

Université Mohamed Khider-Biskra  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Civil et d'Hydraulique  
Ref : .....



جامعة محمد خيضر بسكرة  
كلية العلوم والتكنولوجيا  
قسم الهندسة المدنية والبري  
المرجع : .....

Thèse présentée en vue de l'obtention du diplôme de

## Doctorat en Sciences

Filière : **Hydraulique**

Spécialité : **Sciences Hydrauliques**

Thème

**Etude de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à parois en courbes et à fond horizontal par la méthode du modèle rugueux de référence**

Présenté par :

**MANSRI Naim**

Soutenue le : 16/02/2025 devant le jury composé de :

OUNOKI Samira	Professeur	Présidente	Université de Biskra
BEDJAOUI Ali	MCA	Rapporteur	Université de Biskra
LAKEHAL Moussa	Professeur	Co-Rapporteur	Université de Annaba
CHERHABIL Sonia	MCA	Examinatrice	Université de Biskra
SEHTAL Sabah	MCA	Examinatrice	Université de Oum El Bouaghi
ZEGAIT Rachid	MCA	Examineur	Université de Ouargla

## REMERCIEMENTS

### بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات وبشكره تدوم النعم، والحمد لله الذي بتوفيقه وتيسيره  
تصلح الأمور وتتم كبرى النعم، اللهم لك الحمد كما ينبغي لجلال وجهك وعظيم سلطانك، الحمد لله  
الذي من علي من فضله العظيم بإتمام رسالة الدكتوراه. الفضل كل الفضل لله وحده.

Je remercie le directeur de thèse D<sup>r</sup> Ali BEDJAOU, Maître conférences A à l'Université de Biskra d'avoir accepté de m'encadrer le long de l'élaboration de ce travail et qui m'a accordé sa confiance pour mener cette thèse. Je le remercie vivement et je lui exprime ma profonde reconnaissance pour l'aide qu'il n'a cessé de me donner.

Je tiens à remercier beaucoup le Co-encadreur Pr Moussa LAKEHAL, Professeur à l'Université de Annaba pour tous ses efforts fournis afin d'achever ce travail.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude au Professeur Bachir ACHOUR, ainsi qu'aux Docteurs Mme HACHEMI-RACHEDI Lamia et Mlle BOUSLAH Soraya, pour leur précieuse contribution à l'amélioration de mon travail de recherche.

Je remercie également, les membres de jury, pour avoir lu et accepter d'examiner ma thèse de doctorat.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont permis de réaliser cette recherche et m'ont apporté leur aide, conseils et encouragements. Je souhaite exprimer ma reconnaissance particulière à :

- Mr le chef de département d'hydraulique de l'université de Biskra ;
- Mes enseignants, amis et collègues de département d'hydraulique de l'université de Annaba ;
- Mes amis et collègues de département de génie civil de l'université de Constantine.

## **DEDICACE**

Je dédié ce travail

A l'âme de mon père et à l'âme de mon cher frère

A ma chère mère

A ma femme et mes enfants (Amira et Amir)

A mon seul frère et à sa femme

A ma seule sœur

A la femme de mon frère décédé

A mes nièces (Malak, Rahma et Kaouther)

A mes neveux (Adel Wassim et Abdrreahman)

A mon frère et ami Pr Moussa LAKEHAL

A tous mes amis et collègues

# **RESUMES**

تناولت هذه الأطروحة دراسة الجريان المنتظم في أربعة أنواع من القنوات المفتوحة ذات القاع الأفقي والجدران المنحنية على شكل: دائري، شبه إهليلجي، إهليلجي وقانون أسّي. وقد تمت الإشارة إلى الفائدة العملية لكل شكل من هذه الأشكال. تمت دراسة الجريان المنتظم في القنوات المختارة استناداً إلى طريقة النموذج الخشن التي تأخذ في الاعتبار تغير معامل مقاومة الجريان والتي تنطبق على جميع أنظمة الجريان المضطرب بما في ذلك المجال الناعم، الانتقال والخشنة. بالنسبة للقنوات ذات القاع الأفقي والجدران الدائرية وشبه الإهليلجية، فقد أسفرت النتائج عن نماذج لتصميم هذه القنوات وتحديد العمق الطبيعي، معدل التدفق الحجمي، متوسط سرعة الجريان، عدد رينولدز ومعامل الاحتكاك. وقد قادت طريقة خاصة إلى تصميم هاتين القناتين في الحالة الحرجة من خلال تطبيق قانون عدد فرود. أما بالنسبة للقنوات ذات القاع الأفقي والجدران الإهليلجية والأخرى الخاضعة لدالة أسية، فقد تم اقتراح طرق للتصميم هذه القنوات وحساب العمق الطبيعي. تم تقديم عدة أمثلة تطبيقية لإظهار كيفية استخدام الأساليب المقترحة، وتسلط الضوء على متطلبات تطبيق بعض الطرق وتثبيت صلاحيتها. بالإضافة إلى ذلك، تم تعزيز معايير اختيار نوع القناة المشار إليها في بعض المراجع المطلاع عليها بمعايير أخرى حددت من خلال وجهة نظرنا. وأخيراً، تم اقتراح بعض التوصيات لتحسين واستكمال الدراسات التي أجريت في هذه الأطروحة.

**الكلمات المفتاحية:** الجريان المنتظم، الجريان الحرج، القنوات المفتوحة ذات الجدران المنحنية والقاع الأفقي، معادلة مقاومة الجريان، طريقة النموذج الخشن، العوامل الهيدروديناميكية.

### Abstract

This thesis aimed to study uniform flow in four types of open channels with horizontal bottoms and curved sides: circular, semi-elliptical, elliptical, and power-law shapes. The practical significance of each shape was highlighted. Uniform flow in these channels was examined using the RMM method, which considers the variation of flow resistance coefficient and applies across the entire range of turbulent flow regimes, including smooth, transitional, and rough domains. For channels with horizontal bottoms and circular or semi-elliptical sides, the results led to models for sizing these channels and determining normal depth, volumetric flow rate, average flow velocity, *Reynolds* number, and friction coefficient. A specific method was employed to size these channels at critical state using the *Froude* number formula. For channels with horizontal bottoms and elliptical or power-law sides, methods for sizing these channels and calculating normal depth were proposed. Several application examples were presented to demonstrate to the user the implementation steps of the recommended approaches, to highlight the application requirements of certain methods, and to confirm their validity. Additionally, criteria for selecting channel types from reviewed literature were supplemented with additional criteria based on our perspective. Finally, recommendations were suggested to improve and complement the studies conducted in this thesis.

**Keywords:** Uniform flow, Critical flow, Open channels with curved sides and horizontal bottom, Flow resistance equation, RMM method, Hydrodynamic parameters.

### Résumé

Cette thèse a eu pour objet l'étude de l'écoulement uniforme dans quatre types de canaux ouverts munis de fond horizontal et de parois en courbe de forme : circulaire, semi-elliptique, elliptique et en loi puissance. L'intérêt pratique de chaque forme a été indiqué. L'écoulement uniforme dans les canaux choisis a été étudié en se basant sur la méthode MMR qui tient compte de la variation du coefficient de résistance de l'écoulement et qui s'applique à l'ensemble du régime de l'écoulement turbulent comportant le domaine lisse, de transition et rugueux. Pour les canaux munis de fond horizontal et de parois circulaires et semi-elliptiques, les résultats obtenus ont abouti à des modèles de dimensionnement de ces canaux et de détermination de la profondeur normale, du débit volume, de la vitesse moyenne de l'écoulement, du nombre de *Reynolds* ainsi que du coefficient de frottement. Une méthode particulière a mené au dimensionnement de ces deux canaux à l'état critique en appliquant la formule du nombre de *Froude*. Pour les canaux à fond horizontal avec parois elliptiques et en loi puissance, des méthodes de dimensionnement de ces canaux et de calcul de la profondeur normale ont été suggérées. Plusieurs exemples d'application ont été présentés afin de montrer à l'utilisateur le mode d'emploi des démarches préconisées, de mettre en évidence les exigences d'application de certaines méthodes et de leur validité. En outre, les critères de choix du type de canal indiqués dans la littérature consultée ont été renforcés par d'autres critères proposés à travers notre point de vu. Enfin, certaines recommandations ont été suggérées afin d'améliorer et de compléter les études effectuées dans cette thèse.

**Mots clés :** Ecoulement uniforme, Ecoulement critique, Canaux ouverts à parois en courbe et à fond horizontal, Equation de résistance de l'écoulement, Méthode MMR, Paramètres hydrodynamiques.

# **SOMMAIRE**

## SOMMAIRE

REMERCIEMENTS .....	<i>i</i>
DEDICACE .....	<i>ii</i>
RESUMES .....	<i>iii</i>
SOMMAIRE .....	<i>iv</i>
LISTE DES FIGURES .....	<i>x</i>
LISTE DES TABLEAUX .....	<i>xiii</i>
INTRODUCTION GENERALE.....	<b>I</b>

### **PARTIE I**

#### **ÉCOULEMENT UNIFORME**

Introduction à la première partie .....	<b>1</b>
---	----------

### **Chapitre I**

#### **NOTIONS SUR L'ÉCOULEMENT UNIFORME**

I. Introduction .....	<b>2</b>
II. Écoulement dans les canaux ouverts .....	<b>2</b>
II.1. Types des canaux .....	<b>2</b>
II.2. Classification des écoulements .....	<b>4</b>
II.2.1. Écoulements permanents et non permanents .....	<b>4</b>
II.2.2. Écoulements uniformes et non uniformes .....	<b>5</b>

II.2.3. Écoulements graduellement variés et rapidement variés .....	5
II.2.4. Ecoulement spatialement varié .....	5
II.2.5. Écoulements Laminaire et Turbulent .....	6
II.2.6. Écoulement subcritique, supercritique et critique .....	7
III. Etablissement de l'écoulement uniforme .....	8
IV. Formule de <i>Chézy</i> .....	10
IV.1. Formule de <i>Ganguillet – Kutter</i> .....	11
IV.2. Formule de <i>Bazin</i> .....	11
IV.3. Formule de <i>Powell</i> .....	12
V. Expression de <i>Manning – Strickler</i> .....	12
VI. Équation théorique de l'écoulement uniforme .....	13
VI.1. Distribution de la vitesse dans un écoulement turbulent .....	13
VI.2. Équation de <i>Keulegan</i> .....	16
VII. Interprétation théorique du coefficient de rugosité de <i>Manning</i> .....	18
VIII. Méthode d'évaluation du coefficient <i>n</i> de <i>Manning</i> .....	18
IX. Relation de <i>Darcy – Weisbach</i> .....	19
IX.1. Evaluation du coefficient de frottement à partir de la formule de <i>Colebrook – White</i> .....	20
IX.2. Evaluation du coefficient de frottement à partir de la formule de <i>Achour</i> .....	21
IX.3. Corrélation entre le coefficient <i>C</i> de <i>Chézy</i> et <i>f</i> de <i>Darcy – Weisbach</i> .....	22
IX.4. Corrélation entre la relation de <i>Darcy – Weisbach</i> et celle de <i>Manning – Strickler</i> .....	23
X. Equation générale du débit de <i>Achour et Bedjaoui (2006)</i> .....	23
XI. Notions sur la méthode MMR .....	23
XII. Conclusion .....	24

## Chapitre II

### PRESENTATION DE QUELQUES TRAVAUX RECENTS

I. Introduction .....	25
II. Approche de <i>Amara et Achour (2023)</i> .....	25
III. Approche de <i>Lakehal et Achour (2017)</i> .....	27
IV. Approche de <i>Vatankhah (2015)</i> .....	31
IV.1. Caractéristiques géométriques de la section semi-elliptique .....	31

IV.2. Solution directe pour la profondeur critique .....	33
IV.3. Solution directe pour la profondeur normale .....	34
V. Approche de <i>Easa et Vatankhah</i> (2014) .....	36
V.1. Description géométrique du canal .....	36
V.2. Aire de la section mouillée .....	37
V.3. Périmètre mouillé .....	37
V.4. Largeur de la surface libre de l'écoulement .....	38
VI. Approche de <i>Vatankhah</i> (2014) .....	38
VI.1. Description géométrique de la forme du canal .....	38
VI.2. Caractéristiques géométriques du profil liquide du canal .....	40
VI.2.1. Largeur de la surface libre de l'écoulement .....	40
VI.2.2. Aire de la section mouillée .....	40
VI.2.3. Périmètre mouillé .....	40
VI.3. Expression de la profondeur critique .....	41
VI.4. Détermination de la profondeur normale .....	42
VII. Conclusion .....	44
Conclusion de la première partie .....	46

## **PARTIE II**

### **CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'ECOULEMENT UNIFORME**

Introduction à la deuxième partie .....	47
---	----

### **Chapitre I**

#### **ECOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL A PAROIS CIRCULAIRES ET A FOND HORIZONTAL**

I. Introduction .....	48
II. Dimensionnement d'un canal à parois circulaires avec fond horizontal .....	48

II.1. Equations de base .....	49
II.2. Modèle rugueux de référence .....	50
II.3. Facteur de correction des dimensions linéaires .....	54
II.4. Etapes de calcul des dimensions linéaires du canal .....	54
II.5. Exemple d'application 2.1 .....	55
III. Approche théorique au calcul de la profondeur normale .....	57
III.1. Modèle rugueux de référence .....	57
III.2. Etapes de calcul de la profondeur normale .....	62
III.3. Exemple d'application 2.2 .....	62
IV. Ecoulement critique .....	66
IV.1. Dimensionnement .....	66
IV.2. Etapes de calcul des dimensions linéaires du canal .....	68
IV.3. Exemple d'application 2.3 .....	68
V. Equation du débit volume .....	70
V.1. Modèle rugueux et expression du débit .....	70
V.2. Etapes de calcul du débit volume .....	73
V.3. Exemple d'application 2.4 .....	73
VI. Equation de la vitesse moyenne de l'écoulement .....	74
VII. Equation du nombre de <i>Reynolds</i> .....	76
VIII. Equation du coefficient de frottement .....	77
IX. Conclusion .....	78

## Chapitre II

### ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL A PAROIS SEMI-ELLIPTIQUES ET A FOND HORIZONTAL

I. Introduction .....	82
II. Dimensionnement d'un canal à parois semi-elliptiques avec fond horizontal .....	82
II.1. Equations de base .....	84
II.2. Modèle rugueux de référence .....	84
II.3. Facteur de correction des dimensions linéaires .....	87
II.4. Etapes de calcul des dimensions linéaires du canal .....	87

II.5. Exemple d'application 2.5 .....	88
III. Approche théorique au calcul de la profondeur normale .....	90
III.1. Modèle rugueux de référence .....	91
III.2. Etapes de calcul de la profondeur normale .....	95
III.3. Exemple d'application 2.6 .....	96
IV. Ecoulement critique .....	99
IV.1. Dimensionnement .....	99
IV.2. Etapes de calcul des dimensions linéaires du canal .....	101
IV.3. Exemple d'application 2.7 .....	102
V. Equation du débit volume .....	103
V.1. Modèle rugueux et expression du débit .....	103
V.2. Etapes de calcul du débit volume .....	105
V.3. Exemple d'application 2.8 .....	106
VI. Equation de la vitesse moyenne de l'écoulement .....	107
VII. Equation du nombre de <i>Reynolds</i> .....	108
VIII. Equation du coefficient de frottement .....	109
IX. Conclusion .....	110

### Chapitre III

#### **ECOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL A PAROIS ELLIPTIQUES ET A FOND HORIZONTAL**

I. Introduction .....	112
II. Dimensionnement d'un canal à parois elliptiques avec fond horizontal .....	112
II.1. Equations de base .....	114
II.2. Modèle rugueux de référence .....	114
II.3. Facteur de correction des dimensions linéaires .....	118
II.4. Etapes de calcul des dimensions linéaires du canal .....	118
II.5. Exemple d'application 2.9 .....	119
III. Approche théorique au calcul de la profondeur normale .....	122
III.1. Modèle rugueux de référence .....	122
III.2. Etapes de calcul de la profondeur normale .....	126

III.3. Exemple d'application 2.10 .....	127
IV. Conclusion .....	132

### **Chapitre IV**

#### **ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL A PAROIS SOUS FORME DE LOI PUISSANCE ET A FOND HORIZONTAL**

I. Introduction .....	133
II. Dimensionnement d'un canal à parois en loi-puissance avec fond horizontal .....	134
II.1. Equations de base .....	135
II.2. Modèle rugueux de référence .....	135
II.3. Facteur de correction des dimensions linéaires .....	139
II.4. Etapes de calcul des dimensions linéaires du canal .....	140
II.5. Exemple d'application 2.11 .....	141
III. Approche théorique au calcul de la profondeur normale .....	143
III.1. Modèle rugueux de référence .....	143
III.2. Etapes de calcul de la profondeur normale .....	148
III.3. Exemple d'application 2.12 .....	150
IV. Conclusion .....	154
 Conclusion de la deuxième partie .....	 156
 CONCLUSION GENERALE .....	 157
PRINCIPALES NOTATIONS .....	160
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	172

# **LISTE DES FIGURES**

# LISTE DES FIGURES

## PARTIE I

### Chapitre I

Figure 1.1 :	Ecoulement à surface libre : (a) Canal ouvert et (b) Conduite fermée à surface libre <i>Chaudhry</i> (2008) .....	3
Figure 1.2 :	Schéma de définition des éléments d'une section de l'écoulement ( <i>Akan</i> , 2006) .....	4
Figure 1.3 :	Divers types d'écoulements en canal ouvert : (a) Écoulement uniforme, (b) Écoulement graduellement varié, (c) Écoulement rapidement varié, (d) Déversoir latéral : Écoulement spatialement varié ( <i>Subramanya</i> , 2009) .....	6
Figure 1.4 :	Classification des écoulements dans les canaux ouverts ( <i>Subramanya</i> , 2009) .....	7
Figure 1.5 :	Formation de l'écoulement uniforme dans un long canal ( <i>Chow</i> , 1959) ..	9
Figure 1.6 :	Schéma de définition ayant servi de base à l'élaboration de la formule de <i>Chézy</i> ( <i>Chow</i> , 1959) .....	11
Figure 1.7 :	Répartition de la vitesse dans les canaux ouverts : (a) Canal naturel (b) Canal rectangulaire et (c) Profil de vitesse typique ( <i>Subramanya</i> , 2009)	14
Figure 1.8 :	Schéma de définition utilisé pour établir l'équation de <i>Keulegan</i> ( <i>Chow</i> , 1959) .....	16
Figure 1.9 :	Diagramme de <i>Moody</i> (1944) .....	21

### Chapitre II

Figure 1.10 :	Schéma de définition ( <i>Amara et Achour</i> , 2023) .....	26
Figure 1.11 :	Représentation schématique de la profondeur normale pour une section trapézoïdale. a) Canal étudié, b) Modèle rugueux ( <i>Lakehal et Achour</i> , 2017) .....	28

Figure 1.12 :	Canal préfabriqué semi-elliptique surélevé avec des supports ( <i>Vatankhah, 2015</i> ) .....	31
Figure 1.13 :	Forme générale de la section semi-elliptique ( <i>Vatankhah, 2015</i> ) .....	32
Figure 1.14 :	Section semi-elliptique pour différentes valeurs de $k$ ( <i>Vatankhah, 2015</i> )	32
Figure 1.15 :	Variation de $\eta_c$ en fonction du débit relatif $\varepsilon_c$ ( <i>Vatankhah, 2015</i> ) .....	34
Figure 1.16 :	Variation de $\eta_n$ en fonction de $\varepsilon_n$ pour différentes valeurs de $k$ ( <i>Vatankhah, 2015</i> ) .....	35
Figure 1.17 :	Géométrie du canal à parois elliptiques : (a) Parois en arc d'ellipse, $Z_m > 0$ , (b) Parois en un quart d'ellipse, $Z_m = 0$ ( <i>Easa et Vatankhah,</i> <i>2014</i> ) .....	36
Figure 1.18 :	Canal à parois en forme de loi-puissance pour différentes valeurs de l'exposant $m$ selon la relation (1.117) ( <i>Vatankhah, 2014</i> ) .....	39
Figure 1.19 :	Géométrie de la section de forme loi-puissance générale ( <i>Vatankhah,</i> <i>2014</i> ) .....	39
Figure 1.20 :	Variation de la profondeur normale adimensionnelle $\delta$ en fonction du débit adimensionnel $\varepsilon$ pour différentes valeurs de $m$ ( <i>Vatankhah, 2014</i> )	43

## **PARTIE II**

### **Chapitre I**

Figure 2.1 :	Schéma de définition de l'état de l'écoulement normal dans un canal à parois circulaires et à fond horizontal .....	49
Figure 2.2 :	Schéma de définition du modèle rugueux de référence (Ecoulement normal) .....	50
Figure 2.3 :	Ecart relatifs $\Delta \bar{\xi} / \bar{\xi}$ pour différentes valeurs de $\beta$ (Pour les intervalles de $Q^*$ , voir tableau 2.2) .....	61
Figure 2.4 :	Récapitulation de la méthode de calcul de la profondeur normale .....	62
Figure 2.5 :	Schéma de définition de l'état de l'écoulement critique dans un canal à parois circulaires et à fond horizontal .....	66

## **Chapitre II**

Figure 2.6 :	Canal à parois semi-elliptiques avec fond horizontal .....	83
Figure 2.7 :	Schéma de définition du modèle rugueux de référence (Ecoulement normal) .....	84
Figure 2.8 :	Ecart relatifs $\Delta\bar{\xi}/\bar{\xi}$ .....	94
Figure 2.9 :	Récapitulation de la méthode de calcul de la profondeur normale pour : $\zeta = 2,5$ et $\beta = 1$ .....	95
Figure 2.10 :	Schéma de définition de l'état de l'écoulement critique dans un canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal .....	100

## **Chapitre III**

Figure 2.11 :	Canal à parois elliptiques avec fond horizontal .....	113
Figure 2.12 :	Schéma de définition du modèle rugueux de référence (Ecoulement normal) .....	114
Figure 2.13 :	Ecart relatifs $\Delta\bar{\xi}/\bar{\xi}$ .....	126
Figure 2.14 :	Récapitulation de la méthode de calcul de la profondeur normale pour : $\zeta = 1,5$ et $\beta = 1$ .....	127

## **Chapitre IV**

Figure 2.15 :	Canal à parois en loi-puissance avec fond horizontal .....	134
Figure 2.16 :	Schéma de définition du modèle rugueux de référence (Ecoulement normal) .....	136
Figure 2.17 :	Ecart relatifs $\Delta\bar{\xi}/\bar{\xi}$ .....	148
Figure 2.18 :	Récapitulation de la méthode de calcul de la profondeur normale pour : $\zeta = 1$ , $\beta = 2$ et $m = 1,25$ .....	150

# **LISTE DES TABLEAUX**

# LISTE DES TABLEAUX

## PARTIE I

### Chapitre II

Tableau 1.1 : Valeurs des paramètres d'ajustement : $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$ et $\zeta_6$ ( <i>Lakehal et Achour, 2017</i> ) .....	29
Tableau 1.2 : Solutions exactes de la relation (1.123) pour quelques valeurs de $m$ ( <i>Vatankhah, 2014</i> ) .....	41

## PARTIE II

### Chapitre I

Tableau 2.1 : Valeurs des paramètres d'ajustement de la relation (2.38) .....	60
Tableau 2.2 : Limites d'application de la relation (2.38) .....	60

### Chapitre II

Tableau 2.3 : Valeurs des paramètres d'ajustement de la relation (2.119) pour $\zeta = 2,5$ et $\beta = 1$ .....	94
---	----

### Chapitre III

Tableau 2.4 : Valeurs des paramètres d'ajustement de la relation (2.178) pour $\zeta = 1,5$ et $\beta = 1$ .....	125
---	-----

**Chapitre IV**

Tableau 2.5 : Valeurs des paramètres d'ajustement de la relation (2.219) pour $\zeta = 1$ , $\beta = 2$ et $m = 1,25$ .....	147
--	-----

# **INTRODUCTION GENERALE**

## INTRODUCTION GENERALE

Dans la nature, l'eau s'écoule dans un versant naturel dont le relief est irrégulier donnant naissance ainsi à différents types d'écoulements (*Hachemi-Rachedi et al.*, 2021). Ces écoulements se classent en deux grandes catégories : les écoulements non permanents dont les caractéristiques sont variables dans le temps, et les écoulements permanents (*French*, 1985). Ces derniers selon leurs évolutions prennent divers aspects ; variés ou uniformes (*Hachemi-Rachedi et al.*, 2021). En pratique, l'écoulement uniforme, dont les caractéristiques géométriques et hydrauliques sont constantes dans le temps et dans l'espace (*Chow*, 1959 ; *French*, 1985), est le type le plus étudié (*Hachemi-Rachedi et al.*, 2021). En effet, l'étude de l'écoulement uniforme est fondamentale dans le calcul des écoulements variés (*French*, 1985 ; *Vatankhah*, 2015). Ce type d'écoulement est rencontré, également, dans les conduites fermées en charge et à pleine section (*Hachemi-Rachedi et al.*, 2021). Il peut être, en outre, en régime fluvial, critique ou torrentiel (*Hachemi-Rachedi et al.*, 2021). Le régime critique constitue, par conséquent, un cas particulier de l'écoulement uniforme où les forces d'inertie et de gravité sont en équilibre (*Hachemi-Rachedi et al.*, 2021).

Par ailleurs, le profil géométrique transversal d'un canal peut se présenter soit sous une forme simple prismatique uniforme sur toute sa longueur, avec une pente de fond constante, soit sous une forme composée plus complexe (*Mansri et al.*, 2023). De nombreux types de sections transversales de canaux ouverts ont été proposés dans la littérature. L'objectif principal de la conception a été de minimiser les coûts de construction ou de maximiser l'efficacité hydraulique (*Chow*, 1959 citée par *Easa et Vatankhah*, 2014). Les canaux prismatiques peuvent adopter diverses formes telles que la forme rectangulaire, triangulaire, trapézoïdale, circulaire, voire parabolique. Pour les faibles débits, les canaux de forme triangulaire avec un fond circulaire sont les plus couramment utilisés pour les canaux linéaires (*Chow*, 1959). Pour le transport de l'eau sur de longues distances, la section trapézoïdale est privilégiée (*Das*, 2007). Les sections rectangulaires sont couramment utilisées dans les zones urbaines comme aqueducs (*Swamee et Chahar*, 2015). De nombreux types de canaux ouverts composés ont été proposés dans la littérature. La conception formelle du canal parabolique a été introduite par *Mironenko et al.* (1984), considérant que les côtés paraboliques de la section

transversale améliorent la stabilité des pentes par rapport aux sections trapézoïdales et que des godets paraboliques peuvent être utilisés pour excaver des canaux de section parabolique (Das, 2007). La section en loi de puissance, dont la forme parabolique en fait partie, permet de modéliser les canaux naturels ainsi que les formes de canaux artificiels. Lorsqu'on étudie le comportement général des rivières sous différents régimes d'écoulement, la simplification de la géométrie réelle revêt une importance cruciale (Valiani et Caleffi, 2009 citée par Vatankhah, 2014). De manière générale, la section en loi de puissance représente bien la géométrie réelle. Les résultats globaux pour un canal en loi de puissance peuvent également être appliqués à ses formes spéciales, telles que les canaux paraboliques et triangulaires. Ces caractéristiques rendent ce type de canal très attractif (Vatankhah, 2014). Par ailleurs, Easa et Vatankhah (2014) ont proposé une nouvelle section elliptique générale, similaire à la section générale en loi de puissance, capable de produire plusieurs sections spéciales. Les formes spéciales incluent une section avec des côtés circulaires et un fond horizontal, une section circulaire, ainsi qu'une section rectangulaire. La forme à parois circulaires avec fond horizontal présente les avantages suivants : *i.* les côtés circulaires améliorent la stabilité des pentes, car la pente augmente progressivement d'une pente horizontale au fond du canal à une profondeur inférieure à la hauteur du canal ; *ii.* les canaux circulaires ne présentent pas de bords vifs où des fissures pourraient se produire en raison de la concentration des contraintes ; et *iii.* il a été constaté que les canaux à côtés circulaires et fond horizontal sont plus économiques, offrant un coût de construction par unité de longueur inférieur à celui des canaux trapézoïdaux (Mansri et al., 2023). En revanche, on peut rencontrer en pratique les canaux semi-elliptiques préfabriqués qui sont largement utilisés comme canaux tertiaires en béton dans les réseaux d'irrigation (Vatankhah, 2015). La section semi-circulaire est un cas particulier d'une section semi-elliptique et possède le périmètre mouillé minimal pour une surface donnée ; par conséquent, elle constitue le meilleur profil liquide du point de vue hydraulique (Vatankhah, 2015). L'utilisation des canaux en béton semi-elliptiques présente les avantages suivants : réduction des coûts de construction et d'acquisition des terrains, diminution des coûts d'exploitation et de maintenance, réduction des pertes d'eau et prévention de l'engorgement des terres agricoles (Vatankhah, 2015). Ces formes de canaux sont choisies en fonction des caractéristiques hydrauliques recherchées et des conditions spécifiques du site, influençant ainsi la vitesse d'écoulement, la capacité de transport des sédiments et d'autres paramètres hydrauliques importants.

D'autres modèles de canaux ont été développés pour aborder des aspects spéciaux tels que la stabilité des pentes, l'efficacité hydraulique, et les conditions d'écoulement normal ou critique (Froehlich, 1994).

Toutefois, en dehors de la forme des canaux, une caractéristique essentielle de l'écoulement uniforme est la profondeur normale qui joue un rôle important dans la classification des écoulements variés et dans la conception des canaux et des conduites (Achour, 2015a). Selon la littérature, les équations de résistance de *Manning* et de *Chézy* ont été largement utilisées pour le calcul de la profondeur normale (Vatankhah, 2015), mais le calcul est souvent itératif, ce qui nécessite une méthode d'essai et d'erreur. Cependant, le problème ne réside pas dans la nature itérative de calcul, mais dans le fait que les coefficients de *Chézy* et de *Manning* sont considérés comme des données du problème, alors qu'ils dépendent de la profondeur normale recherchée (Achour, 2015b). Cela implique que ces coefficients ne peuvent être connus que si la profondeur normale est donnée. Même avec une expertise approfondie, il reste extrêmement difficile, voire impossible, de prédéterminer les valeurs de ces coefficients avant d'établir la profondeur normale (Lakehal et Achour, 2017). En pratique, la rugosité absolue caractérisant l'état des parois internes du canal est un paramètre mesurable. Cette caractéristique est utilisée comme donnée pour le problème, remplaçant ainsi les coefficients de *Chézy* et de *Manning* (Achour, 2015a). D'autres problèmes peuvent être rencontrés dans la pratique comme le problème de dimensionnement d'un canal, le problème de recherche du débit volume et le celui de calcul de la vitesse moyenne de l'écoulement. La recherche du nombre de *Reynolds* ou du coefficient de frottement peut constituer également une catégorie du problème.

Pour tous ces aspects du problème, une méthode efficace a été développée sous le nom de méthode du modèle rugueux de référence (MMR) (Achour, 2007). Cette méthode repose sur un modèle rugueux ayant la même forme que le canal étudié. Une rugosité relative élevée, choisie arbitrairement, est attribuée à ce modèle rugueux afin que le régime d'écoulement soit dans le domaine turbulent rugueux impliquant un coefficient de frottement constant (Achour, 2007). D'une part, cette propriété permet de déduire explicitement les caractéristiques de l'écoulement dans le modèle rugueux car le coefficient de frottement n'est plus une variable inconnue. D'autre part, ces caractéristiques sont corrigées par un facteur qui permet de calculer les paramètres hydrauliques recherchés, tels que la profondeur normale, le débit volume, le nombre de *Reynolds*, le coefficient de frottement, etc. (Achour, 2007). Les relations obtenues par la méthode du modèle rugueux, dite méthode MMR, sont applicables pour l'ensemble du domaine de l'écoulement turbulent, tel que représenté par le diagramme de *Moody* (Achour, 2007).

Dans ce contexte, notre thèse sera consacrée à l'étude de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à parois en courbe et à fond horizontal par la méthode MMR. Le travail sera alors subdivisé en deux grandes parties dont la première partie s'intéressera à la présentation de l'écoulement

uniforme, tandis que la seconde partie est réservée à la l'exposition de notre modeste contribution à l'étude de l'écoulement uniforme.

La première partie nécessitera alors deux chapitres à savoir :

- i.* Notions sur l'écoulement uniforme.
- ii.* Présentation de quelques travaux récents.

Cependant, la seconde partie prévoira quatre chapitres qui seront organisés comme suit :

- i.* Ecoulement uniforme dans un canal à parois circulaires et à fond horizontal.
- ii.* Ecoulement uniforme dans un canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal.
- iii.* Ecoulement uniforme dans un canal à parois elliptiques et à fond horizontal.
- iv.* Ecoulement uniforme dans un canal à parois sous forme de loi puissance et à fond horizontal.

Cette étude mettra en évidence la nature explicite et indépendante de dimensionnement du canal, de calcul de la profondeur normale de l'écoulement, de la détermination du débit volume, de calcul de la vitesse moyenne de l'écoulement, de calcul du nombre de *Reynolds* et de la détermination du coefficient de frottement.

Cependant, l'écoulement critique sera étudié en se basant sur le nombre de *Froude*.

Notons que les paramètres qui seront étudiés dans chaque chapitre de la seconde partie vont être indiqués dans les lieux convenables.

**PREMIERE PARTIE**  
**ECOULEMENT UNIFORME**

**INTRODUCTION**  
**A LA PREMIERE PARTIE**

## INTRODUCTION A LA PREMIERE PARTIE

La première partie de notre thèse sera consacrée à la présentation de l'écoulement uniforme où deux chapitres seront nécessaires. Le premier chapitre intitulé : « Notions sur l'écoulement uniforme », sera réservé essentiellement à :

- i.* Présenter la définition de l'écoulement uniforme.
- ii.* Montrer les règles qui gouvernent l'établissement de l'écoulement uniforme.
- iii.* Présenter une synthèse des principales relations usuelles régissant l'écoulement uniforme.
- iv.* Présenter le principe de la méthode du modèle rugueux de référence dite méthode MMR.

Notons que la méthode MMR sera employée comme méthode de base pour l'élaboration des différents chapitres de la deuxième partie.

Tandis que le deuxième chapitre intitulé : « Présentation de quelques travaux récents », s'intéressera à l'exposition de certains résultats des études récentes qui ont été menées sur l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts cités ci-dessous :

- i.* Canal rectangulaire : Travaux de recherche de *Amara et Achour* (2023).
- ii.* Canal trapézoïdal : Etude de *Lakehal et Achour* (2017).
- iii.* Canal semi-elliptique : Travaux de recherche de *Vatankhah* (2015).
- iv.* Canal à parois elliptiques avec fond horizontal : Approche de *Easa et Vatankhah* (2014).
- v.* Canal en forme de loi-puissance : Etude de *Vatankhah* (2014).

*Premier Chapitre*

**NOTIONS SUR L'ÉCOULEMENT  
UNIFORME**

## Chapitre I

### NOTIONS SUR L'ÉCOULEMENT UNIFORME

#### **I. Introduction**

Ce premier chapitre s'intéresse à présenter les notions de base sur l'écoulement uniforme. En effet, les points suivants seront détaillés : *i.* Ecoulement dans les canaux ouverts, *ii.* Etablissement de l'écoulement uniforme, *iii.* Formules usuelles de l'écoulement uniforme, *iv.* Equation théorique de l'écoulement uniforme, *v.* Interprétation théorique et méthode de détermination du coefficient de rugosité de *Manning*, *vi.* Equation générale du débit volume et *vii.* Présentation du principe de la méthode MMR.

#### **II. Ecoulement dans les canaux ouverts**

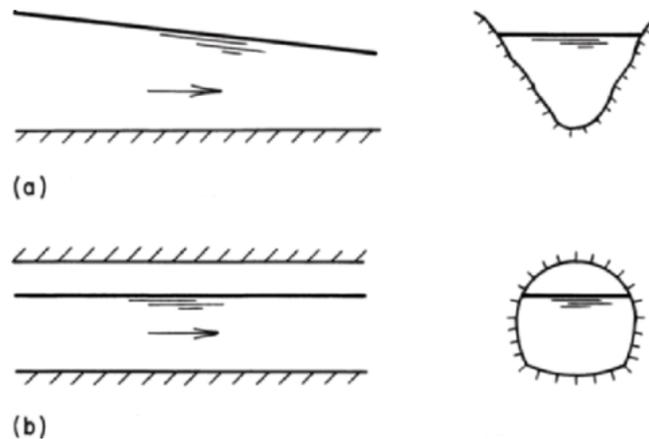
Un canal ouvert est un conduit dans lequel un liquide s'écoule à une surface libre (Figure 1.1). La surface libre constitue en réalité une interface entre le liquide en mouvement et le milieu fluide qui le surmonte, et elle aura une pression constante. Dans les applications en hydraulique, l'eau est le liquide le plus courant, avec l'air à la pression atmosphérique comme fluide de recouvrement. La principale force motrice pour l'écoulement dans les canaux ouverts est la gravité (*Subramanya, 2009*)

En pratique d'ingénierie, les activités visant à l'exploitation des ressources hydriques impliquent inévitablement l'utilisation de canaux ouverts de diverses dimensions. Les écoulements dans les rivières, les cours d'eau et les ruisseaux naturels ; les canaux artificiels, c'est-à-dire créés par l'homme, pour transporter l'eau d'une source vers un lieu de besoin, comme pour l'irrigation, l'approvisionnement en eau et la production d'hydroélectricité ; les égouts destinés à évacuer les eaux usées domestiques ou industrielles ; et les voies navigables, sont autant d'exemples de canaux ouverts jouant des rôles variés (*Subramanya, 2009*). L'écoulement à surface libre, peut également se produire dans des conduites fermées à condition qu'elles soient partiellement remplies (Figure 1.1.b) (*Akan, 2006*). En outre, l'état physique des canaux ouverts varie beaucoup plus largement que celui des conduites (*Chow, 1959*). Les écoulements en canaux ouverts sont presque toujours turbulents et non affectés par la tension superficielle (*French, 1985*).

##### **II.1. Types des canaux**

Un canal dont la forme et la taille de la section transversale ainsi que la pente du fond sont constantes est qualifié de canal prismatique. Les canaux ouverts sont des structures de transport

naturelles ou artificielles qui possèdent généralement une ouverture en haut, et comprennent les rivières, les ruisseaux et les estuaires (Akan, 2006).



**Figure 1.1** : Écoulement à surface libre : (a) Canal ouvert et (b) Conduite fermée à surface libre Chaudhry (2008).

La plupart des canaux artificiels sont des canaux prismatiques sur de longues sections. Les formes les plus couramment utilisées dans les canaux artificiels sont le rectangle, le trapèze, le triangle et le cercle. En revanche, tous les canaux naturels présentent généralement des sections transversales variables et sont, de ce fait, non prismatiques (Subramanya, 2009). En outre, en se basant sur la nature des parois (fond et berges), les canaux ouverts peuvent être classés en deux grandes catégories : (i) les canaux rigides et (ii) les canaux à fond mobile (Subramanya, 2009). Les canaux rigides sont ceux dont les parois ne sont pas déformables, c'est-à-dire que la forme, le plan et les magnitudes de rugosité ne dépendent pas des paramètres d'écoulement. Des exemples typiques incluent les canaux revêtus, les égouts et les canaux non revêtus non érodables. En revanche, nous avons de nombreux canaux non revêtus dans les alluvions, qu'il s'agisse de canaux artificiels ou de rivières naturelles, dont les parois internes subissent des déformations en raison du processus continu d'érosion et de dépôt dû à l'écoulement. Dans ces cas, le fond du canal est mobile et l'écoulement transporte des quantités considérables de sédiments en suspension et en contact avec le lit. Ces canaux sont classés comme des canaux à fond mobile (Subramanya, 2009). Une section de canal est définie comme la section transversale prise perpendiculairement à la direction principale de l'écoulement (Akan, 2006). En se référant à la Figure 1.2, les éléments géométriques d'un canal ouvert sont définis comme suit (Chow, 1959 ; Akan, 2006) :

- Profondeur de l'écoulement,  $y$  : Distance verticale entre le fond du canal et la surface libre (le point le plus éloigné).
- Profondeur de la section d'écoulement,  $d$  : Profondeur de l'écoulement mesurée perpendiculairement au fond du canal. Pour la plupart des canaux artificiels et naturels,  $y \approx d$  (faible pente). Les deux termes sont utilisés de manière interchangeable.

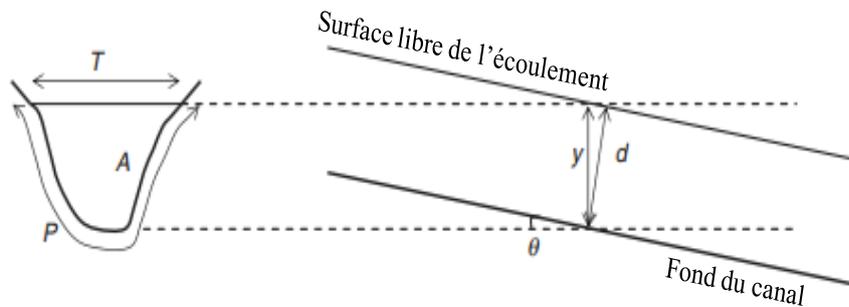
- Largeur superficielle ou largeur du plan d'eau,  $T$  : Largeur de la section du canal à la surface libre de l'écoulement.
- Périmètre mouillé,  $P$  : Longueur de l'interface entre l'eau et la paroi du canal.
- Aire de la section mouillée,  $A$  : Aire de la section transversale de l'écoulement.
- Profondeur hydraulique,  $H_h$  : Aire de la section mouillée divisée par la largeur du plan d'eau, soit :

$$H_h = \frac{A}{T} \quad (1.1)$$

- Rayon hydraulique,  $R_h$  : Aire de la section mouillée divisée par le périmètre mouillé, soit :

$$R_h = \frac{A}{P} \quad (1.2)$$

- Pente du fond ou pente géométrique,  $S_0$  : Pente longitudinale du fond du canal,  $S_0 = \tan \theta \approx \sin \theta$ .



**Figure 1.2** : Schéma de définition des éléments d'une section de l'écoulement (Akan, 2006).

## II.2. Classification des écoulements

### II.2.1. Écoulements permanents et non permanents

Un écoulement permanent se caractérise par le fait que les propriétés de l'écoulement, telles que la profondeur ou le débit à une section, restent constantes dans le temps. En revanche, si ces propriétés varient avec le temps, l'écoulement est considéré comme non permanent (Subramanya, 2009). De même, si la vitesse de l'écoulement à un point donné ne change pas avec le temps, l'écoulement est appelé écoulement permanent. En revanche, si la vitesse à un emplacement donné varie avec le temps, l'écoulement est qualifié de non permanent (Chaudhry, 2008).

Dans les applications pratiques, en raison de la nature turbulente de l'écoulement et de l'interaction de diverses forces, telles que le vent, la tension superficielle, etc., à la surface, il y a toujours des fluctuations des propriétés de l'écoulement avec le temps. Pour tenir compte de ces fluctuations, la définition de l'écoulement permanent est quelque peu généralisée, et la classification est basée sur les caractéristiques globales de l'écoulement. Par exemple, si des ondulations provoquent de petites variations de profondeur dans un canal en raison du vent soufflant sur la surface libre, et si l'on

souhaite étudier la nature du profil de surface de l'eau en raison de l'action d'un obstacle, l'écoulement n'est pas qualifié de non permanent (Subramanya, 2009). Les crues dans les rivières et les vagues rapidement variables dans les canaux sont des exemples d'écoulements non permanents. Les écoulements non permanents sont considérablement plus difficiles à analyser que les écoulements permanents. Heureusement, un grand nombre de problèmes rencontrés dans les canaux ouverts peuvent être considérés comme des situations en régime permanent pour obtenir des résultats significatifs (Subramanya, 2009).

### II.2.2. Écoulements uniformes et non uniformes

Si les propriétés de l'écoulement, par exemple la profondeur de l'écoulement, restent constantes le long de la longueur du canal, l'écoulement est dit uniforme. En conséquence, un écoulement dans lequel les propriétés de l'écoulement varient le long du canal est appelé écoulement non uniforme ou écoulement varié (Subramanya, 2009).

Cette classification est basée sur la variation de la vitesse de l'écoulement dans l'espace à un instant donné. Ainsi, l'accélération convective dans un écoulement uniforme est nulle Chaudhry (2008).

Un canal prismatique transportant un débit constant avec une vitesse constante est un exemple d'écoulement uniforme (Figure. 1.3.a) (Subramanya, 2009).

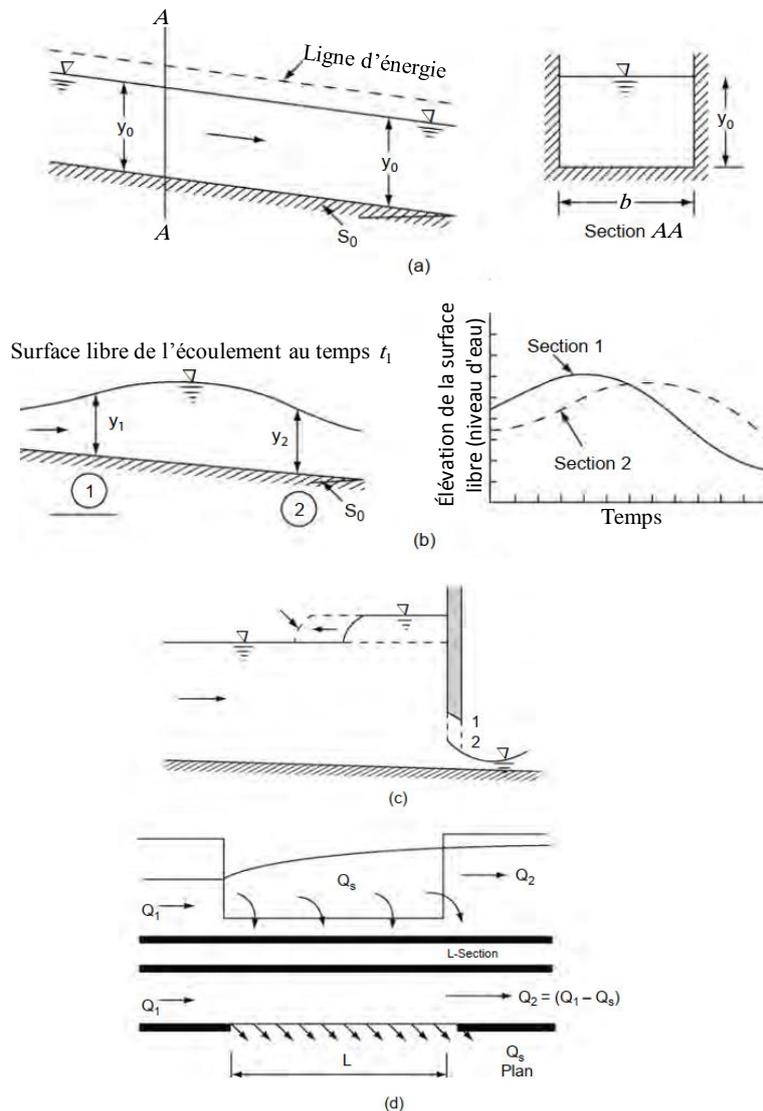
### II.2.3. Écoulements graduellement variés et rapidement variés

Si la variation de la profondeur dans un écoulement varié est graduel, de sorte que la courbure des lignes de courant n'est pas excessive, cet écoulement est appelé écoulement graduellement varié (*GVF*). La résistance due au frottement joue un rôle important dans ces écoulements. L'accumulation d'eau dans un cours d'eau en raison d'un barrage ou l'affaissement de la surface de l'eau dû à une chute brusque dans le lit d'un canal sont des exemples d'écoulements *GVF* permanents. Le passage d'une crue dans une rivière est un exemple d'écoulement *GVF* non permanent (Figure 1.3.b) (Subramanya, 2009). Lorsqu'une variation de l'écoulement est marquée par une grande courbure et des changements de profondeur significatifs sur de courtes distances, ce phénomène est appelé écoulement rapidement varié ou brusquement varié (*RVF*). Dans de tels cas, la résistance due au frottement est relativement négligeable, et il est courant de considérer le *RVF* comme un phénomène local. Un exemple de *RVF* stationnaire est le ressaut hydraulique qui se produit en aval d'un déversoir ou d'une vanne. Quant aux exemples de *RVF* non stationnaire, on peut citer une onde de montée se propageant dans un canal (Figure 1.3.c) (Subramanya, 2009).

### II.2.4. Ecoulement spatialement varié

Dans un écoulement varié stationnaire, le débit est constant dans toutes les sections.

Cependant, si du flux est ajouté ou prélevé du système, l'écoulement résultant est connu sous le nom d'écoulement spatialement varié (SVF) (Figure 1.3.d) (Subramanya, 2009).



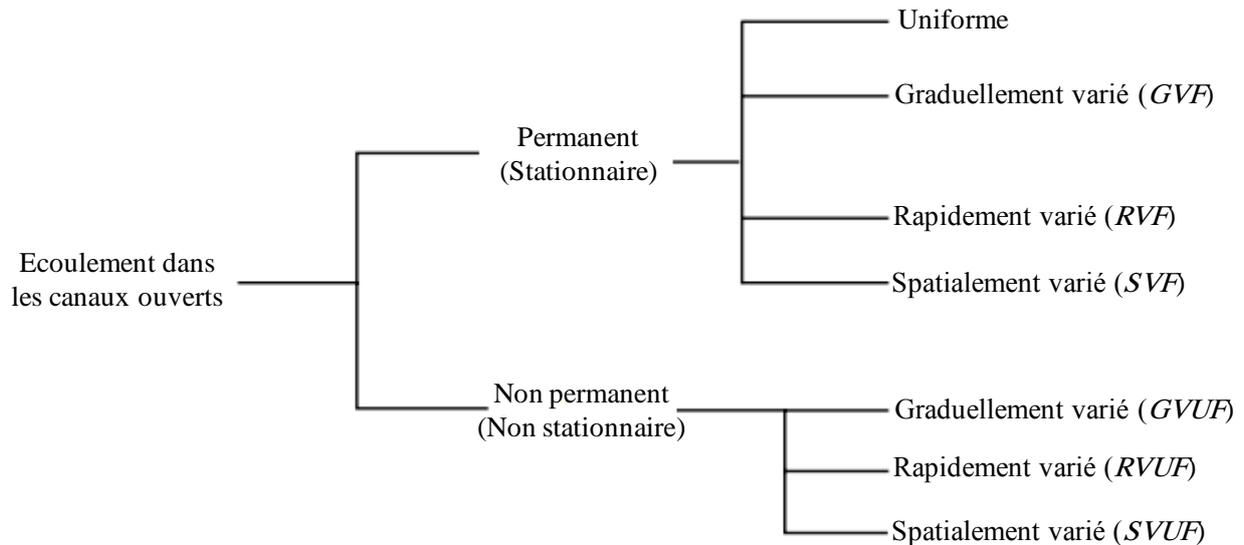
**Figure 1.3 :** Divers types d'écoulements en canal ouvert : (a) Écoulement uniforme, (b) Écoulement graduellement varié, (c) Écoulement rapidement varié, (d) Déversoir latéral : Écoulement spatialement varié (Subramanya, 2009).

Par conséquent, les écoulements dans les canaux ouverts sont classés, pour les besoins de l'identification et de l'analyse, selon les modalités décrites dans la figure 1.4 (Subramanya, 2009).

Il est à noter que l'écoulement non permanent uniforme est rare (Chow, 1959).

## II.2.5. Écoulements Laminaire et Turbulent

L'écoulement est qualifié de laminaire lorsque les particules de liquide semblent se déplacer sur des trajectoires définies et lisses, et que l'écoulement apparaît comme un mouvement de fines couches superposées les unes sur les autres. Dans l'écoulement turbulent, les particules de liquide se déplacent selon des trajectoires irrégulières, non fixes en termes de temps ou d'espace Chaudhry (2008).



**Figure 1.4 :** Classification des écoulements dans les canaux ouverts (Subramanya, 2009).

La magnitude relative des forces de viscosité et des forces d'inertie détermine si l'écoulement est laminaire ou turbulent : l'écoulement est laminaire lorsque les forces de viscosité dominent, et il est turbulent lorsque les forces d'inertie prédominent Chaudhry (2008). Le rapport entre les forces de viscosité et les forces d'inertie est défini par le nombre de Reynolds Chaudhry (2008), soit :

$$R = \frac{VD_h}{\nu} \quad (1.3)$$

Où :

$R$  : Nombre de Reynolds.

$V$  : Vitesse moyenne de l'écoulement.

$\nu$  : Viscosité cinématique du liquide en écoulement.

$D_h$  : diamètre hydraulique équivalent donnée par l'expression suivante :

$$D_h = 4R_h = 4 \frac{A}{P} \quad (1.4)$$

En fonction de la valeur du nombre de Reynolds, on distingue les différents régimes d'écoulement suivants (Graf et Altinakar, 2000). :

- $R < 2000$  : Régime laminaire.
- $2000 < R < 8000$  : Régime transitoire.
- $R > 8000$  : Régime turbulent.

## II.2.6. Écoulement subcritique, supercritique et critique

Un écoulement est dit critique si la vitesse de l'écoulement est égale à celle d'une onde de gravité de faible amplitude. Une onde de gravité peut être produite par une variation de la profondeur de l'écoulement. L'écoulement est appelé écoulement subcritique si la vitesse de l'écoulement est

inférieure à la vitesse critique, et écoulement supercritique si la vitesse de l'écoulement est supérieure à la vitesse critique *Chaudhry* (2008). En pratique, le régime de l'écoulement est défini selon la valeur du nombre de *Froude* qui est égal au rapport entre les forces d'inertie et les forces de gravité. D'une manière générale, le nombre de *Froude* s'écrit (*Chow*, 1959) :

$$F_r^2 = \frac{V^2}{gA} \frac{\partial A}{\partial y} \quad (1.5)$$

Avec :

$F_r$  : Nombre de Froude.

$V$  : Vitesse moyenne de l'écoulement.

$A$  : L'aire de la section mouillée.

$y$  : Profondeur de l'écoulement.

La quantité :  $\partial A / \partial y$ , représente la largeur du plan d'eau  $T$ .

On distingue, alors, les régimes d'écoulement suivant (*Chow*, 1959) :

- $F_r < 1$  : Régime subcritique ou fluvial.
- $F_r = 1$  : Régime critique.
- $F_r > 1$  : Régime supercritique ou torrentiel.

Dans la pratique, ces trois types d'écoulement sont couramment observés.

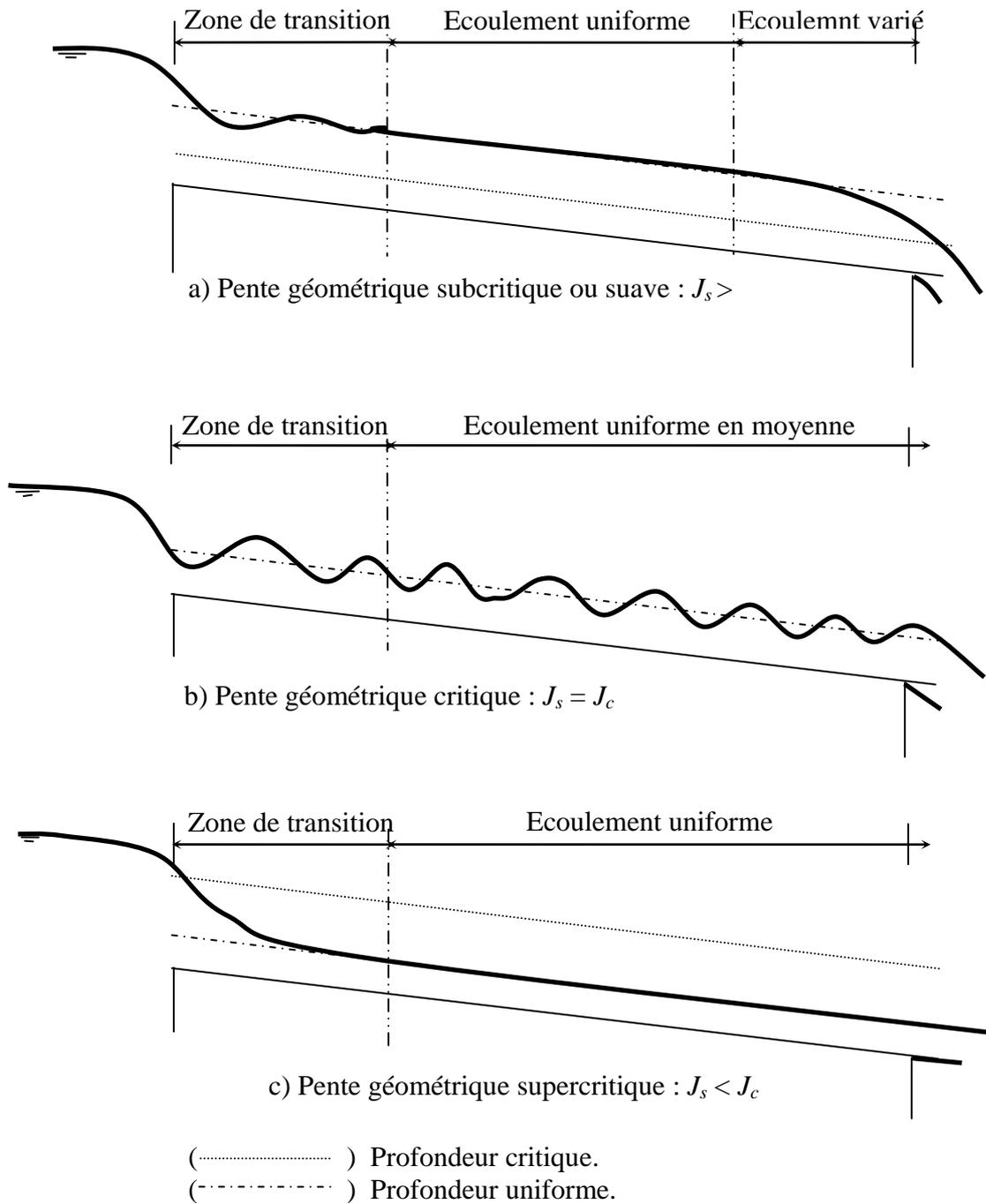
### III. Etablissement de l'écoulement uniforme

Lorsqu'un écoulement se produit dans un canal ouvert, l'eau rencontre une résistance en s'écoulant vers l'aval. Cette résistance est généralement compensée par les composantes des forces de gravité agissant sur le corps d'eau dans le sens du mouvement. Dans les canaux à ciel ouvert, un écoulement uniforme se manifeste lorsque les forces de gravité qui favorisent l'écoulement compensent les forces de résistance opposant. Les forces de résistance varient proportionnellement à la vitesse moyenne  $V$  élevée à la puissance deux (02) (*Chow*, 1959).

Lorsque l'écoulement dans un canal est lent, les forces de gravité accélèrent l'eau. La vitesse et la résistance augmentent de l'amont à l'aval jusqu'à un stade où les forces gravitaires soient en équilibre, établissant un écoulement uniforme. La zone où l'écoulement passe de l'accélééré à l'uniforme est appelée zone de transition. Si le canal est plus court que cette zone, l'écoulement uniforme ne peut pas se former (*Chow*, 1959).

Dans la partie aval de l'écoulement uniforme, les forces dues à la gravité sont dominantes, provoquant la transition de l'écoulement uniforme à un écoulement varié (*Chow*, 1959).

La figure 1.5 illustre l'écoulement à l'amont et dans un canal long avec différentes pentes géométriques  $J_s$ , comparées à la pente critique  $J_c$  (*Chow*, 1959).



**Figure 1.5 :** Formation de l'écoulement uniforme dans un long canal (Chow, 1959).

Lorsque la pente  $J_s$  est modérée (Figure 1.5.a), la zone de transition se distingue par des ondulations. Au centre du canal, l'écoulement reste uniforme, tandis qu'il devient varié à ses extrémités (Chow, 1959).

Lorsque la pente  $J_s$  atteint la pente critique  $J_c$  (Figure 1.5.b), la surface libre devient instable, avec des ondulations possibles. Cependant, la profondeur moyenne reste constante, caractérisant un écoulement uniforme (Chow, 1959).

Lorsque la pente  $J_s$  est supercritique (Figure 1.5.c), la surface libre descend progressivement d'un niveau fluvial à un niveau torrentiel. Après la transition, l'écoulement devient uniforme (Chow, 1959).

Les formules pratiques pour l'écoulement uniforme sont généralement données sous la forme  $V = CR_h^\beta J^\gamma$ , avec :  $R_h$  est le rayon hydraulique et  $J$  représente la pente de la ligne de charge (Chow, 1959). La pente  $J$  égale également à la pente  $J_s$ . Le paramètre  $C$  reflète la résistance de l'écoulement et varie en fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement  $V$ , du rayon hydraulique  $R_h$ , de la rugosité absolue  $\varepsilon$ , de la viscosité cinématique du liquide  $\nu$  et d'autres facteurs (Chow, 1959).

La littérature (Houk, 1918 ; Lindquist, 1933 ; Forchheimer, 1930 ; Vladislavljevitch, 1951), englobe de très nombreuses formules qui ont été développées pour le calcul de l'écoulement uniforme. Mais, aucune d'entre elles n'est considérée comme une « bonne relation » selon Schnackenberg (1951) qui présume qu'une formule de l'écoulement uniforme doit contenir au moins 10 facteurs qui sont  $A$ ,  $V$ ,  $V_{ms}$  représentant la vitesse maximale au niveau de la surface libre, le périmètre mouillé  $P$ ,  $R_h$ , la profondeur maximale  $y$  de l'écoulement, la pente  $S_w$  de la surface libre de l'écoulement, le paramètre  $n$  caractérisant la rugosité du canal, la viscosité dynamique  $\mu$  du liquide ainsi que sa température  $T$  (Chow, 1959).

Diverses méthodes de calcul de la vitesse d'écoulement dans les canaux naturels ont été proposées, comme celle de Toebes (1955) qui suggère que cette vitesse dépend des facteurs suivants :  $A$ ,  $V_{ms}$ ,  $P$ ,  $y$ ,  $S_w$ ,  $n$  et  $T$ . Mais la méthode est applicable seulement dans la région géographique pour laquelle l'analyse de l'effet de ces facteurs a été effectuée (Chow, 1959).

De nombreux exemples pratiques montrent que les formules de Chézy et de Manning (ou Manning – Strickler) sont les plus couramment utilisées pour l'écoulement uniforme. D'autres formules seront également présentées, telles que la relation de Darcy – Weisbach (Darcy, 1854 ; Weisbach, 1845), qui a une application universelle.

