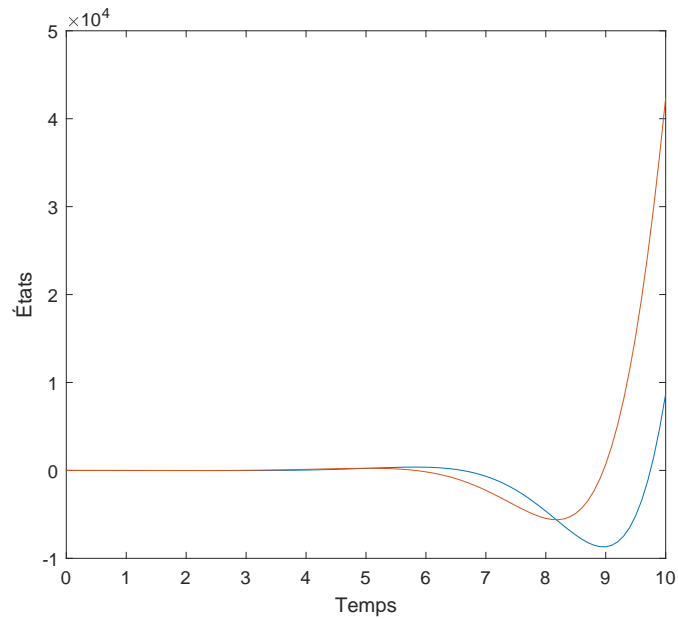


Fig 4.9: Trajectoires d'état du système en boucle ouverte

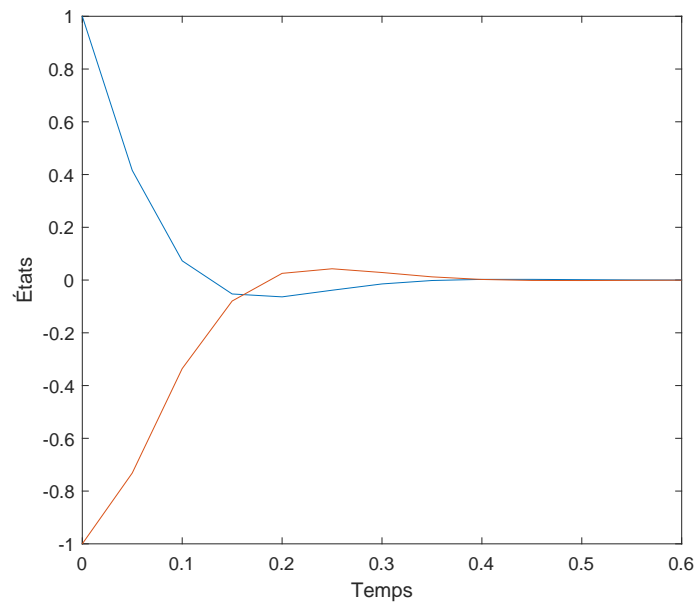


Fig 4.10: Trajectoires d'état du système sous le contrôle distribué parallèle

4.5 Stabilisation par Retour de Sortie

Les lois de commande traditionnelles nécessitent un accès complet aux variables d'état du système. En absence de cet accès, une commande par retour de sortie, qu'elle soit statique ou dynamique, peut être mise en oeuvre. Cette approche a été largement étudiée récemment, comme le souligne [Oud08].

Cette section est divisée en deux parties. La première aborde les conditions de stabilité pour un multi-modèle avec une commande par retour de sortie statique, en utilisant des fonctions de Lyapunov quadratiques et non quadratiques. La seconde partie traite d'une commande par retour de sortie dynamique basée sur un observateur.

La loi de commande statique est définie par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(z(t)) F_i y(t), \quad (4.109)$$

et pour le multi-modèle en boucle fermée :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) (A_i + B_i F_j C) x(t). \quad (4.110)$$

Selon le Théorème 4.1, la synthèse de la commande par retour de sortie statique est effectuée en remplaçant G_{ij} par $\bar{A}_{ij} = A_i + B_i F_j C$.

Les conditions de stabilité sont :

$$\bar{A}_{ii}^\top P + P \bar{A}_{ii} + Q_{ii} < 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, M \quad (4.111)$$

$$\left(\frac{\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}}{2} \right)^\top P + P \left(\frac{\bar{A}_{ij} + \bar{A}_{ji}}{2} \right) + Q_{ij} + Q_{ji} \leq 0 \quad \text{pour } i < j \quad (4.112)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{M1} & \dots & Q_{MM} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.113)$$

avec $Q_{ji} = Q_{ij}^\top$.

Ces conditions, non linéaires en P et F_i , ne peuvent être linéarisées par un changement de variables. Toutefois, si la matrice de sortie C est de plein rang ligne, une formulation convexe peut être proposée.

Théorème 4.3 : Supposons l'existence de matrices $X > 0$, N_i , M , et Q_{ij} avec $Q_{ji} = Q_{ij}^\top$, satisfaisant :

$$\bar{A}_{ii}^\top P + P \bar{A}_{ii} + Q_{ii} < 0 \quad i = 1, \dots, M \quad (4.114)$$

$$(A_i + A_j)X + X(A_i + A_j)^\top + (B_i N_j + B_j N_i)C + C^\top (B_i N_j + B_j N_i)^\top + Q_{ij} + Q_{ji} \leq 0, i < j \quad (4.115)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{M1} & \cdots & Q_{MM} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.116)$$

Si $CX = MX$, le multi-modèle est globalement asymptotiquement stable, et le retour de sortie non linéaire est donné par :

$$F_i = N_i M^{-1}.$$

Il est supposé que la matrice de sortie C est identique pour tous les modèles locaux.

4.5.1 Stabilisation par Retour d'État Reconstitué

La loi de commande basée sur observateur est :

$$u(t) = -\sum_{i=1}^M \mu_i(z(t)) K_i \hat{x}(t). \quad (4.117)$$

Le modèle augmenté, incluant l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, est :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \mu_i(z(t)) \mu_j(z(t)) \begin{pmatrix} A_i - B_i K_j & B_i K_j \\ 0 & A_i - L_i C_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ e(t) \end{pmatrix} \quad (4.118)$$

Si $CX = MX$, le multi-modèle est globalement asymptotiquement stable, et le retour de sortie non linéaire est donné par :

$$F_i = N_i M^{-1}.$$

Étant donnée que toutes les variables de décision $z(t)$ sont mesurables, il a été démontré que le principe de séparation est garantie [MSH98].

