undefined degreemonth undefined degreeyear undefined

Table des matières

0.1 Introduction

Dans la théorie du contrôle des systèmes aléatoires gouvernés par des équations différentielles stochastiques de type Itô, l'état du système évolue dans l'espace $\mathbb{R}^n$ sur un intervalle fini $[0,T]$, avec une condition initiale x et sous l'influence d'un mouvement brownien et d'une commande (appelée aussi contrôle) qui prend ses valeurs dans un Borélien de $\mathbb{R}^m$. La dynamique est décrite par un processus de diffusion.

Solution de l'équation différentielle stochastique du type Itô de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = b\left(t, X_t, v_t\right)\, dt + \sigma\left(t, X_t, v_t\right)\, dW_t, \;\; s \leq t \leq T \\ X_0 = x\,; \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{array} \right. \tag{1}$$

où $W = (W_t, 0 \leq t \leq T)$ désigne un mouvement Brownien de dimension d, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ continue à droite et contenant tous les ensembles $\mathcal{P}$-Négligeables de $\mathcal{F}$; $v = (v_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus progressivement mesurable à valeurs dans un espace métrique compact A, appelé contrôle admissible. L'ensemble de tous les contrôles admissibles est noté U.

La solution $X = (X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est appelée réponse au contrôle v et le couple (v, X) est appelé un couple admissible.

L'objet du contrôle optimal est de minimiser sur l'ensemble des contrôles un coût de la forme :

$$J\left(t, x, v\right) = \mathbb{E}\left[g\left(X_T\right) + \int_0^T h\left(t, X_t, v_t\right)\, dt\right]. \tag{2}$$

Un contrôle u est dit optimal, s'il vérifie :

$$J\left(u\right) = \inf_{v \in U} J\left(v\right). \tag{3}$$

Le couple (X, u) est dit couple optimal.

La théorie du contrôle optimal est utilisée pour modéliser beaucoup de situations en sciences de l'ingénieur, en sciences économiques et sociales et de façon plus générale dans tous les domaines utilisant les applications des mathématiques. La raison pour cela est évidente.

En effet, il est naturel de chercher pour un système d'évolution d'obtenir une régulation optimale. Il peut s'agir d'un réseau routier dans lesquels on veut avoir une circulation la plus fluide possible, de l'action sur un moteur afin d'avoir une consommation minimale ou encore de l'action du prix d'un produit financier afin d'assurer de meilleurs dividendes, et beaucoup d'autres applications.

Il existe deux approches majeures pour aborder la résolution des problèmes de contrôle, le principe de la programmation dynamique, appelé aussi principe de Bellmann et le principe du maximum de Pontriagin.

Dans ce mémoire on s'intéresse au principe du maximum de Pontriagin, connue aussi sous le nom de conditions nécessaires (et aussi suffisante) d'optimalité. L'idée est de partir d'un contrôle optimal minimisant la fonction coût sur l'ensemble des contrôles et de donner des conditions nécessaires d'optimalités vérifié par ce contrôle. Ceci nous emmène à introduire un processus adjoint solution d'une certaine équation différentielle rétrograde et d'une inégalité variationnelle vérifié par le contrôle optimal. Beaucoup d'auteurs se sont intéressé à ce problème, dans le cas du contrôle déterministe, la réponse a été donnée par Pontriagin & all [37]. En contrôle stochastique les problèmes de mesurabilité et la notion de solution pour l'équation d'état jouent un rôle central, ce qui a conduit à plusieurs formes de principe de Pontriagin. Le premier résultats a été obtenu par Kushner [29] en utilisant les solutions fortes de l'équation d'état pour et en supposant que les contrôles sont processus adaptés à une filtration fixée à l'avance. Hausmann [24, 25] a développé le problème en considérant la classe des contrôles feed-back (processus mesurables par rapport à la filtration naturelle de l'état du système) et emploie les techniques probabilistes telles que la transformation de Guirsanov et la théorie des martingales. D'autres versions du principe du maximum stochastique dans lesquelles le coefficient de diffusion dépend explicitement du contrôle ont été établies par Arkin-Saksonov [2] , Bensoussan [13] , Bismut [14, 15, 16], Elliott [20] , Elliott -Kohlmann [21] , Cadenillas-Karatzas[17] et Peng [36]. Tous ces travaux ont été généralisé par le travail de Bahlali [11] en établissant des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité dans le cas général en utilisant seulement un seul processus adjoint.

Notre objectif dans ce travail consiste à étudier les problèmes de contrôle stochastique dans le cas linéaire et ses applications en finance et spécialement pour les problèmes financiers de consommation et d'investissement.

Le système est gouverné par une équation différentielle stochastique linéaire du type :

$$\begin{cases} dX_t & = (A_t X_t + B_t v_t + C_t)\, dt + (D_t X_t + E_t v_t + F_t)\, dW_t, \\ X_0 & = x \ . \end{cases} \tag{4}$$

Où $A_t, B_t, C_t, D_t, E_t, F_t$ sont des fonctions déterministes données, x est la condition initiale, $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard d-dimensionnel définit sur un espace probabilisé filtré $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}, \mathcal{P}\right)$ satisfaisant les conditions habituelles.

La variable contrôle $v = (v_t)$ est un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté à valeurs dans un espace convexe fermé de U de $\mathbb{R}^m$. On note par $\mathcal{U}$ la classe de tous les contrôles.

Le fonctionnel coût à minimiser sur l'ensemble $\mathcal{U}$ est la forme :

$$J(v) = \mathbb{E}\left[g(X_T) + \int_0^T h(t, X_t, v_t)\, dt\right], \tag{5}$$

où g et h sont des fonctions données et X_t est la trajectoire du système contrôlée par v.

Un contrôle $u \in \mathcal{U}$ est dit optimal s'il vérifie :

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v). \tag{6}$$

Le principal outil pour établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité est le principe de l'optimisation convexe, qui consiste à minimiser une fonctionnelle convexe, continue, Gâteaux différentiable et de différentielle continue sur un ensemble convexe fermé.

Ce résultat trouve des applications diverses en économie, finance, assurance et beaucoup d'autres. Dans ce mémoire, on illustre ces résultats des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les appliquer au modèle financier d'investissement et de consommation. Nous étudierons trois modèles. Le premier exemple est le classique problème d'investissement et de consommation de BLack et Scholes. Le deuxième exemple concerne le problème de minimisation de la variance (moyenne-variance) de la richesse finale dans un marché financier. Le troisième est une combinaison des deux premiers exemples.

Le plan de ce travail est comme suit :

Chapitres 1 (Equations différentielles stochastiques)

Ce chapitre est consacré à l'introduction des résultats principaux des équations différentielles stochastiques de type Itô. Un exposé est donné sur les résultats obtenus dans ce domaine et spécialement le théorème d'existence et d'unicité d'Itô.

Chapitre 2 (Principe du maximum en contrôle optimal stochastique)

Dans ce chapitre, on établit des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité dans le cas où le système est gouverné par une équation différentielle stochastique linéaire. Le principal outil, sera le principe de l'optimisation convexe.

Chapitre 3 (Application en finance)

Ce chapitre est consacré à l'application du principe du maximum en mathématiques financières. Le problème d'investissement et de consommation dans un marché financier est étudié dans trois cas. Le premier cas concerne un coût définit par des fonctions d'utilité de type HARA. le second concerne la minimisation de la moyenne de la variance (moyenne-variance). Le dernier modèle et c'est la principale contribution originale de ce magister, concerne un problème mixte d'd'optimisation des portefeuilles et minimisation de la variance.

Notations matricielles.

Tout au long de ce magister, on utilisera les notations suivantes. C désigne une constante positive, $\mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $n \times d$ à coefficients réel et $\mathcal{M}^d_{n\times n}(\mathbb{R})$ l'espace linéaire des vecteurs $M = (M_1, ..., M_d)$, où $M_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Pour tout $M, N \in \mathcal{M}^d_{n\times n}(\mathbb{R})$, $L, S \in \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$ et $\gamma \in \mathbb{R}^d$.

On utilise les notations suivantes :

$\alpha\beta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \in \mathbb{R}$ est le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$,

$LS = \sum_{i=1}^{d} L_iS_i \in \mathbb{R}$, où L_i et S_i sont les i^{eme} colonnes de L et S,

$ML = \sum_{i=1}^{d} M_iL_i \in \mathbb{R}^n$,

$M\alpha\gamma = \sum_{i=1}^{d} (M_i\alpha)\gamma_i \in \mathbb{R}^n$,

$MN = \sum_{i=1}^{d} M_iN_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$MLN = \sum_{i=1}^{d} M_iLN_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$ML\gamma = \sum_{i=1}^{d} M_iL\gamma_i \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

On note par L^* la transposée de la matrice L et $M^* = (M_1^*, ..., M_d^*)$.

Chapitre 1

Equations différentielles stochastiques

Les équations différentielles stochastiques constituent une généralisation des équations différentielles ordinaires. Celles-ci ont été introduites pour la première fois en 1946 par K.Itô pour étudier les trajectoires de processus de diffusion. Cette notion a été traitée de manière profonde en relation avec la théorie des semi-martingales. Des applications dans tous les domaines des sciences de l'ingénieur (filtrage des processus, contrôle optimal, mathématiques financières, gestion des stocks etc...) ont été réalisées en utilisant ce genre d'équations. Il existe une multitude d'ouvrages et d'articles traitant ces équations. Les équations différentielles stochastiques constituent un modèle de diffusion en milieu non homogène. Soit X_t la position d'une particule assez petite en suspension dans un liquide à l'instant t. Si on néglige l'inertie de la particule, on peut admettre que le déplacement de la particule est la résultante de deux composantes, d'une part un déplacement centré dû à la vitesse macroscopique du liquide,d'autre part des fluctuations provoquées par l'agitation thermique des molécules du liquide.

Soit $b(t, X)$ la vitesse macroscopique du liquide au point X à l'instant t.

On supposera que la composante fluctuante dépend du temps, de la position X et de la durée Δt pendant laquelle est envisagé le déplacement, alors :

$$X_{t+\Delta t} - X_t = b(t, X_t).\Delta t + \xi_{t,X_t,\Delta t}, \tag{1.1}$$

avec ;

$$\mathbb{E}\left[\xi_{t,X_t,\Delta t}\right] = 0. \tag{1.2}$$

Si on suppose que :

$$\xi_{t,X_t,\Delta t} = \sigma(t, X_t).\xi_{t,\Delta t},$$

où : $\sigma(t, X_t)$ désigne les propriétés du milieu au point X_t et $\xi_{t,\Delta t}$ l'accroissement en milieu homogène, *i.e :*

$$\xi_{t,\Delta t} = W_{t+\Delta t} - W_t,$$

avec W_t un mouvement Brownien, alors :

$$X_{t+\Delta t} - X_t = b(t, X_t).\Delta t + \sigma(t, X_t).\left(W_{t+\Delta t} - W_t\right). \tag{1.3}$$

En passant aux différentielles, on obtient :

$$dX_t = b(t, X_t).dt + \sigma(t, X_t).dW_t. \tag{1.4}$$

La formulation intégrale, nous donne :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s).ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s. \tag{1.5}$$

Comme $W = (W_t, t \in [0, T])$ est un processus dont les trajectoires sont $\mathcal{P}.\ ps$ à variation infinies $\int_0^t \sigma(s, X_s).dW_s$ ne peut pas être considérée comme une intégrale de Lebesgue-Stieljes.