#### IV. Formule de Chézy

La relation de Chézy est probablement la première formule développée pour calculer l'écoulement uniforme. La vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement est donnée comme suit (Chow, 1959) :

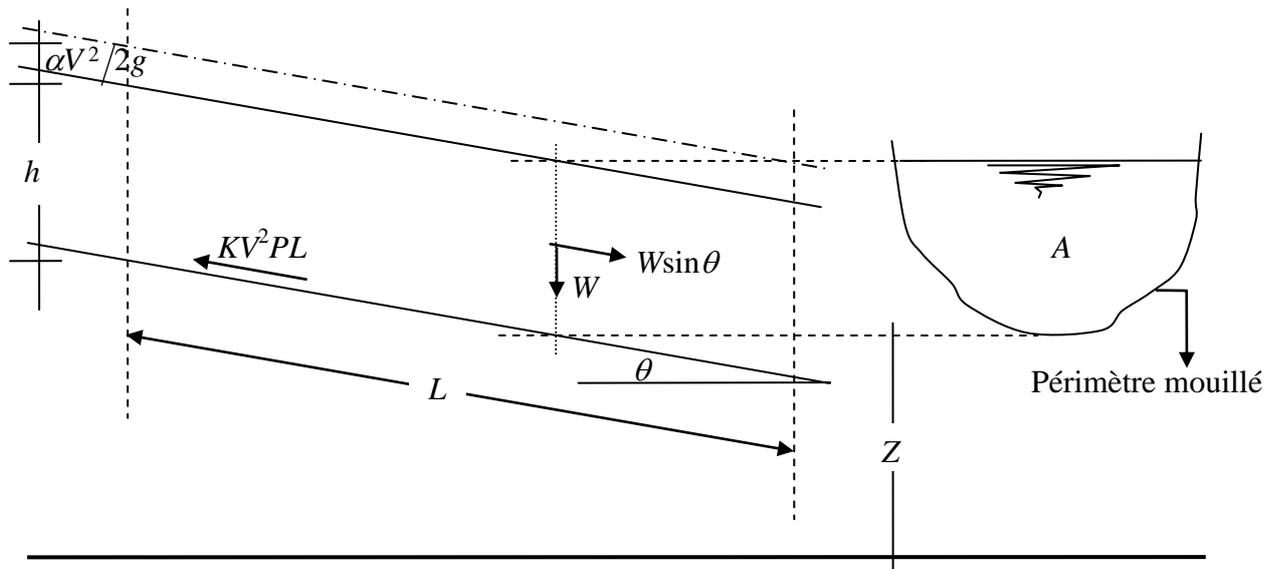
$$V = CR_h^{1/2} J^{1/2} \quad (1.6)$$

Avec :  $R_h$  représente le rayon hydraulique,  $J$  est la pente de la ligne de charge totale ou bien gradient de perte de charge linéaire ( $J$  représente également la pente du canal) et  $C$  représente un facteur qui caractérise la résistance de l'écoulement, couramment appelé coefficient de Chézy.

Chézy suggère que la force de résistance à l'écoulement par unité de surface de frottement du canal (opposée à l'écoulement) est proportionnelle de la vitesse moyenne  $V$  au carré, soit :

$F_r(\text{1m}^2) = KV^2$ , avec :  $K$  est un facteur de proportionnalité. La figure 1.6 montre que la surface de frottement entre le canal et le liquide correspond au produit du périmètre mouillé  $P$  par la longueur du canal  $L$ . La force totale  $F_r$  est ainsi :

$$F_r = KV^2 PL \quad (1.7)$$



**Figure 1.6 :** Schéma de définition ayant servi de base à l'élaboration de la formule de Chézy (Chow, 1959).

La composante tangentielle du poids  $W \sin \theta = \rho g A L \sin \theta$  (Figure 1.6) est équilibrée par la force  $F_r$ , avec :  $\rho$  représente la masse volumique du liquide,  $g$  est l'accélération de la pesanteur et  $A.L$  est le

volume de liquide, soit :  $\rho g A L \sin \theta = KV^2 PL$ , ou bien :  $V^2 = \left( \frac{\rho g}{K} \right) \left( \frac{A}{P} \sin \theta \right)$

Selon la relation (1.2),  $A/P$  est remplacée par  $R_h$ . En outre,  $\rho g/K$  est simplifié par  $C^2$  et  $J = \sin \theta$ , on obtient la relation (1.6) dont on rappelle son expression telle que :

$$V = CR_h^{1/2} J^{1/2} \quad (1.6)$$

La relation (1.6), mène à exprimer le coefficient  $C$  de Chézy en  $[L^{1/2} \cdot T^{-1}]$ .

Le paragraphe suivant montre quelques relations pour le calcul du coefficient  $C$  de Chézy.

#### IV.1. Formule de Ganguillet – Kutter

La relation de Ganguillet – Kutter (1869) a été développée d'après des mesures expérimentales, réalisées sur diverses natures de canaux et rivières naturelles.

$$C = \frac{23 + \frac{0,00155}{J} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{n}{\sqrt{R_h}} \left( 23 + \frac{0,00155}{J} \right)} \quad (1.7)$$

Le paramètre  $n$  de l'expression (1.7) est appelé coefficient de Kutter.

#### IV.2. Formule de Bazin

Bazin (1897) propose la relation suivante pour le calcul du coefficient  $C$  de Chézy, soit :

$$C = \frac{87}{1 + \frac{m}{\sqrt{R_h}}} \quad (1.8)$$

$m$  est appelé coefficient de *Bazin* caractérisant la rugosité qui dépend de la nature du matériau du canal dont la valeur est donnée sous forme de tableau.

### IV.3. Formule de *Powell*

*Powell* (1950) développe une relation implicite de type logarithmique pour la détermination du coefficient  $C$  de *Chézy*, soit :

$$C = -23,2 \log \left( 1,811 \frac{C}{R} + \frac{\varepsilon}{R_h} \right) \quad (1.9)$$

“ log ” représente le logarithme décimal,  $R$  représente le nombre de *Reynolds*,  $\varepsilon$  représente la rugosité absolue caractérisant les parois du canal et  $R_h$  représente le rayon hydraulique.

### V. Expression de *Manning* – *Strickler*

La formule dite de *Manning* – *Strickler* (*Manning*, 1891 ; *Strickler*, 1923) s'écrit :

$$V = k R_h^{2/3} J^{1/2} \quad (1.10)$$

Ou bien :

$$V = (1/n) R_h^{2/3} J^{1/2} \quad (1.11)$$

( $n$  selon *Manning* et  $1/n = k$  selon *Strickler*).

En unité anglaise, la relation (1.11) devient :

$$V = (1,486/n) R_h^{2/3} J^{1/2} \quad (1.12)$$

La valeur numérique correspondant au coefficient de rugosité  $n$  demeure la même pour les deux types de système d'unité. En outre, l'unité de ce coefficient est  $T.L^{-1/3}$  (T : unité de temps et L : unité de longueur) (*Chow*, 1959).

Dans les relations (1.10), (1.11) et (1.12),  $R_h$  représente le rayon hydraulique et  $J$  est la pente géométrique du canal à surface libre.

*Hager* (1987) suggère que la rugosité absolue  $\varepsilon$  est liée au coefficient  $k$  de *Strickler* (1923) à travers la relation suivante :

$$\frac{k \varepsilon^{1/6}}{8,2 \sqrt{g}} = 1 \quad (1.13)$$

La corrélation entre la relation (1.6) de *Chézy* et la formule (1.10) de *Manning* (1891) mène à la relation suivante :

$$C = \left( \frac{1}{n} \right) R_h^{1/6} \quad (1.14)$$

Plusieurs études, notamment l'étude de *Bazin* (1897) sur les canaux fabriqués, ont démontré que l'exposant du rayon hydraulique  $R_h$  ne correspond pas à  $2/3$  comme l'indique *Manning* (1891). En effet, la valeur moyenne de cet exposant se trouve entre 0,6499 et 0,8395, en fonction de la forme de la section du canal et de sa rugosité. Des travaux de recherches comme celles de *Pavlovski* (1940) recommandent d'adopter une valeur de  $3/4$ , mais *Blench* (1939) suggère que le coefficient  $C$  varie en fonction du coefficient de rugosité  $n$  et du rayon hydraulique  $R_h$ , et l'exposant varie lui-même en fonction de  $n$  et de  $R_h$ . Cette relation est exprimée par la formule de *Pavlovski* (1940), qui s'écrit, en unités métriques, comme suit :

$$C = (1/n) R_h^y \quad (1.15)$$

$$\text{Où : } y = 2,5\sqrt{n} - 0,13 - \frac{3}{4}\sqrt{R_h} (\sqrt{n} - 0,10)$$

La relation (1.15) est valide dans l'intervalle du rayon hydraulique : 0,10 et 3 m et pour  $n$  variant entre 0,011 et 0,04  $\text{m}^{-1/3}$ .s. L'exposant  $y$  est donné par les relations approchées suivantes (*Chow*, 1959) :

$$y = \frac{3}{2}\sqrt{n} \quad \text{pour } R_h < 1,0 \text{ m}$$

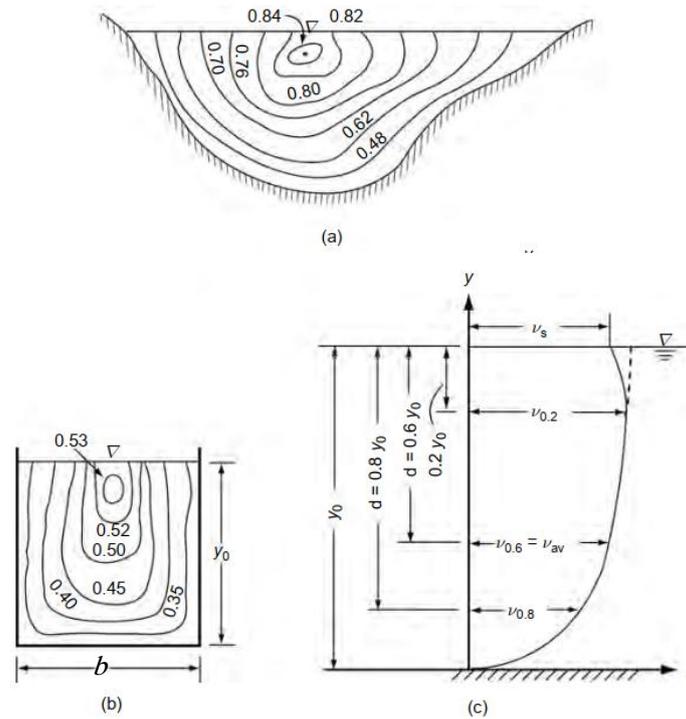
$$y = 1,3\sqrt{n} \quad \text{pour } R_h > 1,0 \text{ m}$$

## VI. Équation théorique de l'écoulement uniforme

### VI.1. Distribution de la vitesse dans un écoulement turbulent

La vitesse de l'écoulement dans une section de canal varie d'un point à l'autre. Cela est dû aux efforts de cisaillement au niveau du fond et des parois du canal ainsi qu'à la présence de la surface libre *Chaudhry* (2008). En outre, la présence d'angles et de limites dans un canal ouvert entraîne des composantes des vecteurs de la vitesse de l'écoulement non seulement dans les directions longitudinale et latérale, mais aussi dans une direction normale à l'écoulement. Dans une analyse macroscopique, on se concentre uniquement sur la composante principale, à savoir la composante longitudinale,  $v_x$ . Les deux autres composantes, étant négligeables, sont ignorées et  $v_x$  est désignée sous le nom de  $v$ . La répartition de  $v$  dans un canal dépend de sa géométrie (*Subramanya*, 2009). Les figures 1.7.a et 1.7.b, montrent les isovels (contours d'égale vitesse) de  $\mathbf{v}$  pour un canal naturel et un canal rectangulaire, respectivement (*Subramanya*, 2009).

L'influence de la géométrie du canal est évidente. La vitesse  $v$  est nulle aux parois solides et augmente progressivement avec la distance à partir de ces parois. La vitesse maximale de la section transversale se situe à une certaine distance sous la surface libre.



**Figure 1.7 :** Répartition de la vitesse dans les canaux ouverts : (a) Canal naturel (b) Canal rectangulaire et (c) Profil de vitesse typique (Subramanya, 2009).

Ce décalage du point de vitesse maximale est dû aux courants secondaires (Subramanya, 2009).

Un profil de vitesse typique à une section perpendiculaire à la direction de l'écoulement est présenté dans la figure 1.7.c. Le profil peut être approximativement décrit par une distribution logarithmique ou une distribution en loi de puissance jusqu'au point de vitesse maximale. Les observations de terrain dans les rivières et les canaux ont montré que la vitesse moyenne  $V_{moy}$  à n'importe quelle verticale, se situe à un niveau de  $0,6y_0$  depuis la surface libre, où  $y_0$  représente la profondeur de l'écoulement. De plus, il est constaté que (Subramanya, 2009) :

$$V = \frac{V_{0,2} + V_{0,8}}{2} \quad (1.6)$$

Dans laquelle  $v_{0,2}$  représente la vitesse à une profondeur de  $0,2y_0$  depuis la surface libre, et  $v_{0,8}$  la vitesse à une profondeur de  $0,8y_0$  depuis la surface libre. La vitesse au niveau de la surface libre  $v_s$  est liée à la vitesse moyenne  $V_{moy}$  de la manière suivante :

$$V_{moy} = kV_s \quad (1.7)$$

Où  $k$  est un coefficient dont la valeur se situe entre 0,8 et 0,95. La valeur appropriée de  $k$  dépend de la section du canal et doit être déterminée par des calibrations sur le terrain. En connaissant  $k$ , on peut estimer la vitesse moyenne dans un canal à ciel ouvert en utilisant des flotteurs et d'autres dispositifs de mesure de la vitesse au niveau de la surface libre (Subramanya, 2009).

Développée dans un écoulement turbulent, la distribution de la vitesse tend à rester quasi uniforme lorsque la couche limite est pleinement développée (Chow, 1959). La contrainte tangentielle ou de

cisaillement au niveau d'un point donné d'un écoulement turbulent, situé au-dessus d'une paroi solide, est décrite par la formule de *Prandtl* (1926) (*Chow*, 1959), soit :

$$\tau = \rho l^2 (dv/dy)^2 \quad (1.18)$$

Où :  $\rho$  représente la masse volumique du liquide en mouvement,  $l$  représente une longueur caractéristique appelée longueur de mélange,  $dv/dy$  représente le gradient de vitesse au niveau de la hauteur «  $y$  » de la paroi solide et normale à celle-ci. La longueur de mélange se définit comme la distance à partir de laquelle une particule de fluide commence à subir une diminution de sa quantité de mouvement.

*Prandtl* (1926) emploie deux approches au voisinage de la paroi solide (*Chow*, 1959), soit :

1. La longueur de mélange est considérée proportionnelle à  $y$ , de ce fait :  $l = K.y$  avec  $K$  est un facteur de proportionnalité entre  $y$  et  $l$  et dont la valeur a été évaluée à 0,40 environ.

2- La contrainte tangentielle est considérée comme constante.

La contrainte tangentielle à la surface, équivalente à la force tractrice unitaire  $\tau_0$ , reste constante, ce qui implique que  $\tau = \tau_0$  (*Chow*, 1959). La relation (1.18) s'écrit, alors :

$$dv = (1/K)(\tau_0/\rho)^{1/2}(dy/y) \quad (1.19)$$

L'intégration de cette dernière relation permet d'écrire :

$$v = 2,5(\tau_0/\rho)^{1/2} \text{Ln}(y/y_0) \quad (1.20)$$

$y_0$  désigne la constante d'intégration et «  $\text{Ln}$  » représente le logarithme népérien. La force tractrice  $\tau_0$  est donnée par la formule :  $\tau_0 = \varpi R_h J$ , avec :  $\varpi = \rho g$  représente le poids spécifique du liquide,  $R_h$  représente le rayon hydraulique et  $J$  est la pente du canal. De ce fait, on peut écrire que :

$$(\tau_0/\rho)^{1/2} = (gR_h J)^{1/2} = V_f$$

Avec  $V_f$  possède une dimension d'une vitesse dite vitesse de frottement. La relation (1.20) s'écrit alors :

$$v = 2,5V_f \text{Ln}(y/y_0) \quad (1.21)$$

La relation (1.21) est appelée la loi universelle de *Prandtl-Von-Karman* exprimant la distribution des vitesses (*Chow*, 1959).

La constante  $y_0$  dépend, pour une surface solide lisse, de la vitesse de frottement  $V_f$  ainsi que de la viscosité cinématique  $\nu$  caractérisant le liquide (*Chow*, 1959), soit :

$$y_0 = m_0 \frac{\nu}{V_f} \quad (1.22)$$

$m_0$  est égale à 1/9 (Constante) pour une surface solide lisse.

Ainsi, la distribution de la vitesse caractérisant un écoulement turbulent, lorsque les surfaces sont lisses, s'écrit, en combinant les relations (1.21) et (1.22) (*Chow*, 1959) :

$$v = 2,5V_f \text{Ln}(9yV_f/\nu) \quad (1.23)$$

En outre, la constante  $y_0$  est liée à la rugosité absolue  $\varepsilon$  pour une surface rugueuse (Chow, 1959), soit :

$$y_0 = m_0 \varepsilon \quad (1.24)$$

La relation (1.21) s'écrit, en tenant compte que la constante  $m_0$  est égale à 1/30 environ (Chow, 1959) :

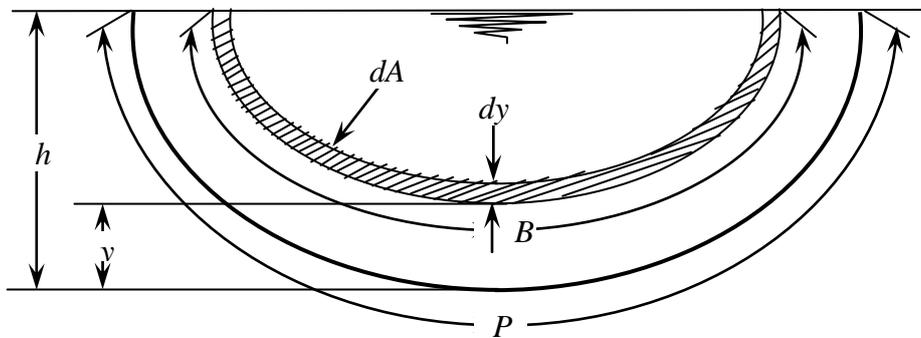
$$v = 2,5V_f \text{Ln}(30y/\varepsilon) \quad (1.25)$$

## VI.2. Équation de Keulegan

Keulegan (1938), en utilisant la loi universelle de Prandtl – Von – Karman, a établi des équations pour déterminer la vitesse moyenne des écoulements turbulents dans les canaux ouverts. En utilisant l'équation de continuité, le débit volume  $Q$  peut être exprimé par la relation suivante :

$$Q = VA = \int_{\delta_0=0}^{y=h} vBdy \quad (1.26)$$

$V$  représente la vitesse moyenne de l'écoulement,  $B$  étant la longueur de la courbe d'égale vitesse (Figure 1.8),  $A$  représente la surface de la section mouillée,  $h$  étant la profondeur de l'écoulement et  $y$  désigne la profondeur verticale comptée depuis de la surface jusqu'à cette courbe d'égale vitesse. La sous couche limite laminaire d'épaisseur  $\delta_0$  est supposée être négligeable ( $\delta_0 = 0$ ) (Chow, 1959).



**Figure 1.8 :** Schéma de définition utilisé pour établir l'équation de Keulegan (Chow, 1959).

Pour un écoulement turbulent dans un canal ouvert, la vitesse maximale est supposée être à la surface, et la longueur  $B$  de la courbe d'égale vitesse est proportionnelle à la distance verticale  $y$ . on peut écrire alors :  $B = P - \gamma y$  (Chow, 1959). Avec :  $P$  désigne le périmètre mouillé correspondant à la surface considérée et le paramètre  $\gamma$  représente une fonction qui dépend de la forme de la section. L'aire de la section mouillée  $A$  s'écrit, ainsi :

$$A = \int_0^h Bdy = Ph - \frac{1}{2} \gamma h^2 \quad (1.27)$$

La combinaison de la relation  $B = P - \gamma y$  et les relations (1.21), (1.26) et (1.27) mène à écrire, après intégration :

$$V = 2,5V_f Ln \left[ \frac{R_h}{y_0} \frac{h}{R_h} \exp \left( -1 - \frac{\gamma h^2}{4A} \right) \right]$$

Ou bien :

$$V = V_f \left\{ 5,75 \log \left[ \frac{h}{m_0 R_h} \exp \left( -1 - \frac{\gamma h^2}{4A} \right) \right] + 5,75 \log \frac{m_0 R_h}{y_0} \right\} \quad (1.28)$$

“log “ est le logarithme décimal.

Le terme :  $5,75 \log \left[ \frac{h}{m_0 R_h} \exp \left( -1 - \frac{\gamma h^2}{4A} \right) \right]$  de la relation (1.28) a été remplacé par la constante  $A_0$  car

il varie peu avec différentes formes de section des canaux (*Chow, 1959*). De ce fait la relation (1.28) devient plus simplement :

$$V = V_f \left[ A_0 + 5,75 \log \left( \frac{m_0 R_h}{y_0} \right) \right] \quad (1.29)$$

La relation (1.29) représente, ainsi, la formule théorique générale exprimant la vitesse moyenne de l'écoulement évoluant dans les canaux ouverts (*Chow, 1959*).

En ce qui concerne les canaux à paroi lisse,  $A_0 \approx 3,25$  (*Chow, 1959*). Soit, en tenant compte des relations (1.22) et (1.29) :

$$V = V_f \left[ 3,25 + 5,75 \log \left( \frac{R_h V_f}{\nu} \right) \right] \quad (1.30)$$

Pour les canaux ouverts munis de paroi rugueuse, *Keulegan (1938)* adopte la valeur :  $A_0 = 6,25$  (*Chow, 1959*). De ce fait, les relations (1.24) et (1.29) mènent à écrire que :

$$V = V_f [6,25 + 5,75 \log(R_h/\varepsilon)] \quad (1.31)$$

En outre, la combinaison des relations (1.6) de *Chézy* et de la vitesse de frottement  $V_f = \sqrt{g R_h J}$ , permet d'écrire :

$$V/V_f = C/\sqrt{g} \quad (1.32)$$

En se basant sur la relation (1.63) indiquée plus bas et exprimant le coefficient  $C$  de *Chézy* en fonction du coefficient de frottement  $f$  et de l'accélération de la pesanteur  $g$ , la relation (1.32) s'écrit :

$$\frac{V}{V_f} = \sqrt{\frac{8}{f}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{f}} \quad (1.33)$$

En se basant sur la relation (1.32) d'une part et d'autre part sur le nombre de *Reynolds* modifié :  $R = R_h V / \nu$ , les relations (1.30) et (1.31) mènent à exprimer les paramètres  $C$  et  $f$ , respectivement pour des canaux à paroi lisse et rugueuse :

$$C / \sqrt{g} = 3,25 + 5,751 \log \left( \frac{R \sqrt{g}}{C} \right) \quad (1.34)$$

Et :

$$C / \sqrt{g} = 6,25 + 5,751 \log \left( \frac{R_h}{\varepsilon} \right) \quad (1.35)$$

Ou bien, respectivement, en considérant la relation (1.33) :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 0,231 + 2,033 \log (R \cdot \sqrt{f}) \quad (1.36)$$

Et :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2,210 + 2,033 \log \left( \frac{R_h}{\varepsilon} \right) \quad (1.37)$$

## VII. Interprétation théorique du coefficient de rugosité de *Manning*

En se référant aux relations (1.15) et (1.35), le coefficient  $n$  de *Manning* s'écrit :

$$n = \varepsilon^{1/6} \phi \left( \frac{R_h}{\varepsilon} \right) \quad (1.38)$$

Où :

$$\phi \left( \frac{R_h}{\varepsilon} \right) = \frac{\left( R_h / \varepsilon \right)^{1/6}}{\sqrt{g} [6,25 + 5,751 \log (R_h / \varepsilon)]} \quad (1.39)$$

L'étude montre que la relation (1.39) peut être remplacée par la valeur approximative 0,0342 car la fonction  $\phi (R_h / \varepsilon)$  varie très peu pour une gamme de valeurs de  $(R_h / \varepsilon)$  très large. Alors la relation (1.38) montre que le coefficient de rugosité de *Manning*  $n$  subit une variation en fonction de la rugosité absolue élevée à la puissance 1/6 (*Chow*, 1959). L'étude comparative effectuée par *Bakhmeteff et Feodoroff* (1943), après avoir uniformisé les formules de *Ganguillet – Kutter* (1869), de *Manning* (1891), de *Bazin* (1897) et de *Prandtl – Von – Karman* (*Prandtl*, 1926) à la forme de la relation (1.38), a conclu que la formule de *Manning* est la plus adaptée (*Chow*, 1959).

## VIII. Méthode d'évaluation du coefficient $n$ de *Manning*

On désigne  $V_{0,2}$  la vitesse aux 2/10 de la profondeur ou bien à la distance 0,8y considérée depuis le fond du canal à parois rugueuses et de grande largeur ; où  $y$  représente la profondeur de l'écoulement (*Chow*, 1959). De ce fait, la relation (1.25) s'écrit :

$$V_{0,2} = 2,5V_f \text{Ln}\left(\frac{24y}{\varepsilon}\right) \quad (1.40)$$

De même,  $V_{0,8}$  s'écrit (Chow, 1959) :

$$V_{0,8} = 2,5V_f \text{Ln}\left(\frac{6y}{\varepsilon}\right) \quad (1.41)$$

La combinaison des deux relations (1.40) et (1.41) mène à écrire que (Chow, 1959) :

$$(1 - X) \text{Ln}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = X \text{Ln}(6) - \text{Ln}(24)$$

ou bien :

$$\text{Ln}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) = \frac{(1,792X - 3,178)}{(1 - X)} \quad (1.42)$$

Avec :  $X = V_{0,2}/V_{0,8}$ .

Remplaçant la relation (1.42) dans la relation (1.31), on obtient pour un canal très large ( $R_h = y$ ) (Chow, 1959) :

$$\frac{V}{V_f} = \frac{1,775(X + 0,95)}{X - 1} \quad (1.43)$$

De même, à partir des relations (1.14) et (1.32), on peut écrire pour :  $R_h = y$  :

$$\frac{V}{V_f} = \frac{y^{1/6}}{n\sqrt{g}} \quad (1.44)$$

Enfin, la combinaison des relations (1.43) et (1.44) mène à l'expression permettant l'évaluation du coefficient de Manning  $n$ , soit, pour un canal large et rugueux :

$$n = \frac{y^{1/6}(X - 1)}{1,775\sqrt{g}(X + 0,95)} \quad (1.45)$$

### IX. Relation de Darcy – Weisbach

Le problème consiste à développer la relation de la perte d'énergie ou bien perte de charge  $\Delta H$  relative à un écoulement permanent de débit volume  $Q$  dans une canalisation prismatique de longueur  $L$ . Les paramètres physiques à considérés sont : la perte de pression désignée par  $\Delta p$ , le diamètre hydraulique  $D_h$ , la longueur du tronçon considéré  $L$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  des parois, la vitesse moyenne caractérisant l'écoulement  $V$ , la masse volumique  $\rho$  du liquide et la viscosité cinématique  $\nu$  du liquide en écoulement.

Il s'agit d'exprimer d'une manière pratique la relation fonctionnelle suivante :

$$\frac{\Delta p}{(\rho V^2 / 2)} = \varphi(L/D_h, VD_h/\nu, \varepsilon/D_h) \quad (1.46)$$

$\Delta p$  étant proportionnel à  $L$  car l'écoulement est le même le long de toutes les sections transversales.

De ce fait, la relation (1.46) s'écrit :

$$\frac{\Delta p}{(\rho V^2/2)} = \frac{L}{D_h} F\left(\frac{VD_h}{\nu}, \frac{\varepsilon}{D_h}\right) \quad (1.47)$$

Posons :

$$f = F\left(\frac{VD_h}{\nu}, \frac{\varepsilon}{D_h}\right) \quad (1.48)$$

$f$  est appelé coefficient de frottement. La relation (1.47) devient alors :

$$\frac{\Delta p}{\rho} = f \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2} \quad (1.49)$$

On sait que :

$$\Delta p = \Delta H \rho g \quad (1.50)$$

La perte de charge  $\Delta H$  s'écrit, en vertu des relations (1.49) et (1.50) :

$$\Delta H = f \frac{L}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.51)$$

Le rapport :  $\Delta H/L$  définit le gradient de la perte de charge linéaire  $J$ , soit :

$$J = \frac{\Delta H}{L} \quad (1.52)$$

De ce fait, la relation de *Darcy – Weisbach* s'obtient en combinant les relations (1.51) dans (1.52), soit :

$$J = \frac{f}{D_h} \frac{V^2}{2g} \quad (1.53)$$

### IX.1. Evaluation du coefficient de frottement à partir de la formule de *Colebrook – White*

Une relation de nature logarithmique permettant le calcul du coefficient de frottement valable pour les conduites et canaux a été proposée (*Colebrook et al.*, 1939), soit :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.54)$$

Dans la relation (1.54) de forme implicite,  $\varepsilon/D_h$  étant la rugosité relative,  $R = VD_h/\nu$  représente le nombre de *Reynolds* ( $\nu$  étant la viscosité cinématique) et « log » représente le logarithme décimal.

La relation de *Colebrook – White* est applicable pour tous les régimes d'écoulement : domaine lisse, domaine turbulent rugueux et domaine de transition.

Lorsque le régime d'écoulement est dans le domaine de transition, la relation (1.54) est appliquée directement.

Pour le domaine turbulent rugueux, le terme  $2,51/R\sqrt{f}$  de la relation (1.54) est négligeable, soit :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D_h}{3,7} \right) \quad (1.55)$$

La relation (1.55), applicable pour l'intervalle :  $0 \leq \varepsilon/D_h \leq 0,05$ , est connue sous le nom de formule de *Nikuradse*.

Lorsque  $\varepsilon/D_h \rightarrow 0$ , le régime de l'écoulement est dans le domaine pratiquement lisse et la relation (1.54) se réduit à :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left( \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.56)$$

La figure 1.9 montre la traduction graphique de la relation (1.54) de *Colebrook – White* (domaine de l'écoulement turbulent).

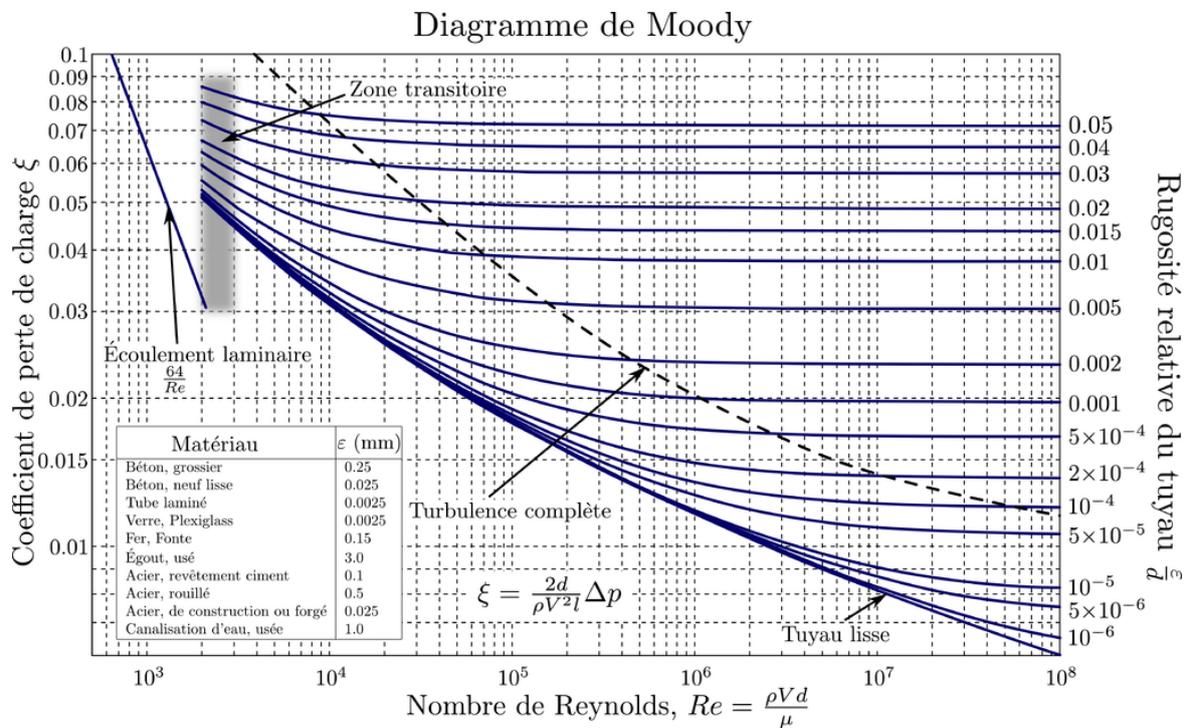


Figure 1.9 : Diagramme de *Moody* (1944).

## IX.2. Evaluation du coefficient de frottement à partir de la formule de *Achour*

A partir des mêmes paramètres que ceux de la relation (1.54) de *Colebrook – White*, le coefficient de frottement  $f$  a pu être évalué explicitement par la formule *Achour et al.* (2002) qui s'écrit :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left[ \frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{4,5}{R} \log \left( \frac{R}{6,97} \right) \right] \quad (1.57)$$

La relation de *Achour et al.* (2002) est utilisée directement lorsque le régime de l'écoulement est dans le domaine de transition. Cependant, lorsque le régime de l'écoulement s'évolue dans le

domaine turbulent rugueux le terme :  $\frac{4,5}{R} \log\left(\frac{R}{6,97}\right)$  est négligeable et l'équation (1.57) mènera par conséquent à la relation suivante :

$$f^{-1/2} = -2 \log\left(\frac{\varepsilon/D_h}{3,7}\right) \quad (1.58)$$

La formule (1.55) de *Nikuradse* est alors reproduite.

Par ailleurs, pour le cas du domaine pratiquement lisse, la rugosité relative  $\varepsilon/D_h$  est négligeable et la relation (1.57) devient :

$$f^{-1/2} = -2 \log\left(\frac{4,5}{R} \log\frac{R}{6,97}\right) \quad (1.59)$$

L'emploi de la relation (1.59) provoque un écart relatif par rapport à la formule (1.56) ne dépasserait guère 2 % et cela pour  $R \geq 10^4$  (*Achour, 2007*). Il est à noter que l'étude récente effectuée par *Germano et al., (2020)* montre que, pour les rugosités relatives :  $0 \leq \varepsilon/D \leq 1,4.10^{-3}$  et pour les nombres de *Reynolds* tels que :  $3000 \leq R \leq 735000$ , l'expression (1.57) de *Achour et al. (2002)* donne des résultats meilleurs que ceux obtenus par la relation (1.54) de *Colebrook – White*.

La relation proposée par *Swamee et Jain (1976)* est destinée également à évaluer  $f$  de façon explicite lorsque le régime de l'écoulement est dans le domaine pratiquement lisse, soit :

$$f = \left[ 2 \log\left(\frac{5,74}{R^{0,9}}\right) \right]^{-2} \quad (1.60)$$

Cependant, l'écart relatif maximal occasionné par application de la formule (1.60) est de 2,8 % par rapport à la relation (1.56) pour l'intervalle :  $5.10^3 < R < 10^8$  (*Achour, 2007*).

### IX.3. Corrélation entre le coefficient $C$ de *Chézy* et $f$ de *Darcy – Weisbach*

Le rayon hydraulique  $R_h$  et le diamètre hydraulique  $D_h$  sont liés par la relation :  $D_h = 4R_h$ . De ce fait, la relation (1.53) s'écrit :

$$J = \frac{f}{4R_h} \frac{V^2}{2g} = \frac{f}{8R_h} \frac{V^2}{g} \quad (1.61)$$

Ou bien :

$$V = \sqrt{\frac{8g}{f}} \sqrt{R_h J} \quad (1.62)$$

Alors, la combinaison des relations (1.6) et (1.62) mène à écrire que :

$$C = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (1.63)$$

#### IX.4. Corrélation entre la relation de *Darcy – Weisbach* et celle de *Manning – Strickler*

La relation (1.10) de *Manning – Strickler* s'écrit, lorsqu'on considère la pente de frottement  $J_f$  :

$$V = kR_h^{2/3} J_f^{1/2} \quad (1.64)$$

Avec  $k$  coefficient de rugosité équivalent à  $1/n$ .  $k$  est appelé également coefficient de *Strickler* ( $m^{1/3}/s$ ) et  $n$  coefficient de *Manning*.

L'équation de *Manning – Strickler* est utilisée jusqu'à maintenant et s'applique lorsque la relation suivante est satisfaite (*Hager*, 1987) :

$$\varepsilon / D_h > 1050/R \quad (1.65)$$

En considérant le nombre de *Reynolds* tel que :  $R = VD_h/\nu$ , la relation (1.65) devient :

$$\varepsilon > 1050\nu/V \quad (1.66)$$

En égalisant les relations (1.64) et (1.62) pour  $J_f = J$ , on obtient :

$$kR_h^{1/6} = \sqrt{\frac{8g}{f}} \quad (1.67)$$

#### X. Equation générale du débit de *Achour et Bedjaoui* (2006)

*Achour et Bedjaoui* (2006) ont exprimé le débit volume  $Q$  en fonction du gradient de la perte de charge linéaire  $J$  ( $J$  est égal à la pente longitudinale dans le cas d'un écoulement à surface libre), de l'aire de la section mouillée  $A$ , du rayon hydraulique  $R_h$ , de la rugosité absolue  $\varepsilon$  et du nombre de *Reynolds*  $R$  par une relation générale, explicite et fortement intéressante, soit :

$$Q = -4\sqrt{2g}A\sqrt{R_h J} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R^*}\right) \quad (1.68)$$

Où :

$$R^* = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gR_h^3 J}}{\nu} \quad (1.69)$$

Avec :

$\nu$  : représente la viscosité cinématique du liquide.

$g$  : est l'accélération de la pesanteur.

#### XI. Notions sur la méthode MMR

La méthode du modèle rugueux de référence, ou méthode MMR, est applicable dans des conditions d'écoulement permanent, uniforme, en charge et à surface libre (*Achour*, 2007 et 2014). Cette méthode est centrée sur un modèle rugueux de référence, qui est une conduite ou un canal de même forme que celle ou celui étudié. Ce modèle est caractérisé par un diamètre hydraulique  $\overline{D}_h$ , une

rugosité absolue  $\bar{\varepsilon}$ , un débit volume  $\bar{Q}$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\bar{\nu}$  et une pente longitudinale  $\bar{i}$  (Achour, 2007 et 2014).

L'écoulement dans le modèle rugueux se caractérise par un nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  et un coefficient de frottement  $\bar{f}$ . La méthode consiste à attribuer au modèle rugueux une rugosité relative élevée, fixée arbitrairement à  $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 3,7 \cdot 10^{-2}$ , afin que l'écoulement soit en régime turbulent rugueux ou soit supposé être dans ce domaine (Achour, 2007 et 2014).

Pour le régime turbulent rugueux, le coefficient de frottement  $\bar{f}$  est évalué à partir de la formule (1.55) de *Nikuradse*, soit, pour  $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = \bar{\varepsilon}/\bar{D}_h$  et  $f = \bar{f}$  :

$$\bar{f} = \left[ -2 \log \left( \frac{\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h}{3,7} \right) \right]^{-2} \quad (1.70)$$

Pour la valeur choisie  $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 3,7 \cdot 10^{-2}$ , la relation (1.70) mène à (Achour, 2007 et 2014) :

$$\bar{f} = \left[ -2 \log \left( \frac{3,7 \times 10^{-2}}{3,7} \right) \right]^{-2} = 4^{-2} = \frac{1}{16} \quad (1.71)$$

Le modèle rugueux de référence est alors défini par un coefficient de frottement constant ( $\bar{f} = 1/16$ ). Cette caractéristique est d'une importance capitale, car elle résout le problème de la dépendance entre la dimension linéaire et le coefficient de frottement dans le modèle rugueux en question, permettant ainsi une détermination explicite de la dimension linéaire. Cette dimension doit ensuite être ajustée en appliquant un facteur de correction afin d'obtenir la dimension linéaire précise du conduit étudié. Cette méthode sera exposée en détail dans la seconde partie de cette thèse.

## XII. Conclusion

Le premier chapitre de cette thèse s'est consacré à la présentation des notions de base sur l'écoulement uniforme qui est considéré comme un écoulement de référence pour l'étude des autres types d'écoulements. Les types des canaux et les types des écoulements ont été d'abord entamés. Par la suite, on a exposé et discuté les conditions d'établissement de l'écoulement uniforme ainsi que les formules usuelles qui lui régissent telles que la formule de *Chézy*, la formule de *Manning – Strickler*, la formule de *Darcy – Weisbach*, etc. On a montré, en outre quelques relations destinées au calcul du coefficient de résistance de l'écoulement au sens de *Chézy*, de *Manning*, de *Strickler* et de *Darcy – Weisbach*. La loi de distribution de la vitesse de l'écoulement a été exposée et discuté en particulier la formule de *Keulegan*. En revanche, la formule générale de *Achour et Bedjaoui* (2006) destinée au calcul du débit volume a été exposée. Enfin, le principe de la méthode MMR, qui va être utilisée dans la deuxième partie, a été présenté.

*Deuxième Chapitre*

**PRESENTATION DE QUELQUES  
TRAVAUX RECENTS**

## Chapitre II

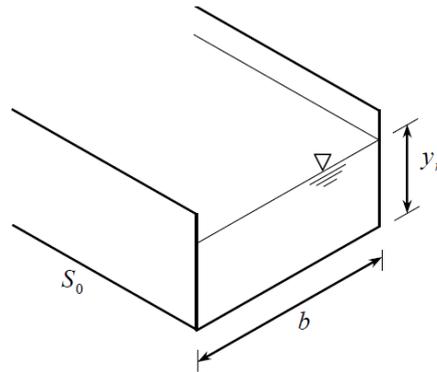
### PRESENTATION DE QUELQUES TRAVAUX RECENTS

#### **I. Introduction**

Le présent chapitre sera réservé à la présentation de quelques travaux de recherche dédiés à l'étude de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts. Certains d'entre eux seront utilisés dans la deuxième partie de cette thèse dont laquelle on présentera notre modeste contribution à l'étude de l'écoulement uniforme dans les canaux à parois en courbe avec fond horizontal. Les études qui seront présentées dans ce chapitre sont : *i.* L'approche de *Amara et Achour (2023)* qui proposent une nouvelle solution analytique exacte ainsi qu'une solution pratique approchée afin de résoudre le problème de calcul de la profondeur normale dans les canaux rectangulaires, *ii.* l'étude de *Lakehal et Achour (2017)* à travers laquelle les auteurs ont utilisé la méthode du modèle rugueux de référence dite méthode MMR afin de résoudre le problème de calcul de la profondeur normale dans les canaux de forme trapézoïdale, *iii.* les travaux de recherche de *Vatankhah (2015)* ayant eu pour objectif de proposer des solutions graphiques et mathématiques approchées pour déterminer directement les profondeurs normale et critique dans des canaux semi-elliptiques en béton, *iv.* l'approche de *Easa et Vatankhah (2014)* à travers laquelle on présentera seulement les caractéristiques géométriques d'un canal ouvert à parois elliptiques avec fond horizontal dont nous aurons besoin dans la deuxième partie de cette thèse et enfin, *v.* l'étude de *Vatankhah (2014)* qui a eu pour objectif l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal à parois latérales en forme de loi puissance.

#### **II. Approche de *Amara et Achour (2023)***

*Amara et Achour (2023)* proposent une nouvelle solution analytique exacte ainsi qu'une solution pratique approchée pour le calcul explicite direct de la profondeur de l'écoulement normal dans les canaux de forme rectangulaire (Figure 1.10).



**Figure 1.10** : Schéma de définition (Amara et Achour, 2023).

En se référant à la formule de *Manning*, les auteurs ont abouti à la relation implicite suivante :

$$\eta = \beta^{3/5} (1 + 2\eta)^{2/5} \quad (1.72)$$

Dans la relation (1.72),  $\eta$  représente le paramètre de forme ou profondeur normale relative et  $\beta$  est le débit adimensionnel dont les expressions sont, respectivement :

$$\eta = \frac{y_n}{b}$$

Et :

$$\beta = \frac{nQ}{b^{8/3} \sqrt{S_0}}$$

Avec :

$Q$  : Débit volume.

$y_n$  : Profondeur normale.

$b$  : Largeur du canal.

$n$  : Coefficient de rugosité de *Manning*.

$S_0$  : Pente géométrique ou longitudinale du canal.

Sur la base de la méthode de Delta-perturbation, une solution exacte de la relation implicite (1.72) a été obtenue sous la forme d'un développement en série, soit :

$$\eta(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n = a_0 + a_1 \delta + a_2 \delta^2 + a_3 \delta^3 + \dots \quad (1.73)$$

Les trois premiers termes de la série sont :

$$a_0 = \beta^{3/5}$$

$$a_1 = \beta^{3/5} \ln(1 + 2\beta^{3/5})$$

$$a_2 = \frac{\beta^{3/5} \ln(1 + 2\beta^{3/5}) [2\beta^{3/5} \ln(1 + 2\beta^{3/5}) + 4\beta^{3/5} + \ln(1 + 2\beta^{3/5})]}{4\beta^{3/5} + 2}$$

Dans la relation (1.73),  $\delta$  est le paramètre de perturbation qui a été fixé dans l'étude à  $\delta = 2/5$  qui représente l'exposant de la partie inconnue dans la relation implicite (1.72).

Il a ensuite été possible d'obtenir une relation analytique générale, dont la solution d'inversion de *Lagrange* est déduite comme un cas particulier de la série de  $\delta$ -perturbations lorsque cette dernière est développée dans la série de *Maclaurin*, soit :

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} \beta^{3n/5} \Gamma(2n/5 + 1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(-3n/5 + 2)} \quad (1.74)$$

Où  $\Gamma(x)$  représente la fonction *Gamma*.

La précision obtenue pour le développement d'ordre 6 est élevée, et l'ordre de la série peut être choisi en fonction du degré de précision requis.

Il convient de souligner que si le rayon de convergence de la série de  $\delta$ -expansion dans la relation (1.73) est infini, la convergence de la série de *Lagrange* dans la relation (1.74) n'est assurée que lorsque  $\beta < 0,967$ , ce qui correspond à  $\eta < 1,807$ .

La solution proposée (Relation 1.73) génère une prédiction très précise dans la plage pratique du paramètre de forme  $\eta \in [0, 5]$ .

Plus de précision peut être atteint en incluant davantage de termes dans l'expansion en série convergente. Pour éviter la nécessité de termes d'ordre supérieur dans l'expansion de la série à des fins pratiques, le modèle de *Hoerl* a été introduit comme terme correctif pour l'erreur de troncature dans la série d'expansion de la  $\delta$ -perturbation. La relation suivante a été alors obtenue :

$$\eta = \beta^{3/5} + \frac{4}{5} \beta^{6/5} + \frac{12}{5^3} \beta^{1,641} \left( \frac{171}{271} \right)^{\beta} \quad (1.75)$$

La solution combinée du modèle qui en résulte génère un écart relatif maximale de 0,029 % seulement sur le calcul du paramètre de forme  $\eta$  par rapport à la solution réelle donnée par la relation implicite (1.72), ce qui constitue une excellente précision dans la large gamme :  $\eta \in [0, 5]$ .

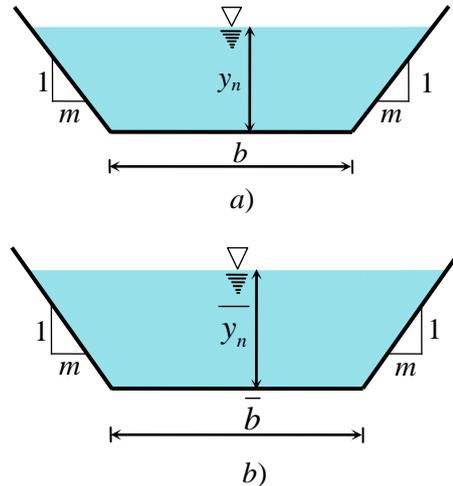
Les auteurs suggèrent qu'il est intéressant de noter qu'en raison de sa polyvalence et des particularités de sa convergence, l'approche directe  $\delta$ -perturbation, ou le modèle combiné, pourraient facilement être appliqués à d'autres profils géométriques.

### III. Approche de *Lakehal et Achour* (2017)

*Lakehal et Achour* (2017) ont utilisé la méthode du modèle rugueux de référence dite méthode MMR afin de résoudre le problème de calcul de la profondeur normale  $y_n$  dans un canal trapézoïdal. Des équations hydrauliques simples ont été, alors, appliquées à un modèle rugueux où les paramètres géométriques et hydrauliques sont connues. Le canal étudié ainsi que le modèle rugueux de référence sont schématisés dans la figure (1.11).

Notons que toutes les propriétés géométriques et hydrauliques du modèle sont distinguées par le symbole " $\bar{\quad}$ ".

La méthode MMR est basée sur des données pratiques, facilement mesurables, et ne considère ni le coefficient de *Chezy*, ni celui désigné par coefficient de rugosité de *Manning*. La méthode emploie des expressions hydrauliques simples, comme la relation de *Darcy – Weisbach*, la formule de *Colebrook – White* et la relation du nombre de *Reynolds* (*Lakehal et Achour, 2017*).



**Figure 1.11** : Représentation schématique de la profondeur normale pour une section trapézoïdale.

a) Canal étudié, b) Modèle rugueux (*Lakehal et Achour, 2017*).

La formule de *Darcy – Weisbach* est appliquée à un modèle référentiel rugueux, dont le coefficient de frottement est :  $\bar{f} = 1/16$  (Relation 1.71, présentée dans le chapitre précédent). La relation qui en résulte a été :

$$\left[ \frac{1 + 2\bar{\eta}\sqrt{1 + m^2}}{128(1 + m\bar{\eta})\bar{\eta}} \right] Q^{*2} = 1 \quad (1.76)$$

Avec :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} \quad (1.77)$$

Et :

$$\bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b} = \bar{y}_n / b \quad (1.78)$$

Les paramètres constituant la relation (1.76) sont :

$Q^*$  : Conductivité relative (connue) exprimée par la relation (1.77).

$\bar{\eta}$  : Paramètre de forme ou profondeur relative du modèle rugueux (inconnu) dépendant, selon la relation (1.78) de la profondeur normale relative au même modèle  $\bar{y}_n$  (inconnue) et de sa largeur  $\bar{b} = b$  (connue).

$m$  : Représente le fruit (connu), il est défini en tant que l'inverse de la pente des parois latérales du canal.

La relation (1.76) avait alors pour objectif de calculer le paramètre de forme caractérisant le modèle rugueux  $\bar{\eta}$ .

Cependant, la forme implicite de la relation (1.76) a poussé les auteurs à proposer une approche théorique permettant le calcul de  $\bar{\eta}$  sans faire recours à un procédé itératif. La méthode peut être récapitulée en montrant les étapes de calcul suivantes :

- i. Après avoir déterminé la conductivité relative  $Q^*$  par application de la relation (1.77), on calcule le paramètre  $Z$  par la relation suivante :

$$Z = \log Q^* \quad (1.79)$$

Sachant que "log" désigne le logarithme décimal.

- ii. On calcule également le paramètre  $M$  en fonction du fruit  $m$ , soit :

$$M = \log m \quad (1.80)$$

- iii. On détermine les paramètres  $a(m)$ ,  $b(m)$ ,  $c(m)$  et  $d(m)$  selon le modèle suivant :

$$\zeta(m) = \zeta_1 M^5 + \zeta_2 M^4 + \zeta_3 M^3 + \zeta_4 M^2 + \zeta_5 M + \zeta_6 \quad (1.81)$$

et les paramètres  $e(m)$  et  $f(m)$  selon le modèle ci-dessous :

$$\zeta(m) = \zeta_1 m^5 + \zeta_2 m^4 + \zeta_3 m^3 + \zeta_4 m^2 + \zeta_5 m + \zeta_6 \quad (1.82)$$

Les paramètres d'ajustement  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$ ,  $\zeta_4$ ,  $\zeta_5$  et  $\zeta_6$  sont regroupés dans le tableau 1.1.

**Tableau 1.1** : Valeurs des paramètres d'ajustement :  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$ ,  $\zeta_4$ ,  $\zeta_5$  et  $\zeta_6$   
(Lakehal et Achour, 2017).

	$\zeta_1$	$\zeta_2$	$\zeta_3$	$\zeta_4$	$\zeta_5$	$\zeta_6$
$\zeta(m)=a(m)$	$\frac{243}{21731}$	$-\frac{32}{18167}$	$-\frac{251}{20946}$	$\frac{89}{11766}$	$-\frac{14}{214477}$	$-\frac{25}{30239}$
$\zeta(m)=b(m)$	$-\frac{247}{4886}$	$\frac{86}{7529}$	$\frac{619}{9861}$	$-\frac{290}{6893}$	$-\frac{131}{23982}$	$\frac{226}{29455}$
$\zeta(m)=c(m)$	$\frac{166}{2487}$	$-\frac{167}{10116}$	$-\frac{124}{1167}$	$\frac{64}{1099}$	$\frac{115}{2768}$	$-\frac{141}{6928}$
$\zeta(m)=d(m)$	$-\frac{61}{6149}$	$-\frac{378}{106445}$	$\frac{183}{4496}$	$\frac{49}{1636}$	$-\frac{745}{10984}$	$-\frac{557}{20987}$
$\zeta(m)=e(m)$	$-\frac{15}{96638}$	$\frac{40}{15613}$	$-\frac{45}{2617}$	$\frac{121}{1956}$	$-\frac{419}{2958}$	$\frac{846}{1151}$
$\zeta(m)=f(m)$	$-\frac{6}{17893}$	$\frac{104}{24163}$	$-\frac{163}{7461}$	$\frac{1425}{24728}$	$-\frac{843}{7865}$	$-\frac{7069}{4355}$

- i. Après la détermination des paramètres  $Z$  et  $M$  à partir des relations (1.79) et (1.80) respectivement ainsi que les paramètres  $a(m)$ ,  $b(m)$ ,  $c(m)$  et  $d(m)$  selon le modèle de la

relation (1.81) et les paramètres  $e(m)$  et  $f(m)$  selon le modèle de la relation (1.82), on calcule le paramètre  $\Lambda$  par application de la relation :

$$\Lambda = a(m)Z^5 + b(m)Z^4 + c(m)Z^3 + d(m)Z^2 + e(m)Z + f(m) \quad (1.83)$$

ii. Ainsi, on déduit le paramètre de forme du modèle rugueux  $\bar{\eta}$ , soit :

$$\bar{\eta} = 3\pi.10^\Lambda \quad (1.84)$$

La méthode ainsi décrite pour le calcul explicite de  $\bar{\eta}$  a été établie pour les larges gammes suivantes :  $0,1 \leq \bar{\eta} \leq 6$  and  $0,1 \leq m \leq 4$  et provoque un écart relatif maximal inférieur à 0,88 % sur la détermination de  $\bar{\eta}$ .

Le calcul du paramètre de forme relatif au modèle  $\bar{\eta}$  mène à la détermination du facteur d'ajustement relatif aux dimensions linéaires  $\psi$  en se basant sur la relation de *Achour et Bedjaoui* (2006) et *Achour* (2014), soit :

$$\psi \cong 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (1.85)$$

Cette dernière relation a été obtenue en se basant sur l'expression de *Colebrook-White*.

Le paramètre  $\bar{R}$  figuré dans la formule (1.85) représente le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement relatif au modèle rugueux, et il s'exprime en fonction de la valeur du débit  $Q$ , du périmètre mouillé du modèle rugueux  $\bar{P}$  (relation 1.89 ci-dessous) et de la viscosité cinématique caractérisant le liquide en état d'écoulement  $\nu$  comme le montre l'expression suivante :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} \quad (1.86)$$

La rugosité relative  $\varepsilon/\bar{D}_h$  caractérisant la relation (1.85) représente le rapport entre la rugosité absolue  $\varepsilon$  relative aux parois internes du canal étudié et le diamètre hydraulique caractérisant le modèle rugueux  $\bar{D}_h$ . Ce dernier paramètre est donné par la relation suivante :

$$\bar{D}_h = 4 \frac{\bar{A}}{\bar{P}} \quad (1.87)$$

Les caractéristiques géométriques  $\bar{A}$  et  $\bar{P}$  illustrées dans la relation (1.87) représentent respectivement la surface de la section mouillée ainsi que le périmètre mouillé caractérisant le modèle rugueux et sont données, pour la forme trapézoïdale, par les relations suivantes :

$$\bar{A} = b^2 \bar{\eta} (1 + m \bar{\eta}) \quad (1.88)$$

$$\bar{P} = b \left( 1 + 2 \bar{\eta} \sqrt{1 + m^2} \right) \quad (1.89)$$

Le calcul du facteur de correction  $\psi$  par la relation (1.85) permet la détermination de la largeur de la base du modèle rugueux  $\bar{b}$  (Figure 1.11.b) par la relation suivante :

$$\bar{b} = \frac{b}{\psi} \quad (1.90)$$

La largeur  $\bar{b}$  mène au calcul de la conductivité relative  $Q^*$  correspondante comme suit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{g i \bar{b}^5}} \quad (1.91)$$

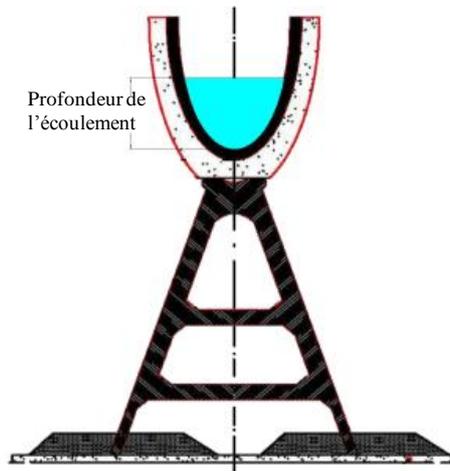
Cette nouvelle conductivité relative  $Q^*$  permet le calcul du paramètre de forme  $\eta$  du canal étudié (Figure 1.11.a) en employant la méthode décrite ci-dessus pour la détermination de  $\bar{\eta}$  en assumant cette fois-ci que  $\eta = \bar{\eta}$ .

Enfin, la profondeur normale  $y_n$  recherchée sera déduite simplement à partir du paramètre de forme  $\eta$  et de largeur de la base du canal étudié (Figure 1.11.a), soit :

$$y_n = b \eta \quad (1.92)$$

#### IV. Approche de Vatankhah (2015)

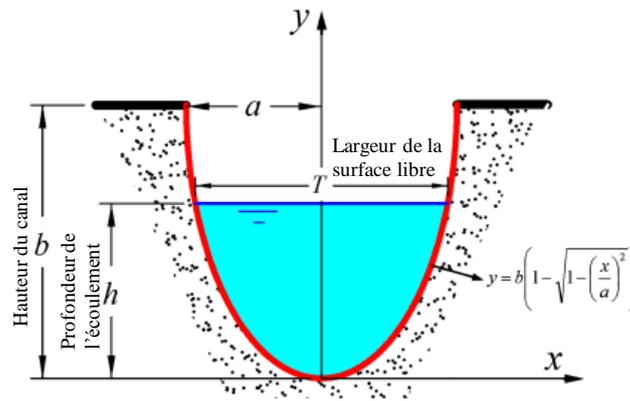
Le travail de recherche de *Vatankhah* (2015) a eu pour objectif de proposer des solutions graphiques et mathématiques approchées pour déterminer directement les profondeurs d'écoulement uniforme et critique dans des canaux semi-elliptiques en béton (Figure 1.12).



**Figure 1.12** : Canal préfabriqué semi-elliptique surélevé avec des supports (*Vatankhah*, 2015).

##### IV.1. Caractéristiques géométriques de la section semi-elliptique

La géométrie d'une section semi-elliptique est détaillée dans la figure 1.13.



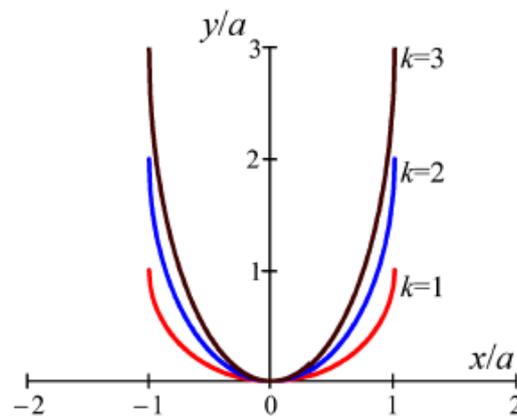
**Figure 1.13 :** Forme générale de la section semi-elliptique (Vatankhah, 2015).

La section semi-elliptique est décrite par l'équation suivante :

$$\frac{y}{a} = k \left[ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2} \right] \quad (1.93)$$

Où :  $x$  et  $y$  sont les axes des abscisses et des ordonnées respectivement (Figure 1.13),  $a$  et  $b$  représentent les demi-axes de l'ellipse (Figure 1.13) et  $k = b/a$  est un paramètre adimensionnel (facteur de forme) pour lequel le canal prend différentes formes (Figure 1.14). Pour  $k = 1$ , la fonction représente un canal semi-circulaire.

Différents types de canalisations semi-elliptiques en béton sont utilisés dans les réseaux d'irrigation. En général, leur facteur de forme  $k$  est compris entre 1 et 2,5 et leur longueur nominale est de 5 m (Vatankhah, 2015).



**Figure 1.14 :** Section semi-elliptique pour différentes valeurs de  $k$  (Vatankhah, 2015).

La largeur de la surface libre (Figure 1.13) a été exprimée par l'auteur comme suit :

$$T = 2a\sqrt{\eta(2-\eta)} \quad (1.94)$$

Le paramètre  $\eta = h/b$  figurant dans la relation (1.94) est défini comme étant la profondeur relative de l'écoulement et elle s'exprime en fonction de la profondeur de l'écoulement  $h$  et la hauteur du canal  $b$ , d'où :  $0 \leq \eta \leq 1$ .