On peut donc déterminer les gains du multicontrôleur K_i et les gains du multiobservateur L_i séparément à partir des conditions suivantes

$$G_{ii}^T P_1 + P_1 G_{ii} + Q_{ii} < 0 \quad (4.119)$$

$$\left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right)^T P_1 + P_1 \left(\frac{G_{ij}+G_{ji}}{2}\right) + Q_{ij} + Q_{ji} \leq 0 \quad i < j \quad (4.120)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{M1} & \cdots & Q_{MM} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.121)$$

$$(A_i - L_i C_i)^T + P(A_i - L_i C_i) + S_{ii} < 0; \quad i = 1, \dots, M \quad (4.122)$$

$$\left(\frac{A_i - L_i C_j + A_j - L_j C_i}{2}\right)^T P + P \left(\frac{A_i - L_i C_j + A_j - L_j C_i}{2}\right) + S_{ij} + S_{ji} \leq 0 \quad i < j \quad (4.123)$$

$$\begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{M1} & \cdots & S_{MM} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.124)$$

où $G_{ij} = A_i - B_i K_j$, $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, $Q_{ji} = Q_{ij}^T$ et $S_{ji} = S_{ij}^T$.

4.6 Stabilisation quadratique et non quadratique

4.6.1 Théorème des valeurs moyennes différentielles

Dans cette section, nous examinons l'approche basée sur le théorème des valeurs moyennes différentielles (DMVT) pour les fonctions à valeurs scalaires et vectorielles. Cette méthode permet de représenter la dynamique non linéaire de l'erreur d'estimation sous la forme d'un système Linéaire à Paramètres Variants (LPV), une approche qui sera exploitée dans la suite.

Considérons $f(x) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, une fonction continue sur l'intervalle $[a, b] \in \mathbb{R}^n$ et différentiable dans $Co(a, b)$. Alors, il existe un vecteur $c \in Co(a, b)$, avec $c_i \neq a$, $c_i \neq b$ pour $i = 1, \dots, n$, tel que [IMRM10] :

$$f(a) - f(b) = \left[\sum_{i,j,k=1}^{n,n,2} H_{ijk}(c_j) \delta_{ijk} \right] (a - b) \quad (4.125)$$

Où $H_{ijk}(c_j)$ représente les éléments de la matrice Jacobienne de f évaluée en c et δ_{ijk} sont des coefficients appropriés qui dépendent des dérivées de f . Cette représentation est utile pour analyser et contrôler les systèmes dynamiques non linéaires en les approchant par des systèmes LPV.

tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij1} = \frac{[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)]^{max} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)}{[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)]^{max} - [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)]^{min}} \\ \delta_{ij2} = \frac{[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)]^{min} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)}{[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)]^{max} - [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j)]^{min}} \end{array} \right. \quad (4.126)$$

$$\delta_{ijk} \geq 0 \quad \text{et} \quad \delta_{ij1} + \delta_{ij2} = 1$$

$$H_{ij1} = e_n(i)e_n^T(j) \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j) \right]^{max} \quad (4.127)$$

$$H_{ij1} = \begin{array}{c} j \\ \left[\begin{array}{cccccc} & & i & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ : & & : & : & & & : \\ 0 & \dots & [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]^{max} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ : & & : & : & & & : \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (4.128)$$

$$H_{ij2} = e_n(i)e_n^T(j) \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c_j) \right]^{min} \quad (4.129)$$

$$H_{ij2} = \begin{array}{c} j \\ \left[\begin{array}{cccccc} & & i & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ : & & : & : & & & : \\ 0 & \dots & [\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]^{min} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ : & & : & : & & & : \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right] \end{array} \quad (4.130)$$

Exemple d'illustration

Soit une fonction bidimensionnel $f(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, continue et différentiable sur $Co(X, Y)$ tel que :

$$f(x) = [f1(x) \ f2(x)]^T, \text{ avec } X = [X1 \ X2]^T \text{ et } Y = [Y1 \ Y2]^T.$$

D'après le théorème des valeurs moyennes, on peut écrire:

$$\begin{aligned} f(X) - f(Y) = & \left(\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\frac{\partial f_1}{\partial x_1}]^{max} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \delta_{111} + \begin{bmatrix} 0 & [\frac{\partial f_1}{\partial x_2}]^{max} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \delta_{121} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [\frac{\partial f_2}{\partial x_1}]^{max} & 0 \end{bmatrix} \times \delta_{211} \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\frac{\partial f_2}{\partial x_2}]^{max} \end{bmatrix} \times \delta_{221} + \begin{bmatrix} [\frac{\partial f_1}{\partial x_1}]^{min} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \delta_{112} + \begin{bmatrix} 0 & [\frac{\partial f_1}{\partial x_2}]^{min} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \delta_{122} + \\ & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [\frac{\partial f_2}{\partial x_1}]^{min} & 0 \end{bmatrix} \times \delta_{212} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [\frac{\partial f_2}{\partial x_2}]^{min} \end{bmatrix} \times \delta_{222} \end{aligned} \right) \times \left[\begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y1 \\ Y2 \end{bmatrix} \right] \end{aligned}$$

4.6.2 Stabilisation par retour de sortie quadratique

L'objectif de cette section est de concevoir un contrôleur à retour d'état basé sur des états estimés pour assurer la stabilité du système non linéaire en boucle fermée.

Avant de présenter la conception de notre contrôleur, nous introduisons l'hypothèse suivante, non restrictive :

Hypothèse

- Nous supposons que le signal de référence est borné.
- Les paires (A_i, B) sont contrôlables.