Par conséquent cette équation ne peut être interprétée comme une équation différentielle ordinaire. Avant de donner la définition de solution à cette équation on doit justifier son écriture et donner un sens aux quantités de la forme $\int_0^t \sigma(s, X_s).dW_s$ appelées intégrales stochastiques d'Itô.

1.1 Intégrales stochastiques

Soient
$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé,
$\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \in [0, T])$ une filtration satisfaisant les conditions habituelles,
$W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ un mouvement Brownien.

Définition 1.1.

Un processus stochastique $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$ *est dit simple, si il existe une subdivision :*

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = T,$$

de l'intervalle $[0, T]$ *et une famille* $(\xi_i)_{i \geq 0}$ *de variables aléatoires avec :*

$$\sup_{i \geq 0} |\xi_i| \leq c < \infty,$$

telle que ξ_i est $\mathcal{F}_{t_i}$ mesurable, $\forall\, i \geq 0$ et,

$$X_t = \xi_0 \, \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=0}^{n\text{-}1} \xi_i \, \mathbf{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t) \, .$$

Où $\mathbf{1}_A$ *désigne l'indicatrice de l'ensemble A, c'est à dire :*

$$\mathbf{1}_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ensemble des processus simples sera noté $\mathcal{S}_{[0,T]}$.

Définition 1.2.

Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ progressivement mesurable est dit de classe $\mathcal{M}_{[0,T]}$,

si :

$$\mathbb{E} \int_0^T X_s^2 ds < \infty.$$

$$\mathcal{M}_{[0,T]} = \left\{ X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} \text{ progressivement mesurable } / \ \mathbb{E} \int_0^T X_s^2 ds < \infty \right\}. \tag{1.6}$$

C'est à dire : $\mathcal{M}_{[0,T]}$ est l'ensemble des processus progressivement mesurables de carré intégrable.

Définition 1.3.

Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ progressivement mesurable est dit de classe $\mathrm{P}_{[0,T]}$,

si :

$$\mathcal{P} \left\{ \int_0^T X_s^2 ds < \infty \right\} = 1.$$

$$\mathcal{P}_{[0,T]} = \left\{ X = (X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]} \text{ progressivement mesurable} \, ; \ / \ \mathcal{P} \left\{ \int_0^T X_s^2 ds < \infty \right\} = 1 \right\}. \tag{1.7}$$

C'est à dire : $\mathrm{P}_{[0,T]}$ est l'ensemble des processus progressivement mesurables de carré presque sûrement intégrable.

Remarque 1.4.

$$\mathcal{S}_{[0,T]} \subset \mathcal{M}_{[0,T]} \subset \mathcal{P}_{[0,T]} \tag{1.8}$$

Dans ce qui suit, on va construire et donner les propriétés des intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien $W = (W_t, \mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ du type :

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dW_s,$$

pour des processus appartenant successivement à $\mathcal{S}_{[0,T]}$, $\mathcal{M}_{[0,T]}$ et $\mathrm{P}_{[0,T]}$. Mais avant remarquons qu'on ne peut définir les intégrales de ce type comme intégrales de Lebesgue-Stieltjes puisque les trajectoires du mouvement brownien sont à variation infinie. Seulement les trajectoires du mouvement brownien contiennent toutes les propriétés qui en un certain sens sont l'analogue de la finitude de la variation.

Soit $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus stochastique simple, on définit formellement l'intégrale stochastique de X par rapport au mouvement Brownien $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ comme suit :

$$I_t(X) = \sum_{i=0}^{n\text{-}1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \xi_n (W_t - W_{t_n}). \tag{1.9}$$

En effet ;

$$\begin{aligned} I_t(X) &= \int_0^t X_s dW_s \\ &= \int_0^t \left[\xi_0 \ \mathbf{1}_{\{0\}}(s) + \sum_{i=0}^{n\text{-}1} \xi_i \ \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s) \right] dW_s \\ &= \xi_0 \int_0^t \mathbf{1}_{\{0\}}(s) \ dW_s + \sum_{i=0}^{n\text{-}1} \xi_i \int_0^t \mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(s) \ dW_s \\ &= \xi_0 \ W_0 + \sum_{i=0}^{n\text{-}1} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \xi_n (W_t - W_{t_n}). \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{P}[\xi_0 = 0] = 1$; on conclut.

Proposition 1.5. *Soient* $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$ *deux processus simples. Alors, on a :*

1) $I_t(\alpha X + \beta Y) = \alpha I_t(X) + \beta I_t(Y)$, $\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
2) $\mathbb{E}[I_t(X)] = 0$,
3) $\displaystyle\int_0^t X_s dW_s = \int_0^r X_s dW_s + \int_r^t X_s dW_s$,

4) $I_t(X)$ est continue en t,

5) $\mathbb{E}[I_t(X) \ / \ \mathcal{F}_s] = I_s(X) \quad , \forall \ s \leq t \quad \left(I_s(X) = \int_0^s X_r dW_r \right)$,

6) $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s dW_s \right) \left(\int_0^t Y_s dW_s \right) \right] = \mathbb{E} \int_0^t X_s Y_s ds$,

en particulier, on a :

$$7) \ \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s dW_s \right)^2 \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 ds \right] < \infty.$$

Proposition 1.6.

Soit $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus simple, alors :

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dW_s,$$

est une martingale de carré intégrable.

Proposition 1.7.

L'ensemble $\mathcal{S}_{[0,T]}$ des processus simples est dense dans $\mathcal{M}_{[0,T]}$

Soit $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus dans $\mathcal{M}_{[0,T]}$; alors il existe une suite de processus $(X_t^n)_{t\in N}$ dans $\mathcal{S}_{[0,T]}$, tel que :

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^t (X_s^n - X_s)^2 ds \right] = 0. \tag{1.10}$$

Proposition 1.8.

Soit $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus dans $\mathcal{M}_{[0,T]}$, alors :

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dW_s,$$

est une martingale de carré intégrable.

La construction des intégrales stochastiques pour des processus appartenant à $\mathrm{P}_{[0,T]}$ se fait de la même manière que pour les processus appartenant à $\mathcal{M}_{[0,T]}$.

Proposition 1.9. *$\mathcal{M}_{[0,T]}$ est dense dans $\mathrm{P}_{[0,T]}$.*

Soit $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus dans $\mathrm{P}_{[0,T]}$, alors il existe une suite de processus $(X_t^n)_{t\in N}$ dans $\mathcal{M}_{[0,T]}$, telles que :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathcal{P}\left[\int_0^t (X_s^n - X_s)^2 ds \right] = 0. \tag{1.11}$$

Ainsi on construit l'intégrale stochastique $I_t(X)$ de la même façon que précédemment et on obtient les mêmes propriétés.

Remarque. *La convergence de la suite* $(X_t^n)_{t\in N}$ *est une convergence en probabilité.*

Proposition 1.10.

Soit $X=(X_t)_{t\in[0,T]}$ *un processus dans* $\mathrm{P}_{[0,T]}$, *alors :*

$$I_t(X)=\int_0^t X_s dW_s,$$

est une martingale locale de carré intégrable.

Preuve. On définit une suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_n$ par :

$$\tau_n=\begin{cases}\inf\left\{t\geq 0\ /\ \int_0^t X_s^2 ds\geq n\right\}, \\ +\infty \quad si \qquad \int_0^t X_s^2 ds<n.\end{cases}$$

Si ;

$$B=\left\{X=(X_t)_{t\in[0,T]} \text{ progressivement mesurable } / \ \int_0^t X_s^2 ds\leq n\right\}. \tag{1.12}$$

Alors τ_n est l'instant d'entrée dans l'ensemble B, et on peut écrire τ_n de la façon suivante :

$$\tau_n=\begin{cases}+\infty \text{ si } \ \{t\geq 0\ /\ X\in B\}=\Phi, \\ \inf\{t\geq 0\ /\ X\in B\} \quad \text{sinon.}\end{cases}$$

Puisque :

$$\int_0^t X_s^2 ds\leq n,$$

alors :

$$\int_0^t X_s^2 ds<n+1.$$

Et par conséquent ; on a :

$$\mathcal{P}\left[\tau_n\leq\tau_{n+1}\right]=1.$$

Puisque :

$$\mathcal{P}\left[\int\limits_0^t X_s^2 ds < \infty\right] = 1,$$

alors :

$$\mathcal{P}\left[\underset{n}{Lim}\tau_n = \infty\right] = 1$$

Donc $(\tau_n)_n$ est une suite croissante de temps d'arrêts telles que : $\underset{n}{\lim}\tau_n = \infty\ \ \mathcal{P}\ ps.$

Soit :

$$I_{t\wedge\tau_n}(X) = \int_0^{t\wedge\tau_n} X_s dW_s = \int_0^t X_s \mathbf{1}_{\{t\leq\tau_n\}}(s)\, dW_s.$$

Pour que X soit intégrable, il faut que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(X_s \mathbf{1}_{\{t\leq\tau_n\}}(s)\right)^2 ds\right] < \infty.$$

En effet :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(X_s \mathbf{1}_{\{t\leq\tau_n\}}(s)\right)^2 ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 \mathbf{1}^2_{\{t\leq\tau_n\}}(s)\, ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} X_s^2 ds\right] \leq n.$$

Donc le processus $I_{t\wedge\tau_n}(X)$ définit une martingale de carré intégrable. Puisque $(\tau_n)_n$ est une suite de temps d'arrêts croissant vers ∞, alors :

$$I_t(X) = \int_0^t X_s dW_s,$$

est une martingale locale.■

1.2 Solutions d'équations différentielles stochastiques

Soient :

$(\Omega, \mathcal{F}.(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration.

$X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ un processus stochastique continu à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

$W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien d-dimensionnel.