Vatankhah (2015) a formulé également l'aire de la section mouillée  $A$  telle que :

$$A = ab \left[ \sin^{-1} \sqrt{\eta(2-\eta)} - (1-\eta) \sqrt{\eta(2-\eta)} \right] \quad (1.95)$$

En ce qui concerne le périmètre mouillé  $P$ , l'auteur a abouti à une relation sous forme d'une d'intégrale elliptique incomplète de second ordre, soit :

$$P = 2a \int_0^{\sin^{-1} \sqrt{\eta(2-\eta)}} \sqrt{1 + (k^2 - 1) \sin^2(t)} dt \quad (1.96)$$

Avec :  $t$  est une variable adimensionnelle où :  $x = a \sin(t)$

La relation (1.96) a été reformulée en assumant que :  $t = \sin^{-1} [\eta(2-\eta)]^{0,5} s$ , soit :

$$P = 2a \sin^{-1} \sqrt{\eta(2-\eta)} F(\eta, k) \quad (1.97)$$

Avec :

$$F(\eta, k) = \int_0^1 \sqrt{1 + (k^2 - 1) \sin^2} \left[ s \times \sin^{-1} \sqrt{\eta(2-\eta)} \right] ds \quad (1.98)$$

Où :  $s$  est également une variable adimensionnelle.

L'auteur a montré que la relation (1.98) peut être approximée à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés à deux points avec l'utilisation de l'ajustement de courbe (optimisation non linéaire), soit :

$$F_*(\eta, k) = 0,4934 \sqrt{1 + (k^2 - 1) \sin^2} \left[ 0,222 \sin^{-1} \sqrt{\eta(2-\eta)} \right] + 0,506 \sqrt{1 + (k^2 - 1) \sin^2} \left[ 0,782 \sin^{-1} \sqrt{\eta(2-\eta)} \right] \quad (1.99)$$

Cette approximation est valable pour les intervalles suivants :  $0 < \eta \leq 1$  et  $1 \leq k \leq 4$  (cas d'intérêt pratique). D'après l'auteur, la relation approchée (1.99) occasionne un écart relatif maximal inférieur à 0,07 % sur le calcul de la fonction  $F_*(\eta, k)$  (solution presque exacte).

#### IV.2. Solution directe pour la profondeur critique

Vatankhah (2015) a effectué son étude du régime critique en se basant sur l'équation du nombre de Froude  $F_r$ , soit :

$$F_r = \frac{\alpha Q^2 T}{g A^3} = 1 \quad (1.100)$$

où :  $\alpha$  est le facteur de correction de l'énergie,  $Q$  représente le débit volume et  $g$  est l'accélération de la pesanteur.

Vatankhah (2015) a abouti alors à la relation suivante :

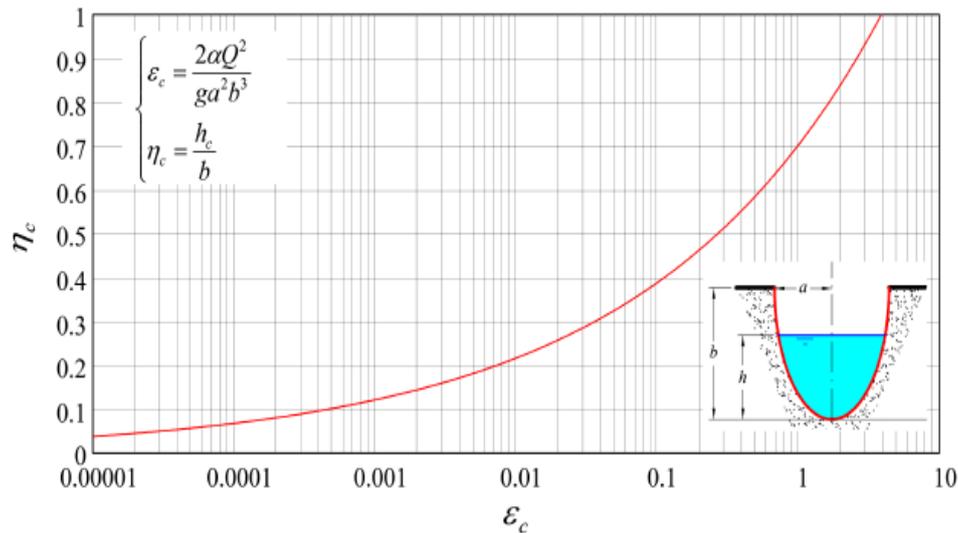
$$\varepsilon_c = \frac{\left[ \sin^{-1} \sqrt{\eta_c(2-\eta_c)} - (1-\eta_c) \sqrt{\eta_c(2-\eta_c)} \right]^3}{\sqrt{\eta_c(2-\eta_c)}} \quad (1.101)$$

Dans cette dernière relation  $\eta_c = h_c/b$  où :  $\eta_c$  représente le paramètre de forme critique ou profondeur critique adimensionnelle,  $h_c$  est la profondeur critique et  $b$  exprime la hauteur du canal,

et  $\varepsilon_c$  représente le débit adimensionnel ou débit relatif de l'écoulement critique dont l'expression s'écrit :

$$\varepsilon_c = \frac{2\alpha Q^2}{ga^2b^3} \quad (1.102)$$

Par ailleurs, *Vatankhah* (2015) a procédé à la représentation graphique de la relation (1.101), implicite en  $\eta_c$  (Figure 1.15). Le diagramme adimensionnel ainsi obtenu facilite le calcul de la profondeur critique sans faire recours à un procédé itératif.



**Figure 1.15 :** Variation de  $\eta_c$  en fonction du débit relatif  $\varepsilon_c$  (*Vatankhah*, 2015).

Cependant, afin de fournir à l'utilisateur une équation directe simple pour déterminer la profondeur critique, l'inversion de la relation (1.101) a été effectuée, à l'aide d'une technique de régression par ajustement de courbe, comme suit :

$$\eta_c = \varepsilon_c^{0,242} \left( 1 + 2\varepsilon_c^{-0,03} - 0,313\varepsilon_c^{0,232} \right)^{-0,358} \quad (1.103)$$

La relation (1.103) peut être utilisée pour déterminer la profondeur d'écoulement critique  $h_c = b\eta_c$  dans l'intervalle  $0 < \eta_c \leq 1$ . Le pourcentage d'erreur maximal de cette relation est inférieur à 0,1 %.

### IV.3. Solution directe pour la profondeur normale

Les travaux de *Vatankhah* (2015) ont été poursuivis en étudiant l'écoulement uniforme dans un canal de forme semi-elliptique. L'auteur a alors employé la relation de *Manning* en considérant que l'écoulement s'évolue dans le domaine turbulent rugueux, et dont l'expression s'exprime en unité métrique comme suit (*Chow*, 1959 ; *Henderson*, 1966 citées par *Vatankhah*, 2015) :

$$Q = \frac{S_0^{1/2}}{n} \frac{A^{5/3}}{P^{2/3}} \quad (1.104)$$

Dans la relation (1.104),  $Q$  représente le débit volume,  $S_0$  est la pente longitudinale du canal,  $n$  s'appelle coefficient de rugosité de *Manning*,  $A$  est l'aire de la section mouillée et  $P$  représente le périmètre mouillé.

En substituant la relation (1.95) de l'aire de la section mouillée  $A$  et la relation (1.97) du périmètre mouillé  $P$  dans la relation (1.104), la relation de *Manning* a pris la forme adimensionnelle suivante :

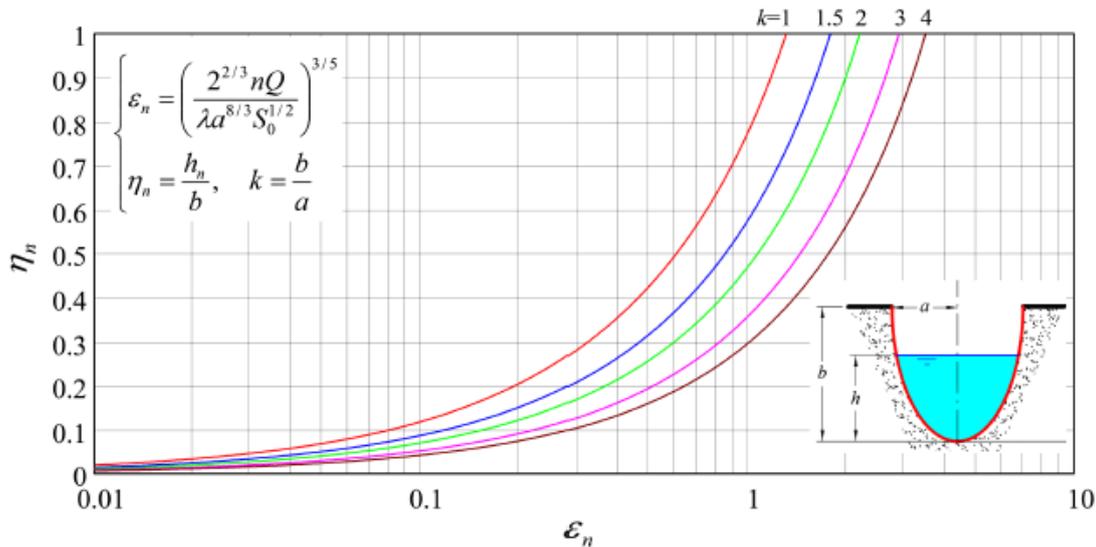
$$\varepsilon_n = \frac{k \left[ \sin^{-1} \sqrt{\eta_n(2-\eta_n)} - (1-\eta_n) \sqrt{\eta_n(2-\eta_n)} \right]}{\left[ \sin^{-1} \sqrt{\eta_n(2-\eta_n)} F(\eta_n, k) \right]^{0,4}} \quad (1.105)$$

Avec  $\varepsilon_n$  est le débit adimensionnelle ou débit relatif, soit :

$$\varepsilon_n = \left( \frac{2^{2/3} n Q}{a^{8/3} S_0^{1/2}} \right)^{3/5} \quad (1.106)$$

Et :  $\eta_n = h_n/b$  est le paramètre de forme ou bien profondeur normale relative, où :  $h_n$  est la profondeur normale de l'écoulement.

Afin d'éviter l'utilisation d'un procédé itératif, l'auteur a proposé un diagramme traduisant la relation (1.105), implicite en  $\eta_n$  et donnant lieu à la détermination graphique de  $\eta_n$  et par conséquent de la profondeur normale  $h_n$ . Ce diagramme est représenté dans la figure (1.16).



**Figure 1.16 :** Variation de  $\eta_n$  en fonction de  $\varepsilon_n$  pour différentes valeurs de  $k$  (Vatankhah, 2015).

Cependant, une relation approchée a été proposée en se basant sur la méthode de régression non linéaire multiple (procédure d'optimisation). Cette relation approchée remplace la relation (1.105), implicite en  $\eta_n$ , soit :

$$\eta_n = \frac{\varepsilon_n^{0,769} \left[ 1 + 0,28(k^2 - 1) \varepsilon_n^{0,71} k^{-0,76} \right]^{0,2}}{k^{0,677} \left( 7,94 \sqrt{k} - 4 \varepsilon_n^{0,72} \right)^{0,185}} \quad (1.107)$$

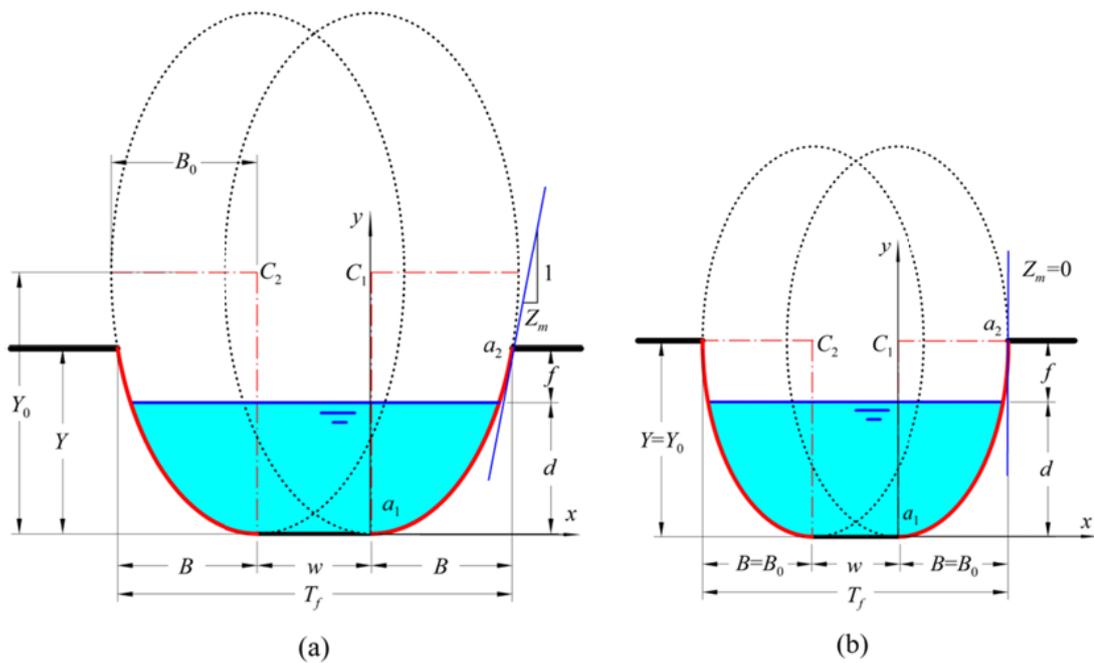
La relation (1.107), applicable pour les intervalles de  $1 \leq k \leq 4$  et  $0 < \eta \leq 1$ , occasionne un écart relatif maximal inférieur à 0,1 % sur le calcul de  $\eta_n$ .

## V. Approche de Easa et Vatankhah (2014)

Cette section est réservée à la présentation d'un canal ouvert à parois elliptiques avec fond horizontal (Figure 1.17). Cette forme est proposée par *Easa et Vatankhah* (2014) dans le but de procéder à une étude économique par rapport à un canal à parois suivant une loi puissance d'une part et par rapport à un canal trapézoïdal d'autre part. Cependant, on s'intéresse uniquement à la présentation des caractéristiques géométriques du canal dont nous aurons besoin au cours de la deuxième partie de notre thèse.

### V.1. Description géométrique du canal

La figure 1.17.a représente un canal à fond horizontal avec parois latérales en arc d'ellipse où la tangente au point  $a_2$  est une ligne inclinée de pente  $1/Z_m$  ( $Z_m > 0$ ). La figure 1.17.b montre le deuxième cas où les parois latérales du canal sont en un quart d'une ellipse dont la tangente au point  $a_2$  est verticale ( $Z_m = 0$ ).



**Figure 1.17** : Géométrie du canal à parois elliptiques : (a) Parois en arc d'ellipse,  $Z_m > 0$ ,  
(b) Parois en un quart d'ellipse,  $Z_m = 0$  (*Easa et Vatankhah*, 2014).

Le tracé des parois des deux canaux sont régies par les relations suivantes :

i. Canal à parois en arc d'ellipse :

$$\frac{x^2}{B_0^2} + \frac{(y - Y_0)^2}{Y_0^2} = 1 \quad (1.108)$$

ii. Canal à parois en un quart d'une ellipse :

$$\frac{x^2}{B^2} + \frac{(y-Y)^2}{Y^2} = 1 \quad (1.109)$$

Où :

$x$  et  $y$  : représentent respectivement les axes des abscisses et des ordonnées du système d'axes à division cartésienne d'origine  $a_1$  (Figure 1.17).

$B_0$  et  $Y_0$  : demi-axes des ellipses de centres  $C_1$  et  $C_2$ .

$B$  : Largeur horizontale de la paroi du canal.

$Y$  : Profondeur totale du canal.

Pour le canal à paroi en un quart d'une ellipse (Figure 1.17.b) on remarque que :  $B = B_0$  et  $Y = Y_0$ .

Le demi-axe  $B_0$  est donné par la relation suivante :

$$B_0 = -Z_m Y_0 \frac{\sqrt{Y_0^2 - (Y - Y_0)^2}}{Y - Y_0} \quad (1.110)$$

Tenant compte de cette dernière relation, la relation (1.108) devient :

$$\frac{x^2}{Z_m^2 Y_0^2 \frac{Y_0^2 - (Y - Y_0)^2}{(Y - Y_0)^2}} + \frac{(y - Y_0)^2}{Y_0^2} = 1 \quad (1.111)$$

La hauteur  $f$  illustrée dans la figure 1.17 ne sera pas considérée dans cette section, car ne nous sommes intéressés que de la partie mouillée dans le canal.

## V.2. Aire de la section mouillée

*Easa et Vatankhah* (2014) ont abouti à la formulation suivante de l'aire de la section mouillée :

$$A = wd + \frac{1}{2} B_0 Y_0 \pi + \frac{B_0}{Y_0} (d - Y_0) \sqrt{d(2Y_0 - d)} - B_0 Y_0 \sin^{-1} \left( \frac{Y_0 - d}{Y_0} \right) \quad (1.112)$$

Avec :

$w$  : Largeur du fond du canal (Figure 1.17).

$d$  : Profondeur de l'écoulement (Figure 1.17).

## V.3. Périmètre mouillé

Le développement théorique des auteurs a mené à la relation du périmètre mouillé, soit :

$$P = w + 2 \int_0^d \sqrt{1 + \left( \frac{B_0}{Y_0} \right)^2 \frac{(y - Y_0)^2}{Y_0^2 - (y - Y_0)^2}} dy \quad (1.113)$$

En assumant que  $y = d.t$ , la relation (1.113) prend la forme suivante :

$$P = w + 2d \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{B_0}{Y_0}\right)^2 \frac{\left[\left(\frac{d}{Y_0}\right)t - 1\right]^2}{1 - \left[\left(\frac{d}{Y_0}\right)t - 1\right]^2}} dt \quad (1.114)$$

La variable  $t$  est comprise entre 0 et 1.

L'intégrale de la relation (1.114) n'a pas une solution exacte. De ce fait, une équation approximative a été proposée pour le calcul pratique du périmètre mouillé, soit :

$$P = w + 0,1694d \sqrt{1 + \left(\frac{B_0}{Y_0}\right)^2 \frac{[0,015(d/Y_0) - 1,1289]^2}{1 - [0,0236(d/Y_0) - 1]^2}} + 1,0389d \sqrt{1 + \left(\frac{B_0}{Y_0}\right)^2 \frac{[0,6187(d/Y_0) - 1,5398]^2}{1 - [0,7188(d/Y_0) - 1]^2}} \\ + 0,7987d \sqrt{1 + \left(\frac{B_0}{Y_0}\right)^2 \frac{[0,725(d/Y_0) - 0,8792]^2}{1 - [0,6528(d/Y_0) - 1]^2}} \quad (1.115)$$

Cette relation approchée a été obtenue par la méthode de l'ajustement des courbes à l'aide de l'optimisation non linéaire considérée comme un outil puissant pour déterminer les valeurs optimales des coefficients inconnus dans la méthode de quadrature de *Gauss* (*Vatankhah*, 2011 citée par *Easa et Vatankhah*, 2014).

La relation (1.115) est applicable pour l'intervalle :  $0 < d/Y_0 < 1$  et occasionne un écart relatif maximal, pour  $B_0/Y_0 \geq 0,1$ , inférieur à 0,1 % sur le calcul du périmètre mouillé  $P$ .

#### V.4. Largeur de la surface libre de l'écoulement

La largeur de la surface libre de l'écoulement a été exprimée par les auteurs comme suit :

$$T = w + \frac{2B_0}{Y_0} \sqrt{Y_0^2 - (d - Y_0)^2} \quad (1.116)$$

### VI. Approche de *Vatankhah* (2014)

Le travail de recherche effectué par *Vatankhah* (2014) a eu pour objectif l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal à parois latérales en loi puissance sans fond horizontal (Figure 1.18).

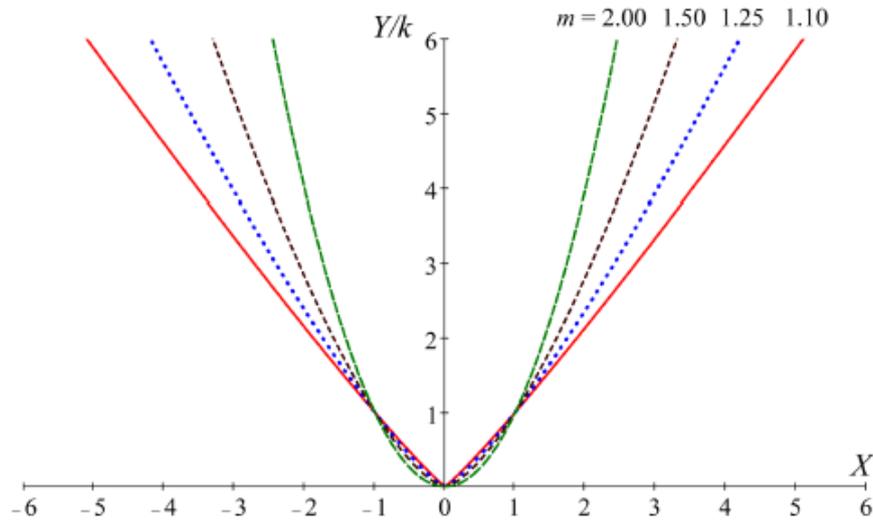
#### VI.1. Description géométrique de la forme du canal

La section considérée est décrite par la fonction suivante :

$$Y = kX^m \quad (1.117)$$

Avec :  $Y$  est l'ordonnée et  $X$  représente l'abscisse (Figure 1.18). Comme le montre la figure 1.18,  $k$  et  $m$  sont des paramètres pour lesquels la fonction prend différentes formes. Par exemple, pour  $m = 1$  et 2, la fonction représente des canaux triangulaires et paraboliques respectivement. Les

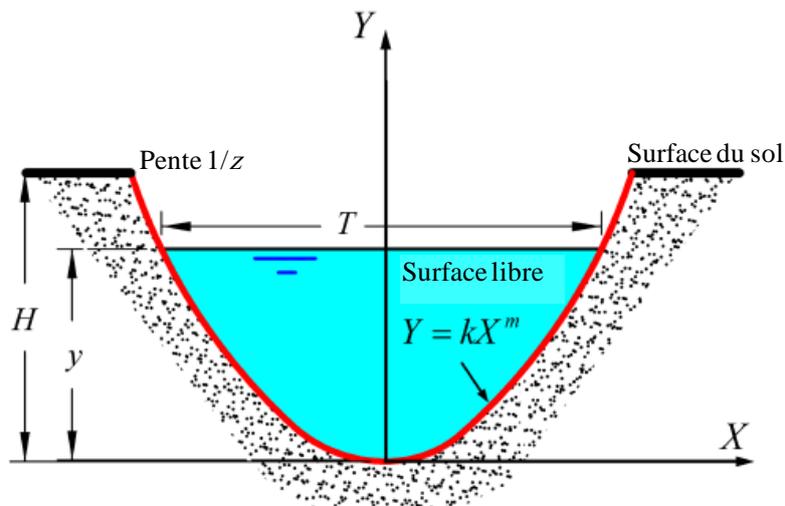
sections transversales pratiques pour les canaux sous forme de loi-puissance sont caractérisées par un exposant  $m$  généralement compris entre 1 et 2 (Vatankhah, 2014). Pour un intérêt pratique, l'auteur a choisi de faire ses études dans ce dernier intervalle. Il est à noter que lorsque  $Y/k < 1$  ou bien  $Y < k$ , l'aire de la section transversale augmente en augmentant l'exposant  $m$  pour un paramètre  $k$  donné (Figure 1.18).



**Figure 1.18 :** Canal à parois en forme de loi-puissance pour différentes valeurs de l'exposant  $m$  selon la relation (1.117) (Vatankhah, 2014).

Les sections transversales pratiques pour les canaux de loi de puissance sont généralement comprises entre  $1 < m < 2$ .

Le canal de section sous forme loi-puissance générale est représentée dans la figure 1.19.



**Figure 1.19 :** Géométrie de la section de forme loi-puissance générale (Vatankhah, 2014).

## VI.2. Caractéristiques géométriques du profil liquide du canal

### VI.2.1. Largeur de la surface libre de l'écoulement

La largeur la surface libre de l'écoulement dans le canal ou plan d'eau a été exprimée par l'auteur comme suit :

$$T = 2mzH\eta^{1/m} \quad (1.118)$$

Avec :

$T$  : Largeur de la surface libre du canal.

$m$  : Exposant de la fonction des parois du canal.

$z$  : Inverse de la pente de la tangente de la parois au niveau de la surface du sol.

$H$  : Profondeur total du canal.

$\eta$  : Profondeur normale relative,  $\eta = y/H$  ( $0 < \eta < 1$ ).

$y$  : Profondeur normale de l'écoulement.

Comme indiqué dans la pratique,  $m$ ,  $k$ ,  $z$  et  $H$  sont des paramètres connus pour les canaux naturels. Pour les canaux artificiels,  $H$  peut être supposé avant le calcul de l'écoulement uniforme, et est ensuite corrigé en fonction de la hauteur  $H - y$  requise (Vatankhah, 2014).

### VI.2.2. Aire de la section mouillée

En ce qui concerne l'aire de la section mouillée du profil liquide étudié, Vatankhah (2014) a développé la relation suivante :

$$A = 2 \int_0^{T/2} (y - kX^m) dX = \frac{2m^2}{1+m} zH^2 \eta^{1+1/m} \quad (1.119)$$

### VI.2.3. Périmètre mouillé

A l'exception pour certaines valeurs de l'exposant  $m$ , il n'existe pas une relation pratique exacte permettant le calcul du périmètre mouillé pour la section en forme de loi-puissance. En effet, Vatankhah (2014) a abouti à l'expression du périmètre mouillé sous forme d'une intégrale, soit :

$$P = 2 \int_0^{T/2} \sqrt{1 + m^2 k^2 X^{2m-2}} dX \quad (1.120)$$

En assumant que :  $X = T.t/2$ , la relation (1.120) devient :

$$P = TF(\delta, m) \quad (1.121)$$

Avec :

$$\delta = \frac{\eta^{(2-2/m)}}{z^2} \quad (1.122)$$

On a :  $0 < \eta < 1$ , alors :  $0 < \delta < z^{-2}$ .

Dans la relation (1.121),  $m \neq 1$  et la fonction  $F(\delta, m)$  est définie comme suit :

$$F(\delta, m) = \int_0^1 \sqrt{1 + \delta t^{2m-2}} dt \quad (1.123)$$

La solution exacte de la relation (1.123) a été développée pour quelques valeurs de l'exposant  $m$  tel qu'il est représenté dans le tableau 1.2 (Vatankhah, 2014).

**Tableau 1.2 :** Solutions exactes de la relation (1.123) pour quelques valeurs de  $m$  (Vatankhah, 2014).

$m$	$F(\delta, m)$
1.10	$\frac{2}{693\delta^5} [(1 + \delta)^{3/2} (315\delta^4 - 280\delta^3 + 240\delta^2 - 192\delta + 128) - 128]$
1.20	$\frac{5}{16\delta^{5/2}} \sinh^{-1}(\delta^{1/2}) + \frac{5}{48\delta^2} (1 + \delta)^{1/2} (4\delta + 3)(2\delta - 1)$
1.25	$\frac{4}{15\delta^2} [(1 + \delta)^{3/2} (3\delta - 2) + 2]$
1.50	$\frac{2}{3\delta} [(1 + \delta)^{3/2} - 1]$
2.00	$\frac{1}{2\delta^{1/2}} \sinh^{-1}(\delta^{1/2}) + \frac{(1+\delta)^{1/2}}{2}$

Il est à noter que pour certaines valeurs de  $m$ , le nombre de termes de la solution exacte devient très important. Pour pallier ce problème, des solutions simples pour calculer le périmètre mouillé avec différents niveaux de précision ont été proposées en utilisant la méthode des coefficients indéterminés (Abramowitz et Stegun, 1972 citée par Vatankhah, 2014). En appliquant cette méthode avec deux points à la relation (1.123) et en utilisant l'ajustement de courbes (optimisation non linéaire) pour déterminer les coefficients inconnus, il a été obtenu, en se référant également à la relation (1.121) :

$$P = 0,3176T\sqrt{1 + \delta(0,1025)^{2m-2}} + 0,6834T\sqrt{1 + \delta(0,6811)^{2m-2}} \quad (1.124)$$

De même, en utilisant la méthode des coefficients indéterminés avec trois points, il a été possible d'écrire :

$$P = 0,4332T\sqrt{1 + \delta(0,3102)^{2m-2}} + 0,4475T\sqrt{1 + \delta(0,8070)^{2m-2}} + 0,1191T\sqrt{1 + \delta(0,0385)^{2m-2}} \quad (1.125)$$

Ces approximations sont valables dans les intervalles :  $1 < m < 2$  et  $0 < \delta < 10$ . En comparaison avec les solutions exactes regroupées dans le tableau 1.2, le pourcentage d'erreur maximal associé à l'estimation du terme de l'intégrale dans l'équation (1.124) est inférieur à 0,15 %. Pour la relation (1.125), l'erreur maximale est inférieure à 0,02%.

### VI.3. Expression de la profondeur critique

La condition de l'écoulement critique dans un canal ouvert est décrite par la relation suivante (Chow, 1959 et Henderson, 1966 citées par Vatankhah, 2014) :

$$\alpha \frac{Q^2 T}{gA^3} = 1 \quad (1.125)$$

Où :

$\alpha$  : Facteur de correction de l'énergie.

$Q$  : Débit volume.

$g$  : Accélération de la pesanteur.

L'équation explicite de la profondeur critique relative dans un canal de type loi-puissance peut être déduite en se basant sur les relations (1.118), (1.119) et (1.125), soit :

$$\eta_c = \left[ \frac{\alpha(1+m)^3 Q^2}{4gm^5 z^2 H^5} \right]^{m/(3m+2)} \quad (1.126)$$

Avec :

$\eta_c$  : Profondeur critique relative,  $\eta_c = y_c/H$ .

L'équation (1.126) permet de déterminer directement la profondeur critique,  $y_c = H \cdot \eta_c$ .

#### VI.4. Détermination de la profondeur normale

La formule de *Manning* s'applique aux surfaces hydrauliquement rugueuses et est généralement utilisée pour déterminer la profondeur normale dans les canaux ouverts (*Chow*, 1959 et *Henderson*, 1966 citées par *Vatankhah*, 2014). Cette formule s'écrit (citée un peu plus haut dans le paragraphe IV.3.) :

$$Q = \frac{S_0^{1/2} A^{5/3}}{n P^{2/3}} \quad (1.104)$$

Où :

$S_0$  : Pente longitudinale du canal.

$n$  : Coefficient de rugosité de *Manning*.

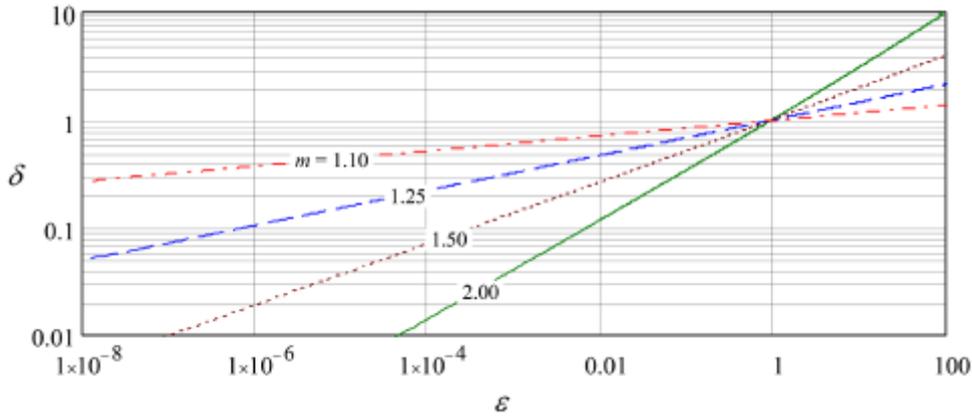
En substituant les relations (1.119) et (1.121) dans la relation (1.104), la formule de *Manning* peut être écrite sous forme adimensionnelle comme suit (*Vatankhah*, 2014) :

$$\varepsilon = \frac{\delta^{(5m+3)}/[6(m-1)]}{[F(\delta, m)]^{2/3}} \quad (1.127)$$

Avec :

$$\varepsilon = \frac{n(1+m)^{5/3} Q}{2m^{8/3} z^{(8m)/[3(m-1)]} H^{8/3} S_0^{1/2}} \quad (1.128)$$

L'équation (1.127) est une forme adimensionnelle de la formule de *Manning*. La figure 1.20 illustre la représentation graphique de la relation (1.127) et montre la variation de la profondeur normale adimensionnelle  $\delta$  en fonction du débit adimensionnel  $\varepsilon$  pour différentes valeurs de l'exposant  $m$ .



**Figure 1.20** : Variation de la profondeur normale adimensionnelle  $\delta$  en fonction du débit adimensionnel  $\varepsilon$  pour différentes valeurs de  $m$  (Vatankhah, 2014).

Ce diagramme adimensionnel (Figure 1.20) facilite le calcul de l'écoulement uniforme sans aucun procédé itératif. Il permet de déterminer  $\delta$  pour des valeurs données de  $\varepsilon$  et de  $m$ , puis de calculer la profondeur normale de l'écoulement uniforme en se basant sur la relation (1.122). Cependant, afin de fournir à l'utilisateur une équation unique pour déterminer la profondeur normale de l'écoulement, l'inversion de la relation (1.127) a été effectuée à l'aide de la méthode itérative à point fixe (Vatankhah, 2014). En effet, pour des valeurs données de  $\varepsilon$  et de  $m$ , il faut trouver la valeur de  $\delta$  qui satisfait à l'équation (1.127). Toutefois, il convient de rechercher la forme la plus appropriée qui converge plus rapidement vers la racine. De ce fait, l'auteur au cours de sa recherche a proposé un arrangement approprié de la relation (1.127), soit :

$$\delta = f(\delta) = \varepsilon^{[6(m-1)]/(5m+3)} \left[ 0,3176\sqrt{1 + \delta(0,1025)^{2m-2}} + 0,6834\sqrt{1 + \delta(0,6811)^{2m-2}} \right]^{[4(m-1)]/(5m+3)} \quad (1.129)$$

Par ailleurs, Vatankhah (2014) suggère d'éviter le calcul itératif par la relation implicite (1.129) en proposant la relation approchée suivante :

$$\delta = \varepsilon^{[6(m-1)]/(5m+3)} \left[ 0,3176\sqrt{1 + 1,17\varepsilon^{[6(m-1)]/(5m+3)}(0,1025)^{2m-2}} + 0,6834\sqrt{1 + 1,17\varepsilon^{[6(m-1)]/(5m+3)}(0,6811)^{2m-2}} \right]^{[4(m-1)]/(5m+3)} \quad (1.130)$$

L'erreur maximale associée à l'équation (1.130) est inférieure à 0,5 % pour les intervalles :  $1 < m < 2$  et  $0 < \delta < 10$ .

Enfin, lorsqu'on trouve la valeur de  $\delta$  correspondant au débit adimensionnel  $\varepsilon$  et à l'exposant  $m$ , la profondeur normale de l'écoulement est calculée par la relation suivante :

$$y = H(z^2\delta)^{m/(2m-2)} \quad (1.131)$$

Notons enfin, que dans les canaux naturels, la pente  $1/z$  de la tangente des parois du canal au niveau de la surface du sol est une propriété du sol (paramètre de terrain connu) (Figure 1.19). Ainsi, la relation suivante peut être employée pour l'évaluation de la hauteur du canal, soit :

$$z = \frac{1}{mH} \left( \frac{H}{k} \right)^{1/m} \quad (1.132)$$

Ou bien :

$$H = (mz)^{m/(1-m)} k^{1/(1-m)} \quad (1.133)$$

## VII. Conclusion

Ce chapitre s'est consacré à passer en revue certains travaux de recherche relativement récents qui ont eu pour but l'analyse de l'écoulement uniforme pour certains types de canaux ouverts. De ce fait, on a choisi de commencer par les travaux de *Amara et Achour (2023)* ayant proposés, en se basant sur la formule de *Manning*, des solutions pour problème de détermination de la profondeur normale évoluant dans les canaux rectangulaires. En effet, en se basant sur la méthode de  $\delta$ -perturbation, une solution exacte a été obtenue sous forme d'une expansion de série. Il a ensuite été possible d'aboutir à une solution analytique générale, dont la solution d'inversion de *Lagrange* est déduite comme un cas particulier. La précision obtenue pour le développement d'ordre 6 est élevée, et l'ordre de la série peut être choisi selon le degré de précision requis. La solution proposée (Relation 1.73) génère une prédiction très précise dans la plage pratique du paramètre sans dimension  $\eta \in [0, 5]$ . Un niveau arbitraire de précision peut être atteint en incluant davantage de termes dans l'expansion de la série convergente. Pour éviter la nécessité de termes d'ordre supérieur dans l'expansion de la série à des fins pratiques, le modèle de *Hoerl* a été introduit comme terme correctif pour l'erreur de troncature dans la série d'expansion de la  $\delta$ -perturbation. La solution combinée du modèle qui en résulte génère un écart relatif maximal de 0,029 % seulement, ce qui constitue une excellente précision dans la large gamme de  $\eta \in [0, 5]$ . Les auteurs suggèrent qu'il est à noter qu'en raison de sa polyvalence et des particularités de sa convergence, la présente approche directe  $\delta$ -perturbation, ou le modèle combiné, pourraient facilement être appliqués à d'autres profils géométriques.

En ce qui concerne l'étude de *Lakehal et Achour (2017)*, les auteurs ont utilisé la méthode MMR pour résoudre la problématique d'évaluation de la profondeur normale pour les canaux trapézoïdaux. De ce fait, des équations hydrauliques simples ont permis de résoudre le problème en les employant pour un modèle rugueux dont les propriétés géométriques et hydrauliques sont connues. La profondeur normale en question a été déduite en se référant au facteur d'ajustement des dimensions linéaires. La méthode détaillée a été décrite afin de montrer toutes les étapes à suivre pour atteindre l'objectif requis.

En outre, les travaux de recherche de *Vatankhah (2015)* ayant eu pour objectif de proposer des solutions graphiques et mathématiques approchées afin de déterminer directement les profondeurs

normale et critique dans des canaux semi-elliptiques en béton, le pourcentage d'erreur maximal des équations directes proposées est inférieur à 0,1 % dans la plage de  $1 \leq k \leq 4$  et  $0 < \eta \leq 1$ . Le périmètre mouillé a été également estimé à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés.

Par ailleurs, nous nous sommes intéressés uniquement aux caractéristiques géométriques d'un canal ouvert à parois elliptiques avec fond horizontal développées par *Easa* et *Vatankhah* (2014), qui serviront au développement de l'une des sections de la deuxième partie de cette thèse.

Finalement, on a présenté l'étude de *Vatankhah* (2014) qui a eu pour objectif l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal à parois latérales en loi puissance. En effet, l'auteur a procédé développement d'une forme adimensionnelle de la formule de *Manning* qui inclut trois variables sans dimension, la profondeur normale adimensionnelle  $\delta$ , le débit adimensionnel  $\varepsilon$  ainsi que l'exposant  $m$ . En utilisant cette forme, un diagramme adimensionnel et une solution directe sont présentés pour déterminer la profondeur normale de l'écoulement dans les canaux en forme de loi-puissance. L'erreur maximale en pourcentage de l'équation proposée est inférieure à 0,5 % dans les intervalles :  $1 < m < 2$  et  $0 < \delta < 10$ . Le calcul du périmètre mouillé a été également considéré pour sa pertinence dans l'inversion de l'équation de l'écoulement uniforme. Pour cela, le périmètre mouillé a été estimé par la méthode des coefficients indéterminés. Une relation analytique menant au calcul de la profondeur critique a été également développée.

**CONCLUSION**  
**DE LA PREMIERE PARTIE**

## CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE

La première partie de notre thèse s'est consacrée à la présentation de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts. Deux chapitres ont été nécessaires pour l'achèvement de cette partie à savoir :

Chapitre I : Notions sur l'écoulement uniforme.

Chapitre II : Présentation de quelques travaux récents.

Le premier chapitre s'est intéressé essentiellement à présenter la définition de l'écoulement uniforme, les conditions de son développement et de son apparition, les principales équations qui le gouverne ainsi qu'une présentation particulière de la méthode MMR.

Quant au second et dernier chapitre de la première partie, des approches théoriques relativement récentes pour quelques profils géométriques des canaux à surface libre ont été brièvement exposées.

On peut résumer leur objectif comme suit :

- i.* L'étude de *Amara* et *Achour* (2023) a eu pour but de résoudre le problème de calcul de la profondeur normale dans les canaux rectangulaires en se basant sur la formule de *Manning* ainsi que sur certains modèles numériques très efficaces.
- ii.* Les travaux *Lakehal* et *Achour* (2017) ayant eu pour objectif de traiter, en utilisant la méthode MMR, le problème de calcul de la profondeur normale dans les canaux de forme trapézoïdale.
- iii.* Les travaux de recherche de *Vatankhah* (2015) ayant eu pour objectif de proposer des solutions graphiques et théoriques approchées afin de déterminer directement les profondeurs normale et critique dans des canaux semi-elliptiques en béton.
- iv.* Par ailleurs, on a présenté uniquement les caractéristiques géométriques d'un canal ouvert à parois elliptiques avec fond horizontal développées par *Easa* et *Vatankhah* (2014), car leur étude a fait l'objet d'un autre axe de recherche.
- v.* L'étude de *Vatankhah* (2014) a eu pour objectif principal le calcul des profondeurs normale et critique dans un canal à parois sous forme de loi puissance.

**DEUXIEME PARTIE**  
**CONTRIBUTION A L'ETUDE DE**  
**L'ECOULEMENT UNIFORME**

**INTRODUCTION**  
**A LA DEUXIEME PARTIE**

## INTRODUCTION A LA DEUXIEME PARTIE

La seconde et dernière partie de cette thèse sera consacrée à la présentation de notre modeste contribution à l'étude de l'écoulement uniforme dans quatre types de canaux ouverts. Quatre chapitres, dont les intitulées sont énumérées ci-dessous, seront alors nécessaires afin d'atteindre les objectifs visés, soit :

Chapitre I : Ecoulement uniforme dans un canal à parois circulaires et à fond horizontal.

Chapitre II : Ecoulement uniforme dans un canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal.

Chapitre III : Ecoulement uniforme dans un canal à parois elliptiques et à fond horizontal.

Chapitre IV : Ecoulement uniforme dans un canal à parois sous forme de loi puissance et à fond horizontal.

Pour chaque type du canal considéré, deux approches théoriques seront développées dont l'une a pour objectif de procéder à un dimensionnement adéquat des canaux et la deuxième a pour but de déterminer principalement la profondeur normale de l'écoulement.

Pour les deux premiers chapitres, des méthodes de calcul destinées principalement à la détermination de la profondeur critique, du débit volume, de la vitesse moyenne de l'écoulement, du nombre de *Reynolds* ainsi que du coefficient de frottement seront développées en plus des deux approches théoriques indiquées ci-dessus.

A l'exception de l'écoulement critique qui sera étudié en utilisant la formule du nombre de *Froude*, toutes les méthodes qui seront proposées vont être élaborées en se basant sur la méthode MMR.

*Premier Chapitre*

**ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN  
CANAL A PAROIS CIRCULAIRES ET A  
FOND HORIZONTAL**

## Chapitre I

# ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL A PAROIS CIRCULAIRES ET A FOND HORIZONTAL

### **I. Introduction**

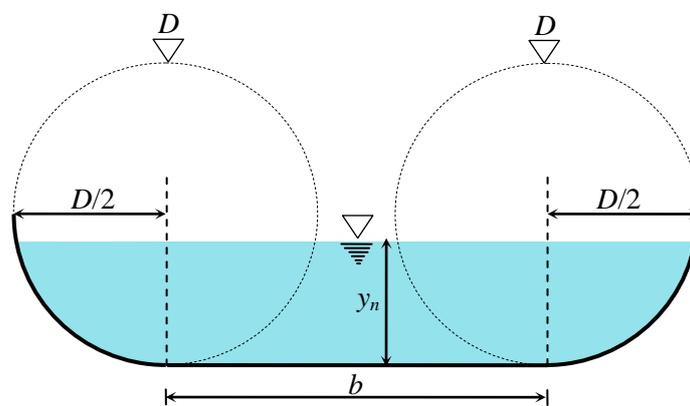
Le présent chapitre s'intéressera à l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal à parois circulaires et à fond horizontal. La méthode principale qui sera utilisée est la méthode du modèle rugueux de référence dite méthode MMR en raison de ses avantages multiples. Le chapitre sera subdivisé en plusieurs sections en commençant par le développement d'une méthode de dimensionnement du canal, puis une approche théorique au calcul de la profondeur normale de l'écoulement sera proposée en adoptant un modèle mathématique adéquat. Par la suite, une étude particulière du régime critique va être dédiée au dimensionnement du canal en se basant sur la formule du nombre de *Froude*. En revenant à la méthode MMR, une méthode de calcul du débit volume sera développée en s'appuyant sur la formule de *Achour et Bedjaoui* (2006), puis une autre méthode de détermination de la vitesse moyenne de l'écoulement sera dérivée de celle de calcul de débit volume en se basant sur l'équation de continuité. Nous tenterons, enfin, d'exprimer explicitement le nombre de *Reynolds* et le coefficient de frottement indépendamment du débit en se référant à la méthode MMR.

Plusieurs exemples d'application seront exposés afin de veiller à l'utilisation correcte des différentes méthodes qui seront suggérées. Notons qu'à la fin de chaque exemple d'application une petite étude comparative sera effectuée afin de conclure à la validité des approches théoriques qui seront développées.

### **II. Dimensionnement d'un canal à parois circulaires avec fond horizontal**

La figure 2.1 représente l'état de l'écoulement uniforme relatif à un canal à parois circulaires et à fond horizontal. L'écoulement uniforme est dit normal lorsque le régime est fluvial ou torrentiel. Autrement dit, l'écoulement n'est pas en état critique. La figure 2.1 montre, en outre, de manière schématique les dimensions linéaires du canal étudié, le profil liquide se caractérise par les rapports d'aspect  $\eta = y_n/b$  et  $\xi = y_n/D$ . Effectivement, le rapport  $\eta$  correspond au paramètre de forme du tronçon rectangulaire du canal (ou profondeur normale relative), et le rapport  $\xi$  correspond au paramètre de forme caractérisant les parties circulaires du canal (taux de remplissage des parties circulaires). De plus,  $y_n$  correspond à la profondeur normale,  $b$  correspond à la largeur de fond

horizontal et  $D$  correspond au diamètre des parties circulaires latérales. Ces trois dimensions sont les paramètres inconnus du problème. Par ailleurs, les paramètres donnés ici sont mesurables en pratique, à savoir : le débit  $Q$ , la pente géométrique (longitudinale) du canal  $i$ , la viscosité cinématique caractérisant le liquide en écoulement  $\nu$  et la rugosité absolue  $\varepsilon$  définissant l'état des parois internes du canal. La profondeur normale est principalement calculée à partir des formules de résistance à l'écoulement relatif aux canaux ouverts. L'objectif est le dimensionnement du canal c'est-à-dire déterminer la valeur de la profondeur normale  $y_n$ , la valeur de la largeur de la base  $b$  et la valeur du diamètre  $D$  des parties en courbe du canal selon les données citées ci-dessus ainsi que des paramètres de forme imposés  $\eta$  et  $\xi$ .



**Figure 2.1** : Schéma de définition de l'état de l'écoulement normal dans un canal à parois circulaires et à fond horizontal.

Afin de répondre à la problématique de dimensionnement du canal en utilisant uniquement ces données, il semble que la méthode MMR soit le moyen de calcul le plus adapté. Cette méthode ne prend pas en compte les valeurs des coefficients de résistance de l'écoulement (Coefficients de frottement, de *Chézy* et de *Manning*).

### II.1. Equations de base

L'équation bien connue de *Darcy – Weisbach* (*Darcy*, 1854 ; *Weisbach*, 1845) est considérée comme équation principale sur laquelle se base cette étude. En effet, la relation (1.53) citée dans le premier chapitre de la première partie peut s'écrire en considérant l'égalité suivante  $V = Q/A$  (Equation de continuité), soit :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (2.1)$$

On note que le gradient  $J$  de la relation (1.53) a été remplacé par la pente géométrique  $i$  dans la relation (2.1) car l'écoulement est à surface libre. En plus, dans la relation (2.1) :  $Q$ ,  $g$ ,  $A$ ,  $D_h$  et  $f$  représentent respectivement le débit, l'accélération de la pesanteur, l'aire de la section mouillée, le

diamètre hydraulique et est le coefficient de frottement. Ce dernier est donné par la formule implicite de *Colebrook-White* (*Colebrook et al.*, 1939) citée dans le premier chapitre de la première partie par la relation (1.54) et dont on réécrit son expression, soit :

$$f^{-1/2} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.54)$$

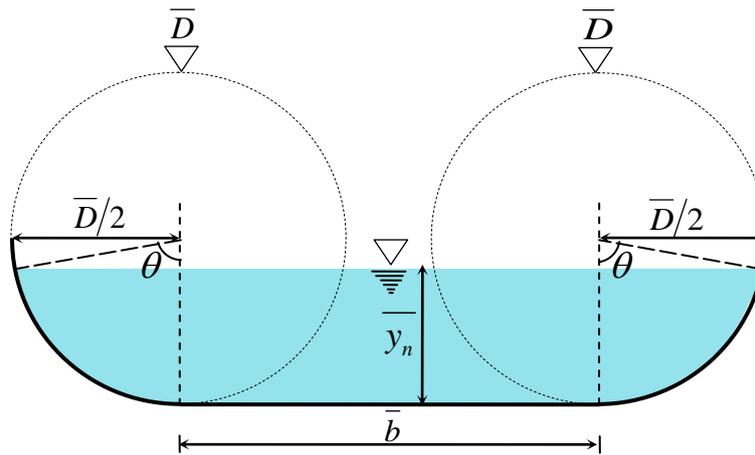
Où  $\varepsilon$  représente la rugosité absolue et  $R$  étant le nombre de *Reynolds* qui est exprimé comme suit, en tenant compte que :  $R = V.D_h/\nu$ ,  $V = Q/A$  et  $D_h = 4A/P$  :

$$R = \frac{4Q}{P\nu} \quad (2.2)$$

Où  $\nu$  est la viscosité cinématique,  $P$  est le périmètre mouillé et  $D_h$  est le diamètre hydraulique.

## II.2. Modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux dans ce cas est un canal à fond horizontal muni des parois circulaires (Figure 2.2).



**Figure 2.2 :** Schéma de définition du modèle rugueux de référence  
(Écoulement normal).

Rappelons que toutes les propriétés géométriques et hydrauliques relatives au modèle rugueux sont différenciées par le symbole "bar". Le modèle rugueux se caractérise à travers une rugosité relative  $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 0,037$ , avec  $\bar{D}_h$  étant le diamètre hydraulique. La valeur de la rugosité relative est importante de tel sort que l'écoulement soit dans la plage du régime turbulent rugueux. De ce fait, la valeur du coefficient de frottement sera  $\bar{f} = 1/16$  en se référant à la relation (1.71) indiquée dans le premier chapitre de la première partie. Le canal à fond horizontal avec des parois circulaires se caractérise par une pente longitudinale  $i$ , le paramètre de forme caractérisant le tronçon rectangulaire  $\eta = y_n/b$  et celui relatif aux parties circulaires  $\xi = y_n/D$ . Le modèle se caractérise par

les profondeurs relatives  $\bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b}$  et  $\bar{\xi} = \bar{y}_n / \bar{D}$ . Vu la forte rugosité relative, les dimensions linéaires relatives au modèle sont comme suit :  $\bar{y}_n > y_n$ ,  $\bar{b} > b$  et  $\bar{D} > D$ . De plus, afin de conserver la même forme du canal ainsi que du modèle on impose les égalités suivantes :  $\bar{\eta} = \eta$  et  $\bar{\xi} = \xi$ . Le débit  $Q$  et la pente  $i$  sont les égales pour le canal et pour le modèle tels que :  $\bar{Q} = Q$  et  $\bar{i} = i$ .

L'application de la relation (2.1) pour le modèle rugueux mène à écrire que :

$$\bar{i} = \frac{\bar{f}}{\bar{D}_h} \frac{\bar{Q}^2}{2g\bar{A}^2}$$

En tenant compte que :  $\bar{Q} = Q$  et  $\bar{i} = i$ , la relation précédente s'écrit :

$$i = \frac{\bar{f}}{\bar{D}_h} \frac{Q^2}{2g\bar{A}^2} \quad (2.3)$$

Sachant que  $\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P}$  et que  $\bar{f} = 1/16$ , la relation (2.3) peut être réécrite sous la forme :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} Q^2 \quad (2.4)$$

Le périmètre mouillé du modèle rugueux  $\bar{P}$  s'écrit selon la figure 2.2 :

$$\bar{P} = \bar{b} + \theta \bar{D} \quad (2.5)$$

Le demi-angle au centre  $\theta$  est exprimé en radian et peut s'écrire selon la figure 2.2 comme suit :

$$\cos\theta = \frac{\frac{\bar{D}}{2} - \bar{y}_n}{\frac{\bar{D}}{2}} = 1 - 2\frac{\bar{y}_n}{\bar{D}}$$

D'où :

$$\theta = \cos^{-1}\left(1 - 2\frac{\bar{y}_n}{\bar{D}}\right) \quad (2.6)$$

On a :  $\frac{\bar{y}_n}{\bar{D}} = \bar{\xi} = \xi$ , la relation (2.6) devient :

$$\theta = \cos^{-1}(1 - 2\xi) \quad (2.7)$$

En remplaçant la relation (2.7) dans la relation (2.5), le périmètre mouillé du modèle rugueux  $\bar{P}$  s'écrit :

$$\bar{P} = \bar{b} + \cos^{-1}(1 - 2\xi)\bar{D}$$

Ou bien :

$$\bar{P} = \bar{b} \left[ 1 + \cos^{-1} \left( 1 - 2\xi \right) \frac{\bar{D}}{b} \right] = \bar{b} \left[ 1 + \cos^{-1} \left( 1 - 2\xi \right) \frac{\bar{D}}{b} \times \frac{\bar{y}_n}{y_n} \right] \quad (2.8)$$

En considérant que :  $\frac{\bar{y}_n}{b} = \bar{\eta} = \eta$  et  $\frac{\bar{y}_n}{\bar{D}} = \bar{\xi} = \xi$ , la relation (2.8) prend la forme suivante :

$$\bar{P} = \bar{b} \left[ 1 + \cos^{-1} \left( 1 - 2\xi \right) \frac{\eta}{\xi} \right] \quad (2.9)$$

Posons :

$$\sigma(\xi) = \cos^{-1} (1 - 2\xi) \quad (2.10)$$

En vertu de cette dernière relation, l'expression (2.9) devient :

$$\bar{P} = \bar{b} \left[ 1 + \frac{\eta}{\xi} \sigma(\xi) \right] \quad (2.11)$$

L'aire de la section mouillée du modèle rugueux  $\bar{A}$ , peut être également exprimée à partir de la figure 2.2, soit :

$$\bar{A} = \bar{b} \bar{y}_n + \frac{\bar{D}^2}{4} (\theta - \sin \theta \cos \theta) \quad (2.12)$$

Le demi-angle au centre  $\theta$  est exprimé en radian et donné par la relation (2.7).

On a :

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$$

Ou bien :

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \quad (2.13)$$

De plus, on peut écrire à partir de la relation (2.7) :

$$\cos \theta = 1 - 2\xi \quad (2.14)$$

En vertu de cette dernière relation, l'expression (2.13) prend la forme suivante :

$$\sin \theta = \sqrt{1 - (1 - 2\xi)^2}$$

Ou bien :

$$\sin \theta = 2\sqrt{\xi(1 - \xi)} \quad (2.15)$$

En tenant compte des relations (2.7), (2.14) et (2.15), la relation (2.12) peut s'écrire :

$$\bar{A} = \bar{b} \bar{y}_n + \frac{\bar{D}^2}{4} \left[ \cos^{-1} (1 - 2\xi) - 2\sqrt{\xi(1 - \xi)} (1 - 2\xi) \right]$$

Ou bien :

$$\bar{A} = \bar{b} \bar{y}_n + \frac{\bar{D}^2}{4} \cos^{-1} (1 - 2\xi) \left[ 1 - \frac{2(1 - 2\xi)\sqrt{\xi(1 - \xi)}}{\cos^{-1} (1 - 2\xi)} \right] \quad (2.16)$$

Posons la fonction  $\varphi(\xi)$  telle que :

$$\varphi(\xi) = 1 - \frac{2(1-2\xi)\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\cos^{-1}(1-2\xi)} \quad (2.17)$$

La relation (2.16) s'écrit, en vertu des relations (2.10) et (2.17) :

$$\bar{A} = \bar{b} \bar{y}_n + \frac{\bar{D}^2}{4} \sigma(\xi) \varphi(\xi) \quad (2.18)$$

Ou bien :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \left[ \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} + \frac{\bar{y}_n^2}{\bar{y}_n^2} \frac{\bar{D}^2}{4\bar{b}^2} \sigma(\xi) \varphi(\xi) \right] \quad (2.19)$$

On a :  $\frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} = \bar{\eta} = \eta$  et  $\frac{\bar{y}_n^2}{\bar{D}^2} = \bar{\xi} = \xi$ , la relation (2.19) devient :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \left[ \eta + \frac{\eta^2}{4\xi^2} \sigma(\xi) \varphi(\xi) \right]$$

Ou bien :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \eta \left[ 1 + \frac{\eta}{4\xi^2} \sigma(\xi) \varphi(\xi) \right] \quad (2.20)$$

En insérant les relations (2.11) et (2.20) dans la relation (2.4), on obtient :

$$i = \frac{\bar{b} \left[ 1 + \frac{\eta}{\xi} \sigma(\xi) \right]}{128g \left\{ \bar{b}^2 \eta \left[ 1 + \frac{\eta}{4\xi^2} \sigma(\xi) \varphi(\xi) \right] \right\}^3} Q^2$$

Soit, après simplification et réarrangement :

$$\bar{b} = \left\{ \frac{1 + \frac{\eta}{\xi} \sigma(\xi)}{128\eta^3 \left[ 1 + \frac{\eta}{4\xi^2} \sigma(\xi) \varphi(\xi) \right]^3} \right\}^{1/5} \left( \frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (2.21)$$

La relation (2.21) permet alors le calcul direct de la largeur de fond du modèle rugueux  $\bar{b}$  en fonction des paramètres connus :  $Q$ ,  $i$ ,  $\eta$  et  $\xi$ .

Tenant compte que :  $\bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b} = \eta$  et  $\bar{\xi} = \bar{y}_n^2 / \bar{D}^2 = \xi$ , le diamètre des parties circulaires du modèle

$\bar{D}$  peut s'écrire :

$$\bar{D} = \frac{\eta \bar{b}}{\xi} \quad (2.22)$$

De plus, le diamètre hydraulique du modèle rugueux  $\overline{D}_h$  s'écrit :

$$\overline{D}_h = 4\overline{A}/\overline{P} \quad (2.23)$$

### II.3. Facteur de correction des dimensions linéaires

La méthode MMR suggère que n'importe quelle dimension linéaire  $L$  relative à un conduit ainsi que son homologue  $\overline{L}$  correspondant au modèle rugueux peuvent être représentées par la relation suivante, applicable pour tout le régime turbulent :

$$L = \psi \overline{L} \quad (2.24)$$

Avec :  $\psi$  étant un paramètre sans dimension servant à la correction des dimensions linéaires ( $\psi < 1$ ), gouverné par la formule directe suivante (Achour et Bedjaoui, 2006 ; Achour, 2014) :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.25)$$

Le nombre de Reynolds  $\overline{R}$  dans le modèle rugueux s'écrit, par analogie avec la relation (2.2) :

$$\overline{R} = \frac{4\overline{Q}}{\overline{P}\overline{v}} \quad (2.26)$$

Lorsque les dimensions linéaires du canal sont inconnues, la méthode MMR suggère, pour la relation (2.26), les égalités suivantes :  $\overline{Q} = Q$  et  $\overline{v} = v$ , la relation (2.26) devient :

$$\overline{R} = \frac{4Q}{Pv} \quad (2.27)$$

Tous les paramètres de la relation (2.25) sont connus, ce qui permet de calculer de manière explicite le facteur de correction  $\psi$ .

### II.4. Etapes de calcul des dimensions linéaires du canal

Afin de déterminer les dimensions de la canalisation munie de fond horizontal et des parois circulaires, les grandeurs suivantes doivent être connues :  $Q$ ,  $i$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\varepsilon$  et  $v$ . Les coefficients de Chézy et de Manning ne sont pas requis. Les grandeurs linéaires à calculer sont : la profondeur normale  $y_n$  caractérisant l'écoulement, la base horizontale du canal  $b$  ainsi que le diamètre  $D$  des parois en courbe. De ce fait, on suggère les démarches de calcul suivantes :

1. Déterminer les fonctions  $\sigma(\xi)$  et  $\varphi(\xi)$  par application des relations (2.10) et (2.17) respectivement.

2. Calculer la base horizontale  $\bar{b}$  ainsi que le diamètre  $\bar{D}$  des parois circulaires du modèle en se référant aux relations (2.21) et (2.22) respectivement.
3. Calculer les valeurs du périmètre mouillé  $\bar{P}$  ainsi que de surface de section mouillée  $\bar{A}$  du modèle par les relations (2.11) et (2.20) respectivement.
4. Déterminer  $\bar{D}_h$  en se basant sur la relation (2.23).
5. Déterminer la valeur du nombre de Reynolds  $\bar{R}$  par l'expression (2.27).
6. A partir des valeurs ainsi déterminées de  $\bar{D}_h$  et de  $\bar{R}$ , calculer le paramètre de correction des  $\psi$  par la formule (2.25).
7. A partir des valeurs de  $\bar{b}$ , de  $\bar{D}$  et de  $\psi$ , les dimensions linéaires  $b$  et  $D$  sont déterminées par l'expression fondamentale (2.24).
8. Enfin, la profondeur normale sera :  $y_n = \eta b$ .

### II.5. Exemple d'application 2.1

Considérons un conduit de fond horizontal et muni des parois circulaires (Figure 2.1).