Considérons le système flou de type Takagi-Sugeno suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(x(t))) (A_i x(t) + B_i u(t)) + F(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4.131)$$

où $F(t)$ représente le vecteur d'entrée inconnu. Ensuite, l'observateur d'état correspon-

nant est représenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\xi(\hat{x}(t))) (A_i \hat{x}(t) + B_i u(t)) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ y(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (4.132)$$

La loi de commande pour le système donné par (3.131) est définie par un retour d'état

$$u(t) = -K \left((\hat{x}(t) - x_c(t)) + \int (\hat{x}(t) - x_c(t)) \right) \quad (4.133)$$

Définissons l'erreur de suivi comme :

$$e_c(t) = x(t) - x_c(t) \quad (4.134)$$

Alors, la relation (3.133) devient :

$$u(t) = -K \left((e_c(t) - \tilde{e}(t)) + \int (e_c(t) - \tilde{e}(t)) \right) \quad (4.135)$$

En substituant (3.135), nous obtenons la dynamique de l'erreur de suivi :

$$\begin{aligned} \dot{e}_c(t) = \sum_{i=1}^r h_i(t) [(A_i - B_i K) e_c(t) + B_i K \tilde{e}(t) \\ - B_i K / (e_c(t) - \tilde{e}(t)) dt + \bar{E} \cdot \bar{F}(t)] \end{aligned} \quad (4.136)$$

où

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} A_i & I \end{bmatrix} \text{ et } \bar{F}(t) = \begin{bmatrix} x_c(t) \\ F(t) \end{bmatrix}$$

Définissons le vecteur augmenté $e_a(t)$ comme :

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} \tilde{e}(t) \\ e_c(t) \\ \int (e_c(t) - \tilde{e}(t)) dt \end{bmatrix} \quad (4.137)$$

Après manipulation, la dynamique du système augmenté devient la suivante :

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^r h_i(t) (A_a e_a(t) + B_a U_a(t)) \quad (4.138)$$

$$\text{où } A_a = \begin{bmatrix} A_i - LC & 0 & 0 \\ B_i K & A_i - B_i K & -B_i K \\ -I & I & 0 \end{bmatrix} \quad B_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{E}{0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ et } U_a = \begin{bmatrix} F \\ \bar{F} \end{bmatrix}$$

L'estimation d'état et l'erreur de suivi peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{e}}(t) = (A_0 - LC) \tilde{e}(t) + (\Phi(x) - \Phi(\hat{x})) \\ \dot{e}_c(t) = (A_0 - B_0 K) e_c(t) + B_0 K \tilde{e}(t) \\ \quad + B_0 K / (e_c(t) - \tilde{e}(t)) + \bar{E} \cdot \bar{F}(t) + \Phi(\hat{x}, x_c) \end{cases} \quad (4.139)$$

où :

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{x}, x_c) &= \sum_{i=1}^r h_i \left((\bar{A} - \bar{B}K) e_c(t) + \bar{B}K e(t) \right. \\ &\quad \left. - \bar{B}K \int (e_c(t) - \tilde{e}(t)) \right) \end{aligned}$$

En utilisant l'approche du théorème des valeurs moyennes:

$$\Phi(\hat{x}, x_c) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{\xi} (\hat{x} - x_c) \quad (4.140)$$

où $\xi \in]\hat{x} - x_c[$ Maintenant, nous appliquons la transformation de non-linéarité sectorielle, le système augmenté 3.139 peut s'exprimer comme :

$$e_a(t) = \sum_{i=1}^r h_i(t) \bar{A}_a e_a(t) + B_a U_a(t) \quad (4.141)$$

où

$$\bar{A}_2 = \begin{bmatrix} A_0 + \mathcal{A}_i - LC & 0 & 0 \\ B_0 K & A_0 + \mathcal{A}_i - B_0 K & -B_0 K \\ -I & I & 0 \end{bmatrix}$$

La présence de perturbations d'entrée $U_a(t)$ affecte la performance de contrôle du système global. Par conséquent, une performance de suivi H^∞ a été considérée.

Théorème 4.4

Le système en boucle fermée (3.141) est asymptotiquement stable avec une performance de suivi garantie H^∞ , s'il existe des matrices $\tilde{P} = \tilde{P}^T > 0$ et un γ^2 prescrit tel que l'inégalité matricielle suivante soit réalisable

$$\bar{A}_a^T \tilde{P} + \tilde{P} \bar{A}_a + \frac{1}{(\gamma)^2} \tilde{P} \bar{B}_a \bar{B}_a^T \tilde{P} + \tilde{Q} < 0 \quad (4.142)$$

4.6.3 Stabilisation non quadratique

Le contrôleur est conçu en utilisant le retour d'état classique.

$$u(t) = -F(x(t) - x_c(t)) \quad (4.143)$$

où F est le gain du contrôleur à concevoir, $(x(t), x_c(t))$ sont respectivement les états réel et désiré.

Tout au long de cette section, nous supposons que $(dx_c(t)/dt = 0)$, et ensuite, le théorème suivant est utilisé pour dériver les critères de stabilité.

Théorème 4.5 Pour tout $i, j = 1, \dots, r$, s'il existe $\bar{H}, E_i, \mathcal{N}_i$, et $Q \geq 0$, qui rendent les inégalités matricielles linéaires (3.144)-(3.146) valides, le modèle descripteur TSF (3.131) avec le contrôleur à retour d'état (3.133) est asymptotiquement stable

$$\mathcal{H}_i = \bar{H} + E_i > 0 \quad (4.144)$$

$$\mathcal{H}_i \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i^T \mathcal{H}_i - B_i \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_i^T B_i^T + (n-1)Q < 0 \quad (4.145)$$

$$\mathcal{H}_i \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_j^T \mathcal{H}_i + \mathcal{H}_j \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i^T \mathcal{H}_j - B_j \mathcal{N}_i - \mathcal{N}_i^T B_j^T - B_i \mathcal{N}_j - \mathcal{N}_j^T B_i^T - Q \leq 0 \quad (4.146)$$

où $\mathcal{N} = F\mathcal{H}_i$ et \bar{H}, E_i sont définis par (3.144).

Preuve.

