

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
Republique