Dimensionner le canal, sachant que :

$$Q = 3,274 \text{ m}^3/\text{s}, i = 10^{-4}, \eta = 0,6, \xi = 0,4, \varepsilon = 10^{-3} \text{ m et } \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

1. En vertu des relations (2.10) et (2.17) respectivement, les fonctions  $\sigma(\xi)$  et  $\varphi(\xi)$  sont:

$$\sigma(\xi) = \cos^{-1}(1 - 2\xi) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,4) = 1,36943841$$

$$\varphi(\xi) = 1 - \frac{2(1 - 2\xi)\sqrt{\xi(1 - \xi)}}{\cos^{-1}(1 - 2\xi)} = 1 - \frac{2(1 - 2 \times 0,4)\sqrt{0,4 \times (1 - 0,4)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,4)} = 0,856905442$$

2. La base  $\bar{b}$  ainsi que le diamètre  $\bar{D}$  sont déterminés par application des relations (2.21) et (2.22) respectivement, soit :

$$\begin{aligned} \bar{b} &= \left\{ \frac{1 + \frac{\eta}{\xi} \sigma(\xi)}{128\eta^3 \left[ 1 + \frac{\eta}{4\xi^2} \sigma(\xi) \varphi(\xi) \right]^3} \right\}^{1/5} \left( \frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \\ &= \left\{ \frac{1 + \frac{0,6}{0,4} \times 1,36943841}{128(0,6)^3 \left[ 1 + \frac{0,6}{4 \times (0,4)^2} \times 1,36943841 \times 0,856905442 \right]^3} \right\}^{1/5} \left( \frac{3,274^2}{9,81 \times 10^{-4}} \right)^{1/5} \\ &= 2,64846761 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\bar{D} = \frac{\eta}{\xi} \bar{b} = \frac{0,6}{0,4} \times 2,64846761 = 3,9727014 \text{ m}$$

3. Les relations (2.11) et (2.20) mènent respectivement au calcul aisé des paramètres géométriques

$\bar{P}$  et  $\bar{A}$  :

$$\bar{P} = \bar{b} \left[ 1 + \frac{\eta}{\xi} \sigma(\xi) \right] = 2,64846761 \times \left[ 1 + \frac{0,6}{0,4} \times 1,36943841 \right] = 8,08883749 \text{ m}$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \bar{b}^2 \eta \left[ 1 + \frac{\eta}{4\xi^2} \sigma(\xi) \varphi(\xi) \right] \\ &= (2,64846761)^2 \times 0,6 \times \left[ 1 + \frac{0,6}{4 \times (0,4)^2} \times 1,36943841 \times 0,85690544 \right] \\ &= 8,83869527 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

4. La relation (2.23) permet le calcul de  $\bar{D}_h$ , soit :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P} = 4 \times 8,83869527 / 8,08883749 = 4,37081115 \text{ m}$$

5. Le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  est selon la relation (2.27) :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 3,274}{8,08883749 \times 10^{-6}} = 1619021,28$$

6. Le facteur de correction  $\psi$  est en vertu de la relation (2.25),:

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{10^{-3}/4,37081115}{4,75} + \frac{8,5}{1619021,28} \right) \right]^{-2/5} = 0,75521059 \end{aligned}$$

7. Les valeurs des grandeurs dimensionnelles  $b$  et  $D$  sont à partir de la relation fondamentale (2.24) :

$$b = \psi \bar{b} = 0,75521059 \times 2,64846761 = 2,0001508 \text{ m} \approx 2 \text{ m}$$

$$D = \psi \bar{D} = 0,75521059 \times 3,97270141 = 3,00022619 \text{ m} \approx 3 \text{ m}$$

8. La profondeur normale recherchée est donc :

$$y_n = \eta b = 0,6 \times 2,0001508 = 1,20009048 \text{ m} \approx 1,2 \text{ m}$$

9. L'étape suivante à pour objectif de procéder à la vérification des calculs effectués par la détermination de la pente longitudinale  $i$  par application de la relation (2.1) de Darcy – Weisbach.

En effet, le coefficient de frottement  $f$  est donné par la relation suivante (Achour, 2007) :

$$f = \psi^5 / 16 = 0,75521059 / 16 = 0,01535396$$

Selon la relation (2.11), le périmètre mouillé  $P$  du canal réel peut s'écrire, en remplaçant  $\bar{b}$  par  $b$  :

$$P = b \left[ 1 + \frac{\eta}{\xi} \sigma(\xi) \right] = 2,0001508 \times \left[ 1 + \frac{0,6}{0,4} \times 1,36943841 \right] = 6,10877577 \text{ m}$$

De même, selon la relation (2.20), l'aire de la section mouillée du canal réel  $A$  s'écrit :

$$\begin{aligned} A &= b^2 \eta \left[ 1 + \frac{\eta}{4\xi^2} \sigma(\xi) \varphi(\xi) \right] \\ &= (2,0001508)^2 \times 0,6 \times \left[ 1 + \frac{0,6}{4 \times (0,4)^2} \times 1,36943841 \times 0,85690544 \right] \\ &= 5,04108835 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Le diamètre hydraulique  $D_h = 4A/P$  est donc :

$$D_h = 4A/P = 4 \times 5,04108835 / 6,10877577 = 3,30088289 \text{ m}$$

En vertu de la relation (2.1), la pente longitudinale  $i$  est :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,01535396}{3,30088289} \times \frac{(3,274)^2}{2 \times 9,81 \times (5,04108835)^2} = 10^{-4}$$

Ainsi, la pente  $i$  obtenue et celle indiquée dans les données de l'exercice sont les mêmes (écart 0 %), cela mène à apprécier la validité de la procédure suivie.

### III. Approche théorique au calcul de la profondeur normale

Dans cette section, les dimensions horizontales du canal sont connues et la profondeur normale de  $y_n$  est à exprimer de telle sorte de satisfaire les conditions du problème résumées comme suit : le canal à parois circulaires et à fond horizontal, de rugosité absolue  $\varepsilon$ , véhicule un débit  $Q$  d'un fluide caractérisé par une viscosité cinématique  $\nu$  avec une pente géométrique  $i$ . Les dimensions horizontales du canal sont largeur de fond du canal  $b$  ainsi que le diamètre des parties circulaires du canal  $D$  (Figure 2.1). Tous ces paramètres sont connus et on doit déterminer la profondeur normale  $y_n$  qui convient à ces conditions.

#### III.1. Modèle rugueux de référence

Il s'agit du même modèle défini par la figure 2.2 caractérisé par une rugosité relative  $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 0,037$  ainsi qu'un coefficient de frottement est  $\bar{f} = 1/16$  (Achour, 2007). Rappelons que les dimensions  $b$  et  $D$  du canal sont connues ainsi que les paramètres hydrodynamiques de l'écoulement  $Q$ ,  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$

sont connus également et on cherche à déterminer la profondeur normale  $y_n$ . Dans ce cas le principe de la méthode MMR mène à écrire :  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{D} = D$ ,  $\bar{i} = i$  et  $\bar{Q} = Q$ , mais  $\bar{y}_n \neq y_n$  voire même  $\bar{y}_n > y_n$ . De ce fait, les paramètres de forme sont tels que :  $\bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b} \neq \eta = y_n / b$  et  $\bar{\xi} = \bar{y}_n / \bar{D} \neq \xi = y_n / D$ . De plus, les dimensions  $b$  et  $D$  sont connues, d'où on peut imposer un nouveau paramètre forme tel que :

$$\beta = \frac{b}{D} = \frac{\xi}{\eta} = \bar{\beta} = \frac{\bar{\xi}}{\bar{\eta}} \quad (2.28)$$

Les paramètres de forme  $\eta$ ,  $\xi$  et  $\beta$  représentent respectivement la profondeur normale relative, le taux de remplissage et la largeur relative.

L'équation de *Darcy – Weisbach* appliquée au modèle rugueux de référence représentée par la relation (2.4) reste en vigueur ici, soit en rappelant son expression :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} Q^2 \quad (2.4)$$

L'aire de la section mouillée du modèle rugueux  $\bar{A}$  peut s'écrire par analogie avec la relation (2.20) en tenant compte que :  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b} \neq \eta = y_n / b$  et  $\bar{\xi} = \bar{y}_n / \bar{D} \neq \xi = y_n / D$ , soit :

$$\bar{A} = b^2 \bar{\eta} \left[ 1 + \frac{\bar{\eta}}{4\bar{\xi}^2} \sigma(\bar{\xi}) \varphi(\bar{\xi}) \right] \quad (2.29)$$

Les fonctions  $\sigma(\bar{\xi})$  et  $\varphi(\bar{\xi})$  sont déduites à partir des relations (2.10) et (2.17) respectivement, telles que :

$$\sigma(\bar{\xi}) = \cos^{-1}(1 - 2\bar{\xi}) \quad (2.30)$$

Et :

$$\varphi(\bar{\xi}) = 1 - \frac{2(1 - 2\bar{\xi}) \sqrt{\bar{\xi}(1 - \bar{\xi})}}{\cos^{-1}(1 - 2\bar{\xi})} \quad (2.31)$$

En outre, en tenant compte de la relation (2.28), la relation (2.29) devient :

$$\bar{A} = \frac{b^2}{\beta} \left[ \bar{\xi} + \frac{1}{4\beta} \sigma(\bar{\xi}) \varphi(\bar{\xi}) \right] \quad (2.32)$$

Le périmètre mouillé du modèle rugueux  $\bar{P}$  est déduit en se basant sur la relation (2.11) en tenant compte que :  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b} \neq \eta = y_n / b$  et  $\bar{\xi} = \bar{y}_n / \bar{D} \neq \xi = y_n / D$ , soit :

$$\bar{P} = b \left[ 1 + \frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}} \sigma(\bar{\xi}) \right] \quad (2.33)$$

La fonction  $\sigma(\bar{\xi})$  est exprimée par l'équation (2.30).

La relation (2.33) s'écrit, en considérant la relation (2.28) :

$$\bar{P} = b \left[ \frac{\sigma(\bar{\xi})}{\beta} + 1 \right] \quad (2.34)$$

En remplaçant les relations (2.32) et (2.34) dans la relation (2.4), on obtient :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{b \left[ \frac{\sigma(\bar{\xi})}{\beta} + 1 \right]}{\frac{b^6}{\beta^3} \left[ \bar{\xi} + \frac{1}{4\beta} \sigma(\bar{\xi}) \varphi(\bar{\xi}) \right]^3} Q^2$$

Ou bien, après réarrangement et simplification :

$$\frac{\beta^5 \left[ \sigma(\bar{\xi}) + \beta \right]}{2 \left[ \sigma(\bar{\xi}) \varphi(\bar{\xi}) + 4\beta \bar{\xi} \right]^3} \left( \frac{Q^2}{gib^5} \right) = 1 \quad (2.35)$$

Soit par définition, la conductivité relative  $Q^*$  :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} \quad (2.36)$$

D'où, la relation (2.35) devient :

$$\frac{\beta^5 \left[ \sigma(\bar{\xi}) + \beta \right]}{2 \left[ \sigma(\bar{\xi}) \varphi(\bar{\xi}) + 4\beta \bar{\xi} \right]^3} Q^{*2} = 1 \quad (2.37)$$

Connaissant les de  $Q$ , de  $i$  et de  $b$ , on calcule la conductivité relative  $Q^*$  par application de la formule (2.36). De ce fait, la relation (2.37) permet le calcul du paramètre de forme du modèle rugueux  $\bar{\xi}$  connaissant la valeur de  $\beta$ . Il est à noter que la relation (2.37) est implicite vis-à-vis de  $\bar{\xi}$ , pour cela une procédure itérative ou une méthode graphique pour la détermination de  $\bar{\xi}$  est nécessaire. Cependant, on a suggéré de proposer une excellente relation approchée en remplacement de la relation implicite (2.37). Après plusieurs tentatives d'ajustement, on a choisi une équation de type polynomial d'ordre six (06) qui s'écrit :

$$\bar{\xi} = a_6 Z^6 + a_5 Z^5 + a_4 Z^4 + a_3 Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0 \quad (2.38)$$

Le paramètre  $Z$  figurant dans la relation (2.38) dépend exclusivement de la conductivité relative  $Q^*$  tel que :

$$Z = \log Q^* \quad (2.39)$$

En outre, les paramètres d'ajustement de  $a_0$  à  $a_6$  dépendent étroitement de la largeur relative  $\beta$  dont les valeurs sont regroupées dans le tableau 2.1.

**Tableau 2.1** : Valeurs des paramètres d'ajustement de la relation (2.38).

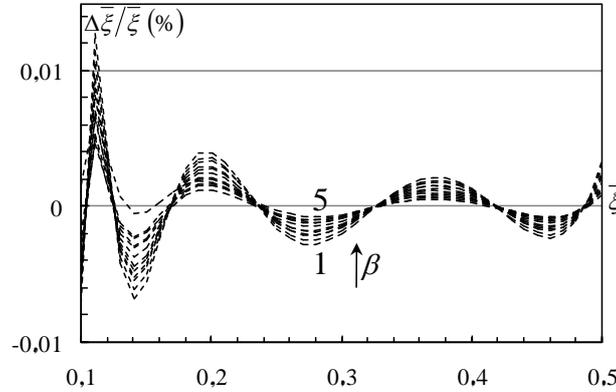
		$a_6$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$\beta$	1	$\frac{109}{2389}$	$-\frac{89}{13051}$	$\frac{47}{1351}$	$\frac{202}{2311}$	$\frac{545}{3286}$	$\frac{328}{1423}$	$\frac{836}{5199}$
	1,2	$\frac{289}{6616}$	$\frac{137}{4389}$	$\frac{245}{5501}$	$\frac{673}{6113}$	$\frac{401}{1907}$	$\frac{1090}{3821}$	$\frac{304}{1545}$
	1,4	$\frac{155}{3713}$	$\frac{96}{1603}$	$\frac{193}{2692}$	$\frac{543}{3929}$	$\frac{985}{3844}$	$\frac{364}{1065}$	$\frac{361}{1547}$
	1,6	$\frac{124}{3109}$	$\frac{307}{3752}$	$\frac{437}{4110}$	$\frac{327}{1874}$	$\frac{904}{2961}$	$\frac{549}{1373}$	$\frac{815}{3013}$
	1,8	$\frac{84}{2203}$	$\frac{181}{1832}$	$\frac{659}{4595}$	$\frac{386}{1771}$	$\frac{533}{1487}$	$\frac{307}{668}$	$\frac{269}{873}$
	2	$\frac{293}{8029}$	$\frac{355}{3168}$	$\frac{935}{5183}$	$\frac{187}{701}$	$\frac{435}{1046}$	$\frac{358}{687}$	$\frac{974}{2813}$
	2,5	$\frac{120}{3647}$	$\frac{2553}{19024}$	$\frac{437}{1646}$	$\frac{387}{964}$	$\frac{1631}{2832}$	$\frac{2983}{4367}$	$\frac{173}{390}$
	3	$\frac{179}{5977}$	$\frac{505}{3444}$	$\frac{756}{2245}$	$\frac{1009}{1866}$	$\frac{818}{1087}$	$\frac{89}{104}$	$\frac{845}{1554}$
	3,5	$\frac{199}{7236}$	$\frac{472}{3073}$	$\frac{369}{934}$	$\frac{577}{854}$	$\frac{979}{1044}$	$\frac{2162}{2085}$	$\frac{1154}{1785}$
	4	$\frac{102}{4007}$	$\frac{281}{1786}$	$\frac{654}{1477}$	$\frac{7621}{9495}$	$\frac{778}{691}$	$\frac{2070}{1691}$	$\frac{2337}{3110}$
	4,5	$\frac{533}{22465}$	$\frac{807}{5072}$	$\frac{552}{1145}$	$\frac{1358}{1475}$	$\frac{1563}{1190}$	$\frac{1261}{891}$	$\frac{115}{134}$
	5	$\frac{155}{6967}$	$\frac{224}{1403}$	$\frac{2471}{4800}$	$\frac{861}{836}$	$\frac{418}{279}$	$\frac{7630}{4743}$	$\frac{633}{655}$

La relation proposée (2.38), est applicable dans les intervalles de la conductivité relative  $Q^*$  indiqués dans le tableau 2.2 ainsi que pour le large intervalle pratique du taux de remplissage des parties circulaires :  $0,1 \leq \bar{\xi} \leq 0,5$ .

**Tableau 2.2** : Limites d'application de la relation (2.38).

$\beta$	1	1,2	1,4
$Q^*$	$0,4666 \leq Q^* \leq 5,9515$	$0,3409 \leq Q^* \leq 4,2616$	$0,2625 \leq Q^* \leq 3,2330$
$\beta$	1,6	1,8	2
$Q^*$	$0,2100 \leq Q^* \leq 2,5557$	$0,1728 \leq Q^* \leq 2,08355$	$0,1454 \leq Q^* \leq 1,7395$
$\beta$	2,5	3	3,5
$Q^*$	$0,1013 \leq Q^* \leq 1,1947$	$0,07567 \leq Q^* \leq 0,8840$	$0,05927 \leq Q^* \leq 0,6876$
$\beta$	4	4,5	5
$Q^*$	$0,04803 \leq Q^* \leq 0,5544$	$0,03994 \leq Q^* \leq 0,4592$	$0,03389 \leq Q^* \leq 0,3884$

La figure 2.3 illustre les écarts relatifs  $\Delta \bar{\xi} / \bar{\xi}$  occasionnés lorsque la relation approchée (2.38) est appliquée en remplacement de la relation implicite (2.37). Les écarts relatifs  $\Delta \bar{\xi} / \bar{\xi}$  ont été calculés pour différentes valeurs de  $\bar{\xi}$  (0,1 à 0,5) et  $\beta$  (1 à 5).



**Figure 2.3 :** Ecarts relatifs  $\Delta \bar{\xi} / \bar{\xi}$  pour différentes valeurs de  $\beta$   
(Pour les intervalles de  $Q^*$ , voir tableau 2.2).

La figure 2.3 indique clairement que l'écart relatif maximal  $\Delta \bar{\xi} / \bar{\xi}$  est inférieur à 0,013 %, montrant ainsi l'excellente précision de la relation approchée (2.38).

Il est important de signaler que la valeur de la largeur relative  $\beta$  est imposée, donc il est intéressant de choisir une valeur qui figure dans le tableau 2.1 facilitant alors de déduire les valeurs de  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$ ,  $a_5$  et  $a_6$ . Cependant, il se peut qu'on se trouve devant une situation où la valeur de  $\beta$  est différente de celles indiquées dans le tableau 2.1, dans ce cas on note deux (02) solutions telles que :

- i.* doit revenir à la relation implicite (2.37) et de rechercher une solution itérative ou graphique.
- ii.* déterminer les valeurs de  $a_0$  à  $a_6$  par interpolation en se basant sur le tableau 2.1, puis appliquer la relation approchée (2.38).

En revanche, une fois le taux de remplissage des parties circulaires du modèle rugueux  $\bar{\xi}$  est atteint, la valeur de la profondeur relative du modèle rugueux  $\bar{\eta}$  est simplement déduite en se référant à la relation (2.28), soit :

$$\bar{\eta} = \bar{\xi} / \beta \quad (2.40)$$

De même pour le canal réel, soit :

$$\eta = \xi / \beta \quad (2.41)$$

### III.2. Etapes de calcul de la profondeur normale

Afin d'évaluer la profondeur normale  $y_n$  pour un canal à parois circulaires et à fond horizontal, un organigramme (Figure 2.4) a été construit dont les données sont : le débit  $Q$ , la pente longitudinale  $i$  du lit du canal, la largeur du fond  $b$ , le diamètre des parties circulaires  $D$ , la rugosité  $\varepsilon$  et la viscosité  $\nu$ . Notons que tous ces propriétés sont mesurables en pratique.

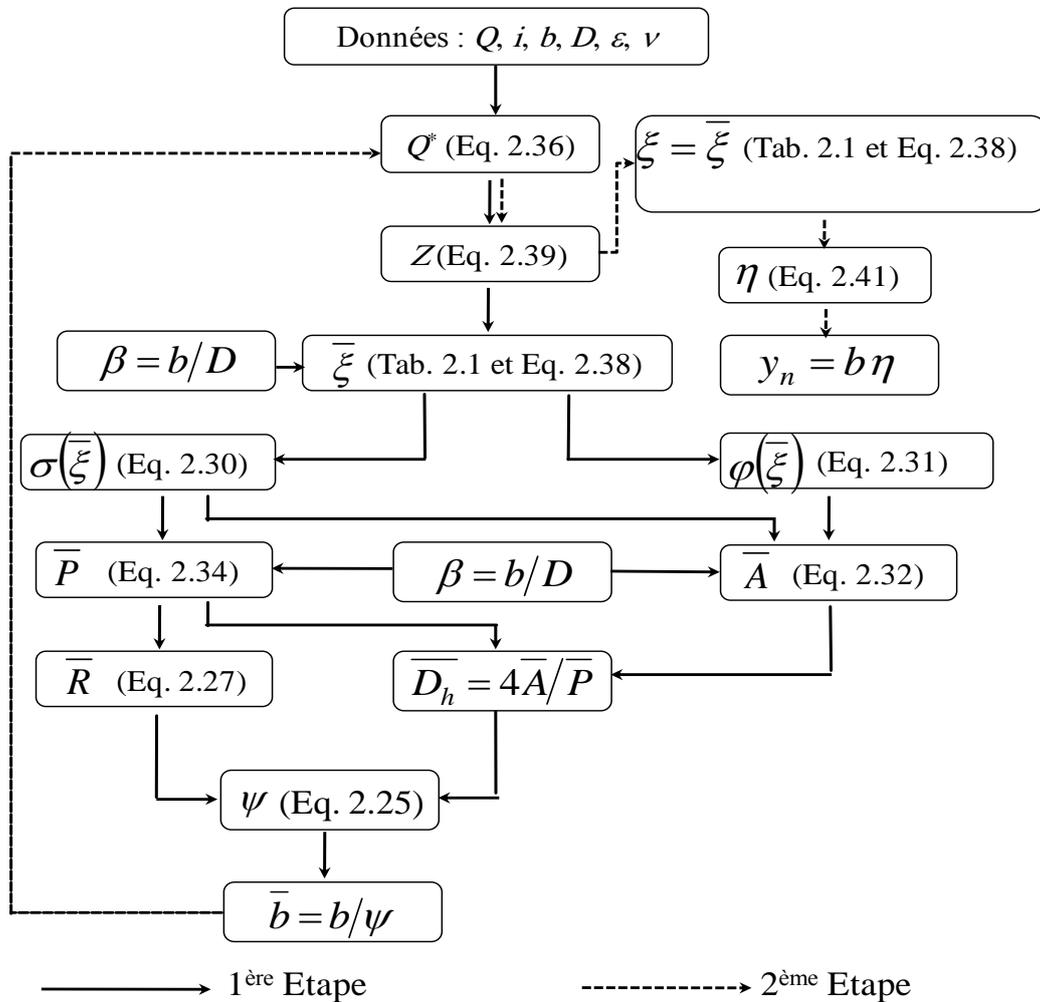


Figure 2.4 : Récapitulation de la méthode de calcul de la profondeur normale.

### III.3. Exemple d'application 2.2

Pour éclaircir la procédure de calcul résumée dans l'organigramme de la figure 2.4, l'exemple d'application pratique ci-dessous est proposé.

Il s'agit alors de calculer la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$  sachant que :  $Q = 15,197 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $b = 10 \text{ m}$ ,  $D = 5 \text{ m}$ ,  $i = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

1. La grandeur adimensionnelle  $Q^*$  est évaluée par la formule (2.36), comme suit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} = \frac{15,197}{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 10^5}} = 1,53434619$$

2. En utilisant la relation (2.39), le paramètre  $Z$  est alors :

$$Z = \log Q^* = \log(1,53434619) = 0,18592336$$

3. La largeur de fond relative  $\beta$  est comme suit :

$$\beta = b/D = 10/5 = 2$$

4. En se référant à la relation (2.38) et au tableau 2.1, le taux de remplissage des parties circulaires du modèle rugueux  $\bar{\xi}$  est déterminé comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= a_6 Z^6 + a_5 Z^5 + a_4 Z^4 + a_3 Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0 \\ &= \frac{293}{8029} \times 0,18592336^6 + \frac{355}{3168} \times 0,18592336^5 + \frac{935}{5183} \times 0,18592336^4 \\ &\quad + \frac{187}{701} \times 0,18592336^3 + \frac{435}{1046} \times 0,18592336^2 + \frac{358}{687} \times 0,18592336 + \frac{974}{2813} \\ &= 0,45946738 \end{aligned}$$

5. Les quantités  $\sigma(\bar{\xi})$  et  $\varphi(\bar{\xi})$  sont évaluées par les expressions (2.30) et (2.31) respectivement, soit :

$$\sigma(\bar{\xi}) = \cos^{-1}(1 - 2\bar{\xi}) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,45946738) = 1,48964204$$

Et :

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\xi}) &= 1 - \frac{2(1 - 2\bar{\xi})\sqrt{\bar{\xi}(1 - \bar{\xi})}}{\cos^{-1}(1 - 2\bar{\xi})} \\ &= 1 - \frac{2(1 - 2 \times 0,45946738)\sqrt{0,45946738 \times (1 - 0,45946738)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,45946738)} = 0,94575983 \end{aligned}$$

6. En se basant sur la formule (2.32),  $\bar{A}$  est telle que :

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{b^2}{\beta} \left[ \bar{\xi} + \frac{1}{4\beta} \sigma(\bar{\xi}) \varphi(\bar{\xi}) \right] = \frac{10^2}{2} \left[ 0,45946738 + \frac{1}{4 \times 2} 1,48964204 \times 0,94575983 \right] \\ &= 31,7786415 m^2 \end{aligned}$$

7. La relation (2.34) est employée pour l'évaluation de  $\bar{P}$ , soit :

$$\bar{P} = b \left[ \frac{\sigma(\bar{\xi})}{\beta} + 1 \right] = 10 \times \left[ \frac{1,48964204}{2} + 1 \right] = 17,4482102 m$$

8. Connaissant  $\bar{A}$  et  $\bar{P}$  le diamètre hydraulique  $\bar{D}_h$  est comme suit :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P} = 4 \times 31,7786415 / 17,4482102 = 7,28524958 m$$

9. Le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  est déterminé par l'équation (2.27) tel que :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 15,197}{17,4482102 \times 10^{-6}} = 3483910,349$$

10. En se référant à la formule (2.25), le paramètre correctif  $\psi$  est explicitement déterminé comme suit :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{10^{-3} / 7,28524958}{4,75} + \frac{8,5}{3483910,349} \right) \right]^{-2/5} = 0,73942962 \end{aligned}$$

11. En accord avec la relation fondamentale de la méthode MMR (2.24), on donne au modèle rugueux la valeur suivante :

$$\bar{b} = b/\psi = 10/0,73942962 = 13,5239375m$$

Il convient de noter qu'en attribuant au modèle la nouvelle quantité  $b/\psi$ , le rapport d'aspect des parties circulaires du canal réel (étudié) est égal à celui du modèle rugueux, c'est-à-dire :  $\xi = \bar{\xi}$ . De ce fait, l'évaluation de  $Q^*$  sera, selon l'expression (2.36) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} = \frac{15,197}{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 13,5239375^5}} = 0,72138228$$

12. Selon la relation (2.39), la nouvelle valeur du paramètre Z est telle que :

$$Z = \log Q^* = \log(0,72138228) = -0,14183453$$

13. En utilisant les mêmes valeurs pour des coefficients  $a_0$  à  $a_6$  considérés au cours de l'étape 4, la relation (2.38) permet de déterminer le taux de remplissage des parties circulaires du canal réel  $\xi$  tel que :

$$\begin{aligned} \xi = \bar{\xi} &= a_6 Z^6 + a_5 Z^5 + a_4 Z^4 + a_3 Z^3 + a_2 Z^2 + a_1 Z + a_0 \\ &= \frac{293}{8029} \times (-0,14183453)^6 + \frac{355}{3168} \times (-0,14183453)^5 + \\ &\quad \frac{935}{5183} \times (-0,14183453)^4 + \frac{187}{701} \times (-0,14183453)^3 + \frac{435}{1046} \times (-0,14183453)^2 \\ &\quad + \frac{358}{687} \times (-0,14183453) + \frac{974}{2813} = 0,28001049 \end{aligned}$$

Selon la relation (2.41), on peut déduire la profondeur relative du canal réel (étudié) comme suit :

$$\eta = \xi / \beta = 0,28001049 / 2 = 0,14000524$$

14. Finalement, la profondeur normale recherchée est alors :

$$y_n = b\eta = 10 \times 0,14000524 = 1,40005243 \text{ m} \approx 1,4 \text{ m}$$

15. Le but de cette étape est de valider le calcul précédent. Pour cela, calculons la pente longitudinale du canal en utilisant la relation de *Darcy – Weisbach* exprimée par l'équation (2.1). Si les calculs effectués précédemment sont corrects, la pente qui sera ainsi calculée devrait être égale à la pente donnée dans l'énoncé du problème.

La méthode MMR stipule que le coefficient de frottement  $f$  peut être évalué par la formule suivante (*Achour, 2007*) :

$$f = \psi^5 / 16$$

Ainsi :

$$f = 0,73942962^5 / 16 = 0,01381542$$

En outre, les fonctions  $\sigma(\xi)$  et  $\varphi(\xi)$  sont déterminées, respectivement, selon les relations (2.30) et (2.31) en remplaçant  $\bar{\xi}$  par  $\xi$ , soit :

$$\sigma(\xi) = \cos^{-1}(1 - 2\xi) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,28001049) = 1,11522101$$

Et :

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= 1 - \frac{2(1-2\xi)\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\cos^{-1}(1-2\xi)} \\ &= 1 - \frac{2(1-2 \times 0,28001049)\sqrt{0,28001049 \times (1-0,28001049)}}{\cos^{-1}(1-2 \times 0,28001049)} = 0,64571623 \end{aligned}$$

De même,  $A$  et  $P$  du canal étudié (réel) peuvent être déduits à partir des relations (2.32) et (2.34), respectivement, tels que :

$$\begin{aligned} A &= \frac{b^2}{\beta} \left[ \xi + \frac{1}{4\beta} \sigma(\xi) \varphi(\xi) \right] = \frac{10^2}{2} \left[ 0,28001049 + \frac{1}{4 \times 2} 1,11522101 \times 0,64571623 \right] \\ &= 18,5012512 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Et :

$$P = b \left[ \frac{\sigma(\xi)}{\beta} + 1 \right] = 10 \times \left[ \frac{1,11522101}{2} + 1 \right] = 15,576105 \text{ m}$$

Pour les valeurs ainsi calculées de  $A$  et  $P$ , la grandeur  $D_h$  est alors :

$$D_h = 4A/P = 4 \times 18,5012512 / 15,576105 = 4,751188 \text{ m}$$

Finalement, la pente du canal  $i$  est calculée selon l'expression (2.1) telle que :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,01381542}{4,7511881} \times \frac{15,197^2}{2 \times 9,81 \times 18,5012512^2} = 0,000099995 \approx 10^{-4}$$

Il est ainsi clairement démontré que la pente longitudinale calculée est pratiquement égale à la pente donnée dans l'exercice ( $\Delta i/i = 0,005\%$ ), cela mène à prononcer sur la fiabilité de la méthode préconisée.

#### IV. Écoulement critique

##### IV.1. Dimensionnement

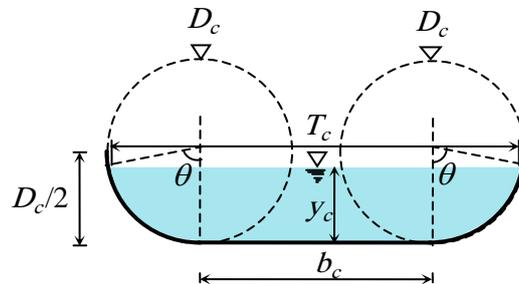
Dans ce cas, l'écoulement est supposé en état critique où on doit trouver une relation permettant la détermination de la profondeur critique  $y_c$  correspondante, ainsi que les autres dimensions du canal telles que la largeur du fond  $b_c$  et le diamètre des parties circulaires  $D_c$  (Figure 2.5). Les conditions hydrauliques dans ce cas sont : le débit  $Q$  et l'accélération de la pesanteur  $g$ . On définit, en outre, les deux paramètres de formes  $\eta_c$  et  $\xi_c$  tels que, respectivement :

$$\eta_c = y_c/b_c \quad (2.42)$$

Et :

$$\xi_c = y_c/D_c \quad (2.43)$$

Ces deux paramètres sont imposés et peuvent, ainsi, être considérés parmi les données du problème.



**Figure 2.5 :** Schéma de définition de l'état de l'écoulement critique dans un canal à parois circulaires et à fond horizontal.

Lorsque l'écoulement est en état critique, le nombre de Froude  $F_r$  est égal à un (01) d'où le problème est gouverné par la relation (1.100) citée dans le deuxième chapitre de la première partie telle que :

$$F_r = \frac{\alpha Q^2 T}{gA^3} = 1 \quad (1.100)$$

Où  $T$  est la largeur superficielle de la surface libre.

La grandeur  $\alpha \approx 1$ , car l'écoulement est turbulent. En outre, pour différencier l'écoulement critique, la surface de la section mouillée  $A$  et la largeur du plan d'eau  $T$  seront remplacés par  $A_c$  et  $T_c$  respectivement (Figure 2.5).

De ce fait, l'équation (1.100) s'écrit :

$$\frac{Q^2 T_c}{g A_c^3} = 1 \quad (2.44)$$

$A_c$  peut être déduite est à exprimer à partir de la formule (2.20) telle que :

$$A = b_c^2 \eta_c \left[ 1 + \frac{\eta_c}{4 \xi_c^2} \sigma(\xi_c) \varphi(\xi_c) \right] \quad (2.45)$$

Les fonctions  $\sigma(\xi_c)$  et  $\varphi(\xi_c)$  peuvent être exprimées par analogie avec les relations (2.10) et (2.17) respectivement, soient :

$$\sigma(\xi_c) = \cos^{-1}(1 - 2\xi_c) \quad (2.46)$$

Et :

$$\varphi(\xi_c) = 1 - \frac{2(1 - 2\xi_c) \sqrt{\xi_c(1 - \xi_c)}}{\cos^{-1}(1 - 2\xi_c)} \quad (2.47)$$

Posons la fonction  $\tau(\xi_c, \eta_c)$  telle que :

$$\tau(\xi_c, \eta_c) = \eta_c \left[ 1 + \frac{\eta_c}{4 \xi_c^2} \sigma(\xi_c) \varphi(\xi_c) \right] \quad (2.48)$$

De ce fait, la relation (2.45) s'écrit simplement :

$$A_c = b_c^2 \tau(\xi_c, \eta_c) \quad (2.49)$$

La largeur du plan d'eau s'écrit, selon la figure 2.5 :

$$T_c = b_c + 2 \frac{D_c}{2} \sin \theta \quad (2.50)$$

Ou bien, en se basant sur la relation (2.15) :

$$T_c = b_c + 2 D_c \sqrt{\xi_c(1 - \xi_c)}$$

Cette dernière relation peut s'écrire :

$$T_c = b_c \left[ 1 + 2 \frac{D_c}{b_c} \times \frac{y_c}{y_c} \times \sqrt{\xi_c(1 - \xi_c)} \right]$$

Soit, en tenant compte des relations (2.42) et (2.43) :

$$T_c = b_c \left[ 1 + 2 \frac{\eta_c}{\xi_c} \sqrt{\xi_c(1 - \xi_c)} \right] \quad (2.51)$$

Posons la fonction  $\rho(\xi_c, \eta_c)$  telle que :

$$\rho(\xi_c, \eta_c) = 1 + 2 \frac{\eta_c}{\xi_c} \sqrt{\xi_c(1 - \xi_c)} \quad (2.52)$$

La relation (2.51) s'écrit par conséquent :

$$T_c = b_c \rho(\xi_c, \eta_c) \quad (2.53)$$

En remplaçant les relations (2.49) et (2.53) dans la relation (2.44), on obtient :

$$\frac{Q^2}{g} \frac{b_c \rho(\xi_c, \eta_c)}{[b_c^2 \tau(\xi_c, \eta_c)]^3} = 1$$

Ou bien, après simplification et réarrangement :

$$b_c = \frac{[\rho(\xi_c, \eta_c)]^{1/5} \left( \frac{Q^2}{g} \right)^{1/5}}{[\tau(\xi_c, \eta_c)]^{3/5}} \quad (2.54)$$

Ainsi, en état d'écoulement critique, la relation (2.54) permet le calcul explicite de la largeur de fond  $b_c$  du canal en fonction des valeurs connues des paramètres :  $Q$ ,  $\eta_c$  et  $\xi_c$ .

Le diamètre des parties circulaires du canal  $D_c$  est déduit en se basant sur la relation (2.22), soit :

$$D_c = \frac{\eta_c}{\xi_c} b_c \quad (2.55)$$

Finalement, la profondeur critique est évaluée en se référant à la relation (2.42) telle que :

$$y_c = \eta_c b_c \quad (2.56)$$

#### IV.2. Etapes de calcul des dimensions linéaires du canal

Afin de déterminer les dimensions du canal considéré en conditions critiques, les grandeurs suivantes sont sensées être connues :  $Q$ ,  $\eta_c$ ,  $\xi_c$ , et  $g$ . Les propriétés à évaluer sont :  $y_c$ ,  $b_c$  et  $D_c$ . de ce fait on suggère la démarche suivante :

1. Evaluer les quantités  $\sigma(\xi_c)$  et  $\varphi(\xi_c)$  à partir des expressions (2.46) et (2.47) respectivement.
2. Calculer les fonctions  $\tau(\xi_c, \eta_c)$  et  $\rho(\xi_c, \eta_c)$  respectivement par les relations (2.48) et (2.52).
3. Déterminer la largeur de fond du canal  $b_c$  ainsi que le diamètre  $D_c$  en se basant sur les équations (2.54) et (2.55) respectivement.
4. Enfin, déduire la valeur de la profondeur critique selon l'expression (2.56).

#### IV.3. Exemple d'application 2.3

Considérons le canal de la figure 2.5. En supposant que l'écoulement dans le canal est en état critique, évaluer  $b_c$ ,  $D_c$  et  $y_c$ , sachant que :

$$Q = 56,49 \text{ m}^3/\text{s}, \quad \eta_c = 0,2, \quad \xi_c = 0,4 \text{ et } g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

1. Les équations (2.46) et (2.47) permettent respectivement l'évaluation des quantités  $\sigma(\xi_c)$  et  $\varphi(\xi_c)$ , soient :

$$\sigma(\xi_c) = \cos^{-1}(1 - 2\xi_c) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,4) = 1,36943841$$

$$\varphi(\xi_c) = 1 - \frac{2(1 - 2\xi_c)\sqrt{\xi_c(1 - \xi_c)}}{\cos^{-1}(1 - 2\xi_c)} = 1 - \frac{2(1 - 2 \times 0,4)\sqrt{0,4 \times (1 - 0,4)}}{\cos^{-1}(1 - 2 \times 0,4)} = 0,856905442$$

2. Les fonctions  $\tau(\xi_c, \eta_c)$  et  $\rho(\xi_c, \eta_c)$  sont calculées respectivement à partir des relations (2.48) et (2.52), soient :

$$\tau(\xi_c, \eta_c) = \eta_c \left[ 1 + \frac{\eta_c}{4\xi_c^2} \sigma(\xi_c) \varphi(\xi_c) \right] = 0,2 \times \left( 1 + \frac{0,2}{4 \times (0,4)^2} \times 1,36943841 \times 0,856905442 \right) = 0,27334245$$

$$\rho(\xi_c, \eta_c) = 1 + 2 \frac{\eta_c}{\xi_c} \sqrt{\xi_c(1 - \xi_c)} = 1 + 2 \times \frac{0,2}{0,4} \times \sqrt{0,4 \times (1 - 0,4)} = 1,48989795$$

3. Les dimensions  $b_c$  et  $D_c$  sont déterminées respectivement à travers les expressions (2.54) et (2.55), telles que :

$$b_c = \frac{[\rho(\xi_c, \eta_c)]^{1/5} \left( \frac{Q^2}{g} \right)^{1/5}}{[\tau(\xi_c, \eta_c)]^{3/5}} = \frac{(1,48989795)^{1/5} \left( \frac{56,49^2}{9,81} \right)^{1/5}}{(0,27334245)^{3/5}} = 7,50001068 \text{ m} \approx 7,5 \text{ m}$$

$$D_c = \frac{\eta_c}{\xi_c} b_c = \frac{0,2}{0,4} \times 7,50001068 = 3,75000534 \text{ m} \approx 3,75 \text{ m}$$

4. La profondeur critique recherchée est, selon la relation (2.56) :

$$y_c = \eta_c b_c = 0,2 \times 7,50001068 = 1,50000214 \text{ m} \approx 1,5 \text{ m}$$

5. La présente partie a pour objectif de juger la justesse de la procédure proposée à travers la vérification de l'équation (2.44).

En effet, à partir de l'expression (2.49), on peut calculer la surface mouillée  $A_c$  telle que :

$$A_c = b_c^2 \tau(\xi_c, \eta_c) = (7,50001068)^2 \times 0,27334245 = 15,3755567 \text{ m}^2$$

Selon la relation (2.53), la largeur du plan d'eau  $T_c$  est :

$$T_c = b_c \rho(\xi_c, \eta_c) = 7,50001068 \times 1,48989795 = 11,1742505 \text{ m}$$

La formule (2.44) permet ainsi d'examiner l'état critique, soit :

$$\frac{Q^2 T_c}{g A_c^3} = \frac{(56,49)^2 \times 11,1742505}{9,81 \times (15,3755567)^3} = 1$$

Comme nous pouvons le constater, l'équation (2.44) est vérifiée pour les dimensions du canal ainsi déterminées, cela mène à prononcer sur la validité de la méthode développée.

## V. Equation du débit volume

### V.1. Modèle rugueux et expression du débit

Dans ce cas, les paramètres dimensionnels  $b$ ,  $D$  et  $y_n$  ainsi que les propriétés hydrodynamiques  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$  sont des paramètres connus. L'objectif est alors de procéder au calcul du débit volume  $Q$  par la méthode MMR. De ce fait, le modèle rugueux (Figure 2.2) est gouverné par les conditions suivantes :  $\bar{y}_n = y_n$ ,  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{D} = D$ ,  $\bar{i} = i$  et  $\bar{Q} \neq Q$ .

Alors, la relation (2.1) s'écrit :

$$i = \frac{\bar{f}}{D_h} \frac{\bar{Q}^2}{2gA^2} \quad (2.57)$$

Sachant que  $D_h = 4A/P$  et que  $\bar{f} = 1/16$ , la relation (2.57) devient :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{P}{A^3} \bar{Q}^2$$

Ou bien :

$$\bar{Q} = 8\sqrt{2gi} \left( \frac{A^3}{P} \right)^{1/2} \quad (2.58)$$

Le périmètre mouillé  $P$  s'exprime en se référant à l'équation (2.11) tel que :

$$P = b \left[ 1 + \frac{\eta}{\xi} \sigma(\xi) \right] \quad (2.59)$$

La fonction  $\sigma(\xi)$  est formulée à travers l'expression (2.10).

Rappelons que les rapports d'aspect  $\eta$  et  $\xi$  sont, respectivement :  $\eta = y_n/b$  et  $\xi = y_n/D$ .

Posons la fonction  $\lambda(\eta, \xi)$  telle que :

$$\lambda(\eta, \xi) = 1 + \frac{\eta}{\xi} \sigma(\xi) \quad (2.60)$$

De ce fait, la formule (2.59) devient :

$$P = b\lambda(\eta, \xi) \quad (2.61)$$

La surface de la section mouillée  $A$  peut être déduite de la relation (2.49), soit :

$$A = b^2 \tau(\xi, \eta) \quad (2.62)$$

La fonction  $\tau(\eta, \xi)$  s'écrit à partir de l'équation (2.48) comme suit :

$$\tau(\xi, \eta) = \eta \left[ 1 + \frac{\eta}{4\xi^2} \sigma(\xi) \varphi(\xi) \right] \quad (2.63)$$

Les fonctions  $\sigma(\xi)$  et  $\varphi(\xi)$  sont exprimées par les relations (2.10) et (2.17) respectivement.

En tenant compte des relations (2.61) et (2.62), la relation (2.58) devient :

$$\bar{Q} = 8\sqrt{2gi} \left\{ \frac{[b^2\tau(\xi, \eta)]^3}{b\lambda(\eta, \xi)} \right\}^{1/2}$$

Ou bien, après simplification et réarrangement :

$$\bar{Q} = 8\sqrt{2}\sqrt{gib^5} \frac{[\tau(\xi, \eta)]^{3/2}}{[\lambda(\eta, \xi)]^{1/2}} \quad (2.64)$$

Connaissant les valeurs des paramètres  $i$ ,  $b$ ,  $\eta$  et  $\xi$ , le débit volume du modèle rugueux de référence  $\bar{Q}$  est alors facilement calculé par application de la relation (2.64) en association avec les relations (2.60) et (2.63).

Par ailleurs l'équation du débit véhiculé dans un canal à parois circulaires et à fond horizontal (le canal réel) peut être obtenue en se basant sur la relation générale du débit proposée par *Achour et Bedjaoui* (2006) qui a été présentée au cours du premier chapitre de la première partie, dont on rappelle l'expression telle que :

$$Q = -4\sqrt{2g}A\sqrt{R_h J} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{R^*}\right) \quad (1.68)$$

Le nombre de *Reynolds*  $R^*$  figurant dans la relation (1.68) est :

$$R^* = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gR_h^3 J}}{\nu} \quad (1.69)$$

Le gradient de la perte de charge linéaire  $J$  figuré dans les relations (1.68) et (1.69) est à remplacer par la pente longitudinale  $i$  car l'écoulement est à surface libre. Soit, respectivement, en tenant compte que  $R^* = \bar{R}$  :

$$Q = -4\sqrt{2g}A\sqrt{R_h i} \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right) \quad (2.65)$$

Et :

$$R^* = \bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gR_h^3 i}}{\nu} \quad (2.66)$$

On a remplacé  $R^*$  par  $\bar{R}$  juste pour être conforme avec la règle d'ajouter " " à tous les paramètres du modèle rugueux de référence.

Le rayon hydraulique  $R_h$  figuré dans les relations (2.65) et (2.66) est tel que :  $R_h = A/P$ . Soit en se basant sur les relations (2.61) et (2.62) :

$$R_h = \frac{b^2 \tau(\xi, \eta)}{b \lambda(\eta, \xi)} = b \frac{\tau(\xi, \eta)}{\lambda(\eta, \xi)} \quad (2.67)$$

En remplaçant les relations (2.62) et (2.67) dans la relation (2.65), on obtient :

$$Q = -4\sqrt{2} g b^2 \tau(\xi, \eta) \sqrt{b \frac{\tau(\xi, \eta)}{\lambda(\eta, \xi)}} i \log \left[ \frac{\varepsilon}{14,8 b \frac{\tau(\xi, \eta)}{\lambda(\eta, \xi)}} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right]$$

Cette dernière relation s'écrit, après simplification et réarrangement :

$$Q = -4\sqrt{2} \sqrt{g i b^5} \frac{[\tau(\xi, \eta)]^{3/2}}{[\lambda(\eta, \xi)]^{1/2}} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8 [\tau(\xi, \eta)/\lambda(\eta, \xi)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} \quad (2.68)$$

Le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  s'écrit, en vertu des relations (2.66) et (2.67) :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g \left[ b \frac{\tau(\xi, \eta)}{\lambda(\eta, \xi)} \right]^3} i}{\nu}$$

Ou bien :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g i b^3} \left[ \frac{\tau(\xi, \eta)}{\lambda(\eta, \xi)} \right]^{3/2}}{\nu} \quad (2.69)$$

L'application de la relation (2.69), en association avec les relations (2.60) et (2.63), permet le calcul de la propriété  $\bar{R}$  connaissant les valeurs des paramètres  $i$ ,  $b$ ,  $\nu$ ,  $\tau$  et  $\lambda$ .

En revanche, en divisant la relation (2.68) par la relation (2.64), on obtient :

$$\frac{Q}{\bar{Q}} = \frac{-4\sqrt{2} \sqrt{g i b^5} \frac{[\tau(\xi, \eta)]^{3/2}}{[\lambda(\eta, \xi)]^{1/2}} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8 [\tau(\xi, \eta)/\lambda(\eta, \xi)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\}}{8\sqrt{2} \sqrt{g i b^5} \frac{[\tau(\xi, \eta)]^{3/2}}{[\lambda(\eta, \xi)]^{1/2}}}$$

Ou bien, après simplification et réarrangement :

$$\frac{Q}{\bar{Q}} = -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8 [\tau(\xi, \eta)/\lambda(\eta, \xi)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} \quad (2.70)$$

Posons :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8 [\tau(\xi, \eta)/\lambda(\eta, \xi)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} \quad (2.71)$$

D'où la relation (2.70) devient :

$$Q = \psi_Q \bar{Q} \quad (2.72)$$

Ainsi, nous pouvons constater que le débit volume  $Q$  véhiculé par le canal réel est égal au débit volume  $\bar{Q}$  véhiculé par le modèle ajusté par le paramètre de correction  $\psi_Q$  (Analogue à la relation de Achour, 2007).

De ce fait, le débit volume  $Q$  sera évalué directement selon la formule (2.68) ou bien par l'utilisation des relations (2.64), (2.71) et (2.72).

## V.2. Etapes de calcul du débit volume

Les données du problème sont :  $b$ ,  $D$ ,  $y_n$ ,  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$ . Les étapes de calcul du débit volume  $Q$  sont résumées dans ce qui suit :

1. Calculer les paramètres de forme  $\eta$  et  $\xi$  tels que, respectivement :  $\eta = y_n/b$  et  $\xi = y_n/D$ .
2. Evaluer les quantités  $\sigma(\xi)$  et  $\varphi(\xi)$  à travers les expressions (2.10) et (2.17) respectivement.
3. Evaluer les quantités  $\lambda(\xi, \eta)$  et  $\tau(\xi, \eta)$  à travers les expressions (2.60) et (2.63) respectivement.
4. Evaluer le débit volume  $\bar{Q}$  à partir de la formule (2.64).
5. Evaluer  $\bar{R}$  à travers l'équation (2.69).
6. Calculer  $\psi_Q$  selon l'expression (2.71).
7. Enfin, déduire la valeur du débit volume  $Q$  en se référant à la formule (2.72).

## V.3. Exemple d'application 2.4

Calculer le débit volume  $Q$  véhiculé par le canal de la figure 2.1, sachant que :

$$b = 2 \text{ m}, D = 3 \text{ m}, y_n = 1,2 \text{ m}, i = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-3} \text{ m et } \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

On a utilisé les paramètres de l'exemple d'application 2.1. De ce fait, on doit aboutir à un débit volume  $Q = 3,274 \text{ m}^3/\text{s}$  ou à une valeur très proche.

1. Les paramètres de forme  $\eta$  et  $\xi$  sont, respectivement :

$$\eta = \frac{y_n}{b} = \frac{1,2}{2} = 0,6$$

$$\xi = \frac{y_n}{D} = \frac{1,2}{3} = 0,4$$

2. Les formules (2.10) et (2.17) permettent d'évaluer respectivement les quantités  $\sigma(\xi)$  et  $\varphi(\xi)$ , soient :

$$\sigma(\xi) = \cos^{-1}(1 - 2\xi) = \cos^{-1}(1 - 2 \times 0,4) = 1,36943841$$

$$\varphi(\xi) = 1 - \frac{2(1-2\xi)\sqrt{\xi(1-\xi)}}{\cos^{-1}(1-2\xi)} = 1 - \frac{2(1-2 \times 0,4)\sqrt{0,4 \times (1-0,4)}}{\cos^{-1}(1-2 \times 0,4)} = 0,856905442$$

3. Les fonctions  $\lambda(\xi, \eta)$  et  $\tau(\xi, \eta)$  peuvent être évaluées respectivement à travers les expressions (2.60) et (2.63), soient :

$$\lambda(\eta, \xi) = 1 + \frac{\eta}{\xi} \sigma(\xi) = 1 + \frac{0,6}{0,4} \times 1,3694384 = 3,05415761$$

$$\tau(\xi, \eta) = \eta \left[ 1 + \frac{\eta}{4\xi^2} \sigma(\xi) \varphi(\xi) \right] = 0,6 \times \left[ 1 + \frac{0,6}{4 \times (0,4)^2} \times 1,3694384 \times 0,85690544 \right] = 1,26008206$$

4. En application de la formule (2.64),  $\bar{Q}$  sera :

$$\bar{Q} = 8\sqrt{2} \sqrt{gib^5} \frac{[\tau(\xi, \eta)]^{3/2}}{[\lambda(\eta, \xi)]^{1/2}} = 8\sqrt{2} \sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times (2)^5} \frac{(1,26008206)^{3/2}}{(3,05415761)^{1/2}} = 1,62243386 \text{ m}^3/\text{s}$$

5. L'application de la formule (2.69) permet le calcul de  $\bar{R}$  comme suit :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu} \left[ \frac{\tau(\xi, \eta)}{\lambda(\eta, \xi)} \right]^{3/2} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times (2)^3}}{10^{-6}} \left( \frac{1,26008206}{3,05415761} \right)^{3/2} = 1062442,78$$

6. En vertu de l'équation (2.71),  $\psi_Q$  sera tel que :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\tau(\xi, \eta)/\lambda(\eta, \xi)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} = -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{10^{-3}/2}{14,8 \times \frac{1,26008206}{3,05415761}} + \frac{10,04}{1062442,78} \right\} = 2,01968312$$

7. Le débit volume  $Q$  recherché est selon la relation (2.72) :

$$Q = \psi_Q \bar{Q} = 2,01968312 \times 1,62243386 = 3,27680227 \text{ m}^3/\text{s}$$

Au regard du résultat obtenu, on remarque que le débit donné dans l'exercice est presque retrouvé ( $Q = 3,274 \text{ m}^3/\text{s}$ ) avec un écart relatif  $\Delta Q/Q = 0,086 \%$ . Cet écart insignifiant revient principalement à l'approximation admise lors de l'établissement de la relation (2.25) du facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  de Achour (2007).

## VI. Equation de la vitesse moyenne de l'écoulement

Dans ce cas, les paramètres dimensionnels  $b$ ,  $D$  et  $y_n$  ainsi que les propriétés hydrodynamiques  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$  sont des paramètres connus. Le débit  $Q$  est inconnu. L'objectif est alors de procéder au calcul de la vitesse moyenne de l'écoulement  $V$  par la méthode MMR.

De ce fait, le modèle rugueux (Figure 2.2) est gouverné par les conditions suivantes :  $\bar{y}_n = y_n$ ,  $\bar{b} = b, \bar{D} = D, \bar{i} = i, \bar{Q} \neq Q$  et  $\bar{V} \neq V$ .

L'équation de continuité s'écrit :

$$Q = VA \quad (2.73)$$

D'où la vitesse moyenne  $V$  est elle que :

$$V = \frac{Q}{A} \quad (2.74)$$

Par analogie avec la relation (2.74), la vitesse dans le modèle  $\bar{V}$  s'écrit :

$$\bar{V} = \frac{\bar{Q}}{A} \quad (2.75)$$

On a :  $\bar{y}_n = y_n, \bar{b} = b, \bar{D} = D$ , d'où :  $\bar{\eta} = \frac{y_n}{b} = \eta = \frac{y_n}{b}$  et  $\bar{\xi} = \frac{y_n}{D} = \xi = \frac{y_n}{D}$ , par conséquent :  $\bar{A} = A$ .

De ce fait, la relation (2.75) devient :

$$\bar{V} = \frac{\bar{Q}}{A} \quad (2.76)$$

En remplaçant les relations (2.62) et (2.64) dans la relation (2.76), on obtient :

$$\bar{V} = \frac{8\sqrt{2}\sqrt{gib^5} [\tau(\xi, \eta)]^{3/2}}{b^2\tau(\xi, \eta) [\lambda(\eta, \xi)]^{1/2}}$$

Ou bien :

$$\bar{V} = 8\sqrt{2}\sqrt{gib} \left[ \frac{\tau(\xi, \eta)}{\lambda(\eta, \xi)} \right]^{1/2} \quad (2.77)$$

Par ailleurs, en remplaçant les relations (2.62) et (2.68) dans la relation (2.74), on peut écrire :

$$V = \frac{-4\sqrt{2}\sqrt{gib^5} [\tau(\xi, \eta)]^{3/2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\tau(\xi, \eta)/\lambda(\eta, \xi)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\}}{b^2\tau(\xi, \eta)}$$

Ou bien :

$$V = -4\sqrt{2}\sqrt{gib} \left[ \frac{\tau(\xi, \eta)}{\lambda(\eta, \xi)} \right]^{1/2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\tau(\xi, \eta)/\lambda(\eta, \xi)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} \quad (2.78)$$

Notons que le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  figurant dans la formule (2.78) s'exprime à travers l'équation (2.69).

En divisant la formule (2.78) par l'expression (2.77), on obtient :

$$\frac{V}{\bar{V}} = \frac{-4\sqrt{2}\sqrt{gib} \left[ \frac{\tau(\xi, \eta)}{\lambda(\eta, \xi)} \right]^{1/2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\tau(\xi, \eta)/\lambda(\eta, \xi)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\}}{8\sqrt{2}\sqrt{gib} \left[ \frac{\tau(\xi, \eta)}{\lambda(\eta, \xi)} \right]^{1/2}}$$

Ou bien, après simplification et réarrangement :

$$\frac{V}{\bar{V}} = -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\tau(\xi, \eta)/\lambda(\eta, \xi)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} \quad (2.79)$$

Au regard des relations (2.70), (2.71) et (2.79), on peut écrire :

$$V = \psi_Q \bar{V} \quad (2.80)$$

Ainsi, nous pouvons constater que la vitesse  $V$  caractérisant l'écoulement dans le canal réel est égale à son homologue  $\bar{V}$  relative au modèle ajustée par le paramètre correctif  $\psi_Q$ .

Alors, la vitesse moyenne de l'écoulement  $V$  peut être calculée par application directe de la relation (2.78) ou bien par l'utilisation des relations (2.71), (2.77) et (2.80).

Les étapes de calcul de la vitesse peuvent être inspirées de celles adoptées pour le calcul du débit volume (Voir paragraphe V.2.).

## VII. Equation du nombre de Reynolds

Dans ce cas, les paramètres dimensionnels  $b$ ,  $D$  et  $y_n$  ainsi que les propriétés hydrodynamiques  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$  sont des paramètres connus. Le débit volume  $Q$  est inconnu. L'objectif est d'exprimer le nombre de Reynolds  $R$  par la méthode MMR. De ce fait, le modèle rugueux (Figure 2.2) est gouverné par les conditions suivantes :  $\bar{y}_n = y_n$ ,  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{D} = D$ ,  $\bar{i} = i$ ,  $\bar{\nu} = \nu$  et  $\bar{Q} \neq Q$ .

Le nombre de Reynolds  $R$  de l'écoulement évoluant à l'intérieur d'un canal à parois circulaires et à fond horizontal est régi par la relation (2.2) tel que :

$$R = \frac{4Q}{P\nu} \quad (2.2)$$

Par analogie avec la formule (2.2), le paramètre adimensionnel  $\bar{R}$  s'écrit :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{P\nu} \quad (2.81)$$

On a :  $\bar{y}_n = y_n$ ,  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{D} = D$ , d'où :  $\bar{\eta} = \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} = \eta = \frac{y_n}{b}$  et  $\bar{\xi} = \frac{\bar{y}_n}{\bar{D}} = \xi = \frac{y_n}{D}$ , par conséquent :  $\bar{P} = P$ .

Rappelons, en outre que :  $\bar{v} = v$  et  $\bar{Q} \neq Q$ . De ce fait, l'équation (2.81) devient :

$$\bar{R} = \frac{4\bar{Q}}{Pv} \quad (2.82)$$

En divisant l'expression (2.2) par l'équation (2.82), on obtient :

$$\frac{R}{\bar{R}} = \frac{Pv}{\frac{4Q}{Pv}}$$

Ou bien :

$$\frac{R}{\bar{R}} = \frac{Q}{\bar{Q}} \quad (2.83)$$

Selon l'expression (2.72), la formule (2.83) s'écrit :

$$R = \psi_Q \bar{R} \quad (2.84)$$

Ainsi l'équation de *Achour* (2007) est reproduite.

En remplaçant l'expression (2.71) dans la formule (2.84), nous trouvons :

$$R = -\frac{1}{2} \bar{R} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\tau(\xi, \eta)/\lambda(\eta, \xi)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} \quad (2.85)$$

$\bar{R}$  peut être obtenu à partir de l'expression (2.69).

Ainsi, l'équation (2.85) mène à évaluer le nombre de *Reynolds*  $R$  sans pourtant connaître la valeur de  $Q$ .

### VIII. Equation du coefficient de frottement

Dans ce cas, les paramètres dimensionnels  $b$ ,  $D$  et  $y_n$  ainsi que les propriétés hydrodynamiques  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $v$  sont des paramètres connus. Le débit volume  $Q$  est inconnu. L'objectif est de développer une méthode de calcul du paramètre sans dimension  $f$  par la méthode MMR.

L'équation de *Achour* (2007) permet d'écrire que :

$$\psi_Q = \frac{1}{4\sqrt{f}} \quad (2.86)$$

Ou bien :

$$f = \frac{1}{16\nu^2} \quad (2.87)$$

La combinaison des équations (2.71) et (2.87) donne :

$$f = \frac{1}{16 \left\langle -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\tau(\xi, \eta)/\lambda(\eta, \xi)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} \right\rangle^2}$$

Ou bien :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon/b}{14,8[\tau(\xi, \eta)/\lambda(\eta, \xi)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} \quad (2.88)$$

Rappelons que  $\bar{R}$  est évalué à travers l'expression (2.69).

Ainsi, la formule (2.88) mène à évaluer explicitement le paramètre de frottement  $f$  sans pourtant connaître la valeur du débit volume  $Q$ .

## IX. Conclusion

Une analyse détaillée de l'écoulement uniforme s'évaluant à l'intérieur d'un canal à parois circulaires avec fond horizontal a fait l'objet de ce chapitre. En raison de ces différents avantages, la méthode MMR a été l'outil principal qui a été employé pour la confection du chapitre.

Sept (07) sections ont été nécessaires pour étudier et atteindre aux méthodes de calcul des différentes catégories de problème rencontrées dans la pratique, dont la première section s'est réservée au problème de dimensionnement du canal. Dans ce cas l'objectif revient à la recherche d'une méthode pratique permettant la détermination de la largeur de fond du canal, du diamètre des parties circulaires du canal et de la profondeur normale de l'écoulement. Les paramètres connus sont : le débit volume, la pente longitudinale du canal, la viscosité cinématique du liquide en écoulement et la rugosité absolue caractérisant l'état des parois internes du canal. Notons que ces paramètres sont mesurables en pratique. Deux paramètres de forme ont été, par ailleurs, définis comme étant la profondeur normale relative et le aux de remplissage des parties circulaires du canal. Ces deux paramètres sont imposés en pratique. Afin d'atteindre notre objectif, trois équations de base ont été nécessaires, à savoir : l'équation de *Darcy – Weisbach*, la formule de *Colebrook – White* et celle du nombre de *Reynolds*. La méthode MMR a été appliquée en se basant sur ces trois équations pour résoudre le problème de dimensionnement du canal. Un modèle rugueux adéquat au canal étudié a été proposé. En effet, l'application de la formule de *Darcy – Weisbach* au modèle rugueux de référence a abouti à exprimer la largeur de fond du modèle rugueux ainsi que le diamètre de ces parties circulaires. Par la suite, la loi fondamentale de la méthode MMR a été

employée afin de déterminer les dimensions du canal en passant par le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires qui a été développé par *Achour* (2007) en se basant sur les formules de *Colebrook – White* et du nombre de *Reynolds*. Au cours de développement effectué, on a procédé à l'établissement de toutes les caractéristiques nécessaires, géométriques et hydrodynamiques, du modèle rugueux de référence. Les étapes de calcul des dimensions linéaires ont été énumérées et un exemple d'application pratique a été proposé afin de rendre facile l'utilisation de la méthode proposée. Cet exemple d'application a été terminé par une partie de validation qui a abouti à conclure sur l'efficacité de la procédure de calcul suggérée.