La boucle fermée du système TSF (3.131) avec la loi de contrôle (3.133) devient :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \mu_i(x) (A_i - B_i F) x(t)$$

la dynamique de l'erreur d'état peut être représentée comme :

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_c(t)$$

alors

$$\dot{e}(t) = (A_0 - B_0 F) e(t) + B_0 F x_c(t) + \{Y(x(t)) - Y(x_c(t))\}$$

où

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r A_i, B_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r B_i \\ \bar{A}_i &= A_i - A_0, \bar{B}_i = B_i - B_0 \\ \Upsilon(x(t)) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x) \left(\bar{A}_i x(t) - \bar{B}_i F \right) e(t) \\ \Upsilon(x_c(t)) &= \sum_{i=1}^r \mu_i(x) \left(\bar{A}_i - \bar{B}_i F \right) x_c(t) \end{aligned}$$

Le théorème des valeurs moyennes a été exploité pour définir les termes non linéaires comme :

$$Y(x(t)) - Y(x_c(t)) = \frac{\partial Y(x)}{\partial x}(c) (x(t) - x_c(t)) \mid_{x(t) < c < x_c(t)}$$

alors,

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^{q=2n^2} \mu_i(x) (\mathcal{A}_i - B_i F) e(t) + \{B_0 F x_c(t) + \gamma(x_c(t))\}$$

Soit $V(x)$ une fonction de Lyapunov intégrale de ligne, et sa dérivée temporelle est

$$\dot{V}(x) = x(t)^T \left\{ \mathcal{P}_i \mathcal{A}_i + \mathcal{A}_i^T \mathcal{P}_i^T - \mathcal{P}_i B_i F - F^T B_i^T \mathcal{P}_i \right\} x(t)$$

soit

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \mu_i(x) \mu_j(x) \left\{ \mathcal{P}_i (\mathcal{A}_j - B_j F) + (\mathcal{A}_j^T - F^T B_j^T) \mathcal{P}_i \right\} \\ \Pi(x) &= \sum_{i=1}^r \mu_i^2(x) \left\{ \mathcal{P}_i (\mathcal{A}_i - B_i F) + (\mathcal{A}_i^T - F^T B_i^T) \mathcal{P}_i \right\} \\ &+ \sum_{i=1}^r \sum_{j>i}^r \mu_i(x) \mu_j(x) \left\{ \mathcal{P}_i (\mathcal{A}_j - B_j F) + (\mathcal{A}_j^T - F^T B_j^T) \mathcal{P}_i \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{P}_j (\mathcal{A}_i - B_i F) + (\mathcal{A}_i^T - F^T B_i^T) \mathcal{P}_j \right\} \end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire $\Pi(x)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \Pi(x) &\leq 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j>i}^r \mu_i(x) \mu_j(x) Q + \sum_{i=1}^r \mu_i^2(x) \left\{ \mathcal{P}_i (\mathcal{A}_i - B_i F) + (\mathcal{A}_i^T - F^T B_i^T) \mathcal{P}_i \right\} \\ &\leq \sum_{i=1}^r \mu_i^2(x) \left\{ \mathcal{P}_i (\mathcal{A}_i - B_i F) + (\mathcal{A}_i^T - F^T B_i^T) \mathcal{P}_i \right\} + (n-1)Q < 0 \end{aligned}$$

alors, pour tout $x \neq 0$, $\dot{V}(x) = x(t)^T \Pi(x) x(t) < 0$.

4.7 Exemple

Un exemple numérique est fourni pour montrer l'efficacité des conditions de stabilité et de stabilisation proposées.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^2 h_i(x) (A_i x(t) + B_i u(t))$$

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.7 & -5a + 2b \\ 1.4b + a & -7 \end{bmatrix}, \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & -5a + 2b \\ -0.2b + a & -7 \end{bmatrix}$$

$$h_1(t) = \frac{x_1(t) + 1}{8}$$

$$h_2(t) = \frac{7 - x_2(t)}{8};$$

La paire $(a \in [-15, -5]$ et $b \in [-10, 10])$ est ajustée pour comparer les zones réalisables pour les Théorèmes basés sur les fonctions quadratiques et non quadratique.

L'inégalité (3.144)-(3.146) permet de calculer les matrices P_1, P_2 , et Q

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0351 & 0.1276 \\ 0.1276 & 0.7454 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.1457 & 0.1161 \\ 0.1161 & 0.6799 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0710 & -0.0068 \\ -0.0068 & 0.2172 \end{bmatrix}$$

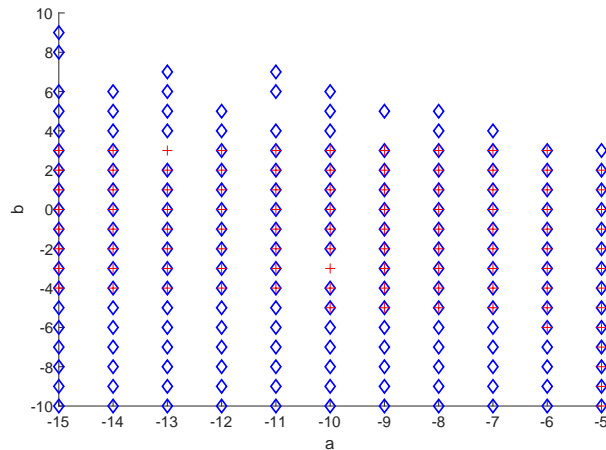


Fig 4.11: Domaine de faisabilité

La Figure (3.11) représente la région stable des LMIs via les Théorèmes basées sur les fonctions quadratiques et non quadratiques. La région réalisable obtenue avec le Théorème 4.5 couvre la région stable donnée par le Théorème de la fonction quadratique, ce qui démontre que les contraintes LMI via des fonctions non quadratiques sont moins conservatrices que la forme quadratique classique. Lorsque $a = -14$ et $b = 10$, les critères de stabilisation à travers la première Théorème sont irréalisables, signifiant qu'un contrôleur stable ne peut pas être obtenu par ces approches. Cependant, en utilisant le Théorème 4.5, les conditions de stabilisation sont résolues sous les régions LMIs. Les matrices positives sont obtenues comme suit :

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0110 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0109 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.0110 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0118 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.2315 & 0.0384 \\ 0.0384 & 0.2028 \end{bmatrix}$$

et les gains du contrôleur

$$F = [0.4433 \quad -0.1695]$$

La Figure (3.12) représente les résultats de simulation des réponses d'état en boucle fermée lorsque les conditions initiales sont $x(0) = [-3 \ 1]$. Les réponses d'état montrent que le contrôleur proposé est stable. Le signal de commande $u(t)$ est montré dans la Figure (3.13).