L'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{cases} dX_t & = b\left(t, X_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t\right) dW_t, \\ X_0 & = x. \end{cases} \tag{1.13}$$

Où :

$$\begin{aligned} b &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \sigma &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M_{n\times d}\left(\mathbb{R}\right). \end{aligned}$$

Sont deux fonctions Boréliennes et x une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable indépendante de W, telle que :

$$\mathbb{E}\left|X\right|^P < \infty\ ; \forall p > 1.$$

Soient les conditions suivantes :
1) $\mathcal{P}\left[X_0 = x\right] = 1$,
2) $\mathcal{P}\left[\int_0^t \left(\left|b\left(s, X_s\right)\right| + \sigma^2\left(s, X_s\right)\right) ds < \infty\right] = 1.$
3) $X_t = x + \int_0^t b\left(s, X_s\right) ds + \int_0^t \sigma\left(s, X_s\right) dW_s \quad \mathcal{P}.p.s.$

Définition 1.11. *On dit que l'équation* (1.13) *admet une solution forte (ou trajectorielle), si pour chaque espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathcal{P})$, *et pour tout mouvement brownien* $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$, *il existe un processus* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *continu tel que les conditions 1),2),3) soient vérifiées.*

Quand on parle de solution fort on sous-entend que sont déja donnés un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathcal{P})$, et un mouvement brownien $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Si de plus $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$, alors le processus X est $(\mathcal{F}_t)$-adapté, et on a :

$$\mathcal{F}_t^X \subset \mathcal{F}_t^W.$$

Définition 1.12. *On dit que l'équation* (1.13) *admet une solution faible (ou en loi) si on peut trouver un espace probabilisé filtré* $(\Omega, \mathcal{F}.(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathcal{P})$, *un mouvement brownien* $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, *un processus* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *continu tels que les conditions 1),2),3) soient réalisées.*

Quand on parle de solution faible, on doit trouver un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathcal{P})$, un mouvement brownien $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et un processus continu $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Donc une solution faible est la collection des objets $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathcal{P}, (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, X_{t\in\mathbb{R}_+})$.

Dans beaucoup de cas, où la solution faible existe, on a :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^X$$

et par conséquent $(W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un mouvement brownien relativement à $\left(\mathcal{F}_t^X\right)$. C'est pourquoi dans le cas des solutions faibles, on a :

$$\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{F}_t^X.$$

Remarque 1.13. *Les solutions faibles ne sont pas mesurables par rapport à* $\left(\mathcal{F}_t^W\right)_{t\in R_+}$ *. Et c'est ce qui différencie les solutions faibles des solutions fortes.*

Définition 1.14. *On dit que l'équation* (1.13) *admet une solution forte unique si pour deux solutions fortes* $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *et* $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *, on a :*

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]} |X_t - Y_t| > 0\right\} = 0,$$

c'est à dire :

$$\mathcal{P}\left\{X_t = Y_t \ , \forall\, t \in \mathbb{R}_+\right\} = 1.$$

Définition 1.15.

On dit que l'équation (1.13) *admet une solution faible unique si pour deux solutions faibles* $(\Omega, \mathcal{F}.\,(\mathcal{F}_t)_{t\in R_+}, \mathcal{P}, (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+})$ *et* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}.\left(\widetilde{\mathcal{F}}_t\right)_{t\in R_+}, \mathcal{P}, \left(\widetilde{W}_t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}, \left(\widetilde{X}_t\right)_{t\in}$ *y'a coincidence des distributions des processus* X *et* $\widetilde{X}$

Les théorèmes fondamentaux de Yamada-Watanabe nous donnent la relation entre les solutions faibles et fortes sont donnés par :

Théorème 1.16. (Yamada-Watanabe [38]). *L'unicité forte implique l'unicité faible.*

Théorème 1.17 (Yamada-Watanabe [38]). *L'existence faible + l'unicité forte entraîne l'existence forte.*

Les théorèmes de Yamada-Watanabe jouent un rôle clé dans la démonstration de résultats d'existence et d'unicité pour les équations différentielles stochastiques à coefficients non Lipschitziens. Dans ce qui suit nous allons donner la démonstration du théorème d'Itô, mais avant cela on rappelle le lemme de Gronwall qui est souvent utilisé pour la démonstration de l'unicité.

Lemme 1.18 (Gronwall). *Soit* g *une fonction continue telle que pour tout* $t \geq 0$

on a :

$$g(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t g(s)\, ds, \tag{1.14}$$

avec $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. *Alors :*

$$g(t) \leq \alpha\, \exp(\beta t).$$

Preuve. Supposons que :

$$g(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t g(s)\, ds.$$

En multipliant par exp(-βt) alors, on obtient :

$$g(t) \exp(-\beta t) \leq \alpha \exp(-\beta t) + \beta \exp(-\beta t) \int_0^t g(s)\, ds.$$

Ce qui donne :

$$g(t) \exp(-\beta t) - \beta \exp(-\beta t) \int_0^t g(s)\, ds \leq \alpha \exp(-\beta t).$$

En dérivant par rapport à t les deux termes, on aura :

$$\frac{d}{dt}\left(\exp(-\beta t) \int_0^t g(s)\, ds\right) \leq \alpha \exp(-\beta t).$$

En intégrant les deux parties, on en déduit :

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\left(\exp(-\beta t) \int_0^t g(s)\, ds\right) \leq \int_0^t \alpha \exp(-\beta t).$$

Ce qui donne :

$$\exp(-\beta t) \int_0^t g(s)\, ds \leq \frac{\alpha}{\beta}\left(1 - \exp(-\beta t)\right).$$

Par un simple calcul, on aura :

$$\alpha + \beta \int_0^t g(s)\, ds \leq \alpha \exp(\beta t).$$

Et finalement, on obtient

$$g(t) \leq \alpha \exp(\beta t).$$

Le lemme est prouvé.■

Le principal théorème qui nous assure l'existence et l'unicité forte d'une solution de l'équation est le suivant

Théorème 1.19 (K. Itô). *On suppose que les coefficient b et σ sont mesurables et vérifient, il existe une constante $k > 0$, telle que $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, on a :*

$$|b(t,x) - b(t,y)|^2 + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)|^2 \leq k\,|x-y|^2, \tag{1.15}$$

$$|b(t,x)|^2 + |\sigma(t,x)|^2 \leq k\left(1 + |x|^2\right). \tag{1.16}$$

Alors l'équation admet une solution forte unique $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$, $(\mathcal{F}_t)$-adapté et continue avec condition initiale $X_0 = x$. De plus cette solution est markovienne et vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right] < M \quad, \forall p > 1. \tag{1.17}$$

Où M est une constante qui dépend de k, p, T et x.

Preuve

i - ***Unicité*** **.** Soient $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ et $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$ deux solutions de l'équation telles que $X_0 = Y_0 = x$.

En appliquant l'inégalité :

$$(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2,$$

et en utilisant les formules de X_t et Y_t , on obtient :

$$|X_t - Y_t|^2 \leq 2\left|\int_0^t [b(s,X_s) - b(s,Y_s)]\,ds\right|^2 + 2\left|\int_0^t [\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)]\,dW_s\right|^2.$$

En passant à l'espérance mathématique, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq\ & 2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t [b(s,X_s) - b(s,Y_s)]\,ds\right|^2\right] \\ & +2\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t [\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)]\,dW_s\right|^2\right].\end{aligned}$$

Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et Buckholders-Davis-Gundy, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq\ & 2T\mathbb{E}\left[\int_0^t |b(s,X_s) - b(s,Y_s)|^2\,ds\right] \\ & +2\mathbb{E}\left[\int_0^t |\sigma(s,X_s) - \sigma(s,Y_s)|^2\,ds\right].\end{aligned}$$

En appliquant la condition de Lipschitz, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] \leq C \int_0^t \mathbb{E}\,|X_s - Y_s|^2\,ds.$$

Où : $C = \max(2Tk, 2k)$.

En appliquant le lemme de Gronwall, il résulte que :

$$\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right] = 0.$$

En appliquant l'inégalité de Tchebychef, on obtient :

$$\forall\,\varepsilon > 0\ ,\ \mathcal{P}\left\{|X_t - Y_t| > \varepsilon\right\} \leq \frac{\mathbb{E}\left[|X_t - Y_t|^2\right]}{\varepsilon^2} \leq \frac{\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]}|X_t - Y_t|^2\right]}{\varepsilon^2} = 0.$$

Donc pour tout ensemble D dénombrable partout dense dans $[0,T]$, on a :

$$0 \leq \mathcal{P}\left\{\sup_{t\in D}|X_t - Y_t| > 0\right\} \leq 0.$$

Enfin et puisque les processus X et Y sont continus, on conclut que :

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]}|X_t - Y_t| > 0\right\} = 0.$$

Ce qui prouve l'unicité forte de la solution.

ii - ***L'existence.*** On montre l'existence d'une solution forte en utilisant la méthode des approximations successives, et pour cela on pose :

$$X_t^n = x + \int_0^t b(s, X_s^{n\text{-}1})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{n\text{-}1})dW_s, n \in N^\star$$

$$\begin{aligned} X_t^{n+1} - X_t^n &= \int_0^t \left(b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})\right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})\right) dW_s. \end{aligned}$$

En utilisant la même technique que pour l'unicité, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right] \leq C\int_0^t \mathbb{E}\left[\left|X_s^n-X_s^{n\text{-}1}\right|^2\right] ds,$$

Où : $C=\max(2Tk, 2k)$

Par récurrence sur n, il résulte que :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+1}-X_t^n\right|^2\right] \leq \frac{(MT)^{n+1}}{(n+1)\,!}\ \text{, où} \quad M=\max\left(C, \mathbb{E}\left[|x|^2\right]\right).$$

Si on prends $p>1$, on aura :

$$\mathbb{E}\left[\left|X_t^{n+p}-X_t^n\right|^2\right] \leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{(MT)^k}{k!} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc (X_t^n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$, et par conséquent elle est convergente, notons X_t sa limite.