La deuxième section du chapitre a été consacrée au développement d'une approche théorique au calcul de la profondeur normale de l'écoulement dans le canal étudié. Les données du problème sont les dimensions horizontales du canal représentées par la largeur de fond du canal et le diamètre des parties circulaires du canal, le débit volume, la pente longitudinale du lit de canal, la viscosité cinématique et la rugosité absolue (Figure 2.1). Le calcul de la profondeur normale est nécessaire pour la fixation de la hauteur totale du canal. Dans ce cas, la profondeur normale relative et le taux de remplissage des parties circulaires du canal sont inconnus. Par ailleurs, un nouveau paramètre de forme a été défini comme étant la largeur relative du canal. Ce nouveau paramètre est imposé et a été considéré parmi les données du problème. Un modèle rugueux compatible avec cette situation a été déterminé avec toutes ses caractéristiques géométriques et hydrodynamiques nécessaires. L'application de l'équation de *Darcy – Weisbach* au modèle rugueux considéré a abouti à une expression permettant la détermination du taux de remplissage des parties circulaires du modèle rugueux. Cependant, le caractère implicite de la relation obtenue a mené à proposer de l'inverser par un modèle mathématique qu'on a jugé adéquat. Ce modèle mathématique basé sur une équation polynomiale d'ordre six (06) a été alors adopté pour le calcul explicite du taux de remplissage des parties circulaires du modèle rugueux aboutissant par la suite à la détermination de la profondeur normale de l'écoulement. L'écart relatif maximal occasionné par le modèle proposé est inférieur à 0,013 % sur les gammes pratiques des paramètres de forme indiquées dans le texte. Les étapes de calcul de la profondeur normale ont été schématisées dans un organigramme. Un exemple d'application pratique comportant une partie de validation a été inséré.

La troisième section du chapitre a eu pour objectif l'étude du régime critique dans le canal considéré. Il s'agit de proposer une méthode de calcul de la largeur de fond du canal, le diamètre des parties circulaires du canal et la profondeur critique lorsque l'écoulement est en état critique. Les données du problème sont le débit volume et les deux paramètres de forme représentés par la profondeur critique relative et le taux de remplissage des parties circulaires du canal. L'équation de base a été la formule du nombre de *Froude* appliquée au régime critique. Les expressions de l'aire

de la section mouillée et de la largeur du plan d'eau ont été d'abord déterminées. Puis, il a été possible d'aboutir à une relation explicite au calcul de la largeur de fond du canal. Par la suite, les expressions du diamètre des parties circulaires du canal ainsi que la profondeur critique ont été facilement déduites à partir des paramètres de forme. Les étapes de calcul ont été clairement indiquées. Enfin, cette section a été terminée par un exemple d'application pratique comportant une petite partie de validation.

A travers la quatrième section du chapitre, on a proposé les démarches à suivre pour le calcul du débit volume véhiculé par un canal à parois circulaires avec fond horizontal. Cette fois-ci, les données du problème sont : la largeur du fond du canal, le diamètre des parties circulaires du canal, la profondeur normale de l'écoulement, la pente longitudinale du canal, la rugosité absolue et la viscosité cinématique du liquide en écoulement. Un modèle rugueux adéquat à la situation actuelle ainsi que toutes ces caractéristiques ont été déterminés dont l'application de l'équation de *Darcy – Weisbach* a abouti à l'expression explicite du débit volume véhiculé par ce modèle rugueux. Par ailleurs, en se basant sur la relation générale de *Achour et Bedjaoui* (2006), l'équation du débit volume véhiculé par le canal étudié a pu être exprimée explicitement. L'étude a abouti également à l'expression du facteur de correction des débits. Il a été constaté, ainsi, que le débit volume véhiculé par le canal réel est égal au débit volume véhiculé par le modèle rugueux de référence affecté par les effets du facteur de correction des débits. Ce résultat est analogue à celui obtenu par *Achour* (2007) autrement. Les étapes de calcul du débit volume ont été clairement indiquées. Ces étapes ont été poursuivies par un exemple d'application pratique en considérant les données de l'exemple d'application de la première section (exemple d'application 2.1) afin de pouvoir valider la démarche proposée.

La cinquième section a eu pour objectif de dériver l'équation de la vitesse moyenne de l'écoulement dans le canal considéré. Dans ce cas les données du problème sont les mêmes que celles de la section précédente. L'équation de base a été l'équation de continuité. En se basant sur cette équation, les expressions de la vitesse moyenne dans le modèle rugueux et dans le canal réel ont été simplement déduites. Il a été constaté que la vitesse moyenne de l'écoulement dans le canal réel et celle dans le modèle rugueux sont liés par le facteur de correction des débits obtenu au cours de la section précédente. Les étapes de calcul de la vitesse moyenne peuvent être inspirées de celles adoptées pour le calcul du débit volume.

La sixième section s'est intéressée à exprimer le nombre de *Reynolds* indépendamment du débit en se basant sur la méthode MMR. Les données du problème sont les mêmes que celles des deux dernières sections. La formule générale du nombre de *Reynolds* a été considérée comme équation de base. L'application de la méthode MMR, a montré que le nombre de *Reynolds* caractérisant

l'écoulement dans le canal étudié et dans le modèle rugueux sont liés par le facteur de correction des débits. De ce fait, le développement à abouti à une expression permettant le calcul explicite du nombre de *Reynolds* indépendamment de la valeur du débit volume.

Enfin, la septième et dernière section de ce chapitre s'est consacrée à la recherche d'une équation qui va permettre le calcul explicite du coefficient de frottement sans pourtant connaître la valeur du débit volume. Les données de problème sont les mêmes que celles des trois dernières sections. La relation liant le facteur de correction des débits et le coefficient de frottement de *Achour* (2007) a été employée comme équation de base. De ce fait, une relation au calcul explicite du coefficient de frottement a été obtenue. Notons que, dans ce cas, la connaissance préalable du débit volume n'est pas nécessaire.

*Deuxième Chapitre*

**ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN  
CANAL A PAROIS SEMI-ELLIPTIQUES ET  
A FOND HORIZONTAL**

## Chapitre II

### ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL A PAROIS SEMI-ELLIPTIQUES ET A FOND HORIZONTAL

#### **I. Introduction**

Ce chapitre sera réservé à l'analyse de l'écoulement uniforme dans un canal à parois semi-elliptiques avec fond horizontal. Cette forme appartient toujours à la catégorie des canaux à parois latérales en courbe. L'investigation de l'écoulement uniforme dans la canalisation considérée requiert la connaissance de ces caractéristiques géométriques particulièrement l'aire de la section mouillée, le périmètre mouillé ainsi que la largeur du plan d'eau. Ces trois caractéristiques principales seront développées en se basant sur l'approche de *Vatankhah* (2015) présentée à travers le deuxième chapitre de la première partie. Comme pour le chapitre précédent, la méthode principale qui sera utilisée est la méthode MMR.

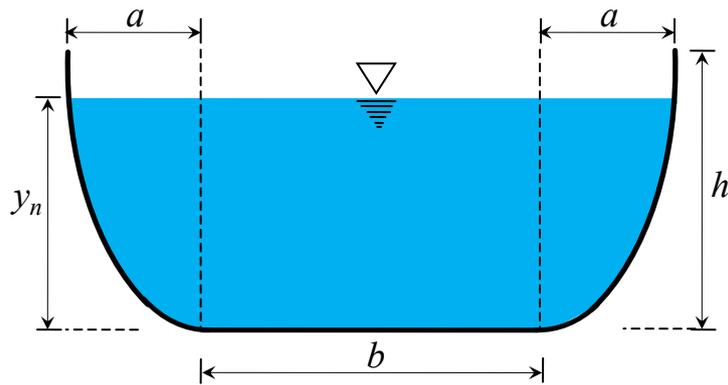
L'étude de l'écoulement uniforme sera alors menée en développant des méthodes visant à :

- i.* Dimensionner le canal choisit.
- ii.* Evaluer la profondeur normale en adoptant un modèle mathématique convenable.
- iii.* Dimensionner le canal en régime critique en se référant sur la formule du nombre de *Froude*.
- iv.* Déterminer le débit volume
- v.* Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement.
- vi.* Exprimer explicitement le nombre de *Reynolds*.
- vii.* Exprimer le coefficient de frottement.

Plusieurs exemples d'application seront exposés afin de montrer la procédure d'utilisation pratique des différentes méthodes qui seront proposées avec une simple étude comparative visant à valider les approches théoriques qui seront développées.

#### **II. Dimensionnement d'un canal à parois semi-elliptiques avec fond horizontal**

La forme du canal est inspirée de celle du canal à parois semi-elliptique sans fond qui a été décrite par *Vatankhah* (2015) et représentée dans la section IV du deuxième chapitre de la partie bibliographique (Figure 1.13). En ajoutant un fond plat, la forme du canal à parois semi-elliptiques est donnée par la figure 2.6 où :  $y_n$  étant la profondeur normale,  $b$  représente la base de la canalisation considérée,  $a$  est la largeur horizontale des parties semi-elliptiques et  $h$  est la hauteur totale du canal.



**Figure 2.6 :** Canal à parois semi-elliptiques avec fond horizontal.

La figure 2.6 représente l'état de l'écoulement uniforme dans un canal muni de parois semi-elliptiques avec fond horizontal. On distingue les rapports suivants (Profondeurs relatives) :  $\eta = y_n/b$  et  $\xi = y_n/h$ . Le rapport  $\eta$  caractérise la partie médiane du canal (Rectangle), et  $\xi$  correspond au taux de remplissage des parties semi-elliptiques. Il est à noter que le taux de remplissage du canal correspond à des valeurs de  $\eta$  et  $\xi$  associées à la même valeur de  $y_n$ . On définit, en plus, un paramètre indépendant de l'écoulement tel que :  $\zeta = h/a$ . Les paramètres inconnus du problème sont la profondeur normale  $y_n$ , la largeur de fond du canal  $b$ , la largeur horizontale des parties semi-elliptiques  $a$  et la hauteur totale du canal  $h$ . Ces deux dernières dimensions représentent aussi les demi-axes des ellipses constituant les parties en courbes du canal. Par ailleurs, les paramètres donnés sont : le débit  $Q$ , la pente géométrique du canal  $i$ , la viscosité  $\nu$  et la rugosité  $\varepsilon$  qui définit l'état des parois internes du canal. La profondeur normale est principalement calculée à partir des équations de résistance à l'écoulement. L'objectif est d'évaluer la profondeur normale  $y_n$  ainsi que les grandeurs  $a$ ,  $b$  et  $h$  constituant les dimensions du canal à partir des données citées ci-dessus ainsi que des paramètres de forme imposés  $\eta$ ,  $\xi$  et  $\zeta$ .

Afin de répondre au besoin de dimensionnement du canal considéré en utilisant seulement les données déjà indiquées, il semble que la méthode MMR soit le moyen le plus adapté.

## II.1. Equations de base

L'équation *Darcy – Weisbach* sous la forme de la relation (2.1) du chapitre précédent est considérée comme équation principale sur laquelle se base la présente étude. Cette relation est rappelée ci-dessous.

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (2.1)$$

Le coefficient adimensionnel de frottement  $f$  est exprimé par l'équation (1.54) de *Colebrook – White* (Chapitre I, partie I), soit :

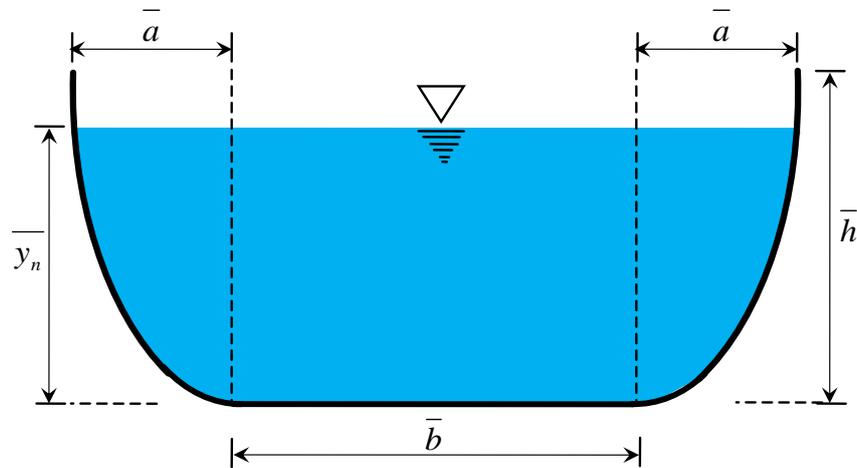
$$f^{-1/2} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.54)$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$  est, pour rappeller :

$$R = \frac{4Q}{P\nu} \quad (2.2)$$

## II.2. Modèle rugueux de référence

Dans ce cas le modèle étant un canal muni de parois semi-elliptiques avec fond horizontal (Figure 2.7).



**Figure 2.7 :** Schéma de définition du modèle rugueux de référence  
(Écoulement normal).

Rappelons que les propriétés géométriques et hydrauliques relatives au modèle rugueux sont différenciées par ce caractère "  $\bar{\quad}$ ". Le modèle rugueux se caractérise à travers une rugosité relative  $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 0,037$  choisie de façon à ce que le régime de l'écoulement soit dans la plage de pleine turbulence. Ainsi,  $\bar{f} = 1/16$  selon l'équation (1.71) citée dans le premier chapitre de la première partie.

Le canal muni de parois semi-elliptique et de fond horizontal se caractérise par les paramètres suivants :  $i$ ,  $\eta = y_n/b$ ,  $\xi = y_n/h$  et  $\zeta = h/a$ . Le modèle se distingue par les rapports d'aspect :  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b}$ ,  $\bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{h}$  et  $\bar{\zeta} = \bar{h}/\bar{a}$ . En outre, afin de conserver la même forme du profil liquide considéré on doit imposer que :  $\bar{\eta} = \eta$ ,  $\bar{\xi} = \xi$  et  $\bar{\zeta} = \zeta$ . De même, pour les besoin de la méthode MMR, on impose les critères suivants :  $\bar{Q} = Q$  et  $\bar{i} = i$ .

La formule (2.1) appliquée au modèle a menée, pour rappelle, à la relation suivante qui a été développée au cours du chapitre précédent :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} Q^2 \quad (2.4)$$

En se basant sur la relation (1.97) ainsi que sur la relation approchée (1.99) proposées par *Vatankhah* (2015) et montrées dans le deuxième chapitre de la première partie, le périmètre mouillé du modèle rugueux pour un canal à parois semi-elliptiques avec fond horizontal peut s'écrire, en tenant compte que :  $\bar{\xi} = \xi$  et  $\bar{\zeta} = \zeta$  :

$$\bar{P} = \bar{b} + 2\bar{a} \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} F(\xi, \zeta) \quad (2.89)$$

Avec :

$$F(\xi, \zeta) = 0,4934 \sqrt{1 + (\zeta^2 - 1) \sin^2 \left[ 0,222 \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} \right]} + 0,506 \sqrt{1 + (\zeta^2 - 1) \sin^2 \left[ 0,782 \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} \right]} \quad (2.90)$$

Rappelons que la relation approchée (2.90) est valable pour les intervalles suivants :  $0 < \xi \leq 1$  et  $1 \leq \zeta \leq 4$ .

L'équation (2.89) avait été obtenue à travers la formule (1.97) on lui ajoutant la largeur de fond  $\bar{b}$  (Figure 2.7). Elle peut prendre la forme la forme suivante :

$$\bar{P} = \bar{b} \left[ 1 + 2 \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} F(\xi, \zeta) \right]$$

Ou bien :

$$\bar{P} = \bar{b} \left[ 1 + 2 \times \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \times \frac{\bar{y}_n}{y_n} \times \frac{\bar{h}}{h} \times \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} F(\xi, \zeta) \right] \quad (2.91)$$

Par ailleurs, les paramètres de forme du canal étudié ainsi que ceux du modèle rugueux mènent à écrire :  $\eta = \bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b}$ ,  $\xi = \bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{h}$  et  $\zeta = \bar{\zeta} = \bar{h}/\bar{a}$ . De ce fait, la relation (2.91) s'écrit :

$$\bar{P} = \bar{b} \left[ 1 + \frac{2\eta}{\xi\zeta} \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} F(\xi, \zeta) \right] \quad (2.92)$$

Posons :

$$\sigma(\eta, \xi, \zeta) = 1 + \frac{2\eta}{\xi\zeta} \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} F(\xi, \zeta) \quad (2.93)$$

La relation (2.92) devient plus simplement :

$$\bar{P} = \bar{b} \times \sigma(\eta, \xi, \zeta) \quad (2.94)$$

La surface mouillée du modèle  $\bar{A}$ , peut être exprimée en se basant sur la relation (1.95) de *Vatankhah* (2015) montrée dans le deuxième chapitre de la première partie et établie pour un canal semi-elliptique sans fond. Afin de tenir compte de la partie médiane du canal à parois semi-elliptiques avec fond horizontal, on doit ajouter à la relation (1.95) la quantité  $\bar{b} \times \bar{y}_n$  constituant la partie rectangulaire comme le montre la figure 2.7, soit, pour  $\bar{\xi} = \xi$  :

$$\bar{A} = \bar{b} \times \bar{y}_n + \bar{a} \times \bar{h} \times \left[ \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} - (1-\xi) \sqrt{\xi(2-\xi)} \right]$$

Ou bien :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \left\{ \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} + \frac{\bar{a} \times \bar{h}}{\bar{b}^2} \times \left[ \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} - (1-\xi) \sqrt{\xi(2-\xi)} \right] \right\} \quad (2.95)$$

Cette dernière relation peut s'écrire :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \left\{ \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} + \frac{\bar{a} \times \bar{h}}{\bar{b}^2} \times \frac{\bar{h}}{\bar{h}} \times \frac{\bar{y}_n}{\bar{y}_n} \left[ \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} - (1-\xi) \sqrt{\xi(2-\xi)} \right] \right\}$$

Soit pour  $\eta = \bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b}$ ,  $\xi = \bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{h}$  et  $\zeta = \bar{\zeta} = \bar{h}/\bar{a}$  :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \eta \left\{ 1 + \frac{\eta}{\xi\zeta^2} \left[ \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} - (1-\xi) \sqrt{\xi(2-\xi)} \right] \right\} \quad (2.96)$$

Posons la fonction  $\varphi(\eta, \xi, \zeta)$  telle que :

$$\varphi(\eta, \xi, \zeta) = \eta \left\{ 1 + \frac{\eta}{\xi\zeta^2} \left[ \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} - (1-\xi) \sqrt{\xi(2-\xi)} \right] \right\} \quad (2.97)$$

De ce fait, la relation (2.96) s'écrit :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \times \varphi(\eta, \xi, \zeta) \quad (2.98)$$

La combinaison des expressions (2.94), (2.98) et (2.4), aboutit à :

$$i = \frac{\bar{b} \times \sigma(\eta, \xi, \zeta)}{128g \left[ \bar{b}^2 \times \varphi(\eta, \xi, \zeta) \right]^{3/2}} Q^2$$

Soit, après simplification et réarrangement :

$$\bar{b} = \left\{ \frac{\sigma(\eta, \xi, \zeta)}{128[\varphi(\eta, \xi, \zeta)]^3} \right\}^{1/5} \left( \frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (2.99)$$

La relation (2.99) aboutit à l'évaluation de  $\bar{b}$  à partir des valeurs de :  $Q, i, \eta, \xi$  et  $\zeta$ .

De même, l'égalité :  $\eta = \bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b}$ , mènera à exprimer  $\bar{y}_n$  comme suit :

$$\bar{y}_n = \bar{\eta} \bar{b} \quad (2.100)$$

La hauteur totale du modèle rugueux  $\bar{h}$  est déduit à partir du paramètre de forme :  $\xi = \bar{\xi} = \bar{y}_n / \bar{h}$ ,

soit :

$$\bar{h} = \bar{y}_n / \bar{\xi} \quad (2.101)$$

La largeur horizontale des parties en courbe  $\bar{a}$  est exprimée selon l'égalité :  $\zeta = \bar{\zeta} = \bar{h} / \bar{a}$  telle que :

$$\bar{a} = \bar{h} / \bar{\zeta} \quad (2.102)$$

### II.3. Facteur de correction des dimensions linéaires

La notion du facteur d'ajustement des dimensions linéaires a été exposée au cours du chapitre précédent dont on rappelle ici les relations nécessaires pour son calcul tout en gardant les mêmes numéros des expressions afin d'éviter qu'une relation possède deux numéros ou plus. Soit, alors :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.25)$$

Rappelons que  $\bar{R}$  s'exprime comme suit :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} \quad (2.27)$$

De plus, le diamètre hydraulique du modèle rugueux  $\bar{D}_h$  a été formulé tel que :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A} / \bar{P} \quad (2.23)$$

### II.4. Etapes de calcul des dimensions linéaires du canal

Afin d'évaluer les dimensions de la canalisation considérée, on doit connaître les propriétés hydrodynamiques suivantes :  $Q, i, \eta, \xi, \zeta, \varepsilon$  et  $v$ .

Les grandeurs physiques recherchées sont :  $y_n$ ,  $b$ ,  $a$   $h$ . Pour aboutir à notre objectif, on propose la démarche suivante :

1. Evaluer les facteurs :  $F(\xi, \zeta)$ ,  $\sigma(\eta, \xi, \zeta)$  et  $\varphi(\eta, \xi, \zeta)$  à travers les formules (2.90), (2.93) et (2.97) respectivement.
2. Evaluer  $\bar{b}$  du modèle rugueux par la relation (2.99).
3. Evaluer  $\bar{P}$  et  $\bar{A}$  du modèle rugueux à partir des expressions (2.94) et (2.98) respectivement.
4. Déterminer  $\bar{D}_h$  en se référant à l'équation (2.23).
5. De même, déterminer  $\bar{R}$  à partir de la formule (2.27).
6. Evaluer  $\psi$  travers l'équation (2.25).
7. La valeur recherchée de la largeur de fond  $b$  est évaluée en se référant à la relation fondamentale (2.24), soit :  $b = \psi \bar{b}$ .
8. Enfin, les valeurs de la profondeur normale  $y_n$ , de la hauteur totale du canal  $h$  ainsi que la valeur de la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  sont déduites par analogie avec les relations (2.100), (2.101) et (2.102) respectivement, soit :  $y_n = \eta b$ ,  $h = y_n / \xi$  et  $a = h / \zeta$ .

Il est à noter que la méthode préconisée s'applique à l'ensemble du régime turbulent englobant les trois (03) domaines : lisse, de transition et rugueux.

Notons que lorsqu'il s'agit d'un canal sans fond horizontal, on doit mettre  $b = 0$  et on refait le développement par la même méthodologie suivie ci-dessus.

### II.5. Exemple d'application 2.5

Considérons le canal de la figure 2.6. Dimensionner le canal, sachant que :

$$Q = 3,274 \text{ m}^3/\text{s}, i = 10^{-4}, \eta = 0,6, \xi = 0,8, \zeta = 2, \varepsilon = 10^{-3} \text{ m et } \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

1. En se référant aux équations (2.90), (2.93) et (2.97) respectivement, les quantités  $F_*(\xi, \zeta)$ ,  $\sigma(\eta, \xi, \zeta)$  et  $\varphi(\eta, \xi, \zeta)$  sont :

$$\begin{aligned}
F(\xi, \zeta) &= 0,4934\sqrt{1+(\zeta^2-1)\sin^2\left[0,222\sin^{-1}\sqrt{\xi(2-\xi)}\right]} + 0,506\sqrt{1+(\zeta^2-1)\sin^2\left[0,782\sin^{-1}\sqrt{\xi(2-\xi)}\right]} \\
&= 0,4934\sqrt{1+(2^2-1)\sin^2\left[0,222\sin^{-1}\sqrt{0,8\times(2-0,8)}\right]} + 0,506\sqrt{1+(2^2-1)\sin^2\left[0,782\sin^{-1}\sqrt{0,8\times(2-0,8)}\right]} \\
&= 1,4764652
\end{aligned}$$

$$\sigma(\eta, \xi, \zeta) = 1 + \frac{2\eta}{\xi\zeta} \sin^{-1}\sqrt{\xi(2-\xi)} F(\xi, \zeta) = 1 + \left[ \frac{2 \times 0,6}{0,8 \times 2} \sin^{-1}\sqrt{0,8 \times (2-0,8)} \right] \times 1,4764652 = 2,5164461 \text{ B}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(\eta, \xi, \zeta) &= \eta \left\{ 1 + \frac{\eta}{\xi\zeta^2} \left[ \sin^{-1}\sqrt{\xi(2-\xi)} - (1-\xi)\sqrt{\xi(2-\xi)} \right] \right\} \\
&= 0,6 \times \left\{ 1 + \frac{0,6}{2 \times (0,8)^2} \left[ \sin^{-1}\sqrt{0,8 \times (2-0,8)} - (1-0,8)\sqrt{0,8 \times (2-0,8)} \right] \right\} = 0,93004103
\end{aligned}$$

2. La largeur de fond  $\bar{b}$  sera calculée à travers la formule (2.99) telle que :

$$\bar{b} = \left\{ \frac{\sigma(\eta, \xi, \zeta)}{128[\varphi(\eta, \xi, \zeta)]^3} \right\}^{1/5} \left( \frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} = \left[ \frac{2,5164461 \text{ B}}{128 \times (0,93004103)^3} \right]^{1/5} \left( \frac{3,274^2}{9,81 \times 10^{-4}} \right)^{1/5} = 3,05711613 \text{ m}$$

3. Les expressions (2.94) et (2.98), sont utilisées respectivement pour l'évaluation de  $\bar{P}$  et  $\bar{A}$ , soient :

$$\bar{P} = \bar{b} \times \sigma(\eta, \xi, \zeta) = 3,05711613 \times 2,5164461 \text{ B} = 7,69306799 \text{ m}$$

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \times \varphi(\eta, \xi, \zeta) = (3,05711613)^2 \times 0,93004103 = 8,69212536 \text{ m}^2$$

4. Le diamètre hydraulique du modèle rugueux  $\bar{D}_h$  est donné par la relation (2.23), soit :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P} = 4 \times 8,69212536 / 7,69306799 = 4,51945849 \text{ m}$$

5. L'expression (2.27) permet l'évaluation de  $\bar{R}$  du modèle rugueux tel que :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 3,274}{7,69306799 \times 10^{-6}} = 1702311,75$$

6. Selon la relation (2.25), le paramètre correctif  $\psi$  est :

$$\begin{aligned}
\psi &= 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\
&= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{10^{-3}/4,51945849}{4,75} + \frac{8,5}{1702311,75} \right) \right]^{-2/5} = 0,75413621
\end{aligned}$$

7. La base recherchée  $b$  sera calculée à travers l'expression (2.24) telle que :

$$b = \psi \bar{b} = 0,75413621 \times 3,05711613 = 2,30548196 \text{ m} \approx 2,3 \text{ m}$$

8. La profondeur normale  $y_n$ , la hauteur totale du canal  $h$  ainsi que la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  recherchées sont donc, respectivement :

$$y_n = \eta b = 0,6 \times 2,30548196 = 1,38328918 \text{ m} \approx 1,4 \text{ m}$$

$$h = y_n / \xi = 1,38328918 / 0,8 = 1,72911147 \text{ m} \approx 1,7 \text{ m}$$

$$a = h / \zeta = 1,72911147 / 2 = 0,86455574 \text{ m} \approx 0,85 \text{ m}$$

9. On vise à travers cette partie de vérifier la validité de la méthode proposée par l'évaluation de la pente  $i$  à partir de l'équation (2.1).

De ce fait, le coefficient adimensionnel de frottement  $f$  est évalué par l'expression suivante (Ahour, 2007) :

$$f = \psi^5 / 16 = 0,7541362 \hat{f} / 16 = 0,01524505$$

Par analogie avec la formule (2.94), le périmètre  $P$  du canal réel peut s'écrire, en remplaçant  $\bar{b}$  par  $b$  :

$$P = b \times \sigma(\eta, \xi, \zeta) = 2,30548196 \times 2,51644613 = 5,80162112 \text{ m}$$

De même, par analogie avec la formule (2.98), la section du canal réel  $A$  s'écrit en remplaçant  $\bar{b}$  par  $b$  :

$$A = b^2 \times \varphi(\eta, \xi, \zeta) = (2,30548196)^2 \times 0,93004103 = 4,94339788 \text{ m}^2$$

Le paramètre hydraulique  $D_h = 4A/P$  sera par suite :

$$D_h = 4A/P = 4 \times 4,94339788 / 5,80162112 = 3,40828729 \text{ m}$$

Enfin, l'équation (2.1) mène au calcul de  $i$  comme suit :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,01524505}{3,40828729} \times \frac{(3,274)^2}{2 \times 9,81 \times (4,94339788)^2} = 10^{-4}$$

Ainsi, la valeur de  $i$  est la même que celle donnée dans l'exercice. Cela mène d'apprécier la justesse de la procédure proposée.

### III. Approche théorique au calcul de la profondeur normale

Dans cette partie, les dimensions du canal sont connues. On doit proposer une méthode menant à l'évaluation de la profondeur normale  $y_n$  répondant aux conditions du problème résumées comme suit : le canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal, absolue  $\varepsilon$ , véhicule un débit  $Q$  d'un fluide de viscosité  $\nu$  pour une pente  $i$ . Les dimensions du canal sont la largeur du fond  $b$ , la hauteur totale du canal  $h$  ainsi que la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  (Figure 2.6). Tous ces paramètres sont connus et on doit déterminer la profondeur normale  $y_n$  qui convient à ces conditions.

### III.1. Modèle rugueux de référence

Il s'agit du même modèle défini par la figure 2.7 caractérisé par une rugosité relative  $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 0,037$  ainsi qu'un coefficient adimensionnel de frottement est  $\bar{f} = 1/16$  (Achour, 2007). Rappelons que les grandeurs physiques  $b$ ,  $h$  et  $a$  du canal sont connues et les paramètres hydrodynamiques de l'écoulement  $Q$ ,  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$  sont connus également, et on cherche à évaluer la profondeur normale  $y_n$ . Dans ce cas le principe de la méthode MMR mène à écrire :  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{h} = h$ ,  $\bar{a} = a$ ,  $\bar{i} = i$  et  $\bar{Q} = Q$ , mais  $\bar{y}_n \neq y_n$  voire même  $\bar{y}_n > y_n$ . De ce fait, les paramètres de forme sont tels que :  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b} \neq \eta = y_n/b$ ,  $\bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{h} \neq \xi = y_n/h$  et  $\bar{\zeta} = \bar{h}/\bar{a} = \zeta = h/a$ . De plus, les dimensions  $b$  et  $h$  sont connues, d'où on peut imposer un nouveau paramètre de forme tel que :

$$\beta = \frac{b}{h} = \frac{\xi}{\eta} = \bar{\beta} = \frac{\bar{\xi}}{\bar{\eta}} \quad (2.103)$$

Les paramètres de forme  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$  et  $\beta$  représentent respectivement la profondeur normale relative, le taux de remplissage, la hauteur totale relative et la largeur relative.

L'équation de *Darcy-Weisbach* destinée au modèle rugueux représentée par la formule (2.4) reste en vigueur ici, soit en rappelant son expression :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} Q^2 \quad (2.4)$$

La section  $\bar{A}$  peut s'écrire en se référant à la formule (2.98) pour :  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b} \neq \eta = y_n/b$ ,  $\bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{h} \neq \xi = y_n/h$  et  $\bar{\zeta} = \bar{h}/\bar{a} = \zeta = h/a$ , soit :

$$\bar{A} = b^2 \times \varphi(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta) \quad (2.104)$$

La fonction  $\varphi(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta)$  est exprimée à travers l'équation (2.97), telle que :

$$\varphi(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta) = \bar{\eta} \left\{ 1 + \frac{\bar{\eta}}{\zeta \bar{\xi}^2} \left[ \sin^{-1} \sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})} - (1-\bar{\xi}) \sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})} \right] \right\} \quad (2.105)$$

En outre, en se référant à l'expression (2.103), la formule (2.105) mènera à la nouvelle fonction :

$\varphi(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$ , soit :

$$\varphi(\bar{\xi}, \zeta, \beta) = \frac{\bar{\xi}}{\beta} \left\{ 1 + \frac{1}{\beta \zeta \bar{\xi}} \left[ \sin^{-1} \sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})} - (1-\bar{\xi}) \sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})} \right] \right\} \quad (2.106)$$

De ce faite, la relation (2.104) devient :

$$\bar{A} = b^2 \times \varphi(\bar{\xi}, \zeta, \beta) \quad (2.107)$$

Le périmètre  $\bar{P}$  est déduit à travers la formule (2.94) pour :  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b} \neq \eta = y_n/b$ ,  
 $\bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{h} \neq \xi = y_n/h$  et  $\bar{\zeta} = \bar{h}/\bar{a} = \zeta = h/a$ , soit :

$$\bar{P} = b \times \sigma(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\zeta}) \quad (2.108)$$

La fonction  $\sigma(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\zeta})$  est exprimée à travers l'expression (2.93), telle que :

$$\sigma(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\zeta}) = 1 + \frac{2\bar{\eta}}{\bar{\xi}\bar{\zeta}} \sin^{-1} \sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})} F(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \quad (2.109)$$

Où la fonction  $F(\bar{\xi}, \bar{\zeta})$  peut être inspirée par la relation (2.90) telle que :

$$F(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) = 0,4934 \sqrt{1 + (\bar{\zeta}^2 - 1) \sin^2 \left[ 0,222 \sin^{-1} \sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})} \right]} + 0,506 \sqrt{1 + (\bar{\zeta}^2 - 1) \sin^2 \left[ 0,782 \sin^{-1} \sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})} \right]} \quad (2.110)$$

De plus, en considérant la formule (2.103), l'équation (2.109) mènera à la nouvelle fonction :

$\sigma(\bar{\xi}, \bar{\zeta}, \beta)$  telle que :

$$\sigma(\bar{\xi}, \bar{\zeta}, \beta) = 1 + \frac{2}{\beta\bar{\zeta}} \sin^{-1} \sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})} F(\bar{\xi}, \bar{\zeta}) \quad (2.111)$$

De ce fait, la relation (2.108) doit être réécrite telle que :

$$\bar{P} = b \times \sigma(\bar{\xi}, \bar{\zeta}, \beta) \quad (2.112)$$

En remplaçant les relations (2.107) et (2.112) dans la relation (2.4), on obtient :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{b \times \sigma(\bar{\xi}, \bar{\zeta}, \beta)}{[b^2 \times \varphi(\bar{\xi}, \bar{\zeta}, \beta)]^{\frac{5}{3}}} Q^2$$

Ou bien, après réarrangement et simplification :

$$\frac{\sigma(\bar{\xi}, \bar{\zeta}, \beta)}{128[\varphi(\bar{\xi}, \bar{\zeta}, \beta)]^{\frac{5}{3}}} \left( \frac{Q^2}{gib^5} \right) = 1 \quad (2.113)$$

Rappelant que par définition, la conductivité relative  $Q^*$  s'écrit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} \quad (2.36)$$

D'où, la relation (2.113) devient :

$$\frac{\sigma(\bar{\xi}, \bar{\zeta}, \beta)}{128[\varphi(\bar{\xi}, \bar{\zeta}, \beta)]^{\frac{5}{3}}} Q^{*2} = 1 \quad (2.114)$$

En se référant aux valeurs connues des propriétés  $Q$ ,  $i$  et  $b$ , le paramètre adimensionnel  $Q^*$  peut être calculée en vertu de l'équation (2.36). De ce fait, la formule (2.114) mène à l'évaluation du paramètre de forme  $\bar{\xi}$  connaissant les valeurs de  $Q^*$ ,  $\bar{\zeta}$  et  $\beta$ . La formule (2.114) est implicite en  $\bar{\xi}$ , pour cela une procédure itérative ou une méthode graphique pour la détermination de  $\bar{\xi}$  est

nécessaire. Ces méthodes sont très efficaces pour résoudre les problèmes complexes comme celui de la relation (1.114).

Le remplacement de la relation implicite (2.114) par une expression explicite en  $\bar{\xi}$  n'est pas une tâche facile à compléter car ce dernier paramètre se trouve dans plusieurs endroits dans les fonctions  $\sigma(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  et  $\varphi(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  impliquant des termes trigonométriques et dépend de trois paramètres indépendants  $Q^*$ ,  $\zeta$  et  $\beta$ .

Le paragraphe suivant vise à traiter un cas simple du problème qui doit être élargie dans des études ultérieures. Le problème consiste, alors, à proposer une expression directe à la place de la formule (2.114) pour les valeurs suivantes :  $\zeta = 2,5$  et  $\beta = 1$ . Ces deux dernières valeurs ont été choisies arbitrairement. La fonction  $F(\bar{\xi}, \zeta)$  se réduit à une fonction dépendant exclusivement de  $\bar{\xi}$  qui sera désignée par  $F(\bar{\xi})$  s'exprimant à partir de la relation (2.110) pour  $\zeta = 2,5$ , soit :

$$F(\bar{\xi}) = 0,4934\sqrt{1 + 5,25\sin^2\left[0,222\sin^{-1}\sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})}\right]} + 0,506\sqrt{1 + 5,25\sin^2\left[0,782\sin^{-1}\sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})}\right]} \quad (2.115)$$

De même, les fonctions  $\varphi(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  et  $\sigma(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  doivent être remplacées, respectivement, par les fonctions  $\varphi(\bar{\xi})$  et  $\sigma(\bar{\xi})$  pour  $\zeta = 2,5$  et  $\beta = 1$ , elles s'écrivent en se référant respectivement aux équations (2.106) et (2.111), soit :

$$\varphi(\bar{\xi}) = \bar{\xi} \left\{ 1 + \frac{2}{5\bar{\xi}} \left[ \sin^{-1}\sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})} - (1-\bar{\xi})\sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})} \right] \right\} \quad (2.116)$$

Et :

$$\sigma(\bar{\xi}) = 1 + 0,8\sin^{-1}\sqrt{\bar{\xi}(2-\bar{\xi})}F(\bar{\xi}) \quad (2.117)$$

En considérant les deux dernières expressions, la formule (2.114) devient :

$$\frac{\sigma(\bar{\xi})}{128[\varphi(\bar{\xi})]^5} Q^{*2} = 1 \quad (2.118)$$

La relation (2.118) peut être remplacée par le même type d'équation qui a été utilisée au cours du chapitre précédent, soit la relation de type polynomiale d'ordre six (06) :

$$\bar{\xi} = a_6 Y^6 + a_5 Y^5 + a_4 Y^4 + a_3 Y^3 + a_2 Y^2 + a_1 Y + a_0 \quad (2.119)$$

Avec :

$$Y = \log Q^* \quad (2.120)$$

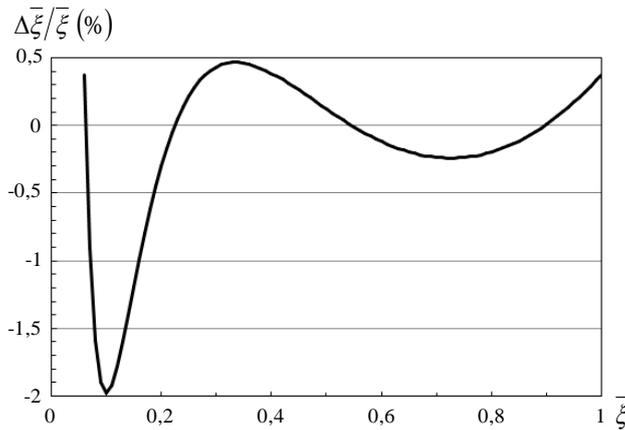
Les paramètres d'ajustement de  $a_0$  à  $a_6$  sont regroupés dans le tableau 2.3.

**Tableau 2.3** : Valeurs des paramètres d'ajustement de la relation (2.119) pour  $\zeta = 2,5$  et  $\beta = 1$ .

$a_6$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$\frac{79}{44016}$	$\frac{52}{3113}$	$\frac{191}{3173}$	$\frac{568}{4687}$	$\frac{319}{1648}$	$\frac{1044}{4033}$	$\frac{502}{2811}$

La relation proposée (2.119), est applicable dans l'intervalle de la conductivité relative :  $0,187296788 \leq Q^* \leq 12,94079235$  ainsi que pour le large intervalle pratique du taux de remplissage des parties semi-elliptiques :  $0,06 \leq \bar{\xi} \leq 1$ .

La figure 2.8 illustre les déviations  $\Delta \bar{\xi} / \bar{\xi}$  provoquées lorsque l'équation approchée (2.119) est appliquée en remplacement de la relation implicite (2.114). Cette figure montre que l'écart relatif maximal est inférieur à 2 % seulement. Cet écart relatif se réduit à moins de 0,5 % lorsque :  $\bar{\xi} \geq 0,2$ .

**Figure 2.8** : Ecarts relatifs  $\Delta \bar{\xi} / \bar{\xi}$ .

En revanche, une fois le taux de remplissage des parties semi-elliptiques du modèle rugueux  $\bar{\xi}$  est atteint, la profondeur relative  $\bar{\eta}$  est simplement déduite en se référant à la relation (2.103), soit :

$$\bar{\eta} = \bar{\xi} / \beta \quad (2.121)$$

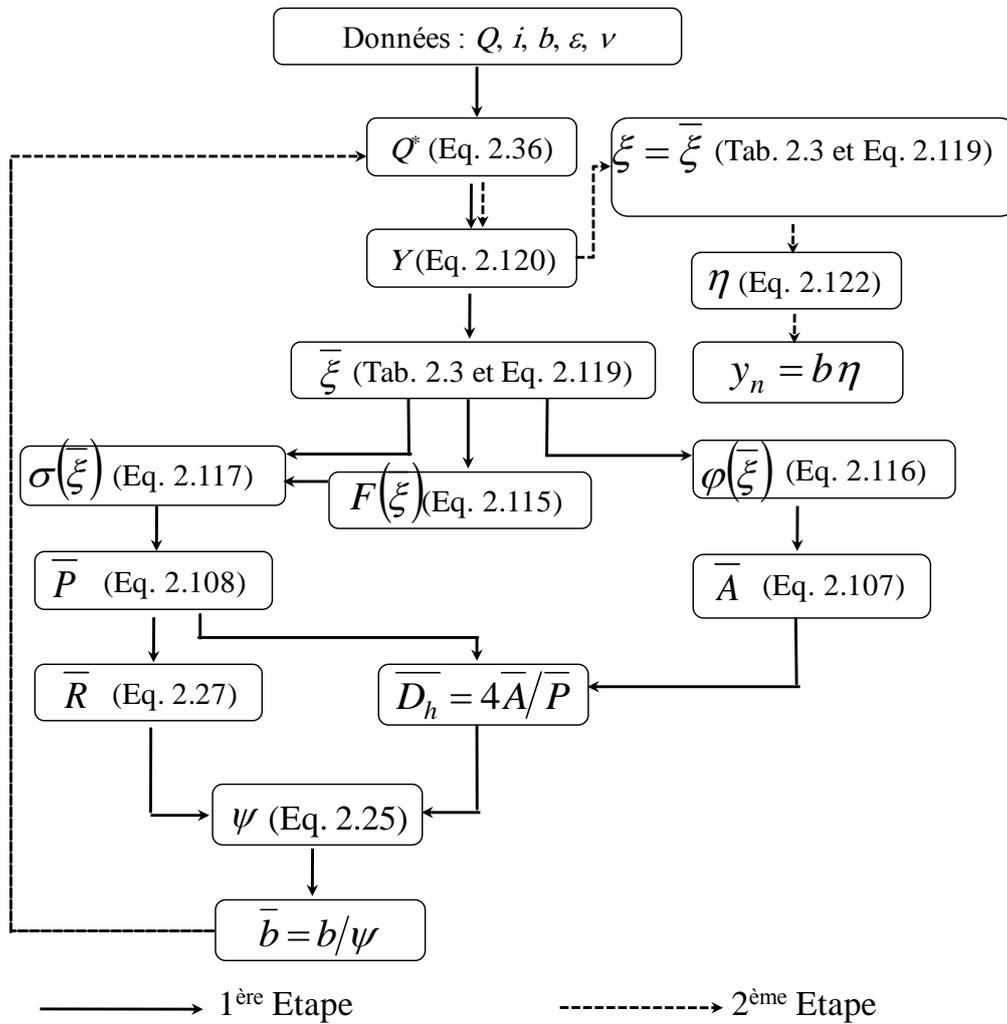
De même pour le canal réel, soit :

$$\eta = \xi / \beta \quad (2.122)$$

Les relations (2.40) et (2.41) sont alors reproduites.

### III.2. Etapes de calcul de la profondeur normale

Afin d'évaluer la profondeur normale  $y_n$  pour un canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal, un organigramme (Figure 2.9) où les grandeurs connues seront :  $Q, i, b, h, a, \varepsilon$  et  $\nu$ . Notons que tous ces grandeurs sont mesurables en pratique. Il est à noter que l'organigramme ci-dessous est valable pour des valeurs de  $h$  et  $a$  menant aux valeurs suivantes :  $\zeta = 2,5$  et  $\beta = 1$ .



**Figure 2.9** : Récapitulation de la méthode de calcul de la profondeur normale pour :  $\zeta = 2,5$  et  $\beta = 1$ .

Notons que lorsqu'il s'agit d'un canal sans fond horizontal, on doit mettre  $b = 0$  et on refait le développement par la même méthodologie suivie ci-dessus.

### III.3. Exemple d'application 2.6

Pour éclaircir la procédure de calcul résumée dans l'organigramme de la figure 2.9, l'exercice pratique ci-dessous sera résolu.

On cherche alors à évaluer la profondeur normale  $y_n$  pour une canalisation à parois semi-elliptiques avec fond horizontal sachant que :  $Q = 3 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $b = 2,5 \text{ m}$ ,  $a = 1 \text{ m}$ ,  $h = 2,5 \text{ m}$ ,  $i = 10^{-4}$ ,  $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

1. Le paramètre adimensionnel  $Q^*$  sera évalué en se référant à la formule (2.36) tel que :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} = \frac{3}{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 2,5^5}} = 9,69252053$$

Donc :  $0,187296788 \leq Q^* = 9,69252053 \leq 12,94079235$ . En plus,  $\zeta = h/a = 2,5/1 = 2,5$  et  $\beta = b/h = 2,5/2,5 = 1$ , alors la méthode récapitulée dans la figure 2.9 est applicable.

2. A travers l'expression (2.120), on calcule la variable  $Y$  comme suit :

$$Y = \log Q^* = \log(9,69252053) = 0,98643673$$

3. En se référant à la relation (2.119) et au tableau 2.3, le taux de remplissage des parties semi-elliptiques du modèle rugueux  $\bar{\xi}$  est déterminé comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= a_6 Y^6 + a_5 Y^5 + a_4 Y^4 + a_3 Y^3 + a_2 Y^2 + a_1 Y + a_0 \\ &= \frac{79}{44016} \times 0,98643673^6 + \frac{52}{3113} \times 0,98643673^5 + \frac{191}{3173} \times 0,98643673^4 \\ &\quad + \frac{568}{4687} \times 0,98643673^3 + \frac{319}{1648} \times 0,98643673^2 + \frac{1044}{4033} \times 0,98643673 + \frac{502}{2811} \\ &= 0,8128627 \end{aligned}$$

4. Les quantités  $F(\bar{\xi})$ ,  $\sigma(\bar{\xi})$  et  $\varphi(\bar{\xi})$  seront évaluées respectivement à travers les expressions (2.115), (2.117) et (2.116) telles que :

$$\begin{aligned} F(\bar{\xi}) &= 0,4934 \sqrt{1 + 5,25 \sin^2 \left[ 0,222 \sin^{-1} \sqrt{\bar{\xi}(2 - \bar{\xi})} \right]} + 0,506 \sqrt{1 + 5,25 \sin^2 \left[ 0,782 \sin^{-1} \sqrt{\bar{\xi}(2 - \bar{\xi})} \right]} \\ &= 0,4934 \sqrt{1 + 5,25 \sin^2 \left[ 0,222 \sin^{-1} \sqrt{0,8128627 \times (2 - 0,8128627)} \right]} \\ &\quad + 0,506 \sqrt{1 + 5,25 \sin^2 \left[ 0,782 \sin^{-1} \sqrt{0,8128627 \times (2 - 0,8128627)} \right]} = 1,74153812 \end{aligned}$$

$$\sigma(\bar{\xi}) = 1 + 0,8 \sin^{-1} \sqrt{\bar{\xi}(2 - \bar{\xi})} F(\bar{\xi}) = 1 + 0,8 \sin^{-1} \sqrt{0,8128627 \times (2 - 0,8128627)} \times 1,74153812 = 2,92620967$$

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\xi}) &= \bar{\xi} \left\{ 1 + \frac{2}{5\bar{\xi}} \left[ \sin^{-1} \sqrt{\bar{\xi}(2 - \bar{\xi})} - (1 - \bar{\xi}) \sqrt{\bar{\xi}(2 - \bar{\xi})} \right] \right\} \\ &= 0,8128627 \times \left\{ 1 + \frac{2}{5 \times 0,8128627} \times \left[ \frac{\sin^{-1} \sqrt{0,8128627 \times (2 - 0,8128627)}}{-(1 - 0,8128627) \times \sqrt{0,8128627 \times (2 - 0,8128627)}} \right] \right\} = 1,29234985 \end{aligned}$$

5. En se basant sur la formule (2.104), la section  $\bar{A}$  sera, en remplaçant  $\varphi(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\zeta})$  par  $\varphi(\bar{\xi})$ , telle que :

$$\bar{A} = b^2 \times \varphi(\bar{\xi}) = (2,5)^2 \times 1,29234985 = 8,07718654 \text{m}^2$$

6. La relation (2.112) est employée pour l'évaluation de  $\bar{P}$ , soit, en remplaçant  $\sigma(\bar{\xi}, \bar{\zeta}, \beta)$  par  $\sigma(\bar{\xi})$  :

$$\bar{P} = b \times \sigma(\bar{\xi}) = 2,5 \times 2,92620967 = 7,31552417 \text{m}$$

7. Le paramètre hydraulique  $\bar{D}_h$  sera comme suit :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P} = 4 \times 8,07718654 / 7,31552417 = 4,4164636 \text{m}$$

8.  $\bar{R}$  est déterminé par la formule (2.27) tel que :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{\bar{P}v} = \frac{4 \times 3}{7,31552417 \times 10^{-6}} = 1640347,26$$

9. En se référant à la formule (2.25),  $\psi$  est explicitement déterminé comme suit :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{10^{-3}/4,4164636}{4,75} + \frac{8,5}{1640347,26} \right) \right]^{-2/5} = 0,75488364 \end{aligned}$$

10. En accord avec la relation fondamentale de la méthode MMR (2.24 :  $L = \psi \bar{L}$ ), on suggère que :

$$\bar{b} = b/\psi = 2,5/0,75488364 = 3,31176867 \text{m}$$

Il convient de noter pour la valeur :  $\bar{b} = 3,31176867 \text{m}$ , on peut écrire :  $\xi = \bar{\xi}$ . De ce fait,  $Q^*$  sera, selon l'expression (2.36) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^{-5}}} = \frac{3}{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 3,31176867^3}} = 4,79884549$$

Donc :  $0,187296788 \leq Q^* = 4,79884549 \leq 12,94079235$ , alors la méthode récapitulée dans la figure 2.9 est toujours applicable.

11. Selon la relation (2.120), la nouvelle valeur du paramètre  $Y$  est telle que :

$$Y = \log Q^* = \log(4,79884549) = 0,68113677$$

12. En utilisant les mêmes valeurs pour les coefficients  $a_0$  à  $a_6$  considérés au cours de l'étape 3, la relation (2.119) permet de déterminer le taux de remplissage des parties semi-elliptiques du canal réel  $\xi$  tel que :

$$\begin{aligned}\xi = \bar{\xi} &= a_6 Y^6 + a_5 Y^5 + a_4 Y^4 + a_3 Y^3 + a_2 Y^2 + a_1 Y + a_0 \\ &= \frac{79}{44016} \times 0,68113677^6 + \frac{52}{3113} \times 0,68113677^5 + \frac{191}{3173} \times 0,68113677^4 \\ &+ \frac{568}{4687} \times 0,68113677^3 + \frac{319}{1648} \times 0,68113677^2 + \frac{1044}{4033} \times 0,68113677 + \frac{502}{2811} \\ &= 0,49859292\end{aligned}$$

Selon la relation (2.122), on peut déduire la profondeur relative de la canalisation réelle (étudiée) somme suit :

$$\eta = \xi / \beta = 0,49859292 / 1 = 0,49859292$$

13. En effet, la profondeur normale recherchée sera alors :

$$y_n = b\eta = 2,5 \times 0,49859292 = 1,2464823 \text{ m} \approx 1,25 \text{ m}$$

14. Le but de cette étape est de valider le calcul précédent. Pour cela, calculons la pente  $i$  exprimée par l'équation (2.1). Si les calculs effectués précédemment sont corrects, la pente qui sera évaluée va être la même que celle donnée dans l'exercice.

L'influence de frottement sera évaluée comme suit (Achour, 2007) :

$$f = \psi^5 / 16$$

Soit :

$$f = 0,75488364^5 / 16 = 0,01532075$$

De plus, les fonctions  $F(\xi)$ ,  $\sigma(\xi)$  et  $\varphi(\xi)$  sont déterminées, respectivement, selon les relations (2.115), (2.117) et (2.116) en remplaçant  $\bar{\xi}$  par  $\xi$ , soit :

$$\begin{aligned}F(\xi) &= 0,4934 \sqrt{1 + 5,25 \sin^2 \left[ 0,222 \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} \right]} + 0,506 \sqrt{1 + 5,25 \sin^2 \left[ 0,782 \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} \right]} \\ &= 0,4934 \sqrt{1 + 5,25 \sin^2 \left[ 0,222 \sin^{-1} \sqrt{0,49859292 \times (2 - 0,49859292)} \right]} \\ &+ 0,506 \sqrt{1 + 5,25 \sin^2 \left[ 0,782 \sin^{-1} \sqrt{0,49859292 \times (2 - 0,49859292)} \right]} = 1,54335678\end{aligned}$$

$$\sigma(\xi) = 1 + 0,8 \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} F(\xi) = 1 + 0,8 \sin^{-1} \sqrt{0,49859292 \times (2 - 0,49859292)} \times 1,54335678 = 2,29095256$$

$$\begin{aligned}\varphi(\xi) &= \xi \left\{ 1 + \frac{2}{5\xi} \left[ \sin^{-1} \sqrt{\xi(2-\xi)} - (1-\xi) \sqrt{\xi(2-\xi)} \right] \right\} \\ &= 0,49859292 \times \left\{ 1 + \frac{2}{5 \times 0,49859292} \times \left[ \sin^{-1} \sqrt{0,49859292 \times (2 - 0,49859292)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1 - 0,49859292) \times \sqrt{0,49859292 \times (2 - 0,49859292)} \right] \right\} \\ &= 0,74329247\end{aligned}$$

De même, les propriétés géométriques  $A$  et  $P$  du canal étudié (réel) peuvent être déduits à partir des relations (2.104) et (2.112), respectivement, tels que :

$$A = b^2 \times \varphi(\xi) = (2,5)^2 \times 0,74329247 = 4,64557793 \text{ m}^2$$

Et :

$$P = b \times \sigma(\xi) = 2,5 \times 2,29095256 = 5,72738139 \text{ m}$$

Pour les valeurs ainsi calculées de  $A$  et  $P$ , le paramètre hydraulique  $D_h$  sera alors :

$$D_h = 4A/P = 4 \times 4,64557793 / 5,72738139 = 3,24446906 \text{ m}$$

Finalement, la pente  $i$  sera évaluée à travers la formule (2.1) telle que :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,01532075}{3,24446906} \times \frac{3^2}{2 \times 9,81 \times 4,64557793^2} = 0,00010037 \approx 10^{-4}$$

Il est ainsi clairement démontré que la pente longitudinale calculée est pratiquement égale à la pente donnée dans l'exercice ( $\Delta i/i = 0,37\%$ ), la fiabilité de la méthode préconisée est alors vérifiée.

## IV. Ecoulement critique

### IV.1. Dimensionnement

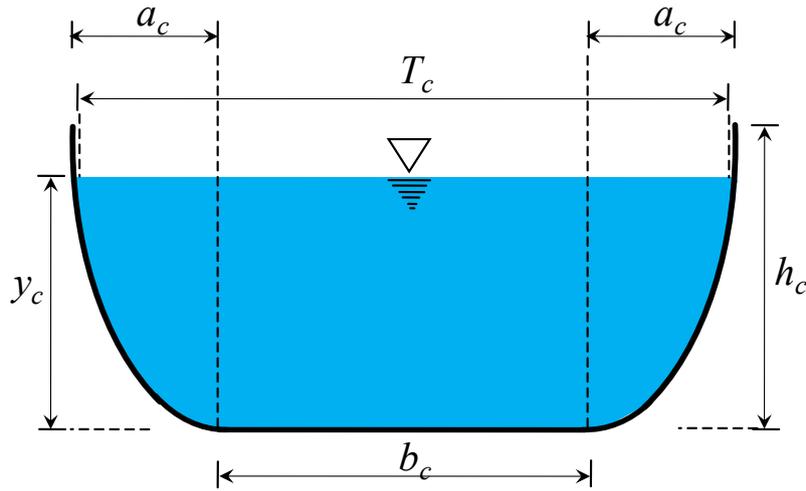
Dans ce cas, l'écoulement est supposé en état critique où on doit trouver une relation permettant la détermination de la profondeur critique  $y_c$  ainsi que les autres dimensions du canal telles que la base  $b_c$ , la hauteur totale de la canalisation  $h_c$  et la largeur horizontale des parties semi-elliptiques  $a_c$  (Figure 2.10). Les grandeurs données seront :  $Q$  et  $g$ . On définit, en outre, les trois paramètres de formes  $\eta_c$ ,  $\xi_c$  et  $\zeta_c$  tels que, respectivement :

$$\eta_c = y_c/b_c \tag{2.123}$$

$$\xi_c = y_c/h_c \tag{2.124}$$

$$\zeta_c = h_c/a_c \tag{2.125}$$

Ces trois paramètres sont imposés et peuvent, ainsi, être considérés parmi les données du problème.



**Figure 2.10 :** Schéma de définition de l'état de l'écoulement critique dans un canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal.

Lorsque l'écoulement est en état critique, le nombre de *Froude*  $F_r$  sera égal à un (01) d'où le régime est gouverné par la formule (2.44) développée dans le chapitre précédent telle que :

$$\frac{Q^2 T_c}{g A_c^3} = 1 \quad (2.44)$$

La section  $A_c$  est évaluée à travers l'équation (2.104) telle que :

$$A_c = b_c^2 \times \varphi(\eta_c, \xi_c, \zeta_c) \quad (2.126)$$

La fonction  $\varphi(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)$  peut être exprimée par analogie avec la relation (2.105), soit :

$$\varphi(\eta_c, \xi_c, \zeta_c) = \eta_c \left\{ 1 + \frac{\eta_c}{\zeta_c \xi_c^2} \left[ \sin^{-1} \sqrt{\xi_c (2 - \xi_c)} - (1 - \xi_c) \sqrt{\xi_c (2 - \xi_c)} \right] \right\} \quad (2.127)$$

La largeur de la surface libre (Figure 2.10) a été développée par *Vatankhah* (2015) à travers la relation (1.94) (Chapitre II, partie I). La relation (1.94) sera réécrite à partir de la figure (2.10) ainsi que du rapport  $\xi_c$  donné à travers la formule (2.124), soit :

$$T_c = 2a_c \sqrt{\xi_c (2 - \xi_c)} \quad (2.128)$$

Ou bien :

$$T_c = 2a_c \times \frac{b_c}{b_c} \times \frac{h_c}{h_c} \times \frac{y_c}{y_c} \times \sqrt{\xi_c (2 - \xi_c)} \quad (2.129)$$

Cette dernière expression devient en se référant aux expressions (2.123), (2.124) et (1.25) :

$$T_c = b_c \frac{2\eta_c}{\xi_c \zeta_c} \sqrt{\xi_c (2 - \xi_c)} \quad (2.130)$$

Posons la fonction  $\rho(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)$  telle que :

$$\rho(\eta_c, \xi_c, \zeta_c) = \frac{2\eta_c}{\xi_c \zeta_c} \sqrt{\xi_c (2 - \xi_c)} \quad (2.131)$$

La relation (2.130) s'écrit par conséquent :

$$T_c = b_c \times \rho(\eta_c, \xi_c, \zeta_c) \quad (2.132)$$

En remplaçant les relations (2.126) et (2.131) dans la relation (2.44), on obtient :

$$\frac{Q^2}{g} \frac{b_c \times \rho(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)}{[b_c^2 \times \varphi(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)]^3} = 1$$

Ou bien, après simplification et réarrangement :

$$b_c = \frac{[\rho(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)]^{1/5} \left( \frac{Q^2}{g} \right)^{1/5}}{[\varphi(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)]^{3/5}} \quad (2.133)$$

Ainsi, en état d'écoulement critique, la relation (2.133) permet l'évaluation explicite de  $b_c$  à partir des valeurs connues de :  $Q$ ,  $\eta_c$ ,  $\xi_c$  et  $\zeta_c$ .

La profondeur critique  $y_c$  est déduite en se basant sur la relation (2.123), soit :

$$y_c = b_c \times \eta_c \quad (2.134)$$

La totale du canal en état critique  $h_c$  est simplement déduite à partir de la relation (2.124) telle que :

$$h_c = y_c / \xi_c \quad (2.135)$$

Finalement, la largeur horizontale des parties semi-elliptiques du canal  $a_c$  est donnée à partir de la relation (2.125), soit :

$$a_c = h_c / \zeta_c \quad (2.136)$$

#### IV.2. Etapes de calcul des dimensions linéaires du canal

Afin de déterminer les dimensions du la canalisation considérée en conditions critiques, on doit connaître les grandeurs physiques suivantes :  $Q$ ,  $\eta_c$ ,  $\xi_c$ ,  $\zeta_c$ , et  $g$ . Les grandeurs recherchées seront :  $y_c$ ,  $b_c$ ,  $h_c$  et  $a_c$ . On effet, on suggère la démarche suivante :

1. Evaluer les quantités  $\varphi(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)$  et  $\rho(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)$  à travers les formules (2.127) et (2.131) respectivement.
2. Evaluer la base du canal  $b_c$  par la relation (2.133).
3. Déterminer la profondeur critique  $y_c$  par la relation (2.134).