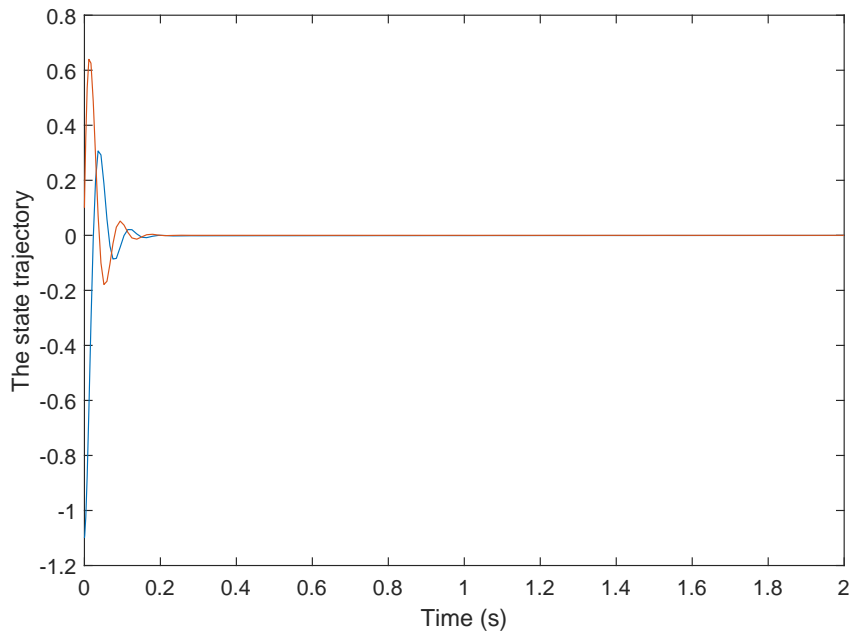


Fig 4.12: Trajectoires d'état du système

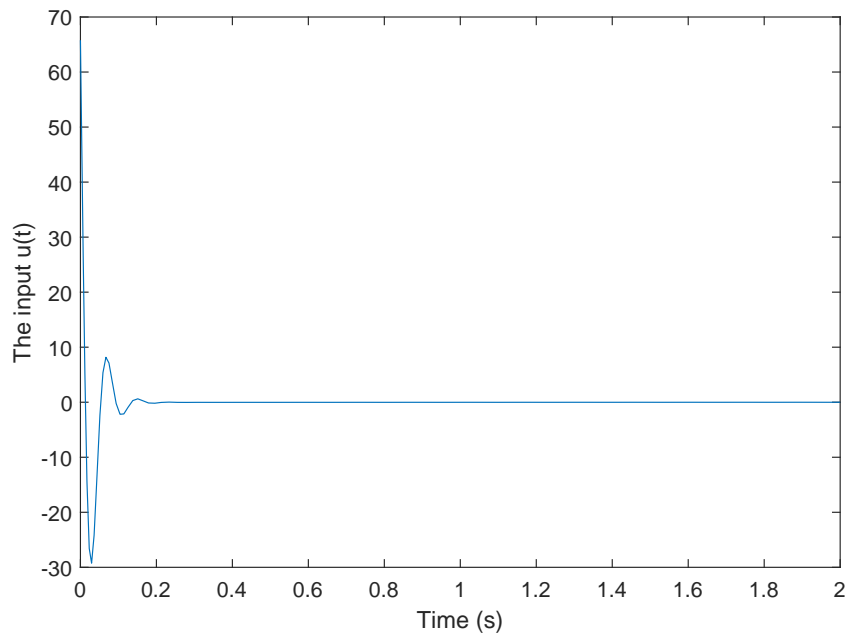


Fig 4.13: Signal de commande $u(t)$

4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré des méthodes avancées de contrôle des systèmes non linéaires, notamment la linéarisation par rétroaction, l'intégrateur par Backstepping et la commande par mode glissant. Une attention particulière a été accordée à la méthode de réaménagement de Lyapunov, qui joue un rôle clé dans la stabilisation des systèmes non linéaires et permet de garantir leur robustesse face aux incertitudes. Ce chapitre a mis en évidence les limites des méthodes traditionnelles de commande, qui reposent sur l'hypothèse d'une connaissance parfaite du modèle du système. Or, dans de nombreuses applications pratiques, ces hypothèses sont difficiles à satisfaire, rendant les approches classiques inefficaces face aux incertitudes et aux erreurs de modélisation. Ce constat souligne l'importance du développement de stratégies de commande robustes et adaptatives, capables de s'ajuster dynamiquement aux variations et perturbations du système. À cet égard, les techniques de commande robuste, telles que la commande par mode glissant et la commande Backstepping robuste, offrent des solutions performantes pour atténuer les effets des incertitudes et améliorer la stabilité des systèmes non linéaires en boucle fermée. Ces approches permettent non seulement de garantir une stabilité asymptotique, mais aussi de rendre les systèmes plus résilients aux perturbations et aux variations des paramètres, ce qui est essentiel dans des domaines critiques tels que l'automobile, l'aérospatial, la robotique et les réseaux électriques intelligents. En conclusion, l'évolution des méthodes de commande non linéaires ouvre de nouvelles perspectives pour le contrôle des systèmes complexes. La combinaison de techniques robustes et adaptatives constitue un levier stratégique pour le développement de systèmes autonomes et intelligents, capables de fonctionner efficacement dans des environnements incertains. L'optimisation continue de ces approches représentent une voie prometteuse pour la conception de systèmes de commande toujours plus performants et adaptatifs.