En passant à la limite, on obtient :

$$X_t = x+\int_0^t b(s, X_s)\, ds+\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s.$$

Donc X_t est une solution de l'équation.

iii **- *Montrons que :***

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right] < M \quad \forall p>1,$$

$$X_t = x+\int_0^t b(s, X_s)\, ds+\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s.$$

Par l'inégalité :

$$(a+b+c)^2 \leq 3a^2+3b^2+3c^2,$$

et en passant aux espérances, on a :

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right]+3\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t b(s, X_s)\, ds\right|^2\right]+3\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(s, X_s)\, dW_s\right|^2\right].$$

par les inégalités de Cauchy-Schwarz et Buckholders-Davis-Gundy, on a :

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 3T\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t b(s, X_s)\right|^2 ds\right] + 3\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \sigma(s, X_s)\right|^2 ds\right].$$

D'après la condition de croissance linéaire on a

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq 3\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 3Tk\int_0^t \mathbb{E}\left[1 + |X_s|^2\right] ds + 3k\int_0^t \mathbb{E}\left[1 + |X_s|^2\right] ds.$$

En posant : $m = \max(3, 3Tk, 3k)$, on a :

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq m\mathbb{E}\left[|x|^2\right] + 2m\int_0^t \mathbb{E}\left[1 + |X_s|^2\right] ds.$$

En posant : $c = \max(m, 2m)$, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq c\left(1 + \mathbb{E}\left[|x|^2\right]\right) + c\int_0^t \mathbb{E}\left[|X_s|^2\right] ds.$$

En appliquant le lemme de Gronwal, on obtient :

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] \leq c\left(1 + \mathbb{E}\left[|x|^2\right]\right)\exp(ct), \quad \forall\, t \in [0, T].$$

Puisque $\mathbb{E}\left[|x|^2\right] < \infty$, alors en posant :

$$M = c\left(1 + \mathbb{E}\left[|x|^2\right]\right)\exp(cT),$$

on obtient :

$$\mathbb{E}\left[|X_t|^2\right] < M, \quad \forall\, t \in [0, T].$$

Enfin ; par l'inégalité de Buckholders-Davis-Gundy on a :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right] < M, \quad \forall p > 1.$$

Le théorème est prouvé.■

Remarques

1) La condition de Lipschitz nous assure l'existence et l'unicité de la solution.

2) La condition de croissance linéaire nous assure la non explosion de la solution et si on n'a pas cette condition, l'équation admettra une solution unique mais seulement jusqu'au temps d'explosion.

Chapitre 2

Principe du maximum pour les problèmes de contrôle stochastique optimal

2.1 Formulation du problème

Soit T un nombre réel strictement positif, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, $W = (W_t; t \in [0,T])$ un mouvement Brownien d-dimensionnel et U un sous ensemble de $\mathbb{R}^d$.

Définition 2.1 *On appelle contrôle admissible tout processus $v = (v_t)_{t\in[0,T]}$ mesurable et $(\mathcal{F})_t$-adapté à valeurs dans U tel que :*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \mathbb{E}\left|v_t\right|^2 < \infty.$$

On note par $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les contrôles admissibles.
$\mathcal{U} = \{v : [0,T] \times \Omega \longrightarrow \mathbb{A} \ / \ v$ *est mesurable et* $(\mathcal{F})_t$*-adapté*$\}$

L'équation différentielle stochastique linéaire, de la forme :

$$\begin{cases} dX_t = b\left(t, X_t, v_t\right) dt + \sigma\left(t, X_t, v_t\right) dW_t, t \in [0,T] \\ X_0 = x, \ x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{2.1}$$

où :

$$\begin{aligned} b &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ \sigma &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times d}\left(\mathbb{R}\right), \end{aligned} \tag{2.2}$$

et x est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable, telle que :

$$\mathbb{E}\left|x\right|^2 < \infty.$$

Soit la fonctionnelle suivante (appelée fonction coût) :

$$J(v) = \mathbb{E}\left[g(X_T) + \int_0^T h(t, X_t, v_t)\, dt\right], \tag{2.3}$$

où :

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \\ h &: [0,T] \times \mathbb{R}^n \times U \longrightarrow \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

L'objectif du contrôle optimal est de minimiser le coût J sur l'ensemble des contrôles admissibles $\mathcal{U}$.

Un contrôle $u \in \mathcal{U}$ est dit optimal, s'il vérifie :

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J(v). \tag{2.5}$$

Il existe deux axes principaux pour traiter ce genre de problème

1) Le principe du maximum de Pontriagin (les conditions nécessaires d'optimalités)

2) Le principe de la programmation dynamique (l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman)

Dans ce magister, on s'intéresse au premier cas.Si un contrôle optimal existe, on établira des conditions nécessaires et aussi suffisantes d'optimalité sous forme de principe du maximum de Pontryagin.

On distingue 3 cas dans ce genre de problème

1er cas **:** L'ensemble des contrôles $\mathcal{U}$ est convexe et le système est linéaire.

2eme cas **:** L'ensemble des contrôles $\mathcal{U}$ est convexe et le système est non linéaire.

3eme cas **:** L'ensemble des contrôles $\mathcal{U}$ est non convexe et le système est non linéaire.

Dans le *3eme* cas, il y'a deux autres cas selon que le coefficient σ dépend de la variable contrôle où non.

Dans ce travail, on étudiera le premier cas, c'est à dire établir des conditions nécessaires et aussi suffisantes d'optimalité dans le cas où le système est linéaire et l'ensemble des contrôles est convexe.

On suppose que b et σ sont linéaires en leurs variable et sont données par :

$$\begin{aligned} b(t, X, v) &= A_t X_t + B_t v_t + C_t, \\ \sigma(t, X, v) &= D_t X_t + E_t v_t + F_t. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Avec :

$$\begin{array}{rlcc} A: & [0,T]\times\Omega & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \\ B: & [0,T]\times\Omega & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}), \\ C: & [0,T]\times\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ D: & [0,T]\times\Omega & \longrightarrow & \mathcal{M}^n_{d\times n}(\mathbb{R}), \\ E: & [0,T]\times\Omega & \longrightarrow & \mathcal{M}^m_{d\times n}(\mathbb{R}), \\ F: & [0,T]\times\Omega & \longrightarrow & \mathcal{M}_{d\times n}(\mathbb{R}). \end{array}$$

On suppose que A, B, C, D, E, F sont progressivement mesurables par rapport à la filtration $\mathcal{F}_t$, uniformément bornées en $(t,\omega) \in [0,T]\times\Omega$.

Le système est gouverné dans ce cas par l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$\begin{cases} dX_t = (A_t X_t + B_t v_t + C_t)\,dt + (D_t X_t + E_t v_t + F_t)\,dW_t, 0 \leq t \leq T, \\ X_0 = x. \end{cases}$$

Pour que cette équation ait un sens, on suppose que :

$$\mathcal{P}\left\{ \int_0^T |B_t v_t|\,dt < \infty, \int_0^T |E_t v_t|^2\,dt < \infty \right\} = 1. \tag{2.7}$$

L'équation d'état étant linéaire à coefficients bornés, donc Lipchitziennes, alors elle admet une solution forte unique donnée par :

$$X = x + \int_0^t (A_s X_s + B_s v_s + C_s)\,ds + \int_0^t (D_s X_s + E_s v_s + F_s)\,dW_s, 0 \leq t \leq T, \tag{2.8}$$

De plus cette solution est continue ; et vérifie :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |X_t|^2\right] < \infty. \tag{2.9}$$

Les hypothèses sur les coefficients du coût J sont les suivants :

g et h sont convexes et dérivables en leurs variables et à dérivées continues et bornées. Sous ces hypothèses, le coût J est bien défini de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.

Maintenant, on donne un exemple où on calculera explicitement le contrôle optimal.

Exemple. En dimension 1, soit l'équation différentielle stochastique linéaire suivante :

$$\begin{cases} dX_t = v_t dW_t, \\ X_0 = 0. \end{cases}$$

L'ensemble des contrôles est donné par :

$$U = [-1, 1]$$

La fonctionnelle à minimiser est donnée par :

$$J(v) = \mathbb{E}\left[X_1^2 + \int_0^1 \left(X_t^2 - \frac{1}{2}v_t^2\right) dt\right].$$

Par la formule d'Itô, on a :

$$X_t^2 = \int_0^t v_s^2 ds + 2\int_0^t X_s^v v_s dW_s.$$

Pour $t = 1$, on aura :

$$X_1^2 = \int_0^1 v_s^2 ds + 2\int_0^1 X_s^v v_s dW_s.$$

En remplaçant X_1^v par sa valeur dans la fonction coût, on obtient :

$$J(v) = \mathbb{E}\int_0^1 \left(X_s^2 + \frac{1}{2}v_s^2\right) ds.$$

Par analogie avec la définition du coût, on aura :

$$\begin{aligned} h(t, X_t, v_t) &= X_t^2 + \frac{1}{2}v_t^2, \\ g(X_1^v) &= 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} J(v) &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \left[\int_0^t v_s^2 ds + \frac{1}{2}v_t^2\right] dt\right] \\ &= \mathbb{E}\int_0^1 (3/2 - t)\, v_t^2 dt. \end{aligned}$$

On remarque que J est une fonction convexe de v, donc elle atteint son minimum en $u_t = 0$.

Par conséquent, le contrôle optimal qui minimise J sur U est $u = 0$ avec une trajectoire optimal $X_t^u = 0$.

2.2 Résultats préliminaires

Le but du principe du maximum est d'établir des conditions nécessaires d'optimalités vérifiées par un contrôle optimal donné. Pour cela, on se donne un contrôle optimal u minimisant le coût J sur $\mathcal{U}$ et on désigne par X la trajectoire optimale associée à u, c'est à dire la solution de l'équation d'état associée à u.

Théorème 2.2 (Principe de l'optimisation convexe) : *Soit G un espace de Banach réflexif et H un convexe fermé non vide de G. soit f une fonction de H dans $\mathbb{R}$ convexe et semi continue inférieurement (SCI), Gâteaux-différentiable de différentielle $f^{'}$ continue. Alors, on a :*

$$f(u) = \inf_{v \in H} f(v) \Longleftrightarrow \left\langle f^{'}(u), v - u \right\rangle \geq 0 \text{ pour tout } v \in H. \tag{2.10}$$

Preuve. Voir Ekeland-Temam [18].■

Notre but est d'appliquer ce théorème pour établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour notre problème de contrôle.

On a $\mathcal{U}$ convexe et $J : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ qui est convexe, continue. Alors pour appliquer le principe de l'optimisation convexe, il nous reste à démontrer que J est Gâteaux différentiable et de dérivée continue.

Lemme 2.3. *Pour tout processus u, v et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a :*

$$X_t^{\lambda u+(1-\lambda)v} = \lambda X_t^u + (1-\lambda) X_t^v \ ; \ \mathcal{P} - ps. \tag{2.11}$$

Preuve. Avant tout, puisque $\mathcal{U}$ est convexe $\lambda u + (1-\lambda) v$ est un élément de $\mathcal{U}$.