4. Calculer la hauteur totale du canal  $h_c$  par la relation (2.135).
5. Enfin, déduire la valeur de la largeur horizontale des parties semi-elliptiques  $a_c$  par application de la relation (2.136).

### IV.3. Exemple d'application 2.7

Considérons un canal à fond horizontal et à parois semi-elliptiques (Figure 2.10). En supposant que l'écoulement dans le canal est en état critique, calculer la largeur de fond  $b_c$  du canal, la profondeur critique  $y_c$ , la hauteur totale du canal  $h_c$  et la largeur horizontale  $a_c$  des parties semi-elliptiques du canal, sachant que :

$$Q = 40,303 \text{ m}^3/\text{s}, \eta_c = 0,5, \xi_c = 0,8, \zeta_c = 3 \text{ et } g = 9,81 \text{ m/s}^2.$$

1. Selon les relations (2.127) et (2.131), les fonctions  $\phi(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)$  et  $\rho(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} \phi(\eta_c, \xi_c, \zeta_c) &= \eta_c \left\{ 1 + \frac{\eta_c}{\zeta_c \xi_c^2} \left[ \sin^{-1} \sqrt{\xi_c(2-\xi_c)} - (1-\xi_c) \sqrt{\xi_c(2-\xi_c)} \right] \right\} \\ &= 0,5 \times \left\{ 1 + \frac{0,5}{3 \times (0,8)^2} \left[ \sin^{-1} \sqrt{0,8 \times (2-0,8)} - (1-0,8) \times \sqrt{0,8(2-0,8)} \right] \right\} = 0,65279677 \end{aligned}$$

$$\rho(\eta_c, \xi_c, \zeta_c) = \frac{2\eta_c}{\xi_c \zeta_c} \sqrt{\xi_c(2-\xi_c)} = \frac{2 \times 0,5}{0,8 \times 3} \sqrt{0,8 \times (2-0,8)} = 0,40824829$$

2. La largeur de fond du canal  $b_c$  peut être calculée par la relation (2.133) telles que :

$$b_c = \frac{[\rho(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)]^{1/5} \left( \frac{Q^2}{g} \right)^{1/5}}{[\phi(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)]^{3/5}} = \frac{(0,40824829)^{1/5} \times \left( \frac{40,303^2}{9,81} \right)^{1/5}}{(0,65279677)^{3/5}} = 2,99998597 \text{ m} \approx 3 \text{ m}$$

3. La profondeur critique recherchée est, selon la relation (2.134) :

$$y_c = b_c \times \eta_c = 2,99998597 \times 0,5 = 1,49999298 \text{ m} \approx 1,5 \text{ m}$$

4. La hauteur totale du canal  $h_c$  est calculée à partir de la relation (2.135) :

$$h_c = y_c / \xi_c = 1,49999298 / 0,8 = 1,87499123 \text{ m} \approx 1,87 \text{ m}$$

5. La largeur horizontale  $a_c$  des parties semi-elliptiques du canal est calculée selon la relation (2.136) :

$$a_c = h_c / \zeta_c = 1,87499123 / 3 = 0,62499708 \text{ m} \approx 0,62 \text{ m}$$

9. Cette étape vise à vérifier les calculs effectués en déterminant le nombre de Froude  $F_r$  par application de la relation (2.44). Le nombre Froude  $F_r$  ainsi calculé doit être égal l'unité car l'écoulement est à l'état critique.

Selon la relation (2.126), l'aire de la section mouillée  $A_c$  est :

$$A_c = b_c^2 \times \phi(\eta_c, \xi_c, \zeta_c) = (2,99998597)^2 \times 0,65279677 = 5,87511601 \text{ m}^2$$

Selon la relation (2.132), la largeur du plan d'eau  $T_c$  est :

$$T_c = b_c \times \rho(\eta_c, \xi_c, \zeta_c) = 2,99998597 \times 0,40824829 = 1,22473914 \text{ m}$$

En vertu de la relation (2.44), le nombre de *Froude*  $F_r$  est :

$$\frac{Q^2 T_c}{g A_c^3} = \frac{(40,303)^2 \times 1,22473914}{9,81 \times (5,8751160)^3} = 1$$

Comme nous pouvons le constater, le nombre de *Froude* calculé et égal à l'unité, ce qui permet de conclure à la validité des calculs effectués.

## V. Equation du débit volume

### V.1. Modèle rugueux et expression du débit

Dans ce cas, les dimensions linéaires du canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal  $b$ ,  $h$  et  $a$  ainsi que la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$  sont connues. La pente longitudinale du canal  $i$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$  sont également des paramètres connus. L'objectif est alors de procéder au calcul du débit volume  $Q$  par la méthode MMR. De ce fait, le modèle rugueux (Figure 2.7) est gouverné par les conditions suivantes :  $\bar{y}_n = y_n$ ,  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{h} = h$ ,  $\bar{a} = a$ ,  $\bar{i} = i$  et  $\bar{Q} \neq Q$ .

Alors, le débit volume du modèle rugueux est régi par la relation (2.58) développée au cours du chapitre précédent, soit :

$$\bar{Q} = 8\sqrt{2gi} \left( \frac{A^3}{P} \right)^{1/2} \quad (2.58)$$

Le périmètre mouillé  $P$  s'exprime en vertu de la relation (2.94) tel que :

$$P = b \times \sigma(\eta, \xi, \zeta) \quad (2.137)$$

La fonction  $\sigma(\eta, \xi, \zeta)$  est donnée par la relation (2.93) dans laquelle se trouve la fonction  $F(\xi, \zeta)$  exprimée par la relation (2.90).

Rappelons que les paramètres de forme  $\eta$  et  $\xi$  sont, respectivement :  $\eta = y_n/b$ ,  $\xi = y_n/h$  et  $\zeta = h/a$ .

L'aire de la section mouillée  $A$  peut être déduite de la relation (2.98), soit :

$$A = b^2 \times \varphi(\eta, \xi, \zeta) \quad (2.138)$$

La fonction  $\varphi(\eta, \xi, \zeta)$  est donnée par la relation (2.97).

En tenant compte des relations (2.137) et (2.138), la relation (2.58) devient :

$$\bar{Q} = 8\sqrt{2gi} \left\{ \frac{[b^2 \times \varphi(\eta, \xi, \zeta)]^3}{b \times \sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right\}^{1/2}$$

Ou bien, après simplification et réarrangement :

$$\bar{Q} = 8\sqrt{2}\sqrt{gib^5} \frac{[\varphi(\eta, \xi, \zeta)]^{3/2}}{[\sigma(\eta, \xi, \zeta)]^{1/2}} \quad (2.139)$$

Connaissant les valeurs des paramètres  $i$ ,  $b$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  et  $\zeta$ , le débit volume du modèle rugueux de référence  $\bar{Q}$  est alors facilement calculé par application de la relation (2.139) en association avec les relations (2.90), (2.93) et (2.97).

Par ailleurs le débit véhiculé dans un canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal (le canal réel) est régit par la relation générale du débit proposée par *Achour* et *Bedjaoui* (2006) et réécrite dans le chapitre précédent sous la forme de la relation (2.65) dont on rappelle son expression, soit :

$$Q = -4\sqrt{2g}A\sqrt{R_h}i \log\left(\frac{\varepsilon}{14,8R_h} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right) \quad (2.65)$$

Avec :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gR_h^3i}}{\nu} \quad (2.66)$$

Le rayon hydraulique  $R_h$  figuré dans les relations (2.65) et (2.66) est tel que :  $R_h = A/P$ . Soit en se basant sur les relations (2.137) et (2.138) :

$$R_h = \frac{b^2 \times \varphi(\eta, \xi, \zeta)}{b \times \sigma(\eta, \xi, \zeta)} = b \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \quad (2.140)$$

En remplaçant les relations (2.138) et (2.140) dans la relation (2.65), on obtient :

$$Q = -4\sqrt{2g}b^2\varphi(\eta, \xi, \zeta) \sqrt{b \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} i} \log\left[\frac{\varepsilon}{14,8b \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)}} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right]$$

Cette dernière relation s'écrit, après simplification et réarrangement :

$$Q = -4\sqrt{2}\sqrt{gib^5} \frac{[\varphi(\eta, \xi, \zeta)]^{3/2}}{[\sigma(\eta, \xi, \zeta)]^{1/2}} \log\left\{\frac{\varepsilon/b}{14,8[\varphi(\eta, \xi, \zeta)/\sigma(\eta, \xi, \zeta)]} + \frac{10,04}{\bar{R}}\right\} \quad (2.141)$$

Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  s'écrit, en vertu des relations (2.66) et (2.140) :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{g \left[ b \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right]^3 i}}{\nu}$$

Ou bien :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gib^3} \left[ \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right]^{3/2}}{\nu} \quad (2.142)$$

L'application de la relation (2.142), en association avec les relations (2.90), (2.93) et (2.97), permet le calcul du nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux de référence connaissant les valeurs des paramètres  $i$ ,  $b$ ,  $\nu$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  et  $\zeta$ .

En revanche, en divisant la relation (2.141) par la relation (2.139), on obtient :

$$\frac{Q}{\bar{Q}} = \frac{-4\sqrt{2}\sqrt{gib^5} \frac{[\varphi(\eta, \xi, \zeta)]^{3/2}}{[\sigma(\eta, \xi, \zeta)]^{1/2}} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\varphi(\eta, \xi, \zeta)/\sigma(\eta, \xi, \zeta)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\}}{8\sqrt{2}\sqrt{gib^5} \frac{[\varphi(\eta, \xi, \zeta)]^{3/2}}{[\sigma(\eta, \xi, \zeta)]^{1/2}}}$$

Ou bien, après simplification et réarrangement :

$$\frac{Q}{\bar{Q}} = -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\varphi(\eta, \xi, \zeta)/\sigma(\eta, \xi, \zeta)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} \quad (2.143)$$

Posons :

$$\psi_Q = -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\varphi(\eta, \xi, \zeta)/\sigma(\eta, \xi, \zeta)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} \quad (2.144)$$

$\psi_Q$  est appelé facteur de correction des débits (Achour, 2007).

D'où la relation (2.143) devient :

$$Q = \psi_Q \bar{Q} \quad (2.72)$$

Ainsi, la relation (2.72) est du chapitre précédent est alors reproduite.

De ce fait, le débit volume  $Q$  peut être calculé par application directe de la relation (2.141) ou bien par l'utilisation des relations (2.139), (2.144) et (2.72).

## V.2. Etapes de calcul du débit volume

Les données du problème sont :  $b$ ,  $h$ ,  $a$ ,  $y_n$ ,  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$ . Les étapes de calcul du débit volume  $Q$  sont résumées dans ce qui suit :

1. Calculer les paramètres de forme  $\eta$ ,  $\xi$  et  $\zeta$  tels que, respectivement :  $\eta = y_n/b$ ,  $\xi = y_n/h$  et  $\zeta = h/a$ .
2. Calculer les fonctions  $F(\xi, \zeta)$ ,  $\sigma(\eta, \xi, \zeta)$  et  $\varphi(\eta, \xi, \zeta)$  respectivement par les relations (2.90), (2.93) et (2.97).
3. Déterminer le débit volume du modèle rugueux  $\bar{Q}$  par la relation (2.139).
4. Calculer le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux par application de la relation (2.142).
5. Calculer le facteur de correction des débits  $\psi_Q$  par la relation (2.144).
6. Enfin, déduire la valeur du débit volume  $Q$  par application de la relation (2.72).

### V.3. Exemple d'application 2.8

Calculer le débit volume  $Q$  véhiculé par un canal à fond horizontal et à parois semi-elliptiques (Figure 2.6), sachant que :

$$b = 2,305 \text{ m}, h = 1,729 \text{ m}, a = 0,865 \text{ m}, y_n = 1,383 \text{ m}, i = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-3} \text{ m et } \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

On a utilisé les paramètres de l'exemple d'application 2.5. De ce fait, on doit aboutir à un débit volume  $Q = 3,274 \text{ m}^3/\text{s}$  ou à une valeur très proche.

1. Les paramètres de forme  $\eta$  et  $\xi$  sont, respectivement :

$$\eta = \frac{y_n}{b} = \frac{1,383}{2,305} = 0,6$$

$$\xi = \frac{y_n}{h} = \frac{1,383}{1,729} \approx 0,8$$

$$\zeta = \frac{h}{a} = \frac{1,729}{0,865} \approx 2$$

2. Selon les relations (2.90), (2.93) et (2.97), les fonctions  $F(\xi, \zeta)$ ,  $\sigma(\eta, \xi, \zeta)$  et  $\varphi(\eta, \xi, \zeta)$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} F(\xi, \zeta) &= 0,4934\sqrt{1 + (\zeta^2 - 1)\sin^2\left[0,222\sin^{-1}\sqrt{\xi(2-\xi)}\right]} + 0,506\sqrt{1 + (\zeta^2 - 1)\sin^2\left[0,782\sin^{-1}\sqrt{\xi(2-\xi)}\right]} \\ &= 0,4934\sqrt{1 + (2^2 - 1)\sin^2\left[0,222\sin^{-1}\sqrt{0,8 \times (2-0,8)}\right]} + 0,506\sqrt{1 + (2^2 - 1)\sin^2\left[0,782\sin^{-1}\sqrt{0,8 \times (2-0,8)}\right]} \\ &= 1,4764652 \end{aligned}$$

$$\sigma(\eta, \xi, \zeta) = 1 + \frac{2\eta}{\xi\zeta}\sin^{-1}\sqrt{\xi(2-\xi)}F(\xi, \zeta) = 1 + \frac{2 \times 0,6}{0,8 \times 2}\sin^{-1}\sqrt{0,8 \times (2-0,8)} \times 1,4764652 = 2,5164461 \text{ B}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\eta, \xi, \zeta) &= \eta \left\{ 1 + \frac{\eta}{\zeta\xi^2} \left[ \sin^{-1}\sqrt{\xi(2-\xi)} - (1-\xi)\sqrt{\xi(2-\xi)} \right] \right\} \\ &= 0,6 \left\{ 1 + \frac{0,6}{2 \times 0,8^2} \left[ \sin^{-1}\sqrt{0,8 \times (2-0,8)} - (1-0,8)\sqrt{0,8 \times (2-0,8)} \right] \right\} = 0,93004103 \end{aligned}$$

3. En application de la relation (2.139), le débit volume du modèle rugueux  $\bar{Q}$  est :

$$\bar{Q} = 8\sqrt{2}\sqrt{gib^5} \frac{[\varphi(\eta, \xi, \zeta)]^{3/2}}{[\sigma(\eta, \xi, \zeta)]^{1/2}} = 8\sqrt{2}\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times (2,305)^5} \frac{(0,93004103)^{3/2}}{(2,5164461 \text{ B})^{1/2}} = 1,61697445 \text{ m}^3/\text{s}$$

4. Le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est donné par la relation (2.142), soit :

$$\bar{R} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{gib^3}}{\nu} \left[ \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right]^{3/2} = 32\sqrt{2} \frac{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times (2,305)^3}}{10^{-6}} \left( \frac{0,93004103}{2,5164461 \text{ B}} \right)^{3/2} = 1114843,19$$

5. En vertu de la relation (2.144), le facteur de correction des débits  $\psi_Q$  est tel que :

$$\begin{aligned}\psi_Q &= -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\varphi(\eta, \xi, \zeta)/\sigma(\eta, \xi, \zeta)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{10^{-3}/2,305}{14,8 \times \frac{0,93004103}{2,5164461 \text{ B}}} + \frac{10,04}{1114843,19} \right\} = 2,02701049\end{aligned}$$

6. Le débit volume  $Q$  recherché est selon la relation (2.72) :

$$Q = \psi_Q \bar{Q} = 2,02701049 \times 1,61697445 = 3,27762418 \text{ m}^3/\text{s}$$

Au regard du résultat obtenu, il s'agit pratiquement de la valeur du débit donné dans l'exemple d'application 2.5 ( $Q = 3,274 \text{ m}^3/\text{s}$ ) avec un écart relatif  $\Delta Q/Q = 0,11 \%$  seulement.

## VI. Equation de la vitesse moyenne de l'écoulement

Dans ce cas, les dimensions linéaires du canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal  $b$ ,  $h$  et  $a$  ainsi que la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$  sont connues. La pente longitudinale du canal  $i$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$  sont également des paramètres connus. Le débit volume  $Q$  est inconnu. L'objectif est alors de procéder au calcul de la vitesse moyenne de l'écoulement  $V$  par la méthode MMR. De ce fait, le modèle rugueux (Figure 2.7) est gouverné par les conditions suivantes :  $\bar{y}_n = y_n$ ,  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{h} = h$ ,  $\bar{a} = a$ ,  $\bar{i} = i$ ,  $\bar{Q} \neq Q$  et  $\bar{V} \neq V$ .

Rappelons la vitesse moyenne  $\bar{V}$  du modèle rugueux a été développée au cours du chapitre précédent elle que :

$$\bar{V} = \frac{\bar{Q}}{A} \quad (2.76)$$

En remplaçant les relations (2.138) et (2.139) dans la relation (2.76), on obtient :

$$\bar{V} = \frac{8\sqrt{2}\sqrt{gib^5} \left[ \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right]^{3/2}}{b^2 \times \varphi(\eta, \xi, \zeta)}$$

Ou bien :

$$\bar{V} = 8\sqrt{2}\sqrt{gib} \left[ \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right]^{1/2} \quad (2.145)$$

Par ailleurs, la vitesse moyenne de l'écoulement  $V$  dans le canal réel est, selon la relation (2.74) du chapitre précédent

$$V = \frac{Q}{A} \quad (2.74)$$

Alors, en remplaçant les relations (2.138) et (2.141) dans la relation (2.74), on peut écrire :

$$V = \frac{-4\sqrt{2}\sqrt{gib^5} \left[ \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right]^{3/2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8 \left[ \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right] + \frac{10,04}{\bar{R}}} \right\}}{b^2 \times \varphi(\eta, \xi, \zeta)}$$

Ou bien :

$$V = -4\sqrt{2}\sqrt{gib} \left[ \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right]^{1/2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8 \left[ \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right] + \frac{10,04}{\bar{R}}} \right\} \quad (2.146)$$

Notons que le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux figurant dans la relation (2.146) est donné par la relation (2.142).

En divisant la relation (2.146) par la relation (2.145), on obtient :

$$\frac{V}{\bar{V}} = \frac{-4\sqrt{2}\sqrt{gib} \left[ \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right]^{1/2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8 \left[ \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right] + \frac{10,04}{\bar{R}}} \right\}}{8\sqrt{2}\sqrt{gib} \left[ \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right]^{1/2}}$$

Ou bien, après simplification et réarrangement :

$$\frac{V}{\bar{V}} = -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8 \left[ \frac{\varphi(\eta, \xi, \zeta)}{\sigma(\eta, \xi, \zeta)} \right] + \frac{10,04}{\bar{R}}} \right\} \quad (2.147)$$

Au regard des relations (2.143), (2.144) et (2.147), on peut écrire :

$$V = \psi_Q \bar{V} \quad (2.80)$$

Ainsi, la relation (2.80) du chapitre précédent est alors reproduite. De plus, nous pouvons constater que la vitesse moyenne  $V$  de l'écoulement dans le canal réel est égale à la vitesse moyenne  $\bar{V}$  de l'écoulement dans le modèle rugueux de référence corrigé par le facteur de correction des débits  $\psi_Q$ . Alors, la vitesse moyenne de l'écoulement  $V$  peut être calculée par application directe de la relation (2.78) ou bien par l'utilisation des relations (2.144), (2.145) et (2.80).

Les étapes de calcul de la vitesse peuvent être inspirées de celles adoptées pour le calcul du débit volume (Voir paragraphe V.2. ci-dessus).

## VII. Equation du nombre de *Reynolds*

Les données du problème sont : les dimensions linéaires du canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal  $b$ ,  $h$  et  $a$ , la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$ , la pente longitudinale du canal  $i$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique  $\nu$ . Le débit volume  $Q$  est inconnu. L'objectif est d'exprimer le nombre de *Reynolds*  $R$  par la méthode MMR. De ce fait, le modèle rugueux

(Figure 2.7) est gouverné par les conditions suivantes :  $\bar{y}_n = y_n$ ,  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{h} = h$ ,  $\bar{a} = a$ ,  $\bar{i} = i$ ,  $\bar{v} = v$  et  $\bar{Q} \neq Q$ .

Rappelons que la relation (2.84) développée au cours du chapitre précédent donne la liaison entre le nombre de Reynolds  $R$  du canal réel et celui du modèle rugueux  $\bar{R}$  telle que :

$$R = \psi_Q \bar{R} \quad (2.84)$$

En remplaçant la relation (2.144) dans la relation (2.84), on obtient :

$$R = -\frac{1}{2} \bar{R} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\varphi(\eta, \xi, \zeta)/\sigma(\eta, \xi, \zeta)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} \quad (2.148)$$

Le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est défini par la relation (2.142).

Ainsi, la relation (2.148) permet le calcul du nombre de Reynolds  $R$  sans pourtant connaître la valeur du débit volume  $Q$ .

### VIII. Equation du coefficient de frottement

Les données du problème sont les mêmes que celles indiquées dans le paragraphe précédent. Le débit volume  $Q$  est inconnu. L'objectif est d'exprimer le coefficient de frottement  $f$  par la méthode MMR.

Rappelons le coefficient de frottement  $f$  et le facteur de correction des débits  $\psi_Q$  sont liés par la relation (2.87) indiquée dans le chapitre précédent telle que :

$$f = \frac{1}{16\psi_Q^2} \quad (2.87)$$

En tenant compte de la relation (2.144), la relation (2.87) devient :

$$f = \frac{1}{16 \left\langle -\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{\varepsilon/b}{14,8[\varphi(\eta, \xi, \zeta)/\sigma(\eta, \xi, \zeta)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right\} \right\rangle^2}$$

Ou bien :

$$f = \left[ -2 \log \left( \frac{\varepsilon/b}{14,8[\varphi(\eta, \xi, \zeta)/\sigma(\eta, \xi, \zeta)]} + \frac{10,04}{\bar{R}} \right) \right]^{-2} \quad (2.149)$$

Le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est donné par la relation (2.142).

Ainsi, la relation (2.149) permet le calcul du coefficient de frottement  $f$  sans pourtant connaître la valeur du débit volume  $Q$ .

## IX. Conclusion

Le présent chapitre a eu pour objectif l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal en se basant principalement sur la méthode MMR.

Les caractéristiques géométriques du canal telles que : l'aire de la section mouillée, le périmètre mouillé et la largeur du plan d'eau ont été inspirées à partir de l'étude de *Vatankhah* (2015) dédiée au calcul des profondeurs normale et critique dans un canal à parois semi-elliptiques sans fond horizontal.

Le modèle rugueux de référence a été défini pour chaque cas d'étude. Ses caractéristiques géométriques ont été adaptées à chaque cas d'étude également.

En se basant sur la méthode MMR, les méthodes proposées ont eu pour objectif de :

- i.* Déterminer la profondeur normale de l'écoulement ainsi que les dimensions du canal telles que la largeur du fond, la hauteur totale et la largeur horizontale des parties semi-elliptiques.
- ii.* Déterminer la profondeur normale de l'écoulement connaissant les dimensions du canal. La méthode a été proposée en adoptant un modèle mathématique basé sur une équation polynomiale d'ordre six (06) et menant au calcul de la profondeur normale recherchée dans les limites indiquées dans le texte.
- iii.* Calculer le débit volume.
- iv.* Calculer la vitesse moyenne de l'écoulement.
- v.* Calculer le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement dans le canal indépendamment de la valeur du débit volume et du coefficient de frottement.
- vi.* Déterminer le coefficient de frottement en l'absence des valeurs du débit volume et du nombre de *Reynolds*.

Ces méthodes sont applicables dans tout le domaine turbulent englobant le régime turbulent rugueux, lisse et de transition.

Notons que toutes les méthodes proposées sont indépendantes l'une des autres facilitant ainsi la recherche du paramètre inconnu et minimiser par conséquent le temps et le volume de calcul. Afin de mieux illustrer l'intérêt de ce résultat, citons l'exemple de calcul du coefficient de frottement, sans savoir la valeur du débit volume, par la méthode classique. Dans ce cas, on commence par le calcul du débit volume par la formule de *Achour et Bedjaoui* (2006) par exemple, puis calculer le nombre de *Reynolds* et déterminer enfin la valeur du coefficient de frottement. Mais en appliquant la méthode proposée dans ce chapitre, on peut arriver à la valeur du coefficient de frottement sans passer par le calcul du débit volume et du nombre de *Reynolds*.

En revanche, une section particulière a été dédiée au dimensionnement du canal en régime critique en se basant sur la formule du nombre de *Froude*.

Les données du problème nécessaires pour effectuer les calculs ont été énumérées pour chaque cas d'étude.

Enfin, différents exemples d'applications ont été proposés afin de faciliter l'utilisation des différentes approches développées d'une part, et de procéder à la leur validation d'autre part.

*Troisième Chapitre*

**ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN  
CANAL A PAROIS ELLIPTIQUES ET A  
FOND HORIZONTAL**

## Chapitre III

# ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL A PAROIS ELLIPTIQUES ET A FOND HORIZONTAL

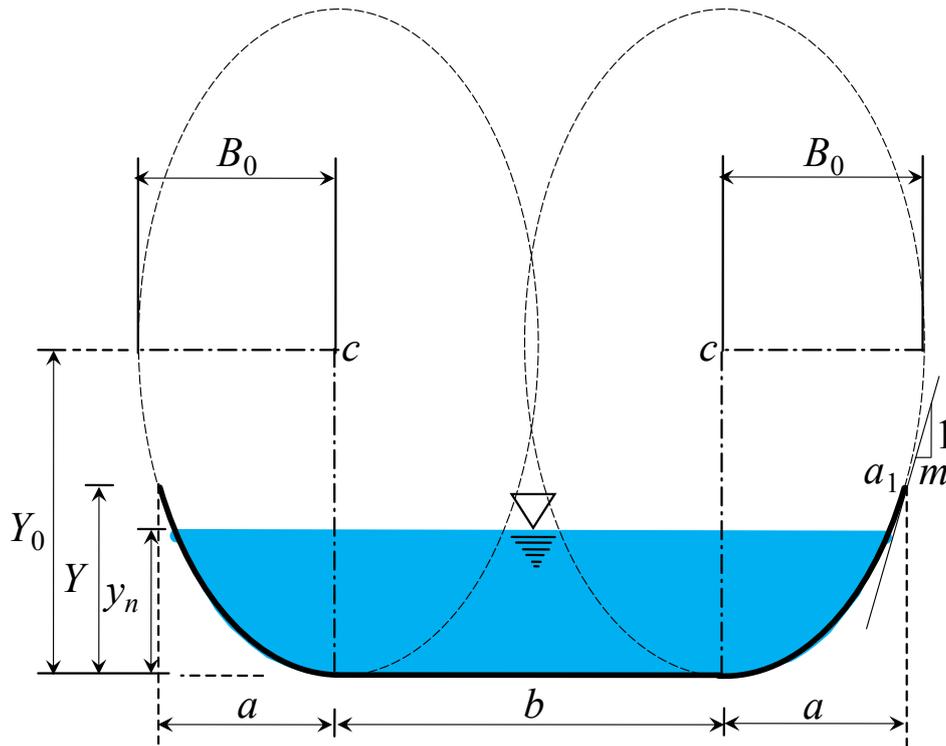
### **I. Introduction**

Le troisième chapitre de cette deuxième partie de notre thèse aura pour objectif de contribuer à l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal à parois elliptiques et à fond horizontal. Ce canal qui se caractérise par des parois en arc d'ellipse se diffère de celui qui a été étudié dans le chapitre précédent où ses parois sont fabriquées en un quart d'ellipse. La forme qui sera étudiée dans ce chapitre présente l'avantage d'être plus adaptée aux canaux en terre car la tangente au point le plus haut de l'arc d'ellipse du canal peut être choisie inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle inférieur à l'angle de frottement interne caractérisant le sol des berges du canal menant à leur stabilité mécanique. Aujourd'hui, le développement technologique offre des techniques facilitant la réalisation de n'importe quelle forme de canaux ou de conduites.

L'étude sera effectuée en développant principalement une méthode de dimensionnement du canal en se basant sur la méthode MMR d'une part, et d'autre part une approche théorique menant au calcul de la profondeur normale de l'écoulement en employant également la méthode MMR. Chaque cas sera soutenu par un exemple d'application dont le but est de faciliter l'utilisation des méthodes qui seront proposées ainsi que leur validation.

### **II. Dimensionnement d'un canal à parois elliptiques avec fond horizontal**

La forme du canal choisie dans ce chapitre est celle proposée par *Easa et Vatankhah* (2014) où elle a été présentée au cours du deuxième chapitre de la première partie (Section V : Figure 1.17.a). La figure 2.11 reprend la forme du canal en adoptant la notation optée dans notre thèse où :  $y_n$  est la profondeur normale de l'écoulement,  $b$  représente la largeur de fond du canal,  $Y$  est la hauteur totale du canal et  $a$  est la largeur horizontale des parties elliptiques. En outre, les grandeurs  $B_0$  et  $Y_0$  représentent les demi-axes de l'ellipse de centre  $c$ . La figure 2.11 montre que la tangente passant par le point  $a_1$  est inclinée par rapport à l'horizontale et possède une pente de  $1/m$ . Cette caractéristique montre que le canal choisit dans ce chapitre diffère de celui qui a été étudié au cours du chapitre précédent (Figure 2.6) où :  $m = 0$  (la tangente au point  $a_1$  est verticale).



**Figure 2.11 :** Canal à parois elliptiques avec fond horizontal.

La figure 2.11 représente l'état de l'écoulement uniforme dans un canal à parois elliptiques avec fond horizontal. Le profil liquide est caractérisé par les paramètres de forme  $\eta = y_n/b$  et  $\xi = y_n/Y_0$ . Le rapport  $\eta$  correspond alors au paramètre de forme de la partie rectangulaire du canal (ou profondeur normale relative), tandis que le rapport  $\xi$  correspond au paramètre de forme des parties elliptiques du canal. On définit, en plus, un paramètre indépendant de l'écoulement tel que :  $\zeta = B_0/Y_0$ . Les paramètres inconnus du problème sont la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$  ainsi que les paramètres géométriques liés aux dimensions du canal telles que : la largeur de fond du canal  $b$ , la largeur horizontale des parties elliptiques  $a$ , les demi-axes  $Y_0$  et  $B_0$  et la hauteur totale du canal  $Y$ . Par ailleurs, les paramètres donnés sont : le débit volume  $Q$ , la pente longitudinale du canal  $i$ , la viscosité cinématique du liquide en écoulement  $\nu$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  qui définit l'état des parois internes du canal et la pente  $1/m$ . La profondeur normale est principalement calculée à partir des équations de résistance à l'écoulement dans les canaux ouverts. L'objectif est de dimensionner le canal ce qui revient à calculer la profondeur normale  $y_n$  ainsi que les grandeurs  $b$ ,  $a$ ,  $Y_0$ ,  $B_0$  et  $Y$  constituant les paramètres liés aux dimensions du canal à partir des données citées ci-dessus ainsi que des paramètres de forme imposés  $\eta$ ,  $\xi$  et  $\zeta$ .

Afin de résoudre le problème de dimensionnement du canal en utilisant seulement ces données, il semble que la méthode du modèle rugueux soit toujours l'outil de calcul le plus adapté.

## II.1. Equations de base

L'équation *Darcy – Weisbach* sous la forme de la relation (2.1) du premier chapitre de cette deuxième partie est considérée comme équation principale sur laquelle se base la présente étude. Cette relation est rappelée ci-dessous.

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (2.1)$$

Le coefficient de frottement  $f$  est donné par la formule de *Colebrook – White* citée au cours du premier chapitre de la première partie par la relation (1.54), soit :

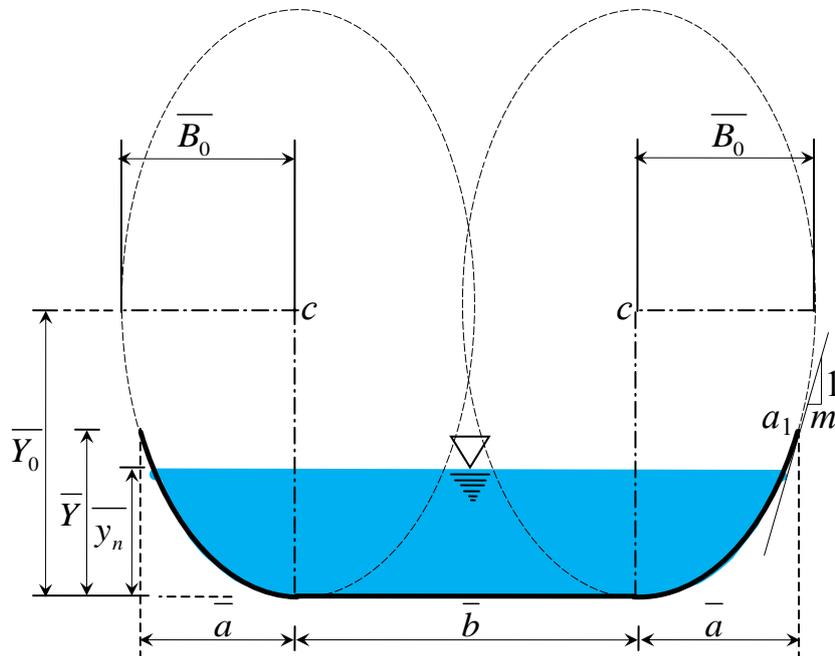
$$f^{-1/2} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.54)$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$  s'exprime, pour rappeller :

$$R = \frac{4Q}{P\nu} \quad (2.2)$$

## II.2. Modèle rugueux de référence

Le modèle rugueux considéré est en fait un canal également à fond horizontal et à parois elliptiques (Figure 2.12).



**Figure 2.12** : Schéma de définition du modèle rugueux de référence

(Ecoulement normal).

Rappelons que toutes les caractéristiques géométriques et hydrauliques du modèle rugueux se distinguent par le symbole "̄". Le modèle rugueux est particulièrement caractérisé par une rugosité

relative  $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 0,037$  arbitrairement choisie, où  $\bar{D}_h$  est le diamètre hydraulique. La rugosité relative est tellement élevée que l'écoulement est dans le domaine turbulent rugueux. Ainsi, le coefficient de frottement est  $\bar{f} = 1/16$  selon la relation (1.71) citée dans le premier chapitre de la première partie. Le canal à fond horizontal et à parois elliptiques est caractérisé par la pente longitudinale  $i$ , le paramètre de forme de la partie rectangulaire  $\eta = y_n/b$ , celui des parties elliptiques  $\xi = y_n/Y_0$  ainsi que le paramètre de forme  $\zeta = B_0/Y_0$ . Le modèle rugueux est caractérisé par les paramètres de forme  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b}$ ,  $\bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{Y}_0$  et  $\bar{\zeta} = \bar{B}_0/\bar{Y}_0$ . En raison de la forte valeur de la rugosité relative, les dimensions linéaires dans le modèle rugueux sont telles que :  $\bar{y}_n > y_n$ ,  $\bar{b} > b$ ,  $\bar{Y} > Y$ ,  $\bar{a} > a$ ,  $\bar{Y}_0 > Y_0$  et  $\bar{B}_0 > B_0$ . En outre, pour obtenir la même forme du modèle et du canal on doit imposer que :  $\bar{\eta} = \eta$ ,  $\bar{\xi} = \xi$  et  $\bar{\zeta} = \zeta$ . Le débit volume  $Q$  ainsi que la pente longitudinale  $i$  sont les mêmes dans le canal et dans le modèle rugueux, c'est-à-dire :  $\bar{Q} = Q$  et  $\bar{i} = i$ .

La relation (2.1) de *Darcy – Weisbach* appliquée au modèle rugueux a menée, pour rappelle, à la relation suivante qui a été développée au cours du premier chapitre de cette partie :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} Q^2 \quad (2.4)$$

En se basant sur la relation approchée (1.115) proposée par *Easa et Vatankhah* (2014) et montrée dans le deuxième chapitre de la première partie, le périmètre mouillé du modèle rugueux pour un canal à parois elliptiques avec fond horizontal peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \bar{P} = & \bar{b} + 0,1694 \bar{y}_n \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{B}_0}{\bar{Y}_0}\right)^2 \frac{[0,015(\bar{y}_n/\bar{Y}_0) - 1,1289]^2}{1 - [0,0236(\bar{y}_n/\bar{Y}_0) - 1]^2}} + 1,0389 \bar{y}_n \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{B}_0}{\bar{Y}_0}\right)^2 \frac{[0,6187(\bar{y}_n/\bar{Y}_0) - 1,5398]^2}{1 - [0,7188(\bar{y}_n/\bar{Y}_0) - 1]^2}} \\ & + 0,7987 \bar{y}_n \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{B}_0}{\bar{Y}_0}\right)^2 \frac{[0,725(\bar{y}_n/\bar{Y}_0) - 0,8792]^2}{1 - [0,6528(\bar{y}_n/\bar{Y}_0) - 1]^2}} \end{aligned}$$

Ou bien :

$$\bar{P} = \bar{b} \left[ 1 + 0,1694 \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{B}_0}{\bar{Y}_0}\right)^2 \frac{[0,015(\bar{y}_n/\bar{Y}_0) - 1,1289]^2}{1 - [0,0236(\bar{y}_n/\bar{Y}_0) - 1]^2}} + 1,0389 \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{B}_0}{\bar{Y}_0}\right)^2 \frac{[0,6187(\bar{y}_n/\bar{Y}_0) - 1,5398]^2}{1 - [0,7188(\bar{y}_n/\bar{Y}_0) - 1]^2}} + 0,7987 \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{B}_0}{\bar{Y}_0}\right)^2 \frac{[0,725(\bar{y}_n/\bar{Y}_0) - 0,8792]^2}{1 - [0,6528(\bar{y}_n/\bar{Y}_0) - 1]^2}} \right] \quad (2.150)$$

Cette dernière relation s'écrit, en tenant compte que :  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b} = \eta$ ,  $\bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{Y}_0 = \xi$  et  $\bar{\zeta} = \bar{B}_0/\bar{Y}_0 = \zeta$  :

$$\bar{P} = \bar{b} \left[ \begin{array}{l} 1 + 0,1694\eta \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,015\xi - 1,1289]^2}{1 - [0,0236\xi - 1]^2}} + 1,0389\eta \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,6187\xi - 1,5398]^2}{1 - [0,7188\xi - 1]^2}} \\ + 0,7987\eta \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,725\xi - 0,8792]^2}{1 - [0,6528\xi - 1]^2}} \end{array} \right] \quad (2.151)$$

Posons la fonction  $\lambda(\eta, \xi, \zeta)$  telle que :

$$\lambda(\eta, \xi, \zeta) = 1 + 0,1694\eta \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,015\xi - 1,1289]^2}{1 - [0,0236\xi - 1]^2}} + 1,0389\eta \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,6187\xi - 1,5398]^2}{1 - [0,7188\xi - 1]^2}} + 0,7987\eta \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,725\xi - 0,8792]^2}{1 - [0,6528\xi - 1]^2}} \quad (2.152)$$

La relation (2.151) peut s'écrire en vertu de la relation (2.152) :

$$\bar{P} = \bar{b} \times \lambda(\eta, \xi, \zeta) \quad (2.153)$$

Rappelons que la relation approchée (2.153) est valable pour les intervalles suivants :

$$0 < \xi = y_n/Y_0 < 1 \text{ et } \zeta = B_0/Y_0 \geq 0,1.$$

L'aire de la section mouillée du modèle rugueux  $\bar{A}$ , peut être exprimée en se basant sur la relation (1.112) de *Easa et Vatankhah* (2014) montrée dans le deuxième chapitre de la première partie et établie pour un canal à parois elliptique avec fond horizontal, soit :

$$\bar{A} = \bar{b} \bar{y}_n + \frac{1}{2} \bar{B}_0 \bar{Y}_0 \pi + \frac{\bar{B}_0}{\bar{Y}_0} (\bar{y}_n - \bar{Y}_0) \sqrt{\bar{y}_n (2\bar{Y}_0 - \bar{y}_n)} - \bar{B}_0 \bar{Y}_0 \sin^{-1} \left( \frac{\bar{Y}_0 - \bar{y}_n}{\bar{Y}_0} \right)$$

Ou bien :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \left[ \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} + \frac{1}{2} \frac{\bar{B}_0 \bar{Y}_0}{\bar{b}^2} \frac{\bar{y}_n^2}{\bar{y}_n} \frac{\bar{Y}_0}{\bar{Y}_0} \pi + \frac{1}{\bar{b}^2} \frac{\bar{B}_0}{\bar{Y}_0} \bar{y}_n^{-2} \left( 1 - \frac{\bar{Y}_0}{\bar{y}_n} \right) \sqrt{2 \frac{\bar{Y}_0}{\bar{y}_n} - 1} - \frac{\bar{B}_0 \bar{Y}_0}{\bar{b}^2} \frac{\bar{y}_n^2}{\bar{y}_n} \frac{\bar{Y}_0}{\bar{Y}_0} \sin^{-1} \left( 1 - \frac{\bar{y}_n}{\bar{Y}_0} \right) \right] \quad (2.154)$$

Cette dernière relation s'écrit, en tenant compte que :  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b} = \eta$ ,  $\bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{Y}_0 = \xi$  et  $\bar{\zeta} = \bar{B}_0/\bar{Y}_0 = \zeta$  :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \left[ \eta + \frac{\zeta}{2} \frac{\eta^2}{\xi^2} \pi + \zeta \eta^2 (1 - \xi^{-1}) \sqrt{2\xi^{-1} - 1} - \frac{\zeta \eta^2}{\xi^2} \sin^{-1}(1 - \xi) \right]$$

Ou bien :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \eta \left\{ 1 + \zeta \eta \left[ \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1 - \xi) \right) + (1 - \xi^{-1}) \sqrt{2\xi^{-1} - 1} \right] \right\} \quad (2.155)$$

Posons la fonction  $\alpha(\eta, \xi, \zeta)$  telle que :

$$\tau(\eta, \xi, \zeta) = \eta \left\{ 1 + \zeta \eta \left[ \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1 - \xi) \right) + (1 - \xi^{-1}) \sqrt{2\xi^{-1} - 1} \right] \right\} \quad (2.156)$$

Tenant compte de la relation (2.156), la relation (2.155) s'écrit plus simplement :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \times \tau(\eta, \xi, \zeta) \quad (2.157)$$

En insérant les relations (2.153) et (2.157) dans la relation (2.4), on obtient :

$$i = \frac{\bar{b} \times \lambda(\eta, \xi, \zeta)}{128g [\bar{b}^2 \times \tau(\eta, \xi, \zeta)]^{\frac{1}{3}}} Q^2$$

Soit, après simplification et réarrangement :

$$\bar{b} = \left\{ \frac{\lambda(\eta, \xi, \zeta)}{128[\tau(\eta, \xi, \zeta)]^{\frac{1}{3}}} \right\}^{1/5} \left( \frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (2.158)$$

La relation (2.158) permet alors le calcul direct de la largeur de fond du modèle rugueux  $\bar{b}$  en fonction des paramètres connus :  $Q$ ,  $i$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  et  $\zeta$ .

Tenant compte que :  $\eta = \bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b}$ , la profondeur normale dans le modèle rugueux  $\bar{y}_n$  peut s'écrire :

$$\bar{y}_n = \bar{\eta} \bar{b} \quad (2.159)$$

Le demi-axe vertical  $\bar{Y}_0$  caractérisant le modèle rugueux (Figure 2.12) est déduit à partir du paramètre de forme :  $\xi = \bar{\xi} = \bar{y}_n / \bar{Y}_0$ , soit :

$$\bar{Y}_0 = \bar{y}_n / \bar{\xi} \quad (2.160)$$

Le demi-axe horizontal  $\bar{B}_0$  caractérisant le modèle rugueux (Figure 2.12) est exprimée selon le paramètre de forme  $\zeta = \bar{\zeta} = \bar{B}_0 / \bar{Y}_0$  telle que :

$$\bar{B}_0 = \bar{Y}_0 \bar{\zeta} \quad (2.161)$$

La hauteur totale du modèle rugueux  $\bar{Y}$  peut être déduite à partir de la relation (1.110) du deuxième chapitre de la première partie en remplaçant  $Z_m$  par  $m$ , soit :

$$\bar{Y} = \bar{Y}_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{\bar{B}_0}{m\bar{Y}_0} \right)^2 - 1}} \right) \quad (2.162)$$

Lorsqu'il s'agit d'un canal en terre, la pente  $1/m$  représentée dans la figure 2.12 peut être choisie à partir de l'angle de frottement interne de telle sorte que les parois soient stables.

L'application de la relation (1.162) est associée à la condition :  $\zeta = (\bar{B}_0/\bar{Y}_0) > m\sqrt{2}$  pour avoir une valeur positive de  $\bar{Y}$  voire une valeur de  $\bar{Y}$  inférieure à  $\bar{Y}_0$ .

Enfin, la largeur des parties elliptiques du modèle rugueux  $\bar{a}$  peut être déduite à partir de la relation (1.108) montrée dans le deuxième chapitre de la première partie tout en remplaçant  $x$  par  $\bar{a}$ ,  $y$  par  $\bar{Y}$  (Figure 1.12.a),  $B_0$  par  $\bar{B}_0$  et  $Y_0$  par  $\bar{Y}_0$ , soit :

$$\frac{\bar{a}^2}{\bar{B}_0^2} + \frac{(\bar{Y} - \bar{Y}_0)^2}{\bar{Y}_0^2} = 1$$

Ou bien :

$$\bar{a} = \frac{\bar{B}_0}{\bar{Y}_0} \sqrt{\bar{Y}_0^2 - (\bar{Y} - \bar{Y}_0)^2} \quad (2.163)$$

### II.3. Facteur de correction des dimensions linéaires

La relation permettant le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires a été exposée au cours des deux derniers chapitres telle que :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.25)$$

Le nombre de *Reynolds*  $\bar{R}$  dans le modèle rugueux a été exprimé comme suit :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} \quad (2.27)$$

De plus, le diamètre hydraulique du modèle rugueux  $\bar{D}_h$  a été défini comme suit :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P} \quad (2.23)$$

### II.4. Etapes de calcul des dimensions linéaires du canal

Pour déterminer les dimensions linéaires d'un canal à fond horizontal et à parois elliptiques, les paramètres suivants doivent être donnés :  $Q$ ,  $i$ ,  $m$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$ . Rappelons que le coefficient de résistance de l'écoulement tel que le coefficient de *Chézy* ou celui de *Manning* n'est pas requis. Les dimensions linéaires à déterminer sont : la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$ , la largeur de fond  $b$ , la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  ainsi que la hauteur totale du canal  $Y$ . Pour déterminer ces dimensions linéaires, les étapes de calcul suivantes sont recommandées :

1. Calculer les fonctions :  $\lambda(\eta, \xi, \zeta)$  et  $\tau(\eta, \xi, \zeta)$  respectivement par les relations (2.152) et (2.156).
2. Déterminer la largeur de la base  $\bar{b}$  du modèle rugueux par la relation (2.158).

3. Dédurre le périmètre mouillé  $\bar{P}$  et l'aire de la section mouillée  $\bar{A}$  du modèle rugueux respectivement à partir des relations (2.153) et (2.157).
  4. Calculer le diamètre hydraulique  $\bar{D}_h$  en utilisant la relation (2.23).
  5. Calculer le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  selon la relation (2.27).
  6. Avec les valeurs calculées de  $\bar{D}_h$  et de  $\bar{R}$ , déduire la valeur du facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  par application de la relation (2.25).
  7. Connaissant la valeur de  $\bar{b}$  et de  $\psi$ , la valeur recherchée de la largeur de la base du canal  $b$  est directement déduite en se référant à la relation fondamentale (2.24), soit :  $b = \psi \bar{b}$ .
  8. Calculer la profondeur normale  $y_n$  ainsi que les demi-axes  $Y_0$  et  $B_0$  par analogie avec les relations (2.159), (160) et (2.161) respectivement.
  9. Enfin, les valeurs de la hauteur totale du canal  $Y$  ainsi que la valeur de la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  sont déduites par analogie avec les relations (2.162) et (2.163) respectivement.
- Il est à noter que la méthode préconisée s'applique à l'ensemble du régime turbulent englobant les trois (03) domaines : lisse, de transition et rugueux.

Notons que lorsqu'il s'agit d'un canal sans fond horizontal, on doit mettre  $b = 0$  et on refait le développement par la même méthodologie montrée ci-dessus.

### II.5. Exemple d'application 2.9

Soit un canal à fond horizontal et à parois elliptiques (Figure 2.11). Dimensionner le canal, sachant que :

$$Q = 3,274 \text{ m}^3/\text{s}, i = 10^{-4}, \eta = 0,6, \xi = 0,4, \zeta = 0,5, m = 0,2, \varepsilon = 10^{-3} \text{ m et } \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Vérifions d'abord la condition :  $\zeta > m\sqrt{2}$ , soit :

$$\zeta = 0,5 > m\sqrt{2} = 0,2 \times \sqrt{2} = 0,28284271$$

Condition vérifiée d'où la hauteur totale du canal  $Y$  sera inférieure au demi-axe vertical  $Y_0$ .

1. Selon les relations (2.152) et (2.156), les fonctions  $\lambda(\eta, \xi, \zeta)$  et  $\tau(\eta, \xi, \zeta)$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} \lambda(\eta, \xi, \zeta) &= 1 + 0,1694\eta \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,015\xi - 1,1289]^2}{1 - [0,0236\xi - 1]^2}} + 1,0389\eta \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,6187\xi - 1,5398]^2}{1 - [0,7188\xi - 1]^2}} \\ &+ 0,7987\eta \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,725\xi - 0,8792]^2}{1 - [0,6528\xi - 1]^2}} = 1 + 0,1694 \times 0,6 \times \sqrt{1 + (0,5)^2 \frac{[0,015 \times 0,4 - 1,1289]^2}{1 - [0,0236 \times 0,4 - 1]^2}} \\ &+ 1,0389 \times 0,6 \times \sqrt{1 + (0,5)^2 \frac{[0,6187 \times 0,4 - 1,5398]^2}{1 - [0,7188 \times 0,4 - 1]^2}} + 0,7987 \times 0,6 \times \sqrt{1 + (0,5)^2 \frac{[0,725 \times 0,4 - 0,8792]^2}{1 - [0,6528 \times 0,4 - 1]^2}} \\ &= 2,79891369 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau(\eta, \xi, \zeta) &= \eta \left\{ 1 + \zeta \eta \left[ \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1 - \xi) \right) + (1 - \xi^{-1}) \sqrt{2\xi^{-1} - 1} \right] \right\} \\ &= 0,6 \times \left\{ 1 + 0,5 \times 0,6 \times \left[ \frac{1}{(0,4)^2} \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1 - 0,4) \right) + (1 - (0,4)^{-1}) \sqrt{2 \times (0,4)^{-1} - 1} \right] \right\} = 1,10320712\end{aligned}$$

2. La largeur de fond  $\bar{b}$  du modèle rugueux peut être calculée par la relation (2.158). Soit :

$$\bar{b} = \left\{ \frac{\lambda(\eta, \xi, \zeta)}{128[\tau(\eta, \xi, \zeta)]^3} \right\}^{1/5} \left( \frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} = \left[ \frac{2,79891369}{128 \times (1,10320712)^3} \right]^{1/5} \left( \frac{3,274^2}{9,81 \times 10^{-4}} \right)^{1/5} = 2,81876806 \text{ m}$$

3. En application des relations (2.153) et (2.157), le périmètre mouillé  $\bar{P}$  et l'aire de la section mouillée  $\bar{A}$  sont respectivement :

$$\bar{P} = \bar{b} \times \lambda(\eta, \xi, \zeta) = 2,81876806 \times 2,79891369 = 7,88948852 \text{ m}$$

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \times \tau(\eta, \xi, \zeta) = (2,81876806)^2 \times 1,10320712 = 8,76548075 \text{ m}^2$$

4. Le diamètre hydraulique du modèle rugueux  $\bar{D}_h$  est donné par la relation (2.23), soit :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P} = 4 \times 8,76548075 / 7,88948852 = 4,44413132 \text{ m}$$

5. En vertu de la relation (2.27), le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est tel que :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 3,274}{7,88948852 \times 10^{-6}} = 1659930,17$$

6. Selon la relation (2.25), le facteur de correction  $\psi$  est :

$$\begin{aligned}\psi &= 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{10^{-3}/4,44413132}{4,75} + \frac{8,5}{1659930,17} \right) \right]^{-2/5} = 0,7546754\end{aligned}$$

7. La valeur recherchée de la largeur de fond  $b$  est selon la relation fondamentale (2.24) :

$$b = \psi \bar{b} = 0,7546754 \times 2,81876806 = 2,12725492 \text{ m} \approx 2,13 \text{ m}$$

8. La profondeur normale  $y_n$  ainsi que les demi-axes  $Y_0$  et  $B_0$  peuvent être calculés en se basant sur les relations (2.159), (160) et (2.161) respectivement, soit :

$$y_n = \eta b = 0,6 \times 2,12725492 = 1,27635295 \text{ m} \approx 1,3 \text{ m}$$

$$Y_0 = y_n / \xi = 1,27635295 / 0,4 = 3,19088237 \text{ m} \approx 3,19 \text{ m}$$

$$B_0 = Y_0 \zeta = 3,19088237 \times 0,5 = 1,59544119 \text{ m} \approx 1,6 \text{ m}$$

9. Les valeurs de la hauteur totale du canal  $Y$  ainsi que la valeur de la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  peuvent être déterminées en se référant aux relations (2.162) et (2.163) respectivement, soit :

$$Y = Y_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{B_0}{mY_0}\right)^2 - 1}} \right) = 3,19088237 \times \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1,59544119}{0,2 \times 3,19088237}\right)^2 - 1}} \right) = 1,79826713 \text{ m} \approx 1,8 \text{ m}$$

$$a = \frac{B_0}{Y_0} \sqrt{Y_0^2 - (Y - Y_0)^2} = \frac{1,59544119}{3,19088237} \sqrt{(3,19088237)^2 - (1,79826713 - 3,19088237)^2} \\ = 1,43547493 \text{ m} \approx 1,44 \text{ m}$$

10. Cette étape vise à vérifier les calculs effectués en déterminant la pente longitudinale  $i$  par application de la relation (2.1) de *Darcy – Weisbach*. La pente ainsi calculée doit être égale à celle donnée à l'énoncé de l'exemple.

Selon la méthode du modèle rugueux, le coefficient de frottement  $f$  et le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  sont liés par la relation suivante (*Achour, 2007*) :

$$f = \psi^5 / 16 = 0,7546754^5 / 16 = 0,01529963$$

Par analogie avec la relation (2.153), le périmètre mouillé  $P$  du canal réel peut s'écrire, en remplaçant  $\bar{b}$  par  $b$  :

$$P = b \times \lambda(\eta, \xi, \zeta) = 2,12725492 \times 2,79891369 = 5,9540029 \text{ m}$$

De même, par analogie avec la relation (2.157), l'aire de la section mouillée du canal réel  $A$  s'écrit en remplaçant  $\bar{b}$  par  $b$  :

$$A = b^2 \times \tau(\eta, \xi, \zeta) = (2,12725492)^2 \times 1,10320712 = 4,99224772 \text{ m}^2$$

Le diamètre hydraulique  $D_h = 4A/P$  est donc :

$$D_h = 4A/P = 4 \times 4,99224772 / 5,9540029 = 3,35387658 \text{ m}$$

En vertu de la relation (2.1), la pente longitudinale  $i$  est :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,01529963}{3,35387658} \times \frac{(3,274)^2}{2 \times 9,81 \times (4,99224772)^2} = 10^{-4}$$

Comme nous pouvons le constater, la pente  $i$  calculée et celle donnée à l'énoncé du problème sont égales (écart 0 %), ce qui permet de conclure à la validité des calculs effectués.

### III. Approche théorique au calcul de la profondeur normale

Dans cette partie, les demi-axes  $Y_0$  et  $B_0$  des parties elliptiques du canal sont connues (Figure 2.11) et il s'agit de déterminer principalement la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$  répondant aux conditions du problème résumées comme suit : le canal à parois elliptiques et à fond horizontal véhicule un débit  $Q$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu$  sous une pente longitudinale  $i$ . Les parois internes du canal de pente maximale  $1/m$  (Figure 2.11) sont caractérisées par la rugosité absolue  $\varepsilon$ . La largeur de fond du canal est désignée par  $b$ . Tous ces paramètres sont connus et on doit déterminer la profondeur normale  $y_n$  qui convient à ces conditions. Notons que la hauteur totale du canal  $Y$  ainsi que la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  sont à déterminer également (Figure 2.11).

#### III.1. Modèle rugueux de référence

Il s'agit du même modèle défini par la figure 2.12 caractérisé par une rugosité relative  $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 0,037$  ainsi qu'un coefficient de frottement est  $\bar{f} = 1/16$  (Achour, 2007). Rappelons que les caractéristiques géométriques du canal  $b$ ,  $Y_0$ ,  $B_0$  et  $m$  du canal sont connues et les paramètres hydrodynamiques de l'écoulement  $Q$ ,  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$  sont connus également. Dans ces conditions, on cherche à déterminer la profondeur normale  $y_n$ , la hauteur totale du canal  $Y$  ainsi que la largeur horizontale des parties en courbe  $a$ . Dans ce cas le principe de la méthode MMR mène à écrire :  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{Y}_0 = Y_0$ ,  $\bar{B}_0 = B_0$ ,  $\bar{i} = i$  et  $\bar{Q} = Q$ ,  $\bar{y}_n \neq y_n$ ,  $\bar{Y} \neq Y$  et  $\bar{a} \neq a$ . De ce fait, les paramètres de forme sont tels que :  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b} \neq \eta = y_n/b$ ,  $\bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{Y}_0 \neq \xi = y_n/Y_0$  et  $\bar{\zeta} = \bar{B}_0/\bar{Y}_0 = \zeta = B_0/Y_0$ . De plus, les dimensions  $b$  et  $Y_0$  sont connues, d'où on peut imposer un nouveau paramètre de forme tel que :

$$\beta = \frac{b}{Y_0} = \frac{\xi}{\eta} = \bar{\beta} = \frac{\bar{\xi}}{\bar{\eta}} \quad (2.164)$$

L'équation de Darcy – Weisbach appliquée au modèle rugueux de référence représentée par la relation (2.4) reste en vigueur ici, soit en rappelant son expression :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} Q^2 \quad (2.4)$$

L'aire de la section mouillée du modèle rugueux  $\bar{A}$  peut s'écrire par analogie avec la relation (2.157) en tenant compte que :  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b} \neq \eta = y_n/b$ ,  $\bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{Y}_0 \neq \xi = y_n/Y_0$  et  $\bar{\zeta} = \bar{B}_0/\bar{Y}_0 = \zeta = B_0/Y_0$ , soit :

$$\bar{A} = b^2 \times \tau(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\zeta}) \quad (2.165)$$

La fonction  $\tau(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta)$  est déduite à partir de la relation (2.156), telle que :

$$\tau(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta) = \bar{\eta} \left\{ 1 + \zeta \bar{\eta} \left[ \frac{1}{\bar{\xi}^2} \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1 - \bar{\xi}) \right) + (1 - \bar{\xi}^{-1}) \sqrt{2\bar{\xi}^{-1} - 1} \right] \right\} \quad (2.166)$$

En outre, en tenant compte de la relation (2.164), la relation (2.166) mènera à la nouvelle fonction :

$\tau(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$ , soit :

$$\tau(\bar{\xi}, \zeta, \beta) = \frac{\bar{\xi}}{\beta} \left\{ 1 + \frac{\zeta \bar{\xi}}{\beta} \left[ \frac{1}{\bar{\xi}^2} \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1 - \bar{\xi}) \right) + (1 - \bar{\xi}^{-1}) \sqrt{2\bar{\xi}^{-1} - 1} \right] \right\} \quad (2.167)$$

De ce faite, la relation (2.165) devient :

$$\bar{A} = b^2 \times \tau(\bar{\xi}, \zeta, \beta) \quad (2.168)$$

Le périmètre mouillé du modèle rugueux  $\bar{P}$  est déduit en se basant sur la relation (2.153) en tenant

compte que :  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b} \neq \eta = y_n / b$ ,  $\bar{\xi} = \bar{y}_n / \bar{Y}_0 \neq \xi = y_n / Y_0$  et  $\bar{\zeta} = \bar{B}_0 / \bar{Y}_0 = \zeta = B_0 / Y_0$ , soit :

$$\bar{P} = b \times \lambda(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta) \quad (2.169)$$

La fonction  $\lambda(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta)$  est déduite à partir de la relation (2.152), telle que :

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta) = & 1 + 0,1694 \bar{\eta} \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,015\bar{\xi} - 1,1289]^p}{1 - [0,0236\bar{\xi} - 1]^p}} + 1,0389 \bar{\eta} \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,6187\bar{\xi} - 1,5398]^p}{1 - [0,7188\bar{\xi} - 1]^p}} \\ & + 0,7987 \bar{\eta} \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,725\bar{\xi} - 0,8792]^p}{1 - [0,6528\bar{\xi} - 1]^p}} \end{aligned} \quad (2.170)$$

De plus, en tenant compte de la relation (2.164), la relation (2.170) mènera à la nouvelle fonction :

$\lambda(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  telle que :

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{\xi}, \zeta, \beta) = & 1 + 0,1694 \frac{\bar{\xi}}{\beta} \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,015\bar{\xi} - 1,1289]^p}{1 - [0,0236\bar{\xi} - 1]^p}} + 1,0389 \frac{\bar{\xi}}{\beta} \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,6187\bar{\xi} - 1,5398]^p}{1 - [0,7188\bar{\xi} - 1]^p}} \\ & + 0,7987 \frac{\bar{\xi}}{\beta} \sqrt{1 + \zeta^2 \frac{[0,725\bar{\xi} - 0,8792]^p}{1 - [0,6528\bar{\xi} - 1]^p}} \end{aligned} \quad (2.171)$$

De ce fait, la relation (2.169) doit être réécrite telle que :

$$\bar{P} = b \times \lambda(\bar{\xi}, \zeta, \beta) \quad (2.172)$$

En remplaçant les relations (2.168) et (2.172) dans la relation (2.4), on obtient :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{b \times \lambda(\bar{\xi}, \zeta, \beta)}{[b^2 \times \tau(\bar{\xi}, \zeta, \beta)]^p} Q^2$$

Ou bien, après réarrangement et simplification :

$$\frac{\lambda(\bar{\xi}, \zeta, \beta)}{128[\tau(\bar{\xi}, \zeta, \beta)]^{\frac{5}{3}}}\left(\frac{Q^2}{gib^5}\right) = 1 \quad (2.173)$$

Rappelant que par définition, la conductivité relative  $Q^*$  s'écrit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} \quad (2.36)$$

D'où, la relation (2.173) devient :

$$\frac{\lambda(\bar{\xi}, \zeta, \beta)}{128[\tau(\bar{\xi}, \zeta, \beta)]^{\frac{5}{3}}}Q^{*2} = 1 \quad (2.174)$$

A partir des valeurs du débit volume  $Q$ , de la pente longitudinale  $i$  et de la largeur de base  $b$  connues en pratique, la conductivité relative  $Q^*$  peut être calculée par application de la relation (2.36). De ce fait, la relation (2.174) permet le calcul du paramètre de forme du modèle rugueux  $\bar{\xi}$  connaissant les valeurs de  $Q^*$ ,  $\zeta$  et  $\beta$ . Il est à noter que la relation (2.174) est implicite vis-à-vis de  $\bar{\xi}$ , pour cela une procédure itérative ou une méthode graphique pour la détermination de  $\bar{\xi}$  est nécessaire. Ces méthodes sont très efficaces pour résoudre les problèmes complexes comme celui de la relation (1.174).