Ce chapitre a abordé également de manière approfondie la conception de contrôleurs stabilisateurs pour les systèmes flous de type Takagi-Sugeno, un élément clé dans le domaine des systèmes et de la régulation automatique. En mettant l'accent sur les fonctions de Lyapunov, à la fois quadratiques et non quadratiques, nous avons exploré diverses méthodes innovantes pour la synthèse de contrôleurs. L'utilisation de ces fonctions dans le contexte des systèmes TS a prouvé leur efficacité pour assurer la stabilité globale

asymptotique en boucle fermée.

CONCLUSION GÉNÉRALE

LE moteur à réluctance synchrone (SynRM) représente une alternative prometteuse aux moteurs traditionnels grâce à sa conception robuste, son rendement énergétique optimisé et son excellent compromis entre coût et performance. Cependant, sa commande reste un défi majeur en raison de la nature non linéaire et complexe de son comportement dynamique.

Les travaux réalisés au cours de cette thèse constituent une avancée significative dans le domaine des systèmes non linéaires, des moteurs SynRM et de leurs commandes. Par une démarche rigoureuse et approfondie, cette recherche a abordé des aspects fondamentaux de la modélisation, de l'analyse et de la commande des systèmes non linéaires et des moteurs SynRM, soulignant leur importance vitale dans une multitude de domaines d'application, de la robotique à l'aéronautique, en passant par la biologie et la gestion de l'énergie. Dans cette thèse, nous avons exploré en profondeur la modélisation et la commande du SynRM en nous appuyant sur des approches avancées issues de la théorie des systèmes non linéaires.

La première partie de ce travail a été consacrée à la modélisation du SynRM. Le premier chapitre a posé les bases théoriques des systèmes non linéaires et des machines électriques, en mettant particulièrement en lumière les spécificités du SynRM, ses différentes configurations de rotor et les équations électromécaniques qui régissent son comportement dynamique. Ensuite, le deuxième chapitre a introduit les systèmes flous de Takagi-Sugeno (TS) comme un outil puissant pour la modélisation de systèmes complexes. L'accent a été mis sur la construction d'un modèle TS du SynRM, l'analyse de sa stabilité et l'exploitation d'inégalités matricielles linéaires et bilinéaires (LMI et BMI) pour garantir une modélisation précise et exploitable en commande.

La seconde partie de la thèse s'est focalisée sur la commande avancée du SynRM. Le troisième chapitre a exploré différentes approches de contrôle, notamment la linéarisation en régime de petit signal, la linéarisation par rétroaction et la linéarisation de l'espace d'état. Il a également traité des stratégies de commande non linéaire robuste, telles que la commande par reconfiguration de Lyapunov, la commande par mode glissant et la technique du backstepping robuste, visant à améliorer la stabilité et la résistance aux perturbations du moteur. Enfin, ce chapitre a abordé la stabilisation des systèmes flous de type TS en proposant des contrôleurs basés sur un contrôle distribué parallèle, le retour d'état reconstruit et des techniques de stabilisation quadratique et non quadratique.

Le quatrième chapitre a permis d'évaluer concrètement les performances des techniques de commande développées à travers une implémentation sur un modèle TS du SynRM. Une attention particulière a été accordée à la conception d'un contrôleur non quadratique basé sur la méthode de l'intégrale de ligne de Lyapunov. Des simulations MATLAB ont permis de valider l'efficacité de ce contrôleur sous différentes conditions de fonctionnement, tandis qu'une validation expérimentale en boucle matérielle a confirmé son applicabilité en conditions réelles. Une étude comparative avec d'autres approches existantes a mis en évidence les avantages du contrôleur proposé en termes de précision, de robustesse et d'adaptabilité aux variations de charge.

Les résultats obtenus démontrent que les méthodes de commande proposées améliorent significativement les performances du moteur en termes de stabilité, de robustesse et d'efficacité énergétique. Ces avancées ouvrent ainsi la voie à de nouvelles applications industrielles du SynRM, notamment dans les secteurs de l'automobile et des énergies renouvelables, où la recherche de solutions performantes et économiquement viables est essentielle. Elles constituent également une perspective prometteuse pour maximiser l'efficacité du SynRM dans des contextes industriels concrets.

- [AAA12] Roberto Ambrosino, Marco Ariola, and Francesco Amato. A convex condition for robust stability analysis via polyhedral lyapunov functions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 50(1):490–506, 2012. (page 64).
- [ACPS15] Francesco Alonge, Maurizio Cirrincione, Marcello Pucci, and Antonino Sferlazza. Input–output feedback linearization control with on-line mras-based inductor resistance estimation of linear induction motors including the dynamic end effects. *IEEE Transactions on Industry Applications*, 52(1):254–266, 2015. (pages 81, 86).
- [Akh04] Abdelkader Akhenak. *Conception d’observateurs non linéaires par approche multimodèle: application au diagnostic*. PhD thesis, éditeur inconnu, 2004. (page 51).
- [AKM⁺20] Abdelkarim Ammar, Aissa Kheldoun, Brahim Metidji, Tarek Ameid, and Younes Azzoug. Feedback linearization based sensorless direct torque control using stator flux mras-sliding mode observer for induction motor drive. *ISA transactions*, 98:382–392, 2020. (page 81).
- [BEGFB94] Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, and Venkataramanan Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, 1994. (page 60).