La solution associée à $\lambda u + (1-\lambda) v$ est donnée par :

$$\begin{aligned} X_t^{\lambda u+(1-\lambda)v} &= X_0 + \int_0^t \left(A_s X_s^{\lambda u+(1-\lambda)v} + B_s \left(\lambda u_s + (1-\lambda) v_s\right) + C_s \right) ds \\ &\quad + \int_0^t \left(D_s X_s^{\lambda u+(1-\lambda)v} + E_s \left(\lambda u_s + (1-\lambda) v_s\right) + F_s \right) dW_s. \end{aligned}$$

D'une autre part,

$$\begin{aligned} & \lambda X_t^u + (1-\lambda) X_t^v \\ = \ & \lambda X_0 + \int_0^t \left(\lambda A_s X_s^u + \lambda B_s u_s + \lambda C_s\right) ds + \int_0^t \left(\lambda D_s X_s^u + \lambda E_s u_s + \lambda F_s\right) dW_s \\ & + (1-\lambda) X_0 + \int_0^t \left((1-\lambda) A_s X_s^v + (1-\lambda) B_s v_s + (1-\lambda) C_s\right) ds \\ & + \int_0^t \left((1-\lambda) D_s X_s^v + (1-\lambda) E_s v_s + (1-\lambda) F_s\right) dW_s. \end{aligned}$$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$$\begin{aligned}
& X_t^{\lambda u+(1-\lambda)v} - \left[\lambda X_t^u + (1-\lambda) X_t^v\right] \\
= & \int_0^t (\lambda A_s X_s^u + \lambda B_s u_s + \lambda C_s)\, ds + \int_0^t (\lambda D_s X_s^u + \lambda E_s u_s + \lambda F_s)\, dW_s \\
& + \int_0^t ((1-\lambda) A_s X_s^v + (1-\lambda) B_s v_s + (1-\lambda) C_s)\, ds \\
& + \int_0^t ((1-\lambda) D_s X_s^v + (1-\lambda) E_s v_s + (1-\lambda) F_s)\, dW_s. \\
& - \int_0^t \left(A_s X_s^{\lambda u+(1-\lambda)v} + B_s (\lambda u_s + (1-\lambda) v_s) + C_s\right) ds \\
& - \int_0^t \left(D_s X_s^{\lambda u+(1-\lambda)v} + E_s (\lambda u_s + (1-\lambda) v_s) + F_s\right) dW_s
\end{aligned}$$

Par élimination, on aura :

$$\begin{aligned}
& \left[\lambda X_t^u + (1-\lambda) X_t^v\right] - X_t^{\lambda u+(1-\lambda)v} \\
= & \int_0^t A_s \left\{\left[\lambda X_s^u + (1-\lambda) X_s^v\right] - X_s^{\lambda u+(1-\lambda)v}\right\} ds \\
& + \int_0^t D_s \left\{\left[\lambda X_s^u + (1-\lambda) X_s^v\right] - X_s^{\lambda u+(1-\lambda)v}\right\} dW_s.
\end{aligned}$$

Qui est une équation différentielle stochastique linéaire à coefficient bornés. Donc, elle admet une solution forte unique. Puisque 0 est une solution de cette équation, alors 0 est l'unique solution et on obtient :

$$\left[\lambda X_t^u + (1-\lambda) X_t^v\right] - X_t^{\lambda u+(1-\lambda)v} = 0.$$

C'est à dire :

$$X_t^{\lambda u+(1-\lambda)v} = \lambda X_t^u + (1-\lambda) X_t^v.$$

Le lemme est prouvé.■

Lemme 2.4. *Le coût J est convexe.*
Preuve. Pour tout $u,\ v \in U$, $\lambda \in [0,1]$ on a :

$$\begin{aligned}
& J(\lambda u + (1-\lambda) v) \\
= & \mathbb{E}\left[g\left(X_T^{(\lambda u+(1-\lambda)v)}\right)\right] \\
& + \mathbb{E}\left[\int_0^T h\left(t, X_t^{(\lambda u+(1-\lambda)v)}, \lambda u + (1-\lambda) v\right) dt\right].
\end{aligned}$$

Puisque h et g sont convexes et X est linéaires alors, on aura :

$$\begin{aligned}
& J\left(\lambda u+(1-\lambda) v\right) \\
\leq\ & \mathbb{E}\left[\lambda g\left(X_T^u\right)+(1-\lambda) g\left(X_T^v\right)\right] \\
& +\mathbb{E}\left[\int_0^T \lambda h\left(t, X_t^u, u_t\right)+(1-\lambda) h\left(t, X_t^v, v_t\right) dt\right].
\end{aligned}$$

Ce qui nous donnons :

$$J\left(\lambda u+(1-\lambda) v\right) \leq \lambda J(u)+(1-\lambda) J(v).$$

D'où le résultat.■

Lemme 2.5. *Le coût J est Gâteaux-différentiable et on a :*

$$\begin{aligned}
& \left\langle J'(u); v-u\right\rangle \\
=\ & \mathbb{E}\left[g_x\left(X_T\right)\left(X_T^v-X_T\right)\right] \\
& +\mathbb{E}\int_0^T\left[\left(X_t^v-X_t\right).h_x\left(t, X_t, u_t\right)+\left(v_t-u_t\right).h_u(t, X_t, u_t)\right] dt.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Preuve. On calcule la dérivée de Gâteaux de J au point u et de direction $(v-u)$, c'est à dire :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda}\left[J\left(u+\lambda(v-u)\right)-J(u)\right].$$

On a :

$$J(u)=\mathbb{E}\left[g\left(X_T\right)+\int_0^T h\left(t, X_t, v_t\right) dt\right],$$

$$\begin{aligned}
& J\left(u+\lambda(v-u)\right)-J(u) \\
=\ & \mathbb{E}\left[g\left(X_T^{u+\lambda(v-u)}\right)-g\left(X_T^u\right)\right] \\
& +\mathbb{E}\int_0^T\left[h\left(t, X_t^{u+\lambda(v-u)}, u_t+\lambda\left(v_t-u_t\right)\right)-h\left(t, X_t^u, u_t\right)\right] dt.
\end{aligned}$$

Puisque,

$$X_t^{u+\lambda(v-u)}=X_t^u+\lambda\left(X_t^v-X_t^u\right),$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned}
& J\left(u+\lambda\left(v-u\right)\right)-J\left(u\right) \\
= \; & \mathbb{E}\left[g\left(X_T^u+\lambda\left(X_T^v-X_T^u\right)\right)-g\left(X_T^u\right)\right] \\
& +\mathbb{E}\int_0^T\left[h\left(t,X_t^u+\lambda\left(X_t^v-X_t^u\right),u_t+\lambda\left(v_t-u_t\right)\right)-h\left(t,X_t^u,u_t\right)\right]dt.
\end{aligned}$$

En utilisant le développement avec reste intégrale et d'ordre 1, on aura :

$$\begin{aligned}
& J\left(u+\lambda\left(v-u\right)\right)-J\left(u\right) \\
= \; & \lambda\int_0^1\mathbb{E}\left[g_x\left(X_T^u+\alpha\lambda\left(X_T^v-X_T^u\right)\right)\left(X_T^v-X_T^u\right)\right]d\alpha \\
& +\lambda\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 h_x\left(t,X_t^u+\alpha\lambda\left(X_t^v-X_t^u\right),u_t+\alpha\lambda\left(v_t-u_t\right)\right)\left(X_t^v-X_t^u\right)d\alpha dt \\
& +\lambda\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 h_x\left(t,X_t^u+\alpha\lambda\left(X_t^v-X_t^u\right),u_t+\alpha\lambda\left(v_t-u_t\right)\right)\left(v_t-u_t\right)d\alpha dt.
\end{aligned}$$

En divisant par λ, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\lambda}\left[J\left(u+\lambda\left(v-u\right)\right)-J\left(u\right)\right] \\
= \; & \int_0^1\mathbb{E}\left[g_x\left(X_T^u+\alpha\lambda\left(X_T^v-X_T^u\right)\right)\left(X_T^v-X_T^u\right)\right]d\alpha \\
& +\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 h_x\left(t,X^u+\alpha\lambda\left(X_t^v-X_t^u\right),u_t+\alpha\lambda\left(v_t-u_t\right)\right)\left(X_t^v-X_t^u\right)d\alpha dt \\
& +\mathbb{E}\int_0^T\int_0^1 h_v\left(t,X_t^u+\alpha\lambda\left(X_t^v-X_t^u\right),u+\alpha\lambda\left(v_t-u_t\right)\right)\left(v_t-u_t\right)d\alpha dt.
\end{aligned}$$

Puisque g_x, h_x et h_v sont continues, alors en passant à la limite, on aura :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\left[J\left(u+\lambda\left(v-u\right)\right)-J\left(u\right)\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[g_x\left(X_T^u\right)\left(X_T^v-X_T^u\right)\right] \\
& +\mathbb{E}\int_0^T h_x\left(t,X^u,u\right)\left(X_t^v-X_t^u\right)dt+\mathbb{E}\int_0^T h_v\left(t,X^u,u_t\right)\left(v_t-u_t\right)dt.
\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
& \langle J'(u); v-u\rangle \\
= \; & \mathbb{E}\left[g_x\left(X_T\right)\left(X_T^v - X_T^u\right)\right] \\
& +\mathbb{E}\int_0^T \left[h_x\left(t, X_t, u_t\right)\left(X_t^v - X_t^u\right) + h_u(t, X_t, u_t)\left(v_t - u_t\right)\right] dt.
\end{aligned}$$

D'où le résultat.■

Lemme 2.6. *le contrôle optimale u minimise le coût J sur U si et seulement si pour tout $v \in U$, on a :*

$$\begin{aligned}
0 \; \leq \; & \mathbb{E}\left[g_x\left(X_T^u\right)\left(X_T^v - X_T^u\right)\right] \\
& +\mathbb{E}\int_0^T \left[h_x\left(t, X_t, u_t\right)\left(X_t^v - X_t^u\right) + h_u(t, X_t, u_t)\left(v_t - u_t\right)\right] dt.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Preuve. On a $\mathcal{U}$ convexe et $J : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ qui est convexe, continue, Gâteaux différentiable et de dérivée continue, alors par le principe de l'optimisation convexe, on a u minimise J sur $\mathcal{U}$ si et seulement si :

$$\langle J'(u); v-u\rangle \geq 0.$$

Puisque :

$$\begin{aligned}
& \langle J'(u); v-u\rangle \\
= \; & \mathbb{E}\left[g_x\left(X_T^u\right)\left(X_T^v - X_T^u\right)\right] \\
& +\mathbb{E}\int_0^T \left[h_x\left(t, X_t, u_t\right)\left(X_t^v - X_t^u\right) + h_u(t, X_t, u_t)\left(v_t - u_t\right)\right] dt.
\end{aligned}$$

Alors u minimise J sur $\mathcal{U}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
0 \; \leq \; & \mathbb{E}\left[g_x\left(X_T^u\right)\left(X_T^v - X_T^u\right)\right] \\
& +\mathbb{E}\int_0^T \left[h_x\left(t, X_t, u_t\right)\left(X_t^v - X_t^u\right) + h_u(t, X_t, u_t)\left(v_t - u_t\right)\right] dt.
\end{aligned}$$