Le remplacement de la relation implicite (2.174) par une expression explicite en  $\bar{\xi}$  n'est pas une tâche facile à compléter car ce dernier paramètre se trouve dans plusieurs endroits dans les fonctions  $\tau(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  et  $\lambda(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  et dépend de trois paramètres indépendants  $Q^*$ ,  $\zeta$  et  $\beta$ .

Comme nous l'avons procédé au cours du chapitre précédent, nous proposons de traiter, dans ce qui suit, un cas simple du problème qui doit être élargie dans des études ultérieures. Le problème consiste, alors, à proposer une relation approchée en remplacement de la relation implicite (2.174) pour les valeurs suivantes :  $\zeta = 1,5$  et  $\beta = 1$ . Ces deux dernières valeurs ont été choisies arbitrairement.

Les fonctions  $\tau(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  et  $\lambda(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  doivent être remplacées, respectivement, par les fonctions  $\tau(\bar{\xi})$  et  $\lambda(\bar{\xi})$  pour  $\zeta = 1,5$  et  $\beta = 1$ , elles s'écrivent en vertu des relations (2.167) et (2.171) respectivement, soit :

$$\tau(\bar{\xi}) = \bar{\xi} \left\{ 1 + \frac{\bar{\xi}}{2} \left[ \frac{1}{\bar{\xi}^2} \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1 - \bar{\xi}) \right) + \left( 1 - \bar{\xi}^{-1} \right) \sqrt{2\bar{\xi}^{-1} - 1} \right] \right\} \quad (2.175)$$

Et :

$$\lambda(\bar{\xi}) = 1 + 0,1694\bar{\xi} \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,015\bar{\xi} - 1,1289]^p}{1 - [0,0236\bar{\xi} - 1]^p}} + 1,0389\bar{\xi} \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,6187\bar{\xi} - 1,5398]^p}{1 - [0,7188\bar{\xi} - 1]^p}} + 0,7987\bar{\xi} \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,725\bar{\xi} - 0,8792]^p}{1 - [0,6528\bar{\xi} - 1]^p}} \quad (2.176)$$

En tenant compte de ces deux dernières relations, la relation (2.174) peut s'écrire :

$$\frac{\lambda(\bar{\xi})}{128[\tau(\bar{\xi})]^p} Q^{*2} = 1 \quad (2.177)$$

La relation (2.177) peut être remplacée par le même type d'équation qui a été utilisée au cours des deux derniers chapitres, soit la relation de type polynomiale d'ordre six (06) :

$$\bar{\xi} = a_6 K^6 + a_5 K^5 + a_4 K^4 + a_3 K^3 + a_2 K^2 + a_1 K + a_0 \quad (2.178)$$

Avec :

$$K = \log Q^* \quad (2.179)$$

Les paramètres d'ajustement de  $a_0$  à  $a_6$  sont regroupés dans le tableau 2.4.

**Tableau 2.4 :** Valeurs des paramètres d'ajustement de la relation (2.178) pour  $\zeta = 1,5$  et  $\beta = 1$ .

$a_6$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$\frac{32}{37207}$	$\frac{82}{11343}$	$\frac{162}{6865}$	$\frac{163}{3246}$	$\frac{701}{6460}$	$\frac{649}{3601}$	$\frac{222}{1633}$

La relation proposée (2.178), est applicable dans l'intervalle de la conductivité relative :  $0,255419785 \leq Q^* \leq 31,16841936$  ainsi que pour la large gamme pratique du paramètre de forme  $\bar{\xi}$  des parties elliptiques :  $0,06 \leq \bar{\xi} \leq 0,999$ .

La figure 2.13 illustre les écarts relatifs  $\Delta\bar{\xi}/\bar{\xi}$  occasionnés lorsque la relation approchée (2.178) est appliquée en remplacement de la relation implicite (2.177). Cette figure montre que l'écart relatif maximal est inférieur à 1,38 % seulement. Cet écart relatif se réduit à moins de 0,46 % lorsque :  $\bar{\xi} \geq 0,2$ .

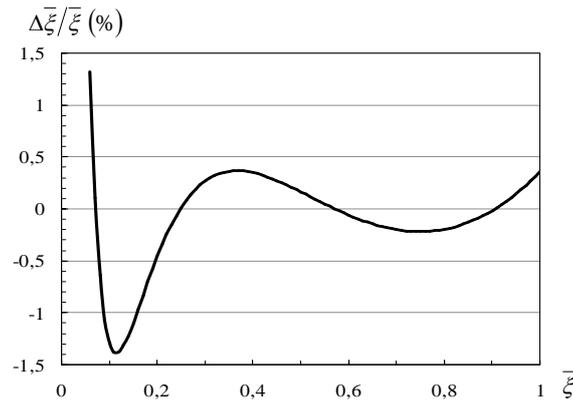


Figure 2.13 : Ecart relatifs  $\Delta \bar{\xi} / \bar{\xi}$ .

En revanche, une fois le paramètre de forme des parties elliptiques du modèle rugueux  $\bar{\xi}$  est atteint, la valeur de la profondeur relative du modèle rugueux  $\bar{\eta}$  est simplement déduite en se référant à la relation (2.164), soit :

$$\bar{\eta} = \bar{\xi} / \beta \quad (2.180)$$

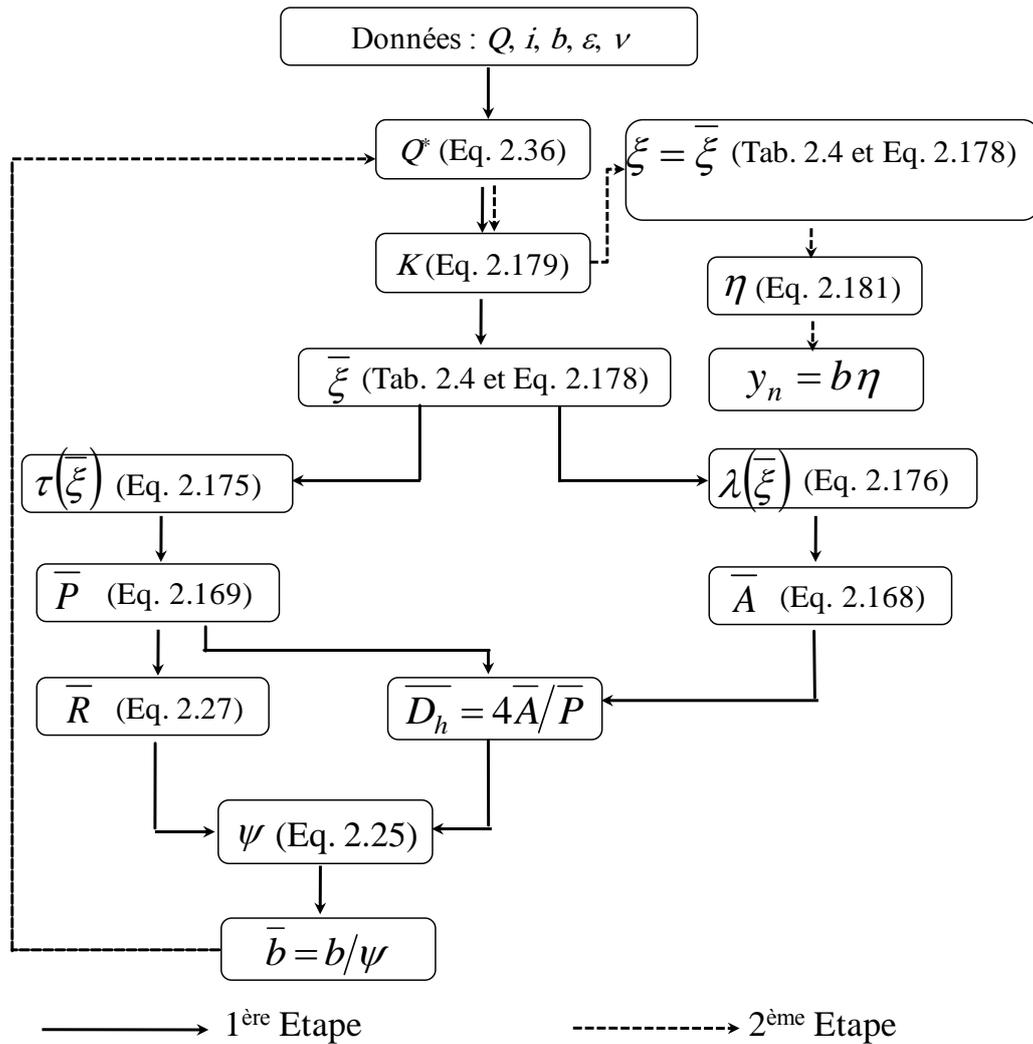
De même pour le canal réel, soit :

$$\eta = \xi / \beta \quad (2.181)$$

Les relations (2.40) et (2.41) sont alors reproduites.

### III.2. Étapes de calcul de la profondeur normale

Afin de calculer la profondeur normale  $y_n$ , la hauteur totale du canal  $Y$  ainsi que la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  pour un canal à parois elliptiques avec fond horizontal, un organigramme (Figure 2.14) a été construit dont les données du problème sont : le débit  $Q$ , la pente longitudinale  $i$  du lit du canal, la largeur du fond  $b$ , les demi-axes  $Y_0$  et  $B_0$ , la pente maximale  $1/m$  au niveau du point  $a_1$  (Figure 2.11), la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique du liquide en écoulement  $\nu$ . Notons que tous ces paramètres peuvent être récoltés en pratique. Avant de procéder aux calculs, la condition suivante :  $\zeta = (B_0/Y_0) > m\sqrt{2}$  doit vérifiée afin d'avoir une valeur positive de  $Y$  voire une valeur de  $Y$  inférieure à  $Y_0$ . De ce fait, les valeurs de la hauteur totale du canal  $Y$  ainsi que la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  sont d'abord déterminées en se basant sur les relations (2.162) et (2.163) respectivement. D'où, l'organigramme de la figure 2.14 est réservé au calcul de la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$ .



**Figure 2.14 :** Récapitulation de la méthode de calcul de la profondeur normale pour :  $\zeta = 1,5$  et  $\beta = 1$ .

Notons que lorsqu'il s'agit d'un canal sans fond horizontal, on doit mettre  $b = 0$  et on refait le développement par la même méthodologie suivie ci-dessus.

### III.3. Exemple d'application 2.10

Pour éclaircir la procédure de calcul résumée dans l'organigramme de la figure 2.14, l'exemple d'application pratique ci-dessous est proposé.

Il s'agit alors de calculer la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$ , la hauteur totale du canal  $Y$  ainsi que la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  pour un canal à parois elliptiques avec fond horizontal sachant que :  $Q = 15 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $b = 4 \text{ m}$ ,  $Y_0 = 4 \text{ m}$ ,  $B_0 = 6 \text{ m}$ ,  $i = 10^{-4}$ ,  $m = 0,2$ ,  $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Vérifions d'abord la condition :  $\zeta > m\sqrt{2}$ , soit :

$$\zeta = B_0/Y_0 = 6/4 = 1,5 > m\sqrt{2} = 0,2 \times \sqrt{2} = 0,28284271$$

Condition vérifiée d'où la hauteur totale du canal  $Y$  sera inférieure au demi-axe vertical  $Y_0$ .

1. La conductivité relative  $Q^*$  est donnée par la relation (2.36), soit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} = \frac{15}{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 4^5}} = 14,9660357$$

Donc :  $0,255419785 \leq Q^* = 14,9660357 \leq 31,16841936$ . En plus,  $\zeta = B_0/Y_0 = 6/4 = 1,5$  et  $\beta = b/Y_0 = 4/4 = 1$ , alors la méthode récapitulée dans le paragraphe III.2. est applicable.

2. La hauteur totale du canal  $Y$  ainsi que la largeur horizontale des parties en courbe  $a$ , peut être calculées en se basant sur les relations (2.162) et (2.163) respectivement, soit :

$$Y = Y_0 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{B_0}{mY_0}\right)^2 - 1}} \right) = 4 \times \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{6}{0,2 \times 4}\right)^2 - 1}} \right) = 3,46186176 \text{ m}$$

$$a = \frac{B_0}{Y_0} \sqrt{Y_0^2 - (Y - Y_0)^2} = \frac{6}{4} \sqrt{4^2 - (3,46186176 - 4)^2} = 5,9454534 \text{ m}$$

3. En utilisant la relation (2.179), le paramètre  $K$  est alors :

$$K = \log Q^* = \log(14,9660357) = 1,17510678$$

4. En se référant à la relation (2.178) et au tableau 2.4, le paramètre de forme des parties elliptiques du modèle rugueux  $\bar{\xi}$  est déterminé comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= a_6 K^6 + a_5 K^5 + a_4 K^4 + a_3 K^3 + a_2 K^2 + a_1 K + a_0 \\ &= \frac{32}{37207} \times (1,17510678)^6 + \frac{82}{11343} \times (1,17510678)^5 + \frac{162}{6865} \times (1,17510678)^4 + \frac{163}{3246} \times (1,17510678)^3 \\ &+ \frac{701}{6460} \times (1,17510678)^2 + \frac{649}{3601} \times (1,17510678) + \frac{222}{1633} = 0,64252099 \end{aligned}$$

5. Les fonctions  $\tau(\bar{\xi})$  et  $\lambda(\bar{\xi})$  sont données par les relations (2.175) et (2.176) respectivement, soit :

$$\begin{aligned}
\tau(\bar{\xi}) &= \bar{\xi} \left\{ 1 + \frac{\bar{\xi}}{2} \left[ \frac{1}{\bar{\xi}^2} \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1 - \bar{\xi}) \right) + \left( 1 - \bar{\xi}^{-1} \right) \sqrt{2\bar{\xi}^{-1} - 1} \right] \right\} \\
&= 0,64252099 \times \left\{ 1 + 0,64252099 \times \frac{3}{2} \times \left[ \frac{1}{(0,64252099)^2} \times \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1 - 0,64252099) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( 1 - (0,64252099)^{-1} \right) \sqrt{2 \times (0,64252099)^{-1} - 1} \right] \right\} = 1,94957896 \\
\lambda(\bar{\xi}) &= 1 + 0,1694\bar{\xi} \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,015\bar{\xi} - 1,1289]^2}{1 - [0,0236\bar{\xi} - 1]^2}} + 1,0389\bar{\xi} \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,6187\bar{\xi} - 1,5398]^2}{1 - [0,7188\bar{\xi} - 1]^2}} \\
&+ 0,7987\bar{\xi} \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,725\bar{\xi} - 0,8792]^2}{1 - [0,6528\bar{\xi} - 1]^2}} = 1 + 0,1694 \times 0,64252099 \times \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,015 \times 0,64252099 - 1,1289]^2}{1 - [0,0236 \times 0,64252099 - 1]^2}} \\
&+ 1,0389 \times 0,64252099 \times \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,6187 \times 0,64252099 - 1,5398]^2}{1 - [0,7188 \times 0,64252099 - 1]^2}} \\
&+ 0,7987 \times 0,64252099 \times \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,725 \times 0,64252099 - 0,8792]^2}{1 - [0,6528 \times 0,64252099 - 1]^2}} = 4,21625515
\end{aligned}$$

6. En se basant sur la relation (2.168), l'aire de la section mouillée du modèle rugueux  $\bar{A}$  est, en remplaçant  $\tau(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  par  $\tau(\bar{\xi})$ , telle que :

$$\bar{A} = b^2 \times \tau(\bar{\xi}) = (4)^2 \times 1,94957896 = 31,1932634 \text{ m}^2$$

7. La relation (2.172) est employée pour le calcul du périmètre mouillé du modèle rugueux  $\bar{P}$ , soit, en remplaçant  $\lambda(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  par  $\lambda(\bar{\xi})$  :

$$\bar{P} = b \times \lambda(\bar{\xi}) = 4 \times 4,21625515 = 16,8650206 \text{ m}$$

8. Connaissant  $\bar{A}$  et  $\bar{P}$  le diamètre hydraulique  $\bar{D}_h$  est comme suit :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P} = 4 \times 31,1932634 / 16,8650206 = 7,39833389 \text{ m}$$

9. Le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux  $\bar{R}$  est déterminé par la relation (2.27) tel que :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 15}{16,8650206 \times 10^{-6}} = 3557659,45$$

10. En se référant à la relation (2.25), le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est explicitement déterminé comme suit :

$$\begin{aligned}
\psi &= 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\
&= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{10^{-3}/7,39833389}{4,75} + \frac{8,5}{3557659,45} \right) \right]^{-2/5} = 0,73897853
\end{aligned}$$

11. En accord avec la relation fondamentale de la méthode MMR (2.24 :  $L = \psi \bar{L}$ ), on donne au modèle rugueux de référence la valeur suivante :

$$\bar{b} = b/\psi = 4/0,73897853 = 5,41287718 \text{ m}$$

Il convient de noter qu'en attribuant au modèle rugueux la nouvelle dimension linéaire  $b/\psi$ , le paramètre de forme des parties elliptiques du canal réel (étudié) est égal à celui du modèle rugueux, c'est-à-dire :  $\xi = \bar{\xi}$ . De ce fait, la valeur correspondante de la conductivité relative  $Q^*$  est, selon la relation (2.36) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^{-5}}} = \frac{15}{\sqrt{9,81 \times 10^{-4} \times 5,41287718}} = 7,02564698$$

Donc :  $0,255419785 \leq Q^* = 7,025646976 \leq 31,16841936$ , alors la méthode récapitulée dans la figure 2.14 est toujours applicable.

12. Selon la relation (2.120), la nouvelle valeur du paramètre  $K$  est telle que :

$$K = \log Q^* = \log(7,02564698) = 0,84668632$$

13. En utilisant les mêmes valeurs pour les coefficients  $a_0$  à  $a_6$  considérés au cours de l'étape 4, la relation (2.178) permet de déterminer le taux de remplissage des parties elliptiques du canal réel  $\xi$  tel que :

$$\begin{aligned} \xi = \bar{\xi} &= a_6 K^6 + a_5 K^5 + a_4 K^4 + a_3 K^3 + a_2 K^2 + a_1 K + a_0 \\ &= \frac{32}{37207} \times (0,84668632)^6 + \frac{82}{11343} \times (0,84668632)^5 + \frac{162}{6865} \times (0,84668632)^4 + \frac{163}{3246} \times (0,84668632)^3 \\ &+ \frac{701}{6460} \times (0,84668632)^2 + \frac{649}{3601} \times (0,84668632) + \frac{222}{1633} = 0,41240283 \end{aligned}$$

Selon la relation (2.181), on peut déduire la valeur de la profondeur normale relative du canal réel (étudié) comme suit :

$$\eta = \xi/\beta = 0,41240283/1 = 0,41240283$$

14. Finalement, la profondeur normale recherchée est alors :

$$y_n = b\eta = 4 \times 0,41240283 = 1,64961132 \approx 1,65 \text{ m}$$

15. Le but de cette étape est de valider le calcul précédent. Pour cela, calculons la pente longitudinale du canal en utilisant la relation de *Darcy – Weisbach* exprimée par l'équation (2.1). Si les calculs effectués précédemment sont corrects, la pente qui sera ainsi calculée devrait être égale à la pente donnée dans l'énoncé du problème.

La méthode du modèle rugueux montre que le coefficient de frottement  $f$  et le facteur de correction adimensionnel des dimensions linéaires  $\psi$  sont liés par la relation suivante (*Achour, 2007*) :

$$f = \psi^5 / 16$$

Ainsi :

$$f = 0,73897853/16 = 0,01377333$$

En outre, les fonctions  $\tau(\xi)$  et  $\lambda(\xi)$  sont déterminées, respectivement, selon les relations (2.175) et (2.176) en remplaçant  $\bar{\xi}$  par  $\xi$ , soit :

$$\begin{aligned} \tau(\xi) &= \xi \left\{ 1 + \xi \frac{3}{2} \left[ \frac{1}{\xi^2} \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1 - \xi) \right) + (1 - \xi^{-1}) \sqrt{2\xi^{-1} - 1} \right] \right\} \\ &= 0,41240283 \times \left\{ 1 + 0,41240283 \times \frac{3}{2} \times \left[ \frac{1}{(0,41240283)^2} \times \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(1 - 0,41240283) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1 - (0,41240283)^{-1}) \sqrt{2 \times (0,41240283)^{-1} - 1} \right] \right\} = 1,11328366 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(\xi) &= 1 + 0,1694\xi \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,015\xi - 1,1289]^2}{1 - [0,0236\xi - 1]^2}} + 1,0389\xi \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,6187\xi - 1,5398]^2}{1 - [0,7188\xi - 1]^2}} \\ &+ 0,7987\xi \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,725\xi - 0,8792]^2}{1 - [0,6528\xi - 1]^2}} = 1 + 0,1694 \times 0,41240283 \times \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,015 \times 0,41240283 - 1,1289]^2}{1 - [0,0236 \times 0,41240283 - 1]^2}} \\ &+ 1,0389 \times 0,41240283 \times \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,6187 \times 0,41240283 - 1,5398]^2}{1 - [0,7188 \times 0,41240283 - 1]^2}} \\ &+ 0,7987 \times 0,41240283 \times \sqrt{1 + 2,25 \frac{[0,725 \times 0,41240283 - 0,8792]^2}{1 - [0,6528 \times 0,41240283 - 1]^2}} = 3,62019923 \end{aligned}$$

De même, l'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le périmètre mouillé  $P$  du canal étudié (réel) peuvent être déduits à partir des relations (2.168) et (2.169), respectivement, tels que :

$$A = b^2 \times \tau(\xi) = (4)^2 \times 1,11328366 = 17,8125386 \text{ m}^2$$

Et :

$$P = b \times \lambda(\xi) = 4 \times 4,21625515 = 14,4807969 \text{ m}$$

Pour les valeurs ainsi calculées de  $A$  et  $P$ , le diamètre hydraulique  $D_h$  est alors :

$$D_h = 4A/P = 4 \times 17,8125386 / 14,4807969 = 4,92031997 \text{ m}$$

Finalement, la pente longitudinale du canal  $i$  est calculée selon la relation (2.1) telle que :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,01377333}{4,92031997} \times \frac{15^2}{2 \times 9,81 \times 17,8125386} = 0,00010118 \approx 10^{-4}$$

Il est ainsi clairement démontré que la pente longitudinale calculée est pratiquement égale à la pente donnée dans l'énoncé du problème ( $\Delta i/i = 1,18 \%$ ), ce qui permet de conclure à la fiabilité de la méthode préconisée.

#### IV. Conclusion

Ce troisième chapitre de cette partie de la thèse s'est consacré à l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal à parois elliptiques muni d'un fond horizontal en se basant principalement sur la méthode MMR.

L'intérêt principal de choisir ce type de canaux a été initialement discuté. Les caractéristiques géométriques du canal telles que : l'aire de la section mouillée et le périmètre mouillé ont été inspirées à partir de l'étude de *Easa et Vatankhah* (2014).

Le modèle rugueux de référence a été défini pour chaque cas d'étude. Ses caractéristiques géométriques ont été adaptées à chaque cas d'étude également en proposant les paramètres de forme convenables.

En se basant sur la méthode MMR, les méthodes proposées ont eu pour objectif de :

*i.* Dimensionner le canal en déterminant la largeur du fond, la hauteur totale, la largeur horizontale des parties elliptiques ainsi que les deux demi-axes de l'ellipse caractérisant le canal. La recherche de la profondeur normale de l'écoulement a été également ajoutée à l'objectif de cette section de l'étude.

*ii.* Déterminer la profondeur normale de l'écoulement connaissant la largeur de fond du canal ainsi que les deux demi-axes de l'ellipse caractérisant les parois du canal. La méthode a été proposée en adoptant un modèle mathématique basé sur une équation polynomiale d'ordre six (06) et menant au calcul de la profondeur normale recherchée dans les limites indiquées dans le texte. Le calcul de la hauteur totale du canal ainsi que les parties horizontales des parois en courbe a fait un objectif secondaire de cette section de l'étude.

Ces méthodes sont applicables dans tout le domaine turbulent englobant le régime turbulent rugueux, lisse et de transition.

Deux exemples d'applications ont été présentés dont l'objectif est de montrer le mode d'emploi des conditions d'application des méthodes développées, les étapes de calcul proposées ainsi que la validité de chaque approche suggérée.

*Quatrième Chapitre*

**ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN  
CANAL A PAROIS SOUS FORME DE LOI  
PUISSANCE ET A FOND HORIZONTAL**

## Chapitre IV

### ÉCOULEMENT UNIFORME DANS UN CANAL A PAROIS SOUS FORME DE LOI PUISSANCE ET A FOND HORIZONTAL

#### **I. Introduction**

Ce quatrième et dernier chapitre de la deuxième partie et de la thèse en général sera réservé à la présentation de notre modeste contribution au calcul de l'écoulement uniforme dans un canal à parois en loi puissance avec fond horizontal dont la forme est inspirée de celle de *Vatankhah* (2014) qui a étudié un canal à parois en loi puissance sans fond horizontal.

Les parois du canal, suivant dans ce cas une loi de type puissance de fonction  $Y = kX^m$  (Figure 2.15), peuvent prendre plusieurs formes. L'exposant " $m$ " de la fonction de type puissance ainsi que la nature du fond du canal  $b$  jouent alors un rôle primordial dans la définition du type de la forme du profil liquide transversal du canal. Par exemple lorsque  $m = 1$  et  $b = 0$ , alors le canal est de forme triangulaire et si  $m = 1$  et  $b > 0$ , alors le canal est de forme trapézoïdale. En outre, si  $m = 2$  et  $b = 0$ , dans ce cas le canal est de forme parabolique et si  $m$  prend des valeurs importantes, alors le canal est de forme pratiquement rectangulaire (*Valiani et Caleffi*, 2009 citée par *Vatankhah*, 2014).

La présente étude s'intéressera à l'intervalle de valeurs :  $1 < m < 2$  avec  $b > 0$ , d'où la dénomination « Canal à parois en loi puissance avec fond horizontal ».

Deux approches théoriques seront développées pour ce type de canal dont la première approche sera destinée au dimensionnement du canal connaissant les paramètres de forme et les caractéristiques hydrodynamique de l'écoulement tels que le débit volume  $Q$ , la pente longitudinale du canal  $i$ , la rugosité absolues des parois internes du canal  $\varepsilon$  ainsi que la viscosité cinématique du liquide  $\nu$ . Un autre paramètre sera essentiel à notre étude, c'est la pente  $1/z$  de la tangente à la paroi du canal au niveau du point le plus haut  $a_1$  (Figure 2.15). Lorsqu'il s'agit d'un canal en terre, cette pente  $1/z$  sera choisie de telle sorte que les parois du canal soient mécaniquement stables. Autrement dit, la tangente au point  $a_1$  de la paroi du canal doit être inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle inférieur ou à la limite égal à l'angle de frottement interne du sol de la berge (angle de repos).

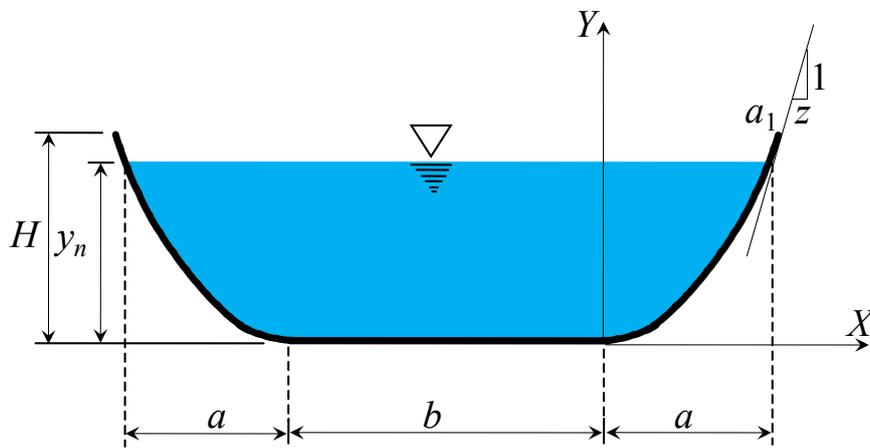
La deuxième approche théorique qui sera proposée aura pour but de déterminer la profondeur normale de l'écoulement pour une largeur de fond donnée. Les conditions du problème seront suffisamment discutées afin de mener à bien notre étude.

La méthode qui sera utilisée pour atteindre les objectifs fixés est la méthode MMR dont un modèle rugueux de référence approprié sera défini.

Deux exemples d'application seront proposés pour le but de montrer l'efficacité et la validité des deux approches théoriques qui seront établies.

## II. Dimensionnement d'un canal à parois en loi-puissance avec fond horizontal

La forme du canal choisie dans ce chapitre est inspirée de celle proposée par *Vatankhah* (2014) et présentée au cours du deuxième chapitre de la première partie (Section VI : Figures 1.18 et 1.19). La figure 2.15 représente alors la forme qui sera étudiée dans ce chapitre où le canal est composé de parois latérales en forme de loi-puissance avec fond horizontal dont :  $y_n$  est la profondeur normale de l'écoulement,  $b$  représente la largeur de fond du canal,  $H$  est la hauteur totale du canal et  $a$  est la largeur horizontale des parties en courbe. La figure 2.15 montre également que la tangente passant par le point  $a_1$  est inclinée par rapport à l'horizontale et possède une pente de  $1/z$ .



**Figure 2.15 :** Canal à parois en loi-puissance avec fond horizontal.

Les parois du canal suivent alors une loi puissance selon la relation (1.117) de *Vatankhah* (2014), dont on rappelle l'expression ici, soit :

$$Y = kX^m \quad (1.117)$$

Rappelons que :  $Y$  est l'ordonnée et  $X$  représente l'abscisse (Figures 1.18 et 2.15). Comme nous l'avons présenté au cours du deuxième chapitre de la première partie, *Vatankhah* (2014) indique que  $k$  et  $m$  sont des paramètres pour lesquels la fonction prend différentes formes. Par exemple, pour  $m = 1$  et  $2$ , la fonction représente des canaux triangulaires et paraboliques respectivement. L'auteur signale, en outre, que les sections transversales pratiques pour les canaux sous forme de loi-puissance sont caractérisées par un exposant  $m$  généralement compris entre 1 et 2. De ce fait, l'étude qui sera entamée dans ce chapitre couvrira l'intervalle suivant :  $1 < m < 2$ .

En revanche, la figure 2.15 représente l'état de l'écoulement uniforme dans un canal à parois en loi puissance avec fond horizontal. Le profil liquide est caractérisé par les paramètres de forme  $\eta = y_n/b$  et  $\xi = y_n/H$ . Le rapport  $\eta$  correspond alors au paramètre de forme de la partie rectangulaire du canal

(ou profondeur normale relative), tandis que le rapport  $\xi$  correspond au paramètre de forme des parties en loi-puissance du canal. Les paramètres inconnus du problème sont la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$  ainsi que les paramètres géométriques liées aux dimensions du canal telles que : la largeur de fond du canal  $b$ , la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  et la hauteur totale du canal  $H$ . Par ailleurs, les paramètres donnés sont : le débit volume  $Q$ , la pente longitudinale du canal  $i$ , la viscosité cinématique du liquide en écoulement  $\nu$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  qui définit l'état des parois internes du canal et la pente  $1/z$ . La profondeur normale est principalement calculée à partir des équations de résistance à l'écoulement dans les canaux ouverts. L'objectif est de dimensionner le canal ce qui revient à calculer la profondeur normale  $y_n$  ainsi que les grandeurs  $b$ ,  $a$  et  $H$  constituant les paramètres liés aux dimensions du canal à partir des données citées ci-dessus ainsi que des paramètres de forme imposés  $\eta$  et  $\xi$ .

Afin de résoudre le problème de dimensionnement du canal en utilisant seulement ces données, il semble que la méthode du modèle rugueux soit encore l'outil de calcul le plus adapté.

### **II.1. Equations de base**

L'équation *Darcy – Weisbach* sous la forme de la relation (2.1) du premier chapitre de cette deuxième partie est considérée comme équation principale sur laquelle se base la présente étude. Cette relation est rappelée ci-dessous.

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} \quad (2.1)$$

Le coefficient de frottement  $f$  est donné par la formule de *Colebrook – White* citée au cours du premier chapitre de la première partie par la relation (1.54), soit :

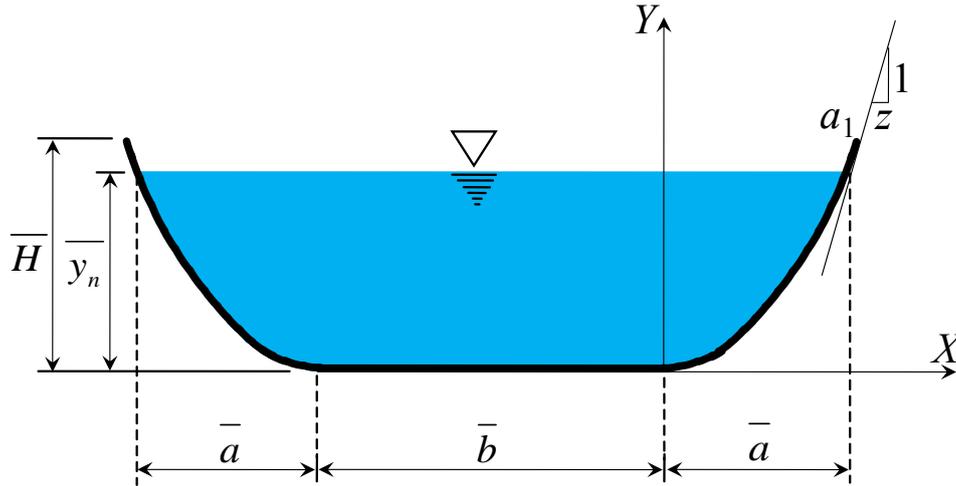
$$f^{-1/2} = -2 \log \left( \frac{\varepsilon/D_h}{3,7} + \frac{2,51}{R\sqrt{f}} \right) \quad (1.54)$$

Le nombre de *Reynolds*  $R$  s'exprime, pour rappelle :

$$R = \frac{4Q}{P\nu} \quad (2.2)$$

### **II.2. Modèle rugueux de référence**

Le modèle rugueux considéré est en fait un canal également à fond horizontal et à parois en loi-puissance (Figure 2.16).



**Figure 2.16 :** Schéma de définition du modèle rugueux de référence (Écoulement normal).

Rappelons toujours que toutes les caractéristiques géométriques et hydrauliques du modèle rugueux se distinguent par le symbole " $\bar{\quad}$ ". Le modèle rugueux est particulièrement caractérisé par une rugosité relative  $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 0,037$  arbitrairement choisie, où  $\bar{D}_h$  est le diamètre hydraulique. La rugosité relative est tellement élevée que l'écoulement est dans le domaine turbulent rugueux. Ainsi, le coefficient de frottement est  $\bar{f} = 1/16$  selon la relation (1.71) citée dans le premier chapitre de la première partie. Le canal à fond horizontal et à parois en loi-puissance est caractérisé par la pente longitudinale  $i$ , le paramètre de forme de la partie rectangulaire  $\eta = y_n/b$  ainsi que celui des parties en loi puissance  $\xi = y_n/H$ . Le modèle rugueux est caractérisé par les paramètres de forme  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b}$  et  $\bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{H}$ . En raison de la forte valeur de la rugosité relative, les dimensions linéaires dans le modèle rugueux sont telles que :  $\bar{y}_n > y_n$ ,  $\bar{b} > b$ ,  $\bar{H} > H$  et  $\bar{a} > a$ . En outre, pour obtenir la même forme du modèle et du canal on doit imposer que :  $\bar{\eta} = \eta$  et  $\bar{\xi} = \xi$ . Le débit volume  $Q$  ainsi que la pente longitudinale  $i$  sont les mêmes dans le canal et dans le modèle rugueux, c'est-à-dire :  $\bar{Q} = Q$  et  $\bar{i} = i$ .

La relation (2.1) de *Darcy – Weisbach* appliquée au modèle rugueux a mené, pour rappelle, à la relation suivante qui a été développée au cours du premier chapitre de cette partie :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} Q^2 \quad (2.4)$$

En se basant sur la relation approchée (1.124) proposée par *Vatankhah* (2014) et montrée dans le deuxième chapitre de la première partie, le périmètre mouillé du modèle rugueux pour un canal à

parois en loi puissance avec fond horizontal peut s'écrire, en ajoutant à l'expression (1.124) la largeur du fond  $\bar{b}$  (Figure 2.16) :

$$\bar{P} = \bar{b} + 0,3176\bar{T}\sqrt{1 + \delta(0,1025)^{2m-2}} + 0,6834\bar{T}\sqrt{1 + \delta(0,6811)^{2m-2}} \quad (2.182)$$

La dimension linéaire  $\bar{T}$  correspond à  $2\bar{a}$  selon les figures 1.19 et 2.16. Elle est définie à partir de la relation (1.118) de *Vatankhah* (2014) montrée dans le deuxième chapitre de la première partie, soit :

$$\bar{T} = 2mz\bar{H}\xi^{1/m} \quad (2.183)$$

De ce fait, la relation (2.182) s'écrit :

$$\bar{P} = \bar{b} + 0,6352mz\bar{H}\xi^{1/m}\sqrt{1 + \delta(0,1025)^{2m-2}} + 1,3668mz\bar{H}\xi^{1/m}\sqrt{1 + \delta(0,6811)^{2m-2}}$$

Ou bien :

$$\bar{P} = \bar{b} + mz\bar{H}\xi^{1/m}\left[0,6352\sqrt{1 + \delta(0,1025)^{2m-2}} + 1,3668\sqrt{1 + \delta(0,6811)^{2m-2}}\right] \quad (2.184)$$

Le paramètre adimensionnel  $\delta$  est donné par la relation (1.122) de *Vatankhah* (2014) qui est réécrite comme suit :

$$\delta = \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2} \quad (2.185)$$

On rappelle que :  $0 < \delta < z^{-2}$ , pour :  $0 < \xi < 1$ .

On remarque que :  $\bar{\delta} = \delta$ , car :  $\bar{\xi} = \xi$ .

En tenant compte de la relation (2.185), la relation (2.184) devient :

$$\bar{P} = \bar{b} + mz\bar{H}\xi^{1/m}\left[0,6352\sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2}(0,1025)^{2m-2}} + 1,3668\sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2}(0,6811)^{2m-2}}\right] \quad (2.186)$$

Ou bien :

$$\bar{P} = \bar{b}\left\{1 + mz\frac{\bar{H}}{\bar{b}}\xi^{1/m}\left[0,6352\sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2}(0,1025)^{2m-2}} + 1,3668\sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2}(0,6811)^{2m-2}}\right]\right\}$$

Cette dernière expression peut s'écrire :

$$\bar{P} = \bar{b}\left\{1 + mz\frac{\bar{H}}{\bar{b}}\frac{\bar{y}_n}{y_n}\xi^{1/m}\left[0,6352\sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2}(0,1025)^{2m-2}} + 1,3668\sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2}(0,6811)^{2m-2}}\right]\right\}$$

Ou bien en tenant compte que :  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b} = \eta$  et  $\bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{H} = \xi$ , soit :

$$\bar{P} = \bar{b}\left\{1 + mz\frac{\eta}{\xi}\xi^{1/m}\left[0,6352\sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2}(0,1025)^{2m-2}} + 1,3668\sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2}(0,6811)^{2m-2}}\right]\right\} \quad (2.187)$$

La relation (2.187) peut s'écrire également :

$$\bar{P} = \bar{b} \left\{ 1 + mz\eta\xi^{(1/m)-1} \left[ 0,6352\sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2} (0,1025)^{2m-2}} + 1,3668\sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2} (0,6811)^{2m-2}} \right] \right\} \quad (2.188)$$

Posons la fonction  $\gamma(\eta, \xi)$  telle que :

$$\gamma(\eta, \xi) = 1 + mz\eta\xi^{(1/m)-1} \left[ 0,6352\sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2} (0,1025)^{2m-2}} + 1,3668\sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2} (0,6811)^{2m-2}} \right] \quad (2.189)$$

La relation (2.188) peut s'écrire en vertu de la relation (2.189) :

$$\bar{P} = \bar{b} \times \gamma(\eta, \xi) \quad (2.190)$$

Rappelons que la relation approchée (1.124) est valable pour les intervalles suivants :  $1 < m < 2$  et  $0 < \delta < 10$ . Alors la relation (2.190) est également applicable pour ces deux derniers intervalles.

L'aire de la section mouillée du modèle rugueux  $\bar{A}$ , peut être exprimée en se basant sur la relation (1.119) de *Vatankhah* (2014) montrée dans le deuxième chapitre de la première partie et établie pour un canal à parois en loi-puissance sans fond horizontal. Pour notre cas, il s'agit d'ajouter à l'expression de la relation (1.119), la partie rectangulaire au milieu du canal :  $\bar{b} \times \bar{y}_n$  (Figure 2.16), soit :

$$\bar{A} = \bar{b}\bar{y}_n + \frac{2m^2}{1+m} z \bar{H}^2 \xi^{1+1/m}$$

Ou bien :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \left( \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} + \frac{2m^2}{1+m} z \frac{\bar{H}^2}{\bar{b}^2} \xi^{1+1/m} \right) \quad (2.191)$$

Cette dernière relation peut s'écrire :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \left( \frac{\bar{y}_n}{\bar{b}} + \frac{2m^2}{1+m} z \frac{\bar{H}^2}{\bar{b}^2} \frac{\bar{y}_n^2}{\bar{y}_n^2} \xi^{1+1/m} \right)$$

Ou bien en tenant compte que :  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b} = \eta$  et  $\bar{\xi} = \bar{H}/\bar{H} = \xi$ , soit :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \left( \eta + \frac{2m^2}{1+m} z \frac{\eta^2}{\xi^2} \xi^{1+1/m} \right)$$

Cette dernière relation peut s'écrire également :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \eta \left( 1 + \frac{2m^2}{1+m} z \eta \xi^{(1/m)-1} \right) \quad (2.192)$$

Posons la fonction  $\chi(\eta, \xi)$  telle que :

$$\chi(\eta, \xi) = \eta \left( 1 + \frac{2m^2}{1+m} z \eta \xi^{(1/m)-1} \right) \quad (2.193)$$

Tenant compte de la relation (2.193), la relation (2.192) s'écrit plus simplement :

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \times \chi(\eta, \xi) \quad (2.194)$$

En insérant les relations (2.190) et (2.194) dans la relation (2.4), on obtient :

$$i = \frac{\bar{b} \times \gamma(\eta, \xi)}{128g \left[ \bar{b}^2 \times \chi(\eta, \xi) \right]^{3/5}} Q^2$$

Soit, après simplification et réarrangement :

$$\bar{b} = \left\{ \frac{\gamma(\eta, \xi)}{128[\chi(\eta, \xi)]^3} \right\}^{1/5} \left( \frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} \quad (2.195)$$

La relation (2.195) permet alors le calcul direct de la largeur de fond du modèle rugueux  $\bar{b}$  en fonction des paramètres connus :  $Q$ ,  $i$ ,  $\eta$  et  $\xi$ .

Tenant compte que :  $\eta = \bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b}$ , la profondeur normale dans le modèle rugueux  $\bar{y}_n$  peut s'écrire :

$$\bar{y}_n = \bar{\eta} \bar{b} \quad (2.196)$$

La relation (2.100) est alors reproduite.

La hauteur totale du modèle rugueux  $\bar{H}$  peut être tirée en tenant compte que :  $\bar{\xi} = \bar{y}_n / \bar{H} = \xi$ , soit :

$$\bar{H} = \bar{y}_n / \xi \quad (2.197)$$

Comme nous l'avons indiqué un peu plus haut, la dimension linéaire  $\bar{T}$  correspond à  $2\bar{a}$  selon les figures 1.19 et 2.16. De ce fait, la largeur horizontale des parois en courbe du modèle rugueux  $\bar{a}$  s'écrit, en tenant compte de la relation (2.183) :

$$\bar{a} = \bar{T} / 2 = m z \bar{H} \xi^{1/m} \quad (2.198)$$

Le paramètre de forme  $k$  de la relation (1.117) peut être déduit à partir de la relation (1.133) de *Vatankhah* (2014) citée dans le deuxième chapitre de la première partie, soit :

$$k = \frac{\bar{H}^{1-m}}{(mz)^m} \quad (2.199)$$

Ce dernier paramètre est utile pour le traçage de la section du canal.

### II.3. Facteur de correction des dimensions linéaires

La relation permettant le calcul du facteur de correction des dimensions linéaires a été exposée au cours des trois derniers chapitres telle que :

$$\psi = 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\overline{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\overline{R}} \right) \right]^{-2/5} \quad (2.25)$$

Le nombre de *Reynolds*  $\overline{R}$  dans le modèle rugueux a été exprimé comme suit :

$$\overline{R} = \frac{4Q}{Pv} \quad (2.27)$$

De plus, le diamètre hydraulique du modèle rugueux  $\overline{D}_h$  a été défini comme suit :

$$\overline{D}_h = 4\overline{A}/\overline{P} \quad (2.23)$$

#### II.4. Etapes de calcul des dimensions linéaires du canal

Pour déterminer les dimensions linéaires d'un canal à fond horizontal et à parois en loi puissance, les paramètres suivants doivent être donnés :  $Q$ ,  $i$ ,  $m$ ,  $z$ ,  $\eta$ ,  $\xi$ ,  $\varepsilon$  et  $v$ . Rappelons que le coefficient de résistance de l'écoulement tel que le coefficient de *Chézy* ou celui de *Manning* n'est pas requis. Les paramètres à déterminer sont : la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$ , la largeur de fond  $b$ , la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  ainsi que la hauteur totale du canal  $H$ . Le paramètre de forme  $k$  peut également être calculé s'il est nécessaire. Pour déterminer ces paramètres, les étapes de calcul suivantes sont recommandées :

1. Calculer les fonctions :  $\gamma(\eta, \xi)$  et  $\chi(\eta, \xi)$  respectivement par les relations (2.189) et (2.193).
2. Déterminer la largeur de la base  $\overline{b}$  du modèle rugueux par la relation (2.195).
3. Dédire le périmètre mouillé  $\overline{P}$  et l'aire de la section mouillée  $\overline{A}$  du modèle rugueux respectivement à partir des relations (2.190) et (2.194).
4. Calculer le diamètre hydraulique  $\overline{D}_h$  en utilisant la relation (2.23).
5. Calculer le nombre de *Reynolds*  $\overline{R}$  selon la relation (2.27).
6. Avec les valeurs calculées de  $\overline{D}_h$  et de  $\overline{R}$ , déduire la valeur du facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  par application de la relation (2.25).
7. Connaissant la valeur de  $\overline{b}$  et de  $\psi$ , la valeur recherchée de la largeur de la base du canal  $b$  est directement déduite en se référant à la relation fondamentale (2.24), soit :  $b = \psi \overline{b}$ .
8. Calculer la profondeur normale  $y_n$  peut être déterminée par analogie avec la relation (2.196).
9. Les valeurs de la hauteur totale du canal  $H$  ainsi que la valeur de la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  sont déduites par analogie avec les relations (2.197) et (2.198) respectivement.
10. Déterminer le paramètre de forme  $k$  par analogie avec la relation (2.199).

Il est à noter que la méthode préconisée s'applique à l'ensemble du régime turbulent englobant les

trois (03) domaines : lisse, de transition et rugueux.

Notons que lorsqu'il s'agit d'un canal sans fond horizontal, on doit mettre  $b = 0$  et on refait le développement par la même méthodologie montrée ci-dessus.

### II.5. Exemple d'application 2.11

Soit un canal à fond horizontal et à parois en loi puissance (Figure 2.15). Dimensionner le canal, sachant que :

$$Q = 15 \text{ m}^3/\text{s}, i = 10^{-4}, \eta = 0,6, \xi = 0,9, z = 0,2, m = 1,3, \varepsilon = 10^{-3} \text{ m et } \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.$$

1. Selon les relations (2.189) et (2.193), les fonctions  $\gamma(\eta, \xi)$  et  $\chi(\eta, \xi)$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} \gamma(\eta, \xi) &= 1 + mz\eta\xi^{(1/m)-1} \left[ 0,6352 \sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2} (0,1025)^{2m-2}} + 1,3668 \sqrt{1 + \frac{\xi^{(2-2/m)}}{z^2} (0,6811)^{2m-2}} \right] \\ &= 1 + 1,3 \times 0,2 \times 0,6 \times (0,9)^{(1/1,3)-1} \left[ 0,6352 \times \sqrt{1 + \frac{0,9^{(2-2/1,3)}}{0,2^2} (0,1025)^{2 \times 1,3-2}} + 1,3668 \times \sqrt{1 + \frac{0,9^{(2-2/1,3)}}{0,2^2} (0,6811)^{2 \times 1,3-2}} \right] \\ &= 2,2448611 \end{aligned}$$

$$\chi(\eta, \xi) = \eta \left( 1 + \frac{2m^2}{1+m} z \eta \xi^{(1/m)-1} \right) = 0,6 \times \left[ 1 + \frac{2(1,3)^2}{1+1,3} \times 0,2 \times 0,6 \times (0,9)^{(1/1,3)-1} \right] = 0,70841286$$

2. La largeur de fond  $\bar{b}$  du modèle rugueux peut être calculée par la relation (2.195). Soit :

$$\bar{b} = \left\{ \frac{\gamma(\eta, \xi)}{128[\chi(\eta, \xi)]^3} \right\}^{1/5} \left( \frac{Q^2}{gi} \right)^{1/5} = \left[ \frac{2,2448611}{128 \times (0,70841286)^3} \right]^{1/5} \left( \frac{15^2}{9,81 \times 10^{-4}} \right)^{1/5} = 6,46735563 \text{ m}$$

3. En application des relations (2.190) et (2.194), le périmètre mouillé  $\bar{P}$  et l'aire de la section mouillée  $\bar{A}$  sont respectivement :

$$\bar{P} = \bar{b} \times \gamma(\eta, \xi) = 6,46735563 \times 2,2448611 = 14,518315 \text{ m}$$

$$\bar{A} = \bar{b}^2 \times \chi(\eta, \xi) = (6,46735563)^2 \times 0,70841286 = 29,630564 \text{ m}^2$$

4. Le diamètre hydraulique du modèle rugueux  $\bar{D}_h$  est donné par la relation (2.23), soit :

$$\bar{D}_h = 4\bar{A}/\bar{P} = 4 \times 29,630564 / 14,518315 = 8,16363715 \text{ m}$$

5. En vertu de la relation (2.27), le nombre de Reynolds  $\bar{R}$  caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux est tel que :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{P\nu} = \frac{4 \times 15}{14,518315 \times 10^{-6}} = 4132710,97$$

6. Selon la relation (2.25), le facteur de correction  $\psi$  est :

$$\begin{aligned}\psi &= 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon/\bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{R} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{10^{-3}/8,16363715}{4,75} + \frac{8,5}{4132710,97} \right) \right]^{-2/5} = 0,73608643\end{aligned}$$

7. La valeur recherchée de la largeur de fond  $b$  est selon la relation fondamentale (2.24) :

$$b = \psi \bar{b} = 0,73608643 \times 6,46735563 = 4,76053272 \text{ m} \approx 4,8 \text{ m}$$

8. La profondeur normale  $y_n$  peut être calculée en se basant sur la relation (2.196), soit :

$$y_n = \eta b = 0,6 \times 4,76053272 = 2,85631963 \text{ m} \approx 2,86 \text{ m}$$

9. Les valeurs de la hauteur totale du canal  $H$  ainsi que la valeur de la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  peuvent être déterminées en se référant aux relations (2.197) et (2.198) respectivement, soit :

$$H = y_n / \xi = 2,85631963 / 0,9 = 3,17368848 \approx 3,2 \text{ m}$$

$$a = m z H \xi^{1/m} = 1,3 \times 0,2 \times 3,17368848 \times (0,9)^{1/1,3} = 0,7609210 \text{ m} \approx 0,8 \text{ m}$$

10. Le paramètre de forme  $k$  peut être calculé en se basant sur la relation (2.199), soit :

$$k = \frac{H^{1-m}}{(mz)^m} = \frac{3,17368848^{1-1,3}}{(1,3 \times 0,2)^m} = 4,0744159 \text{ m}^{1-m} \approx 4,07 \text{ m}^{1-m}$$

Il est à noter que l'unité de  $k$  est indiquée par *Vatankhah* (2014) où l'exposant  $m$  de cette unité est le même que celui de la relation (1.117).

11. Cette étape vise à vérifier les calculs effectués en déterminant la pente longitudinale  $i$  par application de la relation (2.1) de *Darcy – Weisbach*. La pente ainsi calculée doit être égale à celle donnée à l'énoncé de cet exemple d'application.

Selon la méthode du modèle rugueux, le coefficient de frottement  $f$  et le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  sont liés par la relation suivante (*Achour*, 2007) :

$$f = \psi^5 / 16 = 0,73608643^5 / 16 = 0,01350592$$

Par analogie avec la relation (2.190), le périmètre mouillé  $P$  du canal réel peut s'écrire, en remplaçant  $\bar{b}$  par  $b$  :

$$P = b \times \gamma(\eta, \xi) = 4,76053272 \times 2,2448611 = 10,6867347 \text{ m}$$

De même, par analogie avec la relation (2.194), l'aire de la section mouillée du canal réel  $A$  s'écrit en remplaçant  $\bar{b}$  par  $b$  :

$$A = b^2 \times \chi(\eta, \xi) = (4,76053272)^2 \times 0,70841286 = 16,054528 \text{ m}^2$$

Le diamètre hydraulique  $D_h = 4A/P$  est donc :

$$D_h = 4A/P = 4 \times 16,054528 / 10,6867347 = 6,00914253 \text{ m}$$

En vertu de la relation (2.1), la pente longitudinale  $i$  est :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,01350592}{6,00914253} \times \frac{(15)^2}{2 \times 9,81 \times (16,054528)^2} = 10^{-4}$$

Comme nous pouvons le constater, la pente  $i$  calculée et celle donnée à l'énoncé du problème sont égales (écart 0 %), ce qui permet de conclure à la validité des calculs effectués.

### III. Approche théorique au calcul de la profondeur normale

Dans cette partie, il s'agit de déterminer principalement la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$  répondant aux conditions du problème résumées comme suit : le canal à parois en loi puissance et à fond horizontal véhicule un débit  $Q$  d'un liquide de viscosité cinématique  $\nu$  sous une pente longitudinale  $i$ . Les parois internes du canal de pente maximale  $1/z$  (Figure 2.15) sont caractérisées par la rugosité absolue  $\varepsilon$ . La hauteur du canal est  $H$  et la largeur de son fond est désignée par  $b$ . Le canal est caractérisé par les paramètres de forme :  $m$  et  $k$  de la relation (1.117). Tous ces paramètres sont connus et on doit déterminer la profondeur normale  $y_n$  qui convient à ces conditions. Notons que la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  est à déterminer également (Figure 2.15).

#### III.1. Modèle rugueux de référence

Il s'agit du même modèle défini par la figure 2.16 caractérisé par une rugosité relative  $\bar{\varepsilon}/\bar{D}_h = 0,037$  ainsi qu'un coefficient de frottement est  $\bar{f} = 1/16$  (Achour, 2007). Rappelons que les caractéristiques relatives à la géométrie du canal  $b$ ,  $H$ ,  $m$  et  $k$  sont connues et les paramètres hydrodynamiques de l'écoulement  $Q$ ,  $i$ ,  $\varepsilon$  et  $\nu$  sont connus également. Dans ces conditions, on cherche à déterminer la profondeur normale  $y_n$  ainsi que la largeur horizontale des parties en courbe  $a$ . Dans ce cas le principe de la méthode MMR mène à écrire :  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{H} = H$ ,  $\bar{B}_0 = B_0$ ,  $\bar{i} = i$  et  $\bar{Q} = Q$ ,  $\bar{y}_n \neq y_n$ ,  $\bar{Y} \neq Y$  et  $\bar{a} \neq a$ . Les paramètres  $m$ ,  $k$  ainsi que la pente maximale des parois du canal  $1/z$  sont les mêmes dans le modèle rugueux et dans le canal réel étudié. De ce fait, les paramètres de forme sont tels que :  $\bar{\eta} = \bar{y}_n/\bar{b} \neq \eta = y_n/b$  et  $\bar{\xi} = \bar{y}_n/\bar{H} \neq \xi = y_n/H$ . De plus, les dimensions  $b$  et  $H$  sont connues, d'où on peut imposer un nouveau paramètre de forme tel que :

$$\beta = \frac{b}{H} = \frac{\xi}{\eta} = \bar{\beta} = \frac{\bar{\xi}}{\bar{\eta}} \quad (2.200)$$

L'équation de Darcy – Weisbach appliquée au modèle rugueux de référence représentée par la relation (2.4) reste en vigueur ici, soit en rappelant son expression :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{\bar{P}}{\bar{A}^3} Q^2 \quad (2.4)$$

L'aire de la section mouillée du modèle rugueux  $\bar{A}$  peut s'écrire par analogie avec la relation (2.194) en tenant compte que :  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b} \neq \eta = y_n / b$  et  $\bar{\xi} = \bar{y}_n / \bar{Y}_0 \neq \xi = y_n / Y_0$ , soit :

$$\bar{A} = b^2 \times \chi(\bar{\eta}, \bar{\xi}) \quad (2.201)$$

La fonction  $\chi(\bar{\eta}, \bar{\xi})$  est déduite à partir de la relation (2.193), telle que :

$$\chi(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = \bar{\eta} \left( 1 + \frac{2m^2}{1+m} \bar{\eta} \bar{\xi}^{-(1/m)-1} \right) \quad (2.202)$$

Ou bien, en tenant compte de la relation (1.132) de *Vatankhah* (2014) présentée dans le deuxième chapitre de la première partie, soit :

$$\chi(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = \bar{\eta} \left[ 1 + \frac{2m^2}{1+m} \times \frac{1}{mH} \left( \frac{H}{k} \right)^{1/m} \times \bar{\eta} \bar{\xi}^{-(1/m)-1} \right]$$

Ou bien :

$$\chi(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = \bar{\eta} \left[ 1 + \frac{2m}{1+m} \times \frac{1}{H} \left( \frac{H}{k} \right)^{1/m} \times \bar{\eta} \bar{\xi}^{-(1/m)-1} \right] \quad (2.203)$$

On remarque que le terme :  $\frac{1}{H} \left( \frac{H}{k} \right)^{1/m}$  figurant dans la relation (2.203) est adimensionnel car :  $H$  s'exprime en "m" et  $k$  en "m<sup>1-m</sup>". Posons alors le paramètre adimensionnel suivant :

$$\zeta = \frac{1}{H} \left( \frac{H}{k} \right)^{1/m} \quad (2.204)$$

Et comme  $H$  et  $k$  sont connus alors :  $\bar{\zeta} = \zeta$ . Tenant compte de toutes ces considérations, la relation (2.203) conduira à une nouvelle fonction, soit :

$$\chi(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta) = \bar{\eta} \left[ 1 + \frac{2m}{1+m} \zeta \bar{\eta} \bar{\xi}^{-(1/m)-1} \right] \quad (2.205)$$

En outre, en tenant compte de la relation (2.200), la relation (2.205) mènera à une autre nouvelle fonction :  $\chi(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$ , soit :

$$\chi(\bar{\xi}, \zeta, \beta) = \frac{\bar{\xi}}{\beta} \left( 1 + \frac{2m}{1+m} \zeta \frac{\bar{\xi}}{\beta} \bar{\xi}^{-(1/m)-1} \right)$$

Ou bien :

$$\chi(\bar{\xi}, \zeta, \beta) = \frac{\bar{\xi}}{\beta} \left( 1 + \zeta \frac{2m}{1+m} \frac{\bar{\xi}^{1/m}}{\beta} \right) \quad (2.206)$$

De ce faite, la relation (2.201) devient :

$$\bar{A} = b^2 \times \chi(\bar{\xi}, \zeta, \beta) \quad (2.207)$$

Le périmètre mouillé du modèle rugueux  $\bar{P}$  est déduit en se basant sur la relation (2.190) en tenant compte que :  $\bar{b} = b$ ,  $\bar{\eta} = \bar{y}_n / \bar{b} \neq \eta = y_n / b$  et  $\bar{\xi} = \bar{y}_n / \bar{Y}_0 \neq \xi = y_n / Y_0$ , soit :

$$\bar{P} = b \times \gamma(\bar{\eta}, \bar{\xi}) \quad (2.208)$$

La fonction  $\gamma(\bar{\eta}, \bar{\xi})$  est déduite à partir de la relation (2.189), telle que :

$$\gamma(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = 1 + m z \bar{\eta} \bar{\xi}^{(1/m)-1} \left[ 0,6352 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{(2-2/m)}}{z^2} (0,1025)^{2m-2}} + 1,3668 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{(2-2/m)}}{z^2} (0,6811)^{2m-2}} \right] \quad (2.209)$$

La relation (2.209) s'écrit, en tenant compte de la relation (1.132) :

$$\gamma(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = 1 + m \times \frac{1}{mH} \left( \frac{H}{k} \right)^{1/m} \times \bar{\eta} \bar{\xi}^{(1/m)-1} \left[ 0,6352 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{(2-2/m)}}{\left[ \frac{1}{mH} \left( \frac{H}{k} \right)^{1/m} \right]^2} (0,1025)^{2m-2}} + 1,3668 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{(2-2/m)}}{\left[ \frac{1}{mH} \left( \frac{H}{k} \right)^{1/m} \right]^2} (0,6811)^{2m-2}} \right]$$

Ou bien :

$$\gamma(\bar{\eta}, \bar{\xi}) = 1 + \frac{1}{H} \left( \frac{H}{k} \right)^{1/m} \bar{\eta} \bar{\xi}^{(1/m)-1} \left[ 0,6352 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{(2-2/m)}}{\left[ \frac{1}{mH} \left( \frac{H}{k} \right)^{1/m} \right]^2} (0,1025)^{2m-2}} + 1,3668 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{(2-2/m)}}{\left[ \frac{1}{mH} \left( \frac{H}{k} \right)^{1/m} \right]^2} (0,6811)^{2m-2}} \right] \quad (2.210)$$

En tenant compte de la relation (2.204), la relation (2.210) conduira à une nouvelle fonction telle que :

$$\gamma(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta) = 1 + \zeta \bar{\eta} \bar{\xi}^{(1/m)-1} \left[ 0,6352 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{(2-2/m)}}{(\zeta/m)^2} (0,1025)^{2m-2}} + 1,3668 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{(2-2/m)}}{(\zeta/m)^2} (0,6811)^{2m-2}} \right] \quad (2.211)$$

De plus, en tenant compte de la relation (2.200), la relation (2.211) mènera à une autre nouvelle fonction :  $\gamma(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  telle que :

$$\gamma(\bar{\xi}, \zeta, \beta) = 1 + \zeta \frac{\bar{\xi}}{\beta} \bar{\xi}^{(1/m)-1} \left[ 0,6352 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{(2-2/m)}}{(\zeta/m)^2} (0,1025)^{2m-2}} + 1,3668 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{(2-2/m)}}{(\zeta/m)^2} (0,6811)^{2m-2}} \right]$$

Ou bien :

$$\gamma(\bar{\xi}, \zeta, \beta) = 1 + \zeta \frac{\bar{\xi}^{1/m}}{\beta} \left[ 0,6352 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{-(2-2/m)}}{(\zeta/m)^2} (0,1025)^{2m-2}} + 1,3668 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{-(2-2/m)}}{(\zeta/m)^2} (0,6811)^{2m-2}} \right] \quad (2.212)$$

De ce fait, la relation (2.208) doit être réécrite telle que :

$$\bar{P} = b \times \gamma(\bar{\xi}, \zeta, \beta) \quad (2.213)$$

En remplaçant les relations (2.207) et (2.213) dans la relation (2.4), on obtient :

$$i = \frac{1}{128g} \frac{b \times \gamma(\bar{\xi}, \zeta, \beta)}{[b^2 \times \chi(\bar{\xi}, \zeta, \beta)]^{\frac{1}{\beta}}} Q^2$$

Ou bien, après réarrangement et simplification :

$$\frac{\gamma(\bar{\xi}, \zeta, \beta)}{128 [\chi(\bar{\xi}, \zeta, \beta)]^{\frac{1}{\beta}}} \left( \frac{Q^2}{gib^5} \right) = 1 \quad (2.214)$$

Rappelant que par définition, la conductivité relative  $Q^*$  s'écrit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} \quad (2.36)$$

D'où, la relation (2.214) devient :

$$\frac{\gamma(\bar{\xi}, \zeta, \beta)}{128 [\chi(\bar{\xi}, \zeta, \beta)]^{\frac{1}{\beta}}} Q^{*2} = 1 \quad (2.215)$$

A partir des valeurs du débit volume  $Q$ , de la pente longitudinale  $i$  et de la largeur de base  $b$  connues en pratique, la conductivité relative  $Q^*$  peut être calculée par application de la relation (2.36). De ce fait, la relation (2.215) permet le calcul du paramètre de forme du modèle rugueux  $\bar{\xi}$  connaissant les valeurs de  $Q^*$ ,  $m$ ,  $\zeta$  et  $\beta$ . Il est à noter que la relation (2.215) est implicite vis-à-vis de  $\bar{\xi}$ , pour cela une procédure itérative ou une méthode graphique pour la détermination de  $\bar{\xi}$  est nécessaire. Ces méthodes sont très efficaces pour résoudre les problèmes complexes comme celui de la relation (1.215).