- [Ben02] Abder Rezak Benaskeur. *Aspects de lâŽapplication du backstepping adaptatif à la commande décentralisée des systèmes non linéaires*. Thèse PhD, 2002. (page 102).
- [Ben09] Rabiâ Benayache. *Contribution à la commande robuste des systèmes non linéaires incertains*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrais, 2009. (page 103).
- [Bla01] Yann Blanco. *Stabilisation des modèles Takagi-Sugeno et leur usage pour la commande des systèmes non linéaires*. PhD thesis, Lille 1, 2001. (page 65).
- [BOU23] Anouar BOUKHLOUF. *Contribution à la commande des systèmes non linéaires: application à la machine synchrone à réluctance variable*. PhD thesis, Université Mohamed Khider Biskra, 2023. (pages iv, 16, 21, 22, 24, 48, 49, 50).
- [BR92] Pierre Borne and Jean-Pierre Richard. *Modélisation et identification des processus*, volume 1. Editions Technip, 1992. (page 42).
- [Bro78] Roger W Brockett. Feedback invariants for nonlinear systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 11(1):1115–1120, 1978. (page 100).
- [CB12] Mohammed Chadli and Pierre Borne. *Multiple models approach in automation: Takagi-Sugeno fuzzy systems*. John Wiley & Sons, 2012. (pages 59, 60, 63).
- [CGTV03] Graziano Chesi, Andrea Garulli, Alberto Tesi, and Antonio Vicino. Homogeneous lyapunov functions for systems with structured uncertainties. *Automatica*, 39(6):1027–1035, 2003. (page 65).
- [Cha02] Mohammed Chadli. *Stabilité et commande de systèmes décrits par des multimodèles*. PhD thesis, Vandoeuvre-les-Nancy, INPL, 2002. (page 69).
- [Che17] Abdelmadjid Cherifi. *Contribution à la commande des modèles Takagi-Sugeno: approche non-quadratique et synthèse D-stable*. PhD thesis, Reims, 2017. (page 67).
- [CRF97] Shu-Guang Cao, Neville W Rees, and Gang Feng. Analysis and design for a class of complex control systems part ii: Fuzzy controller design. *Automatica*, 33(6):1029–1039, 1997. (page 46).

- [DH11] Safta De Hillerin. *Commande robuste de systèmes non linéaires incertains*. PhD thesis, Supélec, 2011. (page 73).
- [DIA19] Pierre-Marie Damon, Dalil Ichalal, and Hichem Arioui. Steering and lateral motorcycle dynamics estimation: Validation of luenberger lpv observer approach. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 4(2):277–286, 2019. (page 49).
- [Fen03] Gang Feng. Controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 11(5):605–612, 2003. (page 63).
- [Fen18] Gang Feng. *Analysis and synthesis of fuzzy control systems: a model-based approach*, volume 37. CRC press, 2018. (page 46).
- [FNS15] Édouard Finoki, Vahé Nerguizian, and Maarouf Saad. Commande de vol non linéaire par la méthode du backstepping. *Substance ÉTS*, 2015. (page 103).
- [Gue14] Kevin Guelton. Some refinements on stability analysis and stabilization of second order ts models using line-integral lyapunov functions. *IFAC Proceedings Volumes*, 47(3):7988–7993, 2014. (pages 67, 68).
- [Ham12] Habib Hamdi. *Approche Multi-Modèle pour l’Observation d’État et le Diagnostic des Systèmes Singuliers non Linéaires*. PhD thesis, Ecole Polytechnique de Tunis, 2012. (page 8).
- [Ham15] Mohamed Yacine Hammoudi. *Contribution à la commande et à l’observation dans l’association convertisseurs machine*. PhD thesis, Université Mohamed Khider-Biskra, 2015. (page 50).
- [Ham19] Houssam Eddine Hamoud. *Linéarisation par pré-distorsion numérique d’amplificateurs de puissance pour les nouvelles générations des systèmes de télécommunications*. PhD thesis, Limoges, 2019. (page 74).
- [HBRA15] Mohamed Yacine Hammoudi, ME H Benbouzid, N Rizoug, and A Allag. New state observer based on takagi-sugeno fuzzy controller of induction motor. In *2015 4th international conference on systems and control (ICSC)*, pages 145–150. IEEE, 2015. (page 62).

- [HG17] PA Hokayem and Eduardo Gallestey. Lecture notes on nonlinear systems and control. *ABB Switzerland, Ltd., Baden-Dättwil, Switzerland, accessed Sept, 24:2017, 2017*. (page 81).
- [HS97] Michael A Henson and Dale E Seborg. *Nonlinear process control*. Prentice Hall PTR Upper Saddle River, New Jersey, 1997. (pages 81, 100).
- [IMDL86] Alberto Isidori, CH Moog, and A De Luca. A sufficient condition for full linearization via dynamic state feedback. In *1986 25th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 203–208. IEEE, 1986. (page 101).
- [IMRM10] Dalil Ichalal, Benoît Marx, José Ragot, and Didier Maquin. State estimation of takagi–sugeno systems with unmeasurable premise variables. *IET Control Theory & Applications*, 4(5):897–908, 2010. (page 136).
- [JRA99] Mikael Johansson, Anders Rantzer, and K-E Arzen. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7(6):713–722, 1999. (page 68).
- [Kad00] Azeddine Kaddouri. *Etude d’une commande non-linéaire adaptative d’une machine synchrone à aimants permanents*. Université Laval, 2000. (page 81).
- [KALL23] Xiaobing Kong, Mohamed Abdelkarim Abdelbaky, Xiangjie Liu, and Kwang Y Lee. Stable feedback linearization-based economic mpc scheme for thermal power plant. *Energy*, 268:126658, 2023. (page 81).
- [Kha02] Hassan K Khalil. *Nonlinear systems*. 2002. (page 109).
- [KKK95] Miroslav Krstic, Petar V Kokotovic, and Ioannis Kanellakopoulos. *Nonlinear and adaptive control design*. John Wiley & Sons, Inc., 1995. (page 112).
- [KTIT92] Shunji Kawamoto, Kensho Tada, Atsushi Ishigame, and Tsuneo Taniguchi. An approach to stability analysis of second order fuzzy systems. In *[1992 Proceedings] IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 1427–1434. IEEE, 1992. (page 53).
- [LML⁺11] D Lalili, A Mellit, N Lourci, B Medjahed, and EM Berkouk. Input output feedback linearization control and variable step size mppt algorithm of a