Le lemme est prouvé.■

2.3 Equation adjointe

Partant du lemme 2.6, on va établir des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité. Considérons l'équation linéaire matricielle suivante associée à l'équation d'état :

$$\begin{cases} d\Phi_t = A_t \Phi_t dt + D_t \Phi_t dW_t, \\ \Phi_0 = I_d. \end{cases} \tag{2.14}$$

Cette équation est linéaire à coefficients bornés. Donc, elle admet une solution forte unique. De plus, cette solution est inversible, et son inverse Ψ_t vérifie :

$$\begin{cases} d\Psi_t = & \left[D_t \Psi_t D_t^* - A_t \Psi_t \right] dt - D_t \Psi_t dW_t, \\ \Psi_0 = & I_d. \end{cases} \tag{2.15}$$

De plus, Φ_t et Ψ_t sont continues et vérifient :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0,T]} |\Phi_t|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0,T]} |\Psi_t|^2 \right] < \infty. \tag{2.16}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \alpha_t &= \Psi_t \left(X_t^v - X_t^u \right), \\ X &= \Phi_T^* g_x \left(X_T^u \right) + \int_0^T \Phi_s^* h_x \left(s, X_s, u_s \right) ds, \\ Y_t &= \mathbb{E} \left[X / \mathcal{F}_t \right] - \int_0^t \Phi_s^* h_x \left(s, X_s, u_s \right) ds. \end{aligned}$$

On remarque que :

$$\mathbb{E} \left[g_x \left(X_T^u \right) \left(X_T^v - X_T^u \right) \right] = \mathbb{E} \left[\alpha_T Y_T \right].$$

Puisque g_x et h_x sont bornés, alors X est de carré intégrable. Donc, $\mathbb{E} \left[X \ / \ \mathcal{F}_t \right]$ est une martingale de carré intégrable. Puisque $\left(\mathcal{F}_t \right)_t = \sigma \left(B_s ; 0 \leq s \leq t \right)$ est la filtration naturelle du mouvement Brownien B, alors par le théorème de représentation d'Itô, on a :

$$Y_t = \mathbb{E} \left[X \right] + \int_0^t Q_s dW_s - \int_0^t \Phi_s^* h_x \left(s, X_s, u_s \right) ds. \tag{2.17}$$

Où Q_s est un processus adapté, tel que :

$$\mathbb{E} \int_0^T |Q_s|^2 \, ds < \infty. \tag{2.18}$$

En appliquant la formule d'Itô à α_t, puis à $\alpha_t Y_t$.
On obtient :

$$0 \leq \mathbb{E} \int_0^T H_u\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right)\left(v_t - u_t\right) dt.$$

Où p et q sont des processus adaptés donnés par :

$$\begin{aligned} p_t &= \Psi_t^* Y_t \quad ; \quad p \in \mathcal{L}^2\left([0,T]\,; \mathbb{R}^n\right), \\ q_t &= \sigma_x^* p_t - \Psi_t^* Q_t \quad ; \quad q \in \mathcal{L}^2\left([0,T]\,; \mathbb{R}^{n \times d}\right). \end{aligned}$$

et le Hamiltonien H est défini de $[0,T] \times \mathbb{R}^n \times A_1 \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}_{n\times d}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$H\left(t,x,u,p,q\right) = h\left(t,x,u\right) + b^*\left(t,x,u\right)p - \sigma\left(t,x,u\right)q_t.$$

En appliquant la formule d'Itô à p, on obtient l'équation adjointe qui est une équation différentielle stochastique rétrograde donnée par :

$$\begin{cases} -dp_t = H_x\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right) dt + q_t dW_t, \\ p_T = g_x\left(X_T\right). \end{cases} \tag{2.19}$$

De plus, le processus adjoint est donné explicitement par :

$$p_t = \mathbb{E}\left[\Psi_t^* \Phi_T^* g_x(X_T) \;/\; \mathcal{F}_t\right] + \Psi_t^* \int_t^T \Phi_s^* h_x\left(s, X_s, u_s\right) ds.$$

2.4 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous forme faible

Dans cette section, on donne les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous forme faible.

Théorèmes 2.7. *u minimise le coût J sur U si et seulement si il existe une unique paire de processus adaptés :*

$$(p,q) \in \mathcal{L}^2\left([0,T]\,; \mathbb{R}^d\right) \times \left(\mathcal{L}^2\left([0,T]\,; \mathbb{R}^d\right)\right)^d,$$

solution de l'équation adjointe, tels que pour tout $v \in U$, on a :

$$0 \leq \mathbb{E} \int_0^T H_u\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right)\left(v_t - u_t\right) dt. \tag{2.20}$$

Preuve. Le résultat est une conséquence directe de l'inéquation variationnelle.■

Théorème 2.8. *u minimise le coût J sur U, si et seulement si il existe une unique paire de processus adaptés :*

$$(p,q) \in \mathcal{L}^2\left([0,T]\,;\mathbb{R}^d\right) \times \left(\mathcal{L}^2\left([0,T]\,;\mathbb{R}^d\right)\right)^d,$$

solution de l'équation adjointe, tels que pour tout $v \in U$, on a :

$$H_u\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right)\left(v_t - u_t\right) \geq 0 \;;\; \forall v \in A_1 \; p.s \tag{2.21}$$

Preuve. Par le théorème 2.7, on a :

$$0 \leq \mathbb{E}\int_0^T H_u\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right)\left(v_t - u_t\right) dt.$$

Soit $t \in [0,T]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit le contrôle :

$$v_s^{\varepsilon} = \begin{cases} v_s & \text{on} \quad [t, t+\varepsilon]\,, \\ u_s & \text{si non.} \end{cases}$$

Il est évident que v^{ε} est un élément de $\mathcal{U}$. Alors, en appliquant l'inégalité précédente à v_s^{ε} et en divisant par ε, on obtient :

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} H_u\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right)\left(v_s - u_t\right) ds\right].$$

En passant à la limite quand ε tend vers 0, on aura :

$$0 \leq \mathbb{E}\left[H_u\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right)\left(v_s - u_t\right)\right].$$

Soit A un élément arbitraire de la tribu $\mathcal{F}_t$;et on pose :

$$\pi_t = v_t \mathbf{1}_A + u_t \mathbf{1}_{\Omega - A}.$$

Il est clair que $\pi \in \mathcal{R}$. En appliquant la dernière inégalité à π, on obtient :

$$0 \leq \mathbb{E}[\mathbf{1}_A H_u\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right)\left(v_s - u_t\right)],\ \forall A \in \mathcal{F}_t,$$

Ce qui implique que :

$$0 \leq \mathbb{E}[H_u\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right)\left(v_s - u_t\right) \ / \ \mathcal{F}_t].$$

La quantité à l'intérieur de l'espérance conditionnelle est $\mathcal{F}_t-$mesurable. Ce qui donne le résultat.■

2.5 Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité sous forme forte

Théorème 2.9. *u minimise le coût J sur U si et seulement si il existe une unique paire de processus adaptés :*

$$(p, q) \in \mathcal{L}^2\left([0, T]\,; \mathbb{R}^d\right) \times \left(\mathcal{L}^2\left([0, T]\,; \mathbb{R}^d\right)\right)^d,$$

solution de l'équation adjointe, tels que pour tout $v \in U$, on a :

$$H\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right) = \inf_{v \in U} H\left(t, X_t, v, p_t, q_t\right). \tag{2.22}$$

Preuve. On a $\mathcal{U}$ convexe et $H\left(t, X_t, ., p_t, q_t\right) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, continue, Gâteaux différentiable et de dérivée continue, alors par le principe de l'optimisation convexe, on a u minimise $H\left(t, X_t, ., p_t, q_t\right)$ sur $\mathcal{U}$ si et seulement si :

$$H_u\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right)\left(v - u_t\right) \geq 0\ ;\ \forall v \in U.$$

Par le théorème (2.8), on a u minimise le coût J sur $\mathcal{U}$, si et seulement si :

$$H_u\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right)\left(v - u_t\right) \geq 0\ ;\ \forall v \in U.$$

Donc, u minimise le coût J sur $\mathcal{U}$, si et seulement si :

$$H\left(t, X_t, u_t, p_t, q_t\right) = \inf_{v \in U} H\left(t, X_t, v, p_t, q_t\right).$$

Ce qui prouve le théorème.■

Chapitre 3

Application en finance

Dans ce chapitre, on va appliquer les résultats du chapitre précèdent à la finance. On étudie trois exemples d'optimisation dans des marchés financiers. Le premier exemple est le classique problème d'investissement et de consommation de BLack - Scholes. Le deuxième exemple concerne le problème de minimisation de la variance (mean-variance) de la richesse finale dans un marché financier. Le troisième est une combinaison des deux premiers exemples.

3.1 Exemple 1. Consommation investissement

Supposons qu'un portefeuille est investit dans un marché constitué de capitaux risque-libres avec un taux d'intérêt r_t et de capitaux risqués avec le taux de rendement μ_t et de volatilité σ_t.

Supposons qu'on a de possibilités d'investissement

i) le prix $S_0(t)$ au temps t est donné par :

$$dS_0(t) = r_t S_0(t)dt, \quad S_0(0) > 0, \tag{3.1}$$

ii) le prix $S_1(t)$ au temps t est donné par :

$$dS_1(t) = S_1(t)\left(\mu_t dt + \sigma_t dW_t\right), \quad S_1(0) > 0. \tag{3.2}$$

Où $\mu_t > r_t, \ \sigma_t \neq 0$ sont bornées et déterministe.

Définition 3.1. *Un portefeuille ζ est un processus prévisible $\zeta_t = (\zeta_0(t), \zeta_1(t)) \in R^2$. La richesse correspondante X_t^ζ est donné par :*

$$X_t^\zeta = \zeta_0(t) S_0(t) + \zeta_1(t) S_1(t), \ t \geq 0. \tag{3.3}$$

Le portefeuille est auto-finançant si :

$$dX_t = \zeta_0(t)\, dS_0(t) + \zeta_1(t)\, dS_1(t). \tag{3.4}$$

Soit $\pi_t = \zeta_1(t) S_1(t)$ la quantité de monnaies investit dans la sécurité risquée.

On suppose que l'agent retire la consommation de son capital et on note par c_t le taux de consommation.

En combinant les quatre dernières équations, on obtient l'équation du capital richesse et qui est donnée par :

$$\begin{cases} dX_t = [r_t X_t + (\mu_t - r_t)\pi_t - c_t]\,dt + \pi_t \sigma_t dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{3.5}$$

Définition 3.2. *Une stratégie admissible est une pair de processus adaptés (π, c) telle que*

$$\mathbb{E}\,|X_t|^2 < \infty.$$

On note par A l'ensemble de toutes les stratégies admissibles.

Le problème de l'investisseur est d'assigner une quantité (π_t) telle que à chaque instant t, on obtient une stratégie $(\widehat{\pi}_t, \widehat{c}_t)$ qui maximise la consommation et l'investissement représentée par une fonction d'utilité F escompté à un taux d'escompte constant β. Plus précisément, le problème consiste à choisir une stratégie optimale $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ qui maximise la fonction :

$$J(\pi, c) = \mathbb{E}\left[e^{-\beta T} F(X_T) + \int_0^T e^{-\beta t} F(c_t)dt\right]. \tag{3.6}$$

On suppose que la fonction d'utilité est de type HARA (hyperbolic absolute risk aversion). C'est à dire, $F(X) = \dfrac{X^\gamma}{\gamma}$, où $\gamma \in (0,1)$.

La fonction d'utilité doit vérifier :

$$\begin{aligned} &F \text{ est strictement croissante, concave et } C^1(0,+\infty), \\ &F(X) \leq C(1+X)^\gamma \text{ avac } 0<\gamma<1 \text{ et } F(0) \geq 0, \\ &\lim_{X\to\infty} F'(X) = 0 \\ &\lim_{X\to 0} F'(X) = \infty. \end{aligned}$$

Les fonctions d'utilité de type HARA sont souvent utilisées en finance. Le paramètre γ peut être interprété comme une mesure de sensitivité du risque. Si $\gamma = 0$, la HARA utilité est $F(X) = \ln X$.

En analogie avec le problème de contrôle du chapitre précédent, on a :

$$J(\pi, c) = \mathbb{E}\left[-e^{-\beta T}\frac{X_T^\gamma}{\gamma} - \int_0^T e^{-\beta t}\frac{c_t^\gamma}{\gamma}dt\right]. \tag{3.7}$$

Une stratégie $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ est optimale si,

$$J\left(\widehat{\pi}, \widehat{c}\right) = \min_{(\pi,c)\in\mathcal{A}} J\left(\pi, c\right). \tag{3.8}$$

Le Hamiltonien est donné par :

$$H\left(t, x, \pi, c, p, P\right) = -\frac{c^{\gamma}}{\gamma} e^{-\beta t} + p\left[rx + (\mu - r)\,\pi - c\right] + P\sigma\pi. \tag{3.9}$$

L'équation adjointe est de la forme :

$$\begin{cases} dp_t = -r_t p_t dt + P_t dW_t, \\ p_T = e^{-\beta T} X_T^{\gamma-1}. \end{cases} \tag{3.10}$$

Soit $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ une stratégie candidate à être optimale et $\widehat{x}$ la solution de l'équation correspondante associée. On note par $\left(\widehat{p}, \widehat{P}\right)$ la solution de l'équation adjointe associée.

La principale idée pour obtenir un optimale stratégie $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ est d'utiliser les conditions suffisantes du théorème 2.8 du chapitre 2 précédent.

En utilisant le théorème 2.8, $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ est optimale si ;

$$H\left(t, \widehat{X}_t, \widehat{\pi}_t, \widehat{c}_t, \widehat{p}_t, \widehat{P}_t\right) \leq H\left(t, \widehat{X}_t, \pi_t, c_t, \widehat{p}_t, \widehat{P}_t\right),\ \forall\,(\pi, c) \in \mathcal{A}. \tag{3.11}$$

Le Hamiltonien H est linéaire en π et convexe en c. Alors, les valeurs de $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ qui minimisent $H\left(t, \widehat{X}_t, ., ., \widehat{p}_t, \widehat{P}_t\right)$ sont données par les équations suivantes :

$$\widehat{p}_t + e^{-\beta t}\widehat{c}_t^{\gamma-1} = 0,$$

$$\widehat{p}_t\left(\mu_t - r_t\right) + \widehat{P}_t\sigma_t = 0.$$

Puisqu'on devine que la consommation est proportionnelle à la richesse $\widehat{X}_t$, alors pour tout fonction déterministe différentiable A_t, on pose :

$$\widehat{p}_t = -A_t\widehat{x}_t^{\gamma-1}, \quad A_T = -e^{-\beta T}.$$

En appliquant la formule d'Itô à $\widehat{p}_t$ et en comparant avec l'équation adjointe et en identifiant les termes en dt et dW_t, on obtient :

$$\left(A_t' + \gamma r_t A_t\right)\widehat{X}_t + (\gamma - 1)\,A_t\left[\left(\mu_t - r_t\right)\widehat{\pi}_t - \widehat{c}_t\right] = 0,$$

$$\widehat{P}_t = -\left(\gamma - 1\right)\widehat{\pi}_t\sigma_t A_t\widehat{X}_t^{\gamma-2},$$

Substituant les valeurs de $\widehat{p}_t$ et $\widehat{P}_t$, on aura :

$$A_t\left[\left(\mu_t - r_t\right)\widehat{X}_t + \left(\gamma - 1\right)\widehat{\pi}_t\sigma_t^2\right] = 0,$$

En comparant les termes en $\widehat{X}_t$, on aura :

$$\begin{aligned} A_t^{'} + \gamma r_t A_t &= 0. \\ \left(\gamma - 1\right) A_t\left[\left(\mu_t - r_t\right)\widehat{\pi}_t - \widehat{c}_t\right] &= 0, \end{aligned}$$

Par un simple calcul, on aura :

$$A_t = -\exp\left(-\beta T + \int_t^T \gamma r_s ds\right).$$

Ceci prouve que $A_t \neq 0$. Donc, en combinant ces dernières équations, l'optimal stratégie est donnée par :

$$\widehat{\pi}_t = \frac{\mu_t - r_t}{\left(1 - \gamma\right)\sigma_t^2}\widehat{x}_t, \tag{3.12}$$

$$\widehat{c}_t = \frac{\left(\mu_t - r_t\right)^2}{\left(1 - \gamma\right)\sigma_t^2}\widehat{x}_t. \tag{3.13}$$

La relation entre $\widehat{\pi}_t$ et $\widehat{c}_t$ est donnée par :

$$\widehat{c}_t = \left(\mu_t - r_t\right)\widehat{\pi}_t. \tag{3.14}$$

3.2 Exemple 2. Moyenne-variance

On considère dans cet exemple une variante du premier, où la dynamique de la richesse est gouvernée par :

$$\begin{cases} dX_t = \left[r_t X_t + \left(\mu_t - r_t\right)\pi_t\right] dt + \pi_t\sigma_t dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{3.15}$$

L'objectif est de trouver un investissement optimal qui minimise la moyenne de la variance de la richesse finale, sous la contrainte que la richesse reste positive à chaque instant t. C'est à dire, trouver un investissement optimal $\widehat{\pi}$ qui minimise la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} &J\left(\pi, c\right) = \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[X_T] - X_T\right)^2\right], \\ &\text{sous la contrainte,} \\ &\mathbb{E}[X_T] = d > 0. \end{aligned}$$

En utilisant la méthode de multiplicateur de Lagrange, ce problème est réduit à une minimisation sans contrainte de la fonctionnelle suivante :

$$J(\pi) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[(a - X_T)^2\right]. \tag{3.16}$$

Une stratégie admissible $\widehat{\pi}$ est dite optimale si,

$$J(\widehat{\pi}) = \min_{\pi \in \mathcal{A}} J(\pi). \tag{3.17}$$

Le Hamiltonien dans ce cas est donné par :

$$H(t, x, \pi, p, P) = p\left[rx + (\mu - r)\pi\right] + P\sigma\pi. \tag{3.18}$$

L'équation adjointe est :

$$\begin{cases} dp_t = -r_t p_t dt + P_t dW_t, \\ p_T = X_T - a. \end{cases} \tag{3.19}$$

Le principe de la programmation dynamique ne peut pas être appliqué directement dans ca cas de problème avec contrainte avec la condition terminale p.s $\widehat{p}_T = g_x(\widehat{X}_T)$. Cependant, les conditions suffisantes (théorèm 2.8, Chapitre 2) peuvent être appliquée si on remplace la condition terminale, alors :

$$\mathbb{E}[(\widehat{X}_T - X_T)g_x(x_T)] \geq \mathbb{E}[(\widehat{X}_T - X_T)\widehat{p}_T)]. \tag{3.20}$$

Puisque H est linéaire en c et π, alors les valeurs de c et π qui minimisent H sont données par :

$$\widehat{p}_t(\mu - r) + \widehat{P}_t\sigma_t = 0. \tag{3.21}$$

Puisque p_T est linéaire en x et qu'on devine qu'il est optimal de consommer à un taux proportionnel à la richesse $\widehat{X}_t$, alors pour une fonction déterministe et différentiable A_t, on pose :

$$\widehat{p}_t = A_t\widehat{X}_t + B_t, \quad A_T = 1;\ B_T = -a.$$

En appliquant la formule d'Itô à $\widehat{p}_t$, on a :

$$d\widehat{p}_t = \left[A_t^{'}\widehat{X}_t + A_t r_t X_t + A_t(\mu_t - r_t)\pi_t + B_t^{'}\right]dt + A_t\pi_t\sigma_t dW_t \tag{3.22}$$

En comparant avec l'équation adjointe et en identifiant les coefficient de dt et dW_t, on aura :

$$r_t\widehat{p}_t + A_t^{'}\widehat{X}_t + A_t r_t\widehat{X}_t + A_t(\mu_t - r_t)\widehat{\pi}_t + B_t^{'} = 0$$

$$\widehat{P}_t = A_t \widehat{\pi}_t \sigma_t$$

En remplaçant $\widehat{p}_t$ et $\widehat{P}_t$ par leurs valeurs dans les équations, on obtient :

$$2r_t A_t \widehat{X}_t + A_t^{'} \widehat{X}_t + A_t \left(\mu_t - r_t\right) \widehat{\pi}_t + B_t^{'} + r_t B_t = 0$$

$$\left(\mu - r\right) A_t \widehat{X}_t + B_t \left(\mu - r\right) + A_t \widehat{\pi}_t \sigma_t^2 = 0.$$

Ces deux équations nous donnent :

$$\widehat{\pi}_t = \frac{\left(\mu - r\right)}{\sigma_t^2} \left(\widehat{X}_t + \frac{B_t}{A_t} \right). \tag{3.23}$$

$$\widehat{\pi}_t = \left[\frac{2r_t}{-\left(\mu_t - r_t\right)} + \frac{A_t^{'}}{-A_t \left(\mu_t - r_t\right)} \right] \widehat{X}_t - \frac{B_t^{'}}{A_t \left(\mu_t - r_t\right)} - \frac{r_t B_t}{A_t \left(\mu_t - r_t\right)} \tag{3.24}$$

En identifiant, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{A_t^{'}}{A_t} &= -\frac{\left(\mu - r\right)^2}{\sigma_t^2} - 2r_t \\ \frac{B_t^{'}}{B_t} &= -\left[\frac{\left(\mu - r\right)^2}{\sigma_t^2} + r_t \right] \end{aligned} \tag{3.25}$$

Les solutions de ces deux équations sont données par :

$$\begin{aligned} A_t &= \exp\left(\int_t^T \left(\frac{\left(\mu_s - r_s\right)^2}{\sigma_s^2} + 2r_s \right) ds \right) \\ B_t &= -a \exp\left(\int_t^T \left(\frac{\left(\mu_s - r_s\right)^2}{\sigma_s^2} + r_s \right) ds \right) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Puisque :

$$\widehat{\pi}_t = \frac{\left(\mu - r\right)}{\sigma_t^2} \left(\widehat{X}_t + \frac{B_t}{A_t} \right), \tag{3.27}$$

Alors la stratégie optimale est donnée par :

$$\widehat{\pi}_t = \frac{\left(\mu - r\right)}{\sigma_t^2} \left(\widehat{X}_t - a \exp\left(\int_t^T -r_s ds \right) \right). \tag{3.28}$$

3.3 Exemple 3. Problème mixte

Dans cet exemple, on étudie une combinaison entre les deux premiers. On considère un problème mixte qui consiste à minimiser la moyenne de la variance et maximiser la consommation. Le système est gouverné par l'équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX_t = [r_t X_t + (\mu_t - r_t)\,\pi_t - c_t]\,dt + \pi_t \sigma_t dW_t, \\ X_0 = x. \end{cases} \tag{3.29}$$

L'objectif est de trouver une stratégie optimale qui maximise la fonction d'utilité de la consommation et en même temps minimise la moyenne de la variance de la richesse finale, sous la contrainte que la richesse reste positive. Plus précisément, on veut minimiser la fonctionnelle :

$$\begin{array}{l} J\,(\pi, c) = \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}[X_T] - X_T)^2 - \int_0^T e^{-\beta t} F(c_t) dt\right], \\ \text{sous la contrainte,} \\ \mathbb{E}[X_T] = d > 0. \end{array} \tag{3.30}$$

En utilisant la méthode de multiplicateur de Lagrange, ce problème est réduit à une minimisation sans contrainte de la fonctionnelle suivante :

$$J\,(\pi, c) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}(a - X_T)^2 - \int_0^T e^{-\beta t} \frac{c_t^\gamma}{\gamma} dt\right]. \tag{3.31}$$

Une stratégie admissible $(\widehat{\pi}, \widehat{c})$ est dite optimale ; si

$$J\,(\widehat{\pi}, \widehat{c}) = \min_{(\pi,c)\in\mathcal{A}} J\,(\pi, c)\,.$$

Le Hamiltonien est donnée par :

$$H\,(t, x, \pi, c, p, P) = -\frac{c^\gamma}{\gamma} e^{-\beta t} + p\,[rx + (\mu - r)\,\pi - c] + P\sigma\pi. \tag{3.32}$$

L'équation adjointe est :

$$\begin{cases} dp_t = -r_t p_t dt + P_t dW_t, \\ p_T = X_T - a. \end{cases} \tag{3.33}$$

Puisque p_T est linéaire en x et qu'on devine qu'il est optimal de consommer à un taux proportionnel à la richesse $\widehat{X}_t$, alors pour une fonction déterministe et différentiable A_t, on pose :

$$\widehat{p}_t = A_t \left(a - \widehat{X}_t\right)^{\gamma-1}, \quad A_T = -\left(a - \widehat{X}_T\right)^{2-\gamma}.$$

Ce choix de $\widehat{p}$ concorde avec l'équation adjointe. En effet, on a :

$$\widehat{p}_T = -\left(a - \widehat{X}_T\right)^{2-\gamma} \left(a - \widehat{X}_T\right)^{\gamma-1} = \widehat{X}_T - a,$$

Qui est exactement la condition terminale de l'équation adjointe

En utilisant la même méthode que dans le premier exemple, la stratégie optimale est donnée par :

$$\begin{aligned} \widehat{\pi}_t &= \frac{(\mu_t - r_t)}{(1-\gamma)\,\sigma_t^2}\left(a - \widehat{X}_t\right), \qquad (3.34) \\ \widehat{c}_t &= \frac{(\mu_t - r_t)^2}{(1-\gamma)\,\sigma_t^2}\left(a - \widehat{X}_t\right) + r_t a. \end{aligned}$$

La relation entre $\widehat{\pi}_t$ et $\widehat{c}_t$ est donnée par :

$$\widehat{c}_t = (\mu_t - r_t)\,\widehat{\pi}_t + r_t a. \qquad (3.35)$$

Bibliographie

[1] N. U. Ahmed, *Dynamic systems and control with applications*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.

[2] V.I. Arkin, M.T. Saksonov (1979), *Necessary optimality conditions for stochastic differential équations*, Soviet. Math. Dokl. 20, pp 1-5.

[3] K. Bahlali, B. Mezerdi, Y. Ouknine (1996), *Maximum principle in optimal control of a diffusion with non smooth coefficients,* Stochastics & Stoch. Reports, Vol. 57, 303-316.

[4] K. Bahlali , B. Mezerdi, Y. Ouknine (1998), *Pathwise uniqueness and approximation of solutions of stochastic differential équations,* Sem.de proba. XXXII, Edit. J. Azema, P.A Meyer, M. Yor, Lecture Notes in Math. 1686, pp. 166-187, Springer Verlag.

[5] K. Bahlali , B. Mezerdi (1996), *Some L^p local estimates related to the solution of a stochastic differential equation and application to stochastic flows,* Random Operat. & Stoch. Equat. Vol. 4, N°1, pp 9-18.

[6] S. Bahlali and A. Chala, *The stochastic maximum principle in optimal control of singular diffusions with non linear coefficients*, Rand. Operat. and Stoch. Equ, Vol. 18, 2005, no 1, pp 1-10.

[7] S. Bahlali and B. Mezerdi, (2005), *A general stochastic maximum principle for singular control problems,* Elect. J. of Probability, Vol. 10, Paper no 30, pp 988-1004.

[8] S. Bahlali, B. Mezerdi and B. Djehiche, *Approximation and optimality necessary conditions in relaxed stochastic control problems,* Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, Volume 2006, pp 1-23.

[9] S. Bahlali and B. Labed, *Necessary and sufficient conditions of optimality for optimal control problem with initial and terminal costs*, Rand. Operat. and Stoch. Equ, 2006, Vol 14, No3, pp 291-301.

[10] S. Bahlali, B. Djehiche and B. Mezerdi, *The relaxed maximum principle in singular control of diffusions*, SIAM J. Control and Optim, 2007, Vol 46, Issue 2, pp 427-444.

[11] S. Bahlali, *Necessary and sufficient conditions of optimality for relaxed and strict control problems*, SIAM J. Control and Optim, 2008, Vol. 47, No. 4, pp. 2078–2095.

[12] S. Bahlali, *Necessary and sufficient condition of optimality for optimal control problem of forward and backward systems*, Theory of Probability and Its Applications (TVP), To Appear (2009).

[13] A. Bensoussan (1982), *Non linear filtering and stochastic control.* Proc. Cortona 1981, Lect. notes in Math. 972, Springer Verlag.

[14] J.M Bismut (1973), *Conjugate convex functions in optimal stochastic control.* J. Math. Anal. Appl. 44, 384-404.

[15] J.M Bismut (1976), *Théorie probabiliste du contrôle des diffusions.* Mem. AMS 4, N°167.

[16] J.M Bismut (1978), *An introductory approach to duality in optimal stochastic control.* SIAM Review 20, pp. 62-78.

[17] A. Cadenillas, I. Karatzas (1995), *The stochastic maximum principle for linear convex optimal control with random coefficients*, SIAM J. Cont. Optim., Vol. 33, No 2, pp.590-624.

[18] I. Ekeland and R. Temam (1974), *Analyse convexe et problème variationnel*, Dunod.

[19] N. El Karoui (1981), *Aspects probabilistes du contrôle stochastique.* L.N.M 876, Springer Verlag.

[20] R.J. Elliott, *The optimal control of diffusions*, Appl. Math. Optim., 1990, 22, pp.229-240.

[21] R.J. Elliott and M. Kohlmann, *The second order minimum principle and adjoint process.* Stochastics and Stoch. Rep., 1994, Vol. 46, pp.25-39.

[22] N.F. Framstad, B. Øksendal and A. Sulem, *A sufficient stochastic maximum principle for optimal control of jump diffusions and applications to finance*, J. Optim. Theory and applications. 121, 2004, pp 77-98.

[23] I. Gikhman, A.V Skorokhod (1974), *Stochastic differential equations*, Springer Verlag.

[24] U.G Haussmann (1976), *General necessary conditions for optimal control of stochastic systems*, Math. Programming Studies 6, pp 30-48.

[25] U.G Haussmann (1986), *A Stochastic maximum principle for optimal control of diffusions.* Pitman Research Notes in Math. Series 151.

[26] N. Ikeda, S. Watanabe (1989), *Stochastic differential equations and diffusion processes.* Kodansha North Holland, 2nd Edition.

[27] I. Karatzas, S. Shreve (1989), *Brownian motion and stochastic calculus.* Springer Verlag.

[28] N.V Krylov (1980), *Controlled diffusion processes.* Springer Verlag.

[29] H.J. Kushner (1973), *Necessary conditions for continuous parameter stochastic optimisation problèms,* SIAM J. Control Optim., Vol. 10, pp 550-565.

[30] R.C Merton (1990), *Continuous time finance*, Blackwell.

[31] B. Mezerdi and S. Bahlali, *Approximation in optimal control of diffusion processes*, Rand. Operat. and Stoch. Equ, 2000, Vol.8, No 4, pp 365-372.

[32] B. Mezerdi and S. Bahlali, *Necessary conditions for optimality in relaxed stochastic control problems*, Stochastics And Stoch. Reports, 2002, Vol 73 (3-4), pp 1-218.

[33] B. ∅ksendal (1998), *Stochastic differential equations : an introduction with applications,* 5th Edition, Springer verlag.

[34] B. Øksendal and A. Sulem, *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions.* Second Edition, Springer 2007.

[35] E. Pardoux, S.Peng (1990), *Adapted solutions of backward stochastic differential equations*, Sys. Control Letters, Vol. 14, 55-61.

[36] S. Peng (1990), *A general stochastic maximum principle for optimal control problems.* SIAM Jour.Cont. Optim.28, N° 4, pp 966-979.

[37] L.S Pontriagin, V.G Boltyanskii, R.V Gamkrelidze (1962), *The mathematical theory of optimal processes.* Interscience N.Y.

[38] J. Yong, X.Y Zhou (1999), *Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations,* Springer Verlag.