Le remplacement de la relation implicite (2.215) par une expression explicite en  $\bar{\xi}$  n'est pas une tâche facile à compléter car ce dernier paramètre se trouve dans plusieurs endroits dans les fonctions  $\chi(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  et  $\gamma(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  et dépend de quatre paramètres  $Q^*$ ,  $m$ ,  $\zeta$  et  $\beta$ .

Comme nous l'avons procédé au cours des deux chapitres précédents, nous proposons de traiter, dans ce qui suit, un cas simple du problème qui doit être élargie dans des études ultérieures. Le problème consiste, alors, à proposer une relation approchée en remplacement de la relation implicite (2.215) pour les valeurs suivantes :  $\zeta = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $m = 1,25$ . Ces trois dernières valeurs ont été

choisies arbitrairement. Il est à noter que dans ces conditions, la hauteur totale du canal  $H$  est inconnue.

Les fonctions  $\chi(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  et  $\gamma(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  doivent être remplacées, respectivement, par les fonctions  $\chi(\bar{\xi})$  et  $\gamma(\bar{\xi})$  pour  $\zeta = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $m = 1,25$ , elles s'écrivent en vertu des relations (2.206) et (2.212) respectivement, soit :

$$\chi(\bar{\xi}) = \frac{\bar{\xi}}{\beta} \left( 1 + \zeta \frac{2m}{1+m} \frac{\bar{\xi}^{1/m}}{\beta} \right) = \frac{\bar{\xi}}{2} \left( 1 + 1 \times \frac{2 \times 1,25}{1+1,25} \frac{\bar{\xi}^{1/1,25}}{2} \right)$$

Soit :

$$\chi(\bar{\xi}) = 0,5 \bar{\xi} \left( 1 + \frac{\bar{\xi}^{0,8}}{1,8} \right) \tag{2.216}$$

Et :

$$\gamma(\bar{\xi}) = 1 + 1 \times \frac{\bar{\xi}^{1/1,25}}{2} \left[ 0,6352 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{(2-2/1,25)}}{(1/1,25)^2} (0,1025)^{2 \times 1,25 - 2}} + 1,3668 \sqrt{1 + \frac{\bar{\xi}^{(2-2/1,25)}}{(1/1,25)^2} (0,6811)^{2 \times 1,25 - 2}} \right]$$

Ou bien :

$$\gamma(\bar{\xi}) = 1 + 0,5 \bar{\xi}^{0,8} \left[ 0,6352 \sqrt{1 + 0,50024408 \bar{\xi}^{0,4}} + 1,3668 \sqrt{1 + 1,28951223 \bar{\xi}^{0,4}} \right] \tag{2.217}$$

En tenant compte des relations (2.216) et (2.217), la relation (2.215) peut s'écrire :

$$\frac{\gamma(\bar{\xi})}{128 [\chi(\bar{\xi})]^6} Q^{*2} = 1 \tag{2.218}$$

La relation (2.218) peut être remplacée par le même type d'équation qui a été utilisée au cours des trois derniers chapitres, soit la relation de type polynomiale d'ordre six (06) :

$$\bar{\xi} = a_6 \Omega^6 + a_5 \Omega^5 + a_4 \Omega^4 + a_3 \Omega^3 + a_2 \Omega^2 + a_1 \Omega + a_0 \tag{2.219}$$

Avec :

$$\Omega = \log Q^* \tag{2.220}$$

Les paramètres d'ajustement de  $a_0$  à  $a_6$  sont regroupés dans le tableau 2.5.

**Tableau 2.5 :** Valeurs des paramètres d'ajustement de la relation (2.219)

pour  $\zeta = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $m = 1,25$ .

$a_6$	$a_5$	$a_4$	$a_3$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
$\frac{13}{27265}$	$\frac{13}{1838}$	$\frac{221}{4902}$	$\frac{251}{1524}$	$\frac{111}{292}$	$\frac{295}{546}$	$\frac{844}{2281}$

La relation proposée (2.219), est applicable dans l'intervalle de la conductivité relative :  $0,002355931 \leq Q^* \leq 4,98545834$  ainsi que pour la large gamme pratique du paramètre de forme  $\bar{\xi}$  des parties sous forme de loi puissance :  $0,007 \leq \bar{\xi} \leq 1$ .

La figure 2.17 illustre les écarts relatifs  $\Delta\bar{\xi}/\bar{\xi}$  occasionnés lorsque la relation approchée (2.219) est appliquée en remplacement de la relation implicite (2.218). Cette figure montre que l'écart relatif maximal est inférieur à 1,87 % seulement. Cet écart relatif se réduit à moins de 0,1 % lorsque :  $\bar{\xi} \geq 0,13$ .

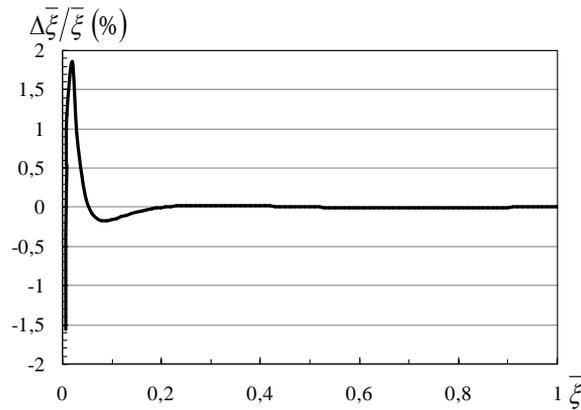


Figure 2.17 : Ecart relatif  $\Delta\bar{\xi}/\bar{\xi}$ .

En revanche, une fois le paramètre de forme des parties en loi puissance du modèle rugueux  $\bar{\xi}$  est atteint, la valeur de la profondeur relative du modèle rugueux  $\bar{\eta}$  est simplement déduite en se référant à la relation (2.200), soit :

$$\bar{\eta} = \bar{\xi}/\beta \tag{2.221}$$

De même pour le canal réel, soit :

$$\eta = \xi/\beta \tag{2.222}$$

Les relations (2.40) et (2.41) sont alors reproduites.

### III.2. Etapes de calcul de la profondeur normale

Afin de calculer la profondeur normale  $y_n$ , la hauteur totale du canal  $H$  ainsi que la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  pour un canal à parois en loi puissance avec fond horizontal, un organigramme (Figure 2.18) a été construit dont les données du problème sont : le débit  $Q$ , la pente longitudinale  $i$  du lit du canal, la largeur du fond  $b$ , la rugosité absolue  $\varepsilon$  et la viscosité cinématique du liquide en écoulement  $\nu$ . Notons que tous ces paramètres peuvent être récoltés en pratique. Cet organigramme est applicable aux conditions suivantes :  $\zeta = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $m = 1,25$ . De ce fait, la hauteur totale du canal  $H$  est simplement déduite à partir de la relation (2.200) telle que :

$$H = \frac{b}{\beta} \quad (2.223)$$

En outre, pour le traçage de la section du canal, le paramètre de forme  $k$  s'exprime en se basant sur la relation (2.204), soit :

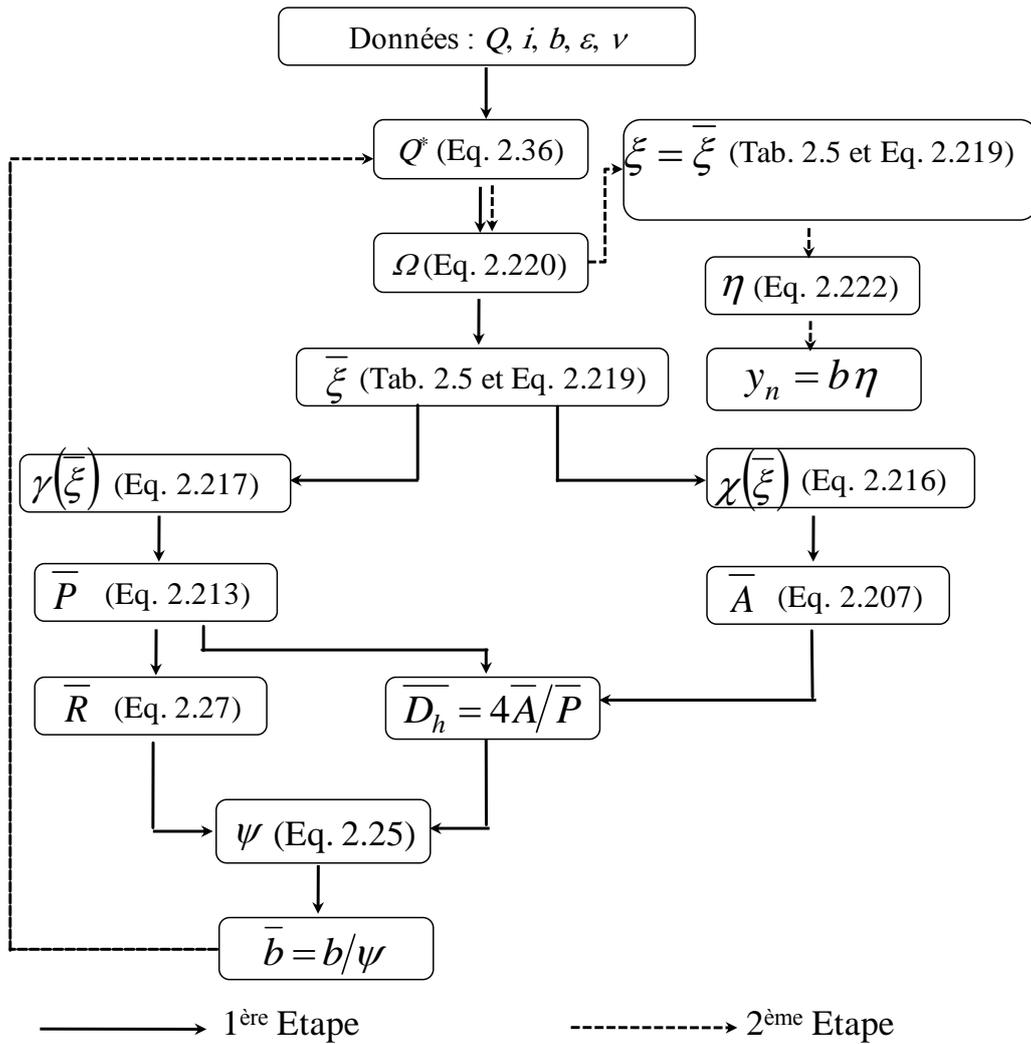
$$k = \frac{H^{1-m}}{\zeta^m} \quad (2.224)$$

Lorsqu'il s'agit d'un canal en terre, la pente maximale  $1/z$  ( $z$  minimal) de la tangente au point le plus haut de la paroi du canal (point  $a_1$  de la figure 2.15) doit être calculée afin de la comparer avec celle caractérisant le sol pour vérifier la stabilité mécanique des parois (angle de frottement interne ou bien angle de repos). Alor le paramètre  $z$  peut être tiré à partir des relations (1.132) et (2.204), soit :

$$z = \frac{\zeta}{m} \quad (2.225)$$

D'où, l'organigramme de la figure 2.18 est réservé exclusivement au calcul de la profondeur normale de l'écoulement  $y_n$ .

Notons qu'après avoir calculé le paramètre de forme  $\xi$ , la largeur horizontale des parties en loi puissance peut être déduite à partir de la relation (2.198).



**Figure 2.18** : Récapitulation de la méthode de calcul de la profondeur normale pour :  $\zeta = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $m = 1,25$ .

Notons que lorsqu’il s’agit d’un canal sans fond horizontal, on doit mettre  $b = 0$  et on refait le développement par la même méthodologie suivie ci-dessus.

### III.3. Exemple d’application 2.12

Pour éclaircir la procédure de calcul résumée dans l’organigramme de la figure 2.18, l’exemple d’application ci-dessous est proposé.

Il s’agit alors de calculer la profondeur normale de l’écoulement  $y_n$ , la hauteur totale du canal  $H$  ainsi que la largeur horizontale des parties en courbe  $a$  pour un canal à parois elliptiques avec fond horizontal sachant que :  $Q = 15 \text{ m}^3/\text{s}$ ,  $b = 6 \text{ m}$ ,  $i = 5.10^{-4}$ ,  $\zeta = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $m = 1,25$ ,  $\varepsilon = 10^{-3} \text{ m}$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .

Les paramètres  $k$  et  $z$  sont à déterminer également.

1. La conductivité relative  $Q^*$  est donnée par la relation (2.36), soit :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} = \frac{15}{\sqrt{9,81 \times 5.10^{-4} \times 6^5}} = 2,42881047$$

Donc :  $0,002355931 \leq Q^* = 2,428810475 \leq 4,98545834$ . En plus,  $\zeta = 1$ ,  $\beta = 2$  et  $m = 1,25$ , alors la méthode récapitulée dans le paragraphe III.2. est applicable.

2. La hauteur totale du canal  $H$ , le paramètre de forme  $k$  et le paramètre  $z$  peuvent être calculés par les relations (2.223), (2.224) et (2.225), soit :

$$H = \frac{b}{\beta} = \frac{6}{2} = 3 \text{ m}$$

$$k = \frac{H^{1-m}}{\zeta^m} = \frac{3^{1-1,25}}{1^{1,25}} = 0,75983569 \text{ m}^{1-m}$$

$$z = \frac{\zeta}{m} = \frac{1}{1,25} = 0,8$$

3. En utilisant la relation (2.220), le paramètre  $\Omega$  est alors :

$$\Omega = \log Q^* = \log(2,42881047) = 0,38539363$$

4. En se référant à la relation (2.219) et au tableau 2.5, le paramètre de forme des parties en loi puissance du modèle rugueux  $\bar{\xi}$  est déterminé comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= a_6 \Omega^6 + a_5 \Omega^5 + a_4 \Omega^4 + a_3 \Omega^3 + a_2 \Omega^2 + a_1 \Omega + a_0 \\ &= \frac{13}{27265} \times (0,38539363)^6 + \frac{13}{1838} \times (0,38539363)^5 + \frac{221}{4902} \times (0,38539363)^4 + \frac{251}{1524} \times (0,38539363)^3 \\ &+ \frac{111}{292} \times (0,38539363)^2 + \frac{295}{546} \times (0,38539363) + \frac{844}{2281} = 0,64518362 \end{aligned}$$

5. Les fonctions  $\chi(\bar{\xi})$  et  $\gamma(\bar{\xi})$  sont données par les relations (2.216) et (2.217) respectivement, soit :

$$\chi(\bar{\xi}) = 0,5 \bar{\xi} \left( 1 + \frac{\bar{\xi}^{0,8}}{1,8} \right) = 0,5 \times 0,64518362 \times \left( 1 + \frac{0,64518362^{0,8}}{1,8} \right) = 0,44881162$$

$$\begin{aligned} \gamma(\bar{\xi}) &= 1 + 0,5 \bar{\xi}^{0,8} \left[ 0,6352 \sqrt{1 + 0,50024408 \bar{\xi}^{0,4}} + 1,3668 \sqrt{1 + 1,28951223 \bar{\xi}^{0,4}} \right] \\ &= 1 + 0,5 \times (0,64518362)^{0,8} \left[ 0,6352 \times \sqrt{1 + 0,50024408 \times (0,64518362)^{0,4}} \right. \\ &\quad \left. + 1,3668 \sqrt{1 + 1,28951223 \times (0,64518362)^{0,4}} \right] = 1,96104123 \end{aligned}$$

6. En se basant sur la relation (2.207), l'aire de la section mouillée du modèle rugueux  $\bar{A}$  est, en remplaçant  $\chi(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  par  $\chi(\bar{\xi})$ , telle que :

$$\bar{A} = b^2 \times \chi(\bar{\xi}) = (6)^2 \times 0,44881162 = 16,1572182 \text{ m}^2$$

7. La relation (2.213) est employée pour le calcul du périmètre mouillé du modèle rugueux  $\bar{P}$ , soit, en remplaçant  $\gamma(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$  par  $\gamma(\bar{\xi})$ :

$$\bar{P} = b \times \gamma(\bar{\xi}) = 6 \times 1,96104123 = 11,7662474 \text{ m}$$

8. Connaissant  $\bar{A}$  et  $\bar{P}$  le diamètre hydraulique  $\bar{D}_h$  est comme suit :

$$\bar{D}_h = \frac{4\bar{A}}{\bar{P}} = \frac{4 \times 16,1572182}{11,7662474} = 5,49273449 \text{ m}$$

9. Le nombre de *Reynolds* caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux  $\bar{R}$  est déterminé par la relation (2.27) tel que :

$$\bar{R} = \frac{4Q}{Pv} = \frac{4 \times 15}{11,7662474 \times 10^{-6}} = 5099331,86$$

10. En se référant à la relation (2.25), le facteur de correction des dimensions linéaires  $\psi$  est explicitement déterminé comme suit :

$$\begin{aligned} \psi &= 1,35 \left[ -\log \left( \frac{\varepsilon / \bar{D}_h}{4,75} + \frac{8,5}{\bar{R}} \right) \right]^{-2/5} \\ &= 1,35 \times \left[ -\log \left( \frac{10^{-3} / 5,49273449}{4,75} + \frac{8,5}{5099331,86} \right) \right]^{-2/5} = 0,74650362 \end{aligned}$$

11. En accord avec la relation fondamentale de la méthode MMR (2.24 :  $L = \psi \bar{L}$ ), on donne au modèle rugueux de référence la valeur suivante :

$$\bar{b} = b / \psi = 6 / 0,74650362 = 8,03746944 \text{ m}$$

Il convient de noter qu'en attribuant au modèle rugueux la nouvelle dimension linéaire  $b/\psi$ , le paramètre de forme des parties en loi puissance du canal réel (étudié) est égal à celui du modèle rugueux, c'est-à-dire :  $\xi = \bar{\xi}$ . De ce fait, la valeur correspondante de la conductivité relative  $Q^*$  est, selon la relation (2.36) :

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gib^5}} = \frac{15}{\sqrt{9,81 \times 5 \cdot 10^{-4} \times 8,03746944^5}} = 1,16942781$$

Donc :  $0,002355931 \leq Q^* = 1,16942781 \leq 4,98545834$ , alors la méthode récapitulée dans la figure 2.18 est toujours applicable.

12. Selon la relation (2.220), la nouvelle valeur du paramètre  $\Omega$  est telle que :

$$\Omega = \log Q^* = \log(1,16942781) = 0,06797342$$

13. En utilisant les mêmes valeurs pour les coefficients  $a_0$  à  $a_6$  considérés au cours de l'étape 4, la relation (2.219) permet de déterminer le taux de remplissage des parties en loi puissance du canal réel  $\xi$  tel que :

$$\begin{aligned}\xi &= \bar{\xi} = a_6 \Omega^6 + a_5 \Omega^5 + a_4 \Omega^4 + a_3 \Omega^3 + a_2 \Omega^2 + a_1 \Omega + a_0 \\ &= \frac{13}{27265} \times (0,06797342)^6 + \frac{13}{1838} \times (0,06797342)^5 + \frac{221}{4902} \times (0,06797342)^4 + \frac{251}{1524} \times (0,06797342)^3 \\ &+ \frac{111}{292} \times (0,06797342)^2 + \frac{295}{546} \times (0,06797342) + \frac{844}{2281} = 0,40854779\end{aligned}$$

Selon la relation (2.222), on peut déduire la valeur de la profondeur normale relative du canal réel (étudié) somme suit :

$$\eta = \xi / \beta = 0,40854779 / 2 = 0,2042739$$

14. Finalement, la profondeur normale recherchée est alors :

$$y_n = b \eta = 6 \times 0,2042739 = 1,22564338 \approx 1,23 \text{ m}$$

15. La largeur horizontale des parties en loi puissance est déduite à partir de la relation (2.198) telle que :

$$a = m z H \xi^{1/m} = 1,25 \times 0,8 \times 3 \times (0,40854779)^{1/1,25} = 1,46593782 \text{ m} \approx 1,47 \text{ m}$$

16. Le but de cette étape est de valider le calcul précédent. Pour cela, calculons la pente longitudinale du canal en utilisant la relation de *Darcy – Weisbach* exprimée par l'équation (2.1). Si les calculs effectués précédemment sont corrects, la pente qui sera ainsi calculée devrait être égale à la pente donnée dans l'énoncé du problème.

La méthode du modèle rugueux montre que le coefficient de frottement  $f$  et le facteur de correction adimensionnel des dimensions linéaires  $\psi$  sont liés par la relation suivante (*Achour, 2007*) :

$$f = \psi^5 / 16$$

Ainsi :

$$f = 0,74650362^5 / 16 = 0,01448904$$

En outre, les fonctions  $\chi(\xi)$  et  $\gamma(\xi)$  sont déterminées, respectivement, selon les relations (2.216) et (2.217) en remplaçant  $\bar{\xi}$  par  $\xi$ , soit :

$$\chi(\xi) = 0,5 \xi \left( 1 + \frac{\xi^{0,8}}{1,8} \right) = 0,5 \times 0,40854779 \times \left( 1 + \frac{0,40854779^{0,8}}{1,8} \right) = 0,25972813$$

$$\begin{aligned}\gamma(\xi) &= 1 + 0,5 \xi^{0,8} \left[ 0,6352 \sqrt{1 + 0,50024408 \xi^{0,4}} + 1,3668 \sqrt{1 + 1,28951223 \xi^{0,4}} \right] \\ &= 1 + 0,5 \times (0,40854779)^{0,8} \left[ 0,6352 \times \sqrt{1 + 0,50024408 \times (0,40854779)^{0,4}} \right. \\ &\quad \left. + 1,3668 \sqrt{1 + 1,28951223 \times (0,40854779)^{0,4}} \right] = 1,64077438\end{aligned}$$

De même, l'aire de la section mouillée  $A$  ainsi que le périmètre mouillé  $P$  du canal étudié (réel) peuvent être déduits à partir des relations (2.207) et (2.213), respectivement, tels que :

$$A = b^2 \times \chi(\xi) = (6)^2 \times 0,25972813 = 9,3502125 \text{ m}^2$$

Et :

$$P = b \times \gamma(\xi) = 6 \times 1,64077438 = 9,84464627 \text{ m}$$

Pour les valeurs ainsi calculées de  $A$  et  $P$ , le diamètre hydraulique  $D_h$  est alors :

$$D_h = 4A/P = 4 \times 9,3502125 / 9,84464627 = 3,79910552 \text{ m}$$

Finalement, la pente longitudinale du canal  $i$  est calculée selon la relation (2.1) telle que :

$$i = \frac{f}{D_h} \frac{Q^2}{2gA^2} = \frac{0,01448904}{3,79910552} \times \frac{15^2}{2 \times 9,81 \times 9,3502125^2} = 0,00050026 \approx 5.10^{-4}$$

Il est ainsi clairement démontré que la pente longitudinale calculée est pratiquement égale à la pente donnée dans l'énoncé du problème ( $\Delta i/i = 0,053 \%$ ), ce qui permet de conclure à la fiabilité de la méthode préconisée.

#### **IV. Conclusion**

Ce dernier chapitre de notre thèse a eu pour objet de contribuer à l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal à paroi en loi puissance avec fond horizontal. Cette forme a été inspirée de celle proposée par *Vatankhah* (2014) qui a étudié un canal à parois en loi puissance sans fond horizontal. L'aire de la section mouillée ainsi que le périmètre mouillé ont été alors exprimés en se basant sur les relations de *Vatankhah* (2014) tout en tenant compte de la partie rectangulaire intermédiaire du canal (Figure 2.15). Les relations de ces caractéristiques géométriques ainsi obtenues ont été adaptées à chaque cas d'étude. En effet, à travers le premier cas, une approche théorique a été développée afin de répondre à un besoin de dimensionnement. Les caractéristiques géométriques et hydrauliques du modèle rugueux ont été d'abord définies. Puis à travers le facteur de correction des dimensions linéaires, la largeur du fond du canal a été clairement définie. En se basant sur le paramètre de forme adéquat, la profondeur normale de l'écoulement ainsi que la hauteur totale du canal ont été exprimées respectivement. Par suite, la largeur des parties en courbe a été définie en fonction des différents paramètres nécessaires. En outre, le paramètre  $k$  permettant le traçage de la forme des parois du canal a été exprimé à partir d'une relation de *Vatankhah* (2014).

En ce qui concerne le deuxième cas d'étude, le calcul de la profondeur normale de l'écoulement a été l'objectif principal. Le modèle rugueux du premier cas a été gardé dont les fonctions géométriques ont été modifiées pour s'adapter au cas d'étude considéré. Une relation implicite au calcul du paramètre de forme des parties en loi puissance du modèle rugueux a été obtenue dont la façon de

sa résolution a été discutée. En outre, vu la complexité du problème un cas particulier simple a été, par la suite, étudié menant ainsi à exprimer explicitement le paramètre forme des parties en loi puissance du modèle rugueux dont les conditions d'application ont été clairement définies. Pour ce cas particulier, la hauteur totale du canal  $H$ , le paramètre de forme  $k$  ainsi que le paramètre  $z$  lié à l'inclinaison maximale des parois ont été exprimés explicitement. En revanche, le développement des caractéristiques géométriques et hydrauliques du modèle rugueux a abouti à définir respectivement le paramètres de forme des parties en loi puissance ainsi que celui de la partie rectangulaire du canal réel. Par suite, la profondeur normale de l'écoulement a été définie en fonction du paramètre de forme de la partie rectangulaire et de la largeur de fond du canal considérée dans ce cas comme une donnée du problème. La largeur horizontale des parties en loi puissance a été également définie par la même relation que pour le premier cas d'étude.

Notons que les deux approches théoriques proposées ont été développées en se basant sur la méthode MMR.

Enfin, deux exemples d'application ont été présentés dont on a conclu à l'efficacité et à la validité des deux approches théoriques proposées.

**CONCLUSION**  
**DE LA DEUXIEME PARTIE**

## CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE

La seconde et dernière partie de notre thèse a eu pour objectif la contribution à l'étude de l'écoulement uniforme dans les canaux ouverts à parois en courbe. Pour cela, quatre chapitres ont été élaborés pour essayer de couvrir une partie des cas pratiques de cette catégorie des canaux. Ces chapitres ont été organisés comme suit :

- i.* Ecoulement uniforme dans un canal à parois circulaires et à fond horizontal.
- ii.* Ecoulement uniforme dans un canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal.
- iii.* Ecoulement uniforme dans un canal à parois elliptiques et à fond horizontal.
- iv.* Ecoulement uniforme dans un canal à parois sous forme de loi puissance et à fond horizontal.

En effet, la méthode MMR a été appliquée avec succès pour l'étude de l'écoulement uniforme dans les quatre types des canaux considérés menant à proposer, pour les deux premiers chapitres, plusieurs approches théoriques répondant aux divers catégories du problème pouvant être rencontrées dans la pratique de l'ingénieur hydraulicien, à savoir : Dimensionnement des canaux, calcul de la profondeur normale de l'écoulement, détermination du débit volume, détermination de la vitesse moyenne de l'écoulement, calcul du nombre de *Reynolds* et calcul du coefficient de frottement. Cependant, pour les deux derniers chapitres, on a contenté d'étudier uniquement le problème de dimensionnement du canal et le problème de calcul de la profondeur normale de l'écoulement.

Notons qu'en ce qui concerne les deux premiers chapitres, le régime critique à été étudié en se basant sur la formule du nombre de *Froude*.

Les particularités des canaux choisis ainsi que les conditions d'application de chaque solution approchée développée ont été clairement définies.

Enfin, plusieurs exemples d'application ont été proposés pour les deux objectifs suivants :

- i.* Aider l'utilisateur à l'emploi correct des différentes approches théoriques proposées.
- ii.* Valider les différentes procédures exposées.

# **CONCLUSION GENERALE**

## CONCLUSION GENERALE

Cette thèse a eu pour objectif l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal ouverts à parois en courbe et à fond horizontal. Cette grande catégorie de canaux, d'intérêt pratique important, peut se rencontrer sous deux configurations principales : *i.* Canaux elliptiques et semi-elliptiques et *ii.* Canaux à parois en loi puissance. Configurations pour l'une et/ou l'autre, plusieurs formes spécifiques peuvent se dériver telles que la forme : semi-circulaire, à parois circulaire avec fond horizontal, rectangulaire, triangulaire, trapézoïdale, parabolique, etc.

En revanche, pour l'étude de l'écoulement uniforme dans un canal donné, le choix de l'équation de résistance est tributaire principalement au type du canal, parois rugueuses ou non, et à la manière de traiter le coefficient de résistance de l'écoulement par l'ingénieur hydraulicien, variable ou constant. De ce fait, en ce qui concerne notre thèse, l'écoulement uniforme a été analysé dans quatre types de canaux à parois en courbe avec fond horizontal en se basant sur la méthode MMR qui est appliquée à l'ensemble du régime de l'écoulement turbulent comportant le domaine lisse, de transition et turbulent rugueux. Cette méthode utilise la rugosité absolue des parois interne du canal au lieu du coefficient de résistance de l'écoulement de *Chézy* ou de *Manning* qui présentent l'inconvénient de dépendre du paramètre recherché.

L'organisation de cette thèse a nécessité alors deux grandes parties dont la première partie a comporté deux chapitres à savoir :

- i.* Chapitre I : Notions sur l'écoulement uniforme.
- ii.* Chapitre II : Présentation de quelques travaux récents.

En ce qui concerne la seconde partie de la thèse, quatre chapitres ont été suggérés pour traiter l'écoulement uniforme dans les types de canaux ouverts suivants :

- i.* Canal à parois circulaires et à fond horizontal.
- ii.* Canal à parois semi-elliptiques et à fond horizontal.
- iii.* Canal à parois elliptiques et à fond horizontal.
- iv.* Canal à parois en loi puissance et à fond horizontal.

Les résultats obtenus ont répondu à tous les objectifs fixés d'une manière très satisfaisante, en effet beaucoup d'approches et procédures théoriques ont été proposées, testées avec succès et validées de façon objective. D'une manière générale, le fruit des différentes études effectuées à travers cette thèse peut être résumé comme suit :

- i.* Pour les deux premiers chapitres, traitants les canaux à parois circulaires avec fond horizontal et les canaux à parois semi-elliptiques et à fond horizontal, des méthodes directes ont été proposées pour la détermination : des dimensions du canal, de la profondeur normale de l'écoulement, du débit volume, de la vitesse moyenne de l'écoulement, du nombre de *Reynolds* et du coefficient de frottement. La méthode de base utilisée est la méthode MMR.
- ii.* Pour les deux premiers chapitres, le régime critique a été étudié en se basant sur la formule du nombre de *Froude*.
- iii.* Pour les deux derniers chapitres, traitants les canaux à parois elliptiques avec fond horizontal et les canaux à parois en loi puissance et à fond horizontal, des méthodes directes ont été proposées pour la détermination : des dimensions du canal et de la profondeur normale de l'écoulement. La méthode de base utilisée est la méthode MMR.

Les conditions d'application et les particularités relatives à certains canaux et à certains paramètres étudiés ont été clairement indiquées.

En plus de toutes les méthodes qui ont été proposées dans cette thèse, les résultats ainsi obtenus nous amènent à suggérer certains critères de choix du type du canal approprié tout en tenant compte de ceux déjà indiqués dans la littérature, soit :

- i.* Les canaux à parois circulaires avec fond horizontal conviennent pour les canaux artificiels de faible largeur de fond lorsqu'on cherche à minimiser le périmètre mouillé.
- ii.* Les canaux à parois semi-elliptiques avec fond horizontal de faible largeur peuvent être recommandés pour les canaux artificiels en bétons pour les réseaux d'irrigation tertiaires lorsqu'on veut augmenter légèrement la capacité d'évacuation du canal par rapport aux canaux semi-elliptiques sans fond horizontal.
- iii.* Les canaux à parois elliptiques avec un fond horizontal sont à conseiller pour les canaux en terre, car les parois ont une forme d'un arc d'ellipse où la tangente au point le plus haut présente un angle d'inclinaison par rapport à l'horizontal inférieur à  $90^\circ$ . Cet angle d'inclinaison favorise la stabilité des berges du canal s'il est inférieur à l'angle de frottement interne (angle de repos du sol).
- iv.* Les canaux à parois en loi puissance avec fond horizontal présentent (catégorie :  $1 < m < 2$ ) les mêmes avantages que ceux des canaux à parois elliptiques avec fond horizontal.

Enfin, pour la bonne connaissance et maîtrise de l'écoulement uniforme dans les canaux à parois en courbe et à fond horizontal, on peut suggérer les recommandations suivantes :

- i.* Généraliser les relations approchées destinées au calcul de la profondeur normale de l'écoulement pour les quatre types de canaux étudiés dans cette thèse en utilisant des méthodes numériques très puissantes comme la méthode de  $\delta$ -perturbation. Le recours aux modèles basés sur l'intelligence artificielle est fortement conseillé pour résoudre ce type de problème et essayer d'obtenir des formulations mathématiques permettant le calcul explicite de la profondeur normale avec exactement la même précision que celle donnée par les relations implicites développées à partir des équations de résistance de l'écoulement.
- ii.* Entamer une étude particulière pour définir la notion de faible largeur par une équation pratique.
- iii.* Rechercher des éventuels d'autres avantages afin de convaincre et attirer les décideurs à adopter les formes des canaux étudiées au cours de cette thèse.
- iv.* Compléter les études pour exprimer le débit volume, la vitesse moyenne de l'écoulement, le nombre de *Reynolds*, le coefficient de frottement ainsi que la profondeur critique dans les canaux à parois elliptiques avec fond horizontal et les canaux en loi puissance avec fond horizontal.
- v.* Essayer de trouver un moyen pour l'application de la méthode MMR à l'écoulement critique.

# **PRINCIPALES NOTATIONS**

## PRINCIPALES NOTATIONS

Notation	Nomenclature des notations	Unité
$A$	Aire de la section mouillée	$m^2$
$\bar{A}$	Aire de la section mouillée du modèle rugueux	$m^2$
$a$	Demi-largeur horizontale maximale du canal semi-elliptique de <i>Vatankhah</i> (2015)  Largeur horizontale des parties en courbe pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme : semi-elliptique, elliptique et en loi puissance	$m$
$\bar{a}$	Largeur horizontale des parties en courbe pour le modèle rugueux d'un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme : semi-elliptique, elliptique et en loi puissance	$m$
$a_0$ à $a_6$	Paramètres d'ajustement pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme : circulaire, semi-elliptique, elliptique et en loi puissance	-
$A_c$	Aire de la section mouillée critique	$m^2$
$a_c$	Largeur horizontale des parties en courbe d'un canal à fond horizontal et à parois semi-elliptiques à l'état critique	$m$
$B$	Largeur horizontale maximale des parois du canal à parois elliptiques et à fond horizontal selon <i>Easa et Vatankhah</i> (2014)	$m$

	Largeur d'un canal rectangulaire	
	Largeur de fond d'un canal trapézoïdal	
$b$	Hauteur totale du canal semi-elliptique selon <i>Vatankhah</i> (2015)	$m$
	Largeur de fond d'un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme : circulaire, semi-elliptique, elliptique et en loi puissance	
	Largeur de fond du modèle rugueux pour un canal trapézoïdal	
$\bar{b}$	Largeur de fond du modèle rugueux pour un canal à fond horizontal et à parois de forme : circulaires, semi-elliptique, elliptique et en loi puissance	$m$
$B_0, Y_0$	Demi-axes de l'ellipse formant les parois elliptiques selon <i>Easa et Vatankhah</i> (2014)	$m$
$\bar{B}_0, \bar{Y}_0$	Demi-axes de l'ellipse formant les parois elliptiques du modèle rugueux	$m$
$b_c$	Largeur de fond à l'état critique pour un canal à fond horizontal et à parois de forme : circulaire et semi-elliptique	$m$
$C$	Coefficient de <i>Chézy</i>	$m^{1/2}/s$
$D$	Diamètre des parties circulaires d'un canal à fond horizontal et à parois circulaires	$m$
$\bar{D}$	Diamètre des parties circulaires du modèle rugueux d'un canal à fond horizontal et à parois circulaires	$m$
$d$	Profondeur de l'écoulement selon <i>Easa et</i>	$m$

<i>Vatankhah (2014)</i>		
$D_c$	Diamètre à l'état critique des parties circulaires d'un canal à fond horizontal et à parois circulaires	$m$
$D_h$	Diamètre hydraulique	$m$
$\overline{D}_h$	Diamètre hydraulique du modèle rugueux	$m$
$dv/dy$	Gradient de vitesse	$(m/s)/m$
$f$	Coefficient de frottement	-
$\overline{f}$	Coefficient de frottement caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux	-
$F_r$	Force totale de résistance à l'écoulement Nombre de <i>Froude</i>	$N$ -
$F(\delta, m)$	Fonction de $\delta$ et $m$ pour un canal à parois en loi puissance selon <i>Vatankhah (2014)</i>	-
$F_*(\eta, k)$	Fonction de $\eta$ et $k$ pour un canal semi-elliptique selon <i>Vatankhah (2015)</i>	-
$F(\xi, \zeta)$	Fonction de $\xi$ et $\zeta$ pour un canal à fond horizontal et à parois semi-elliptique	-
$F(\overline{\xi}, \zeta)$	Fonction de $\overline{\xi}$ et $\zeta$ pour un canal à fond horizontal et à parois semi-elliptique	-
$g$	Accélération de la pesanteur	$m/s^2$
$GVF$	Gradually varied flow = Ecoulement graduellement varié	-
$GVUF$	Gradually varied unsteady flow = Ecoulement non permanent graduellement varié	-

$H$	Hauteur totale du canal à parois en loi puissance selon <i>Vatankhah</i> (2014)	$m$
	Hauteur totale d'un canal à fond horizontal et à parois en loi puissance	
$\bar{H}$	Hauteur totale du modèle rugueux d'un canal à fond horizontal et à parois en loi puissance	$m$
	Profondeur maximale de l'écoulement	
$h$	Hauteur totale du canal à fond horizontal et à parois semi-elliptiques	$m$
$\bar{h}$	Hauteur totale du modèle rugueux d'un canal à fond horizontal et à parois semi-elliptiques	$m$
	Profondeur critique	
$h_c$	Hauteur totale du canal à fond horizontal et à parois semi-elliptiques à l'état critique	$m$
$H_h$	Profondeur hydraulique	$m$
$h_n$	Profondeur normale de l'écoulement selon <i>Vatankhah</i> (2015)	$m$
$i$	Pente longitudinale d'un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme : circulaire, semi-elliptique, elliptique et en loi puissance	-
$\bar{i}$	Pente longitudinale du modèle rugueux	-
$J$	Gradient de la perte de charge linéaire ou bien pente de la ligne de charge ou d'énergie	-
$J_c$	Pente critique	-
$J_s$	Pente géométrique d'un canal	-

<b>K</b>	Facteur de proportionnalité entre $F_r/(PL)$ et $V^2$	-
	Facteur de proportionnalité entre $l$ et $y$	-
<b>k</b>	Coefficient de <i>Strickler</i>	$m^{1/3}/s$
	Facteur de forme pour le canal semi-elliptique de <i>Vatankhah</i> (2015)	-
<b>k</b>	Coefficient de vitesse : $v_{moy} = kv_s$	-
<b>L</b>	Longueur du canal	$m$
	Dimension linéaire d'une conduite ou d'un canal	$m$
$\bar{L}$	Dimension linéaire d'un modèle rugueux	$m$
$l$	Longueur de mélange	$m$
<b>Ln</b>	Logarithme népérien	-
<b>Log</b>	Logarithme décimal	-
<b>M et Z</b>	Paramètres adimensionnels pour un canal trapézoïdal	-
<b>m</b>	Coefficient de <i>Bazin</i>	$m^{1/2}$
	Fruit (inverse de la pente) des parois latérales d'un canal trapézoïdal	-
	Fruit (inverse de la pente) de la tangente au point le plus haut de la paroi elliptique d'un canal à fond horizontal et à parois elliptiques.	-
<b>m, k</b>	Paramètres de forme d'un canal à parois en loi puissance selon <i>Vatankhah</i> (2014)	-, mètre <sup>1-m</sup>
<b>n</b>	Coefficients de <i>Kutter</i> et de <i>Manning</i>	$m^{-1/3}.s$
<b>P</b>	Périmètre mouillé	$m$

$\bar{P}$	Périmètre mouillé du modèle rugueux	$m$
$Q$	Débit volume	$m^3/s$
$\bar{Q}$	Débit volume du modèle rugueux	$m^3/s$
	Conductivité relative pour un canal trapézoïdal	
$Q^*$	Conductivité relative pour un canal un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme : circulaire, semi-elliptique, elliptique et en loi puissance	-
$R$	Nombre de <i>Reynolds</i>	-
$\bar{R}, R^*$	Nombre de <i>Reynolds</i> caractérisant l'écoulement dans le modèle rugueux	-
$R_h$	Rayon hydraulique	$m$
$RVF$	Rapidly varied flow = Ecoulement rapidement varié ou brusquement varié	-
$RVUF$	Rapidly varied unsteady flow = Ecoulement non permanent rapidement varié ou brusquement varié	-
$SVF$	Spatially varied flow = Ecoulement spatialement varié	-
$SVUF$	Spatially varied unsteady flow = Ecoulement non permanent spatialement varié	-
$S_w$	Pente de la surface libre	-
$S_0$	Pente longitudinale du canal	-
$T$	Largeur superficielle ou largeur du plan d'eau	$m$
$T_f$	Largeur maximale du canal à parois elliptiques et	$m$

	à fond horizontal selon <i>Easa et Vatankhah</i> (2014)	
$T_c$	Largeur du plan d'eau à l'état critique	$m$
$Y$	Hauteur totale du canal à parois elliptiques avec fond horizontal selon <i>Easa et Vatankhah</i> (2014)	$m$
$\bar{Y}$	Hauteur totale du modèle rugueux d'un canal à parois elliptiques avec fond horizontal	$m$
	Exposant de la formule de <i>Pavlovski</i>	-
$y$	Hauteur par rapport à une paroi solide et normale à celle-ci	$m$
	Profondeur normale de l'écoulement selon <i>Vatankhah</i> (2014)	$m$
$y, h$	Profondeur maximale de l'écoulement	$m$
	Constante d'intégration	-
$y_0$	Profondeur de l'écoulement	$m$
$y_c$	Profondeur critique	$m$
$y_n$	Profondeur normale de l'écoulement	$m$
$\bar{y}_n$	Profondeur normale de l'écoulement dans le modèle rugueux	$m$
$V, v_{moy}$	Vitesse moyenne de l'écoulement	$m/s$
$\mathbf{v}, \mathbf{V}$	Vitesse dans un écoulement turbulent	$m/s$
$\bar{V}$	Vitesse moyenne de l'écoulement dans le modèle rugueux	$m/s$
$V_f$	Vitesse de frottement	$m/s$

$V_{ms}$	Vitesse maximale à la surface	$m/s$
$v_s$	Vitesse au niveau de la surface libre de l'écoulement	$m/s$
$W$	Poids propre du liquide	$N$
$w$	Largeur du fond du canal à parois elliptiques et à fond horizontal selon <i>Easa et Vatankhah</i> (2014)	$m$
$Z, M$	Paramètres adimensionnels pour un canal trapézoïdal	-
$Z, Y, K$ et $\Omega$	Paramètre adimensionnel pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme : circulaire, semi-elliptique, elliptique et en loi puissance respectivement	-
$z$	Fruit ou inverse de la pente de la tangente au point le plus haut de la paroi en loi puissance selon <i>Vatankhah</i> (2014)	-
$Z_m$	Fruit ou inverse de la pente de la tangente au point le plus haut de la paroi elliptique selon <i>Easa et Vatankhah</i> (2014)	-
$\alpha$	Facteur de correction de l'énergie cinétique	-
$\beta$	Débit adimensionnel selon <i>Amara et Achour</i> (2023)	-
$\beta, \gamma$	Exposants de la formule de la vitesse moyenne de l'écoulement	-
$\delta$	Paramètre de perturbation	-
	Paramètre adimensionnel de <i>Vatankhah</i> (2014)	-
$\bar{\delta}$	Paramètre adimensionnel pour un canal à fond	-

	horizontal et à parois en loi puissance	
$\Delta H$	Perte de charge	$m$
$\Delta p$	Différence de pression	$N/m^2$
$\Delta \bar{\xi} / \bar{\xi}$	Ecart relatif	%
$\varepsilon$	Rugosité absolue des parois internes d'un canal	$mm$
	Paramètre adimensionnel de <i>Vatankhah</i> (2014)	-
$\frac{-}{\varepsilon}$	Rugosité absolue des parois internes du modèle rugueux	$mm$
$\varepsilon_c$	Débit adimensionnel ou débit relatif de l'écoulement critique selon <i>Vatankhah</i> (2015)	-
$\varepsilon_n$	Débit adimensionnelle ou débit relatif de l'écoulement normal selon <i>Vatankhah</i> (2015)	-
$\Gamma(x)$	Fonction <i>Gamma</i>	-
$\gamma(\eta, \xi), \chi(\xi, \eta)$	Fonctions de $\eta$ et $\xi$ pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe en loi puissance	-
$\gamma(\bar{\eta}, \bar{\xi}), \chi(\bar{\eta}, \bar{\xi})$	Fonctions de $\bar{\eta}$ et $\bar{\xi}$ pour un canal à fond horizontal et à parois en loi puissance	-
$\gamma(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta), \chi(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta)$	Fonctions de $\bar{\eta}$ , $\bar{\xi}$ et $\zeta$ pour un canal à fond horizontal et à parois en loi puissance	-
$\gamma(\bar{\xi}, \zeta, \beta), \chi(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$	Fonctions de $\bar{\xi}$ , $\zeta$ et $\beta$ pour un canal à fond horizontal et à parois en loi puissance	-
$\eta$	Paramètre de forme ou profondeur relative pour une section rectangulaire et trapézoïdale	-
	Paramètre de forme pour le canal semi-elliptique	-

	selon <i>Vatankhah</i> (2015)	
	Profondeur normale relative pour le canal à parois en loi puissance selon <i>Vatankhah</i> (2014)	
$\bar{\eta}$	Paramètre de forme ou profondeur relative pour un modèle rugueux de section trapézoïdale	-
$\eta, \xi, \beta$	Paramètre de forme des canaux à fond horizontal et à parois en courbe de forme : circulaire, semi-elliptique, elliptique et en loi puissance	-
$\bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{\beta}$	Paramètres de forme du modèle rugueux d'un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme : circulaire, semi-elliptique, elliptique et en loi puissance	-
$\eta_c, \xi_c$	Paramètres de forme critiques des canaux à fond horizontal et à parois en courbe de forme : circulaire et semi-elliptique	-
$\eta_c$	Paramètre de forme critique ou profondeur critique relative	-
$\eta_n$	Paramètre de forme ou profondeur normale relative selon <i>Vatankhah</i> (2015)	-
$\Lambda$	Paramètre adimensionnel pour un canal trapézoïdal	-
$\mu$	Viscosité dynamique	$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$
$\nu$	Viscosité cinématique d'un liquide en écoulement	$m^2/s$
$\bar{\nu}$	Viscosité cinématique du liquide dans le modèle rugueux	$m^2/s$
$\theta$	Angle d'inclinaison d'un canal par rapport à	(°)

	l'horizontale	
	Demi-angle au centre des parties circulaires pour un canal à fond horizontal et à parois circulaires	
$\rho$	Masse volumique du liquide	$kg/m^3$
$\rho(\eta_c, \xi_c, \zeta_c), \varphi(\eta_c, \xi_c, \zeta_c)$	Fonctions de $\eta_c, \xi_c$ et $\zeta_c$ pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme semi-elliptique à l'état critique	-
$\sigma(\eta, \xi, \zeta), \varphi(\eta, \xi, \zeta)$	Fonctions de $\eta, \xi$ et $\zeta$ pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme semi-elliptique	-
$\sigma(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta), \varphi(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta)$	Fonctions de $\bar{\eta}, \bar{\xi}$ et $\zeta$ pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme semi-elliptique	-
$\sigma(\bar{\xi}, \zeta, \beta), \varphi(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$	Fonctions de $\bar{\xi}, \zeta$ et $\beta$ pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme semi-elliptique	-
$\sigma(\xi), \varphi(\xi)$	Fonctions de $\xi$ pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme circulaire	-
$\sigma(\xi_c), \varphi(\xi_c)$	Fonctions de $\xi_c$ pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme circulaires	-
$\tau$	Contrainte de cisaillement ou tangentielle	$N/m^2$
$\tau(\xi_c, \eta_c), \rho(\xi_c, \eta_c)$	Fonctions de $\xi_c$ et $\eta_c$ pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme circulaires	-
$\lambda(\eta, \xi), \tau(\xi, \eta)$	Fonctions de $\eta$ et $\xi$ pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme circulaire	-

$\lambda(\eta, \xi, \zeta), \tau(\eta, \xi, \zeta)$	Fonctions de $\eta, \xi$ et $\zeta$ pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme elliptique	-
$\lambda(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta), \tau(\bar{\eta}, \bar{\xi}, \zeta)$	Fonctions de $\bar{\eta}, \bar{\xi}$ et $\zeta$ pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme elliptique	-
$\lambda(\bar{\xi}, \zeta, \beta), \tau(\bar{\xi}, \zeta, \beta)$	Fonctions de $\bar{\xi}, \zeta$ et $\beta$ pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme elliptique	-
$\tau_0$	Force tractrice unitaire	$N/m^2$
$\varpi$	Poids spécifique du liquide	$N/m^3$
$\psi$	Facteur de correction des dimensions linéaires	-
$\psi_Q$	Facteur de correction des débits	-
$\zeta_1$ à $\zeta_6$ $a(m)$ à $f(m)$	Paramètres d'ajustement pour un canal trapézoïdal	-
$\zeta$	Paramètre de forme pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme : semi-elliptique, elliptique et en loi puissance	-
$\bar{\zeta}$	Paramètre de forme pour le modèle rugueux d'un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme : semi-elliptique, elliptique et en loi puissance	-
$\zeta_c$	Paramètre de forme à l'état critique pour un canal à fond horizontal et à parois en courbe de forme semi-elliptique	-

## **REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1972). Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, *Dover*, New York.
- Achour, B. (2007). Calcul des conduites et canaux par la MMR - Conduites et canaux en charge. *Larhyss Edition Capitale*, Tome 1, Biskra, Algérie, 610 p.
- Achour, B. (2014). Ecoulement uniforme dans un canal rectangulaire, Chapitre II : Canal rectangulaire en charge et à surface libre. *Editions El-Djazair*, 66, Alger, Algérie.
- Achour, B. (2015a). Computation of normal depth in a u-shaped open channel using the rough model method. *American Journal of Engineering, Technology And Society*, 2(3), 46-51.
- Achour, B. (2015b). Chezy's resistance coefficient in a circular conduit. *The Open Civil Engineering Journal*, 9(1), 187-195.
- Achour, B., Bejaoui, A. (2006). Discussion of "Exact solutions for normal depth problem" by Swamee, P. K., Rathie, P. N. *Journal of Hydraulic Research*, 44(5), 715-717.
- Achour, B., Bedjaoui, A., Khattaoui, M., Debabeche, M. (2002). Contribution au calcul des écoulements uniformes à surface libre et en charge (première partie). *Larhyss Journal*, 1(1), 7-36.
- Akan, A. O. (2006). Open channel hydraulics. *Butterworth-Heinemann*, Canada, 364 p.
- Amara, L., Achour, B. (2023). Delta-Perturbation expansion for the normal flow depth problem in rectangular channels. *Larhyss Journal*, 55, 231-241.
- Bakhmeteff, B. A., Feodoroff, N. V. (1943). Discussion on open channel flow. *Transactions, American Society of Engineers*, Vol. 108, 492-502.
- Bazin, H. (1897). Etude d'une nouvelle formule pour calculer le débit des canaux découverts. *Mémoire N° 41, Annales des Ponts et Chaussées*, 14(7), 4<sup>ème</sup> trimestre, 20-70, Paris.

- Blench, T. (1939). A new theory of turbulent flow in liquids of small viscosity. *Journal, Institution of Civil Engineers, London, 11(6)*, 611-612, April, 1939.
- Chaudhry, M. H. (2008). Open-channel flow. *Springer*, New York, USA, 523 p.
- Chow, V. T. (1959). Open-channel hydraulics. *McGraw-Hill*, Tokyo, Japan, 680 p.
- Colebrook, C. F., Blench, T., Chatley, H., Essex, E. H., Finniecome, J. R., Lacey, G., Williamson, J., Macdonald, G. G. (1939). Correspondence. turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between the smooth and rough pipe laws. (includes plates). *Journal of the Institution of Civil Engineers, 12(8)*, 393-422.
- Darcy, H. (1854). Sur des recherches expérimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Vol. 38*, 1109-1121, Paris.
- Das, A. (2007). Optimal design of channel having horizontal bottom and parabolic sides. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 133(2)*, 192-197.
- Easa S. M., Vatankhah A. R. (2014). New open channel with elliptic sides and horizontal bottom. *Ksce Journal of Civil Engineering, 18(4)*, 1197-1204.
- Forchheimer, P. (1930). *Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig and Berlin, (Société d'édition Teubner, Leipzig et Berlin)*, 139-163.
- French, R. H. (1985). Open-Channel hydraulics. *MacGraw-hill*, New York, USA, 705 p.
- Froehlich, D. C. (1994). Width and depth-constrained best trapezoidal section. *Journal of Irrigation And Drainage Engineering, 120(4)*, 828-835.
- Ganguillet, E., Kutter, W. R. (1869). Versuch zur aufstellung einer neuen allgemeinen formel für die gleichförmige bewegung des wassers in canälen und flüssen. *Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereines*, (Essai pour établir une nouvelle formule générale pour le mouvement uniforme de l'eau dans les canaux et les rivières. *Revue de l'Association Autrichienne des Ingénieurs et Architectes*), 21(1), 6-25, 46-59, Vienna.
- Germano, A. S. C., Marcelin, D., Von Hohendorff Filho, J. C., Schiozer, D. J., De Castro, M. S. (2020). Friction factor equations accuracy for single and two-phase flows. *Petroleum Technology, 11*.

- Graf, W. H., Altinakar, M. S. (2000). *Hydraulique fluviale : écoulement et phénomènes de transport dans les canaux à géométrie simple (Vol. 16)*. EPFL, Presses Polytechniques et universitaires romandes, 16, Lausanne, Suisse.
- Hachemi-Rachedi, L., Lakehal, M., Achour, B. (2021). Modern vision for critical flow in an egg-shaped section. *Water Science and Technology*, 84(4), 840–850.
- Hager, W. H. (1987). Die berechnung turbulenter rohrströmungen. (Le calcul des écoulements turbulents dans les conduites). *3R-International, Vol. 26, Heft 2 (Cahier 2)*, 116-121.
- Henderson, F. M. (1966). *Open channel flow*. MacMillan, New York, USA, 522 p.
- Houk, I. E. (1918). *Calculation of flow in open channels. Miami Conservancy District, Technical Report, Pt IV, Dayton, Ohio.*
- Keulegan, G. H. (1938). Laws of turbulent flow in open channels. *Research paper RP 1151, Journal of Research, U.S. National Bureau of Standards, Vol. 21, 707-741, December, 1938.*
- Lakehal, M., Achour, B. (2017). New approach for the normal depth computation in a trapezoidal open channel using the rough model method. *Larhyss Journal*, 14(4), 269-284.
- Lindquist, E. (1933). On velocity formulas for open channels and pipes. *Transactions of the World Power Conference, Sectional Meeting, Scandinavia, Stockholm, Vol. 1, 177-234.*
- Manning, R. (1891). On the flow of water in open channels and pipes. *Transactions, Institution of Civil Engineers of Ireland, Vol. 20, 161-207, Dublin.*
- Mansri, N., Lakehal, M., Bedjaoui, A., Hachemi-Rachedi, L., Bouslah, S., Achour, B. (2023). Normal depth computation in a rectangular open-channel with circular sides using the rough model method (RMM). *Larhyss Journal*, 20(3), 85-100.
- Mironenko A. P., Willardson L. S., Jenab S. A. (1984). Parabolic canal design and analysis. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 110(2), 241-246.
- Moody, L. F. (1944). *Trans. ASME*, 66, 671-684.

- Pavlovski, N. N. (1940). Handbook of Hydraulic, *Kratkil Gidravlicheskil, Spravochnik*, Gosstrolizdat, (Manuel d'hydraulique. *Éditions d'État pour la Construction*), Leningrad and Moscow, 314 p.
- Powell, R.W. (1950). Resistance to flow in rough channels, *Transactions, American Geophysical Union*, 31(4), 575-582, August, 1950.
- Prandtl, L. (1926). Über die ausgebildete Turbulenz. (On fully developed turbulence). *Proceedings of the 2nd International Congress of Applied Mechanics, Zurich*, 62-74.
- Schnackenberg, E. C. (1951). Slope discharge formula for alluvial streams and rivers. *Proceedings, New Zealand Institution of Engineers, Vol. 37*, 340-409, *Willington, Discussions*, 410-449.
- Strickler, A. (1923). Beiträge zur frage der geschwindigkeitsformel und der rauhgigkeitszahlen für ströme, kanäle und geschlossene leitungen. Mitteilungen des Eidgenössischen Amtes für Wasserwirtschaft, (Contributions à la question de la formule de vitesse et des coefficients de rugosité pour les courants, canaux et conduites fermées. Communications de l'Office Fédéral Suisse des Eaux), *N° 16, Bern*.
- Subramanya, K. (2009). Flow in open channels. *Tata McGraw-Hill*. New Delhi, India, 547 p.
- Swamee, P. K., Chahar B. (2015). Design of canals. *Springer*, New Delhi, India, 183 p.
- Swamee, P. K., Jain, A. K. (1976). Explicit equations for pipe-flow problems. *Journal of the Hydraulics Division*, 102(5), 657-664.
- Toebes, C. (1955). Streamflow : Poly-dimensional treatment of variable factors affecting the velocity in alluvial streams and rivers. *Proceedings, Institution of Civil Engineers, London*, 4(3), pt. III, 900-938, December 1955.
- Valiani, A., Caleffi, V. (2009). Analytical findings for power-law cross-sections: Uniform flow depth. *Advances in Water Resources*, 32(9), 1404–1412
- Vatankhah, A. R. (2011). Approximate solutions to complete elliptic integrals for practical use in water engineering. *Journal of Hydrologic Engineering*, 16(11), 942-945.
- Vatankhah, A. R. (2014). Normal depth in power-law channels. *Journal of Hydrologic Engineering*, 10.1061/(ASCE)HE.1943-5584.0001083, 06014008.

- Vatankhah, A. R. (2015). Critical and normal depths in semielliptical channels. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 10.1061/(ASCE)IR.1943-4774.0000888, 06015002.
- Vladislavljevitch, Z. (1951). Aperçu critique sur les formules pour la prédétermination de la vitesse moyenne de l'écoulement uniforme. *Transactions of the 1st Congress, International Commission on Irrigation and Drainage, New Delhi, Vol. 2*, rept.12, question 2, 405-428.
- Weisbach, J. (1845). *Lehrbuch der Ingenieur und Maschinenmechanik*, Brunswick, Germany (*Manuel d'ingénierie et de mécanique des machines*, Brunswick, Allemagne).