- grid-connected photovoltaic inverter. *Renewable energy*, 36(12):3282–3291, 2011. (page 86).
- [MA75] Ebrahim H Mamdani and Sedrak Assilian. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International journal of man-machine studies*, 7(1):1–13, 1975. (page 44).
- [Mam76] Ebrahim H Mamdani. Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers. *International Journal of Man-Machine Studies*, 8(6):669–678, 1976. (page 44).
- [MG86] Franklin K Moore and Edward Marc Greitzer. A theory of post-stall transients in axial compression systems: Part I—development of equations. 1986. (page 112).
- [MGBK16] Raymundo Marquez, Thierry Marie Guerra, Miguel Bernal, and Alexandre Kruszewski. A non-quadratic lyapunov functional for h^∞ control of nonlinear systems via takagi–sugeno models. *Journal of the Franklin Institute*, 353(4):781–796, 2016. (page 63).
- [MPA09] Leonardo A Mozelli, Reinaldo M Palhares, and Gustavo SC Avellar. A systematic approach to improve multiple lyapunov function stability and stabilization conditions for fuzzy systems. *Information Sciences*, 179(8):1149–1162, 2009. (pages 63, 67).
- [MPSM09] Leonardo A Mozelli, Reinaldo M Palhares, FO Souza, and Eduardo MAM Mendes. Reducing conservativeness in recent stability conditions of ts fuzzy systems. *Automatica*, 45(6):1580–1583, 2009. (page 66).
- [MSH98] Xiao-Jun Ma, Zeng-Qi Sun, and Yan-Yan He. Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 6(1):41–51, 1998. (page 135).
- [MSJ20] Roderick Murray-Smith and T Johansen. *Multiple model approaches to nonlinear modelling and control*. CRC press, 2020. (page 49).

- [Nag10] Anca Maria Nagy. *Analyse et synthèse de multimodèles pour le diagnostic. Application à une station d'épuration*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine-INPL, 2010. (pages 49, 50).
- [Ngu00] Quoc Son Nguyen. *Stabilité et mécanique non linéaire*. Hermès Science Publications, 2000. (page 12).
- [Nob17] Gabriel Nobert. *Caractérisation et linéarisation d'amplificateur de puissance RF par prédistorsion numérique dans un contexte d'appareils mobiles*. PhD thesis, École de technologie supérieure, 2017. (page 74).
- [OMRM08] Rodolfo Orjuela, Benoît Marx, José Ragot, and Didier Maquin. State estimation for non-linear systems using a decoupled multiple model. *International Journal of Modelling, Identification and Control*, 4(1):59–67, 2008. (pages 49, 50).
- [Oud08] Mohammed Oudghiri. *Commande multi-modèles tolérante aux défauts: Application au contrôle de la dynamique d'un véhicule automobile*. PhD thesis, Université de Picardie Jules Verne, 2008. (pages 5, 133).
- [Rob21] L Devaney Robert. *Introduction to chaotic dynamical systems*. CHAPMAN & HALL CRC, 2021. (page 10).
- [RW06] Bong-Jae Rhee and Sangchul Won. A new fuzzy lyapunov function approach for a takagi–sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy sets and systems*, 157(9):1211–1228, 2006. (pages 61, 63, 64, 67, 68).
- [RZK91] GVS Raju, Jun Zhou, and Roger A Kisner. Hierarchical fuzzy control. *International journal of control*, 54(5):1201–1216, 1991. (page 51).
- [SKH93] Jean-Jacques E Slotine and J Karl Hedrick. Robust input-output feedback linearization. *International Journal of control*, 57(5):1133–1139, 1993. (page 86).
- [SL⁺91] Jean-Jacques E Slotine, Weiping Li, et al. *Applied nonlinear control*, volume 199. Prentice hall Englewood Cliffs, NJ, 1991. (page 5).

- [Spo08] Bruno Sportisse. *Pollution atmosphérique. Des processus à la modélisation*. Springer-Verlag France, 2008. (page 42).
- [Tay94] David G Taylor. Nonlinear control of electric machines: An overview. *IEEE Control Systems Magazine*, 14(6):41–51, 1994. (page 5).
- [THW03] Kazuo Tanaka, Tsuyoshi Hori, and Hua O Wang. A multiple lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 11(4):582–589, 2003. (pages 65, 66).
- [TS85] Tomohiro Takagi and Michio Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, (1):116–132, 1985. (page 47).
- [TS92] Kazuo Tanaka and Michio Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy sets and systems*, 45(2):135–156, 1992. (page 62).
- [Tse87] Wilfred See Foon Tse. *Linear equivalents of nonlinear systems*. PhD thesis, University of British Columbia, 1987. (page 101).
- [TW04] Kazuo Tanaka and Hua O Wang. *Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons, 2004. (page 53).
- [Voi90] EO Voit. Fuzzy logic in control systems: Fuzzy logic controller-part i. *IEEE Trans. Systems, Man. and Cybernetics*, 20(2):404–418, 1990. (page 43).
- [WAB⁺23] Jianghua Wang, Khalid A Alattas, Yassine Bouterraa, Omid Mofid, and Saleh Mobayen. Adaptive finite-time backstepping control tracker for quadrotor uav with model uncertainty and external disturbance. *Aerospace Science and Technology*, 133:108088, 2023. (page 103).
- [WL⁺07] Robert L Williams, Douglas A Lawrence, et al. *Linear state-space control systems*. John Wiley & Sons, 2007. (page 81).
- [WWAD20] Yan Wei, Yueying Wang, Choon Ki Ahn, and Dengping Duan. Iblf-based finite-time adaptive fuzzy output-feedback control for uncertain mimo nonlinear state-constrained systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 29(11):3389–3400, 2020. (page 81).

- [XQ03] Liu Xiaodong and Zhang Qingling. New approaches to h^∞ controller designs based on fuzzy observers for ts fuzzy systems via lmi. *Automatica*, 39(9):1571–1582, 2003. (page 125).
- [YH08] Nurkan Yagiz and Yuksel Hacioglu. Backstepping control of a vehicle with active suspensions. *Control Engineering Practice*, 16(12):1457–1467, 2008. (page 103).
- [Zer11] Mohamed Zerrougui. *Observation et commande des systemes singuliers non linéaires*. PhD thesis, Université Henri Poincaré-Nancy I, 2011. (page 8).
- [Zhu23] Quanxin Zhu. *Nonlinear systems*. MDPI, Basel, 2023. (page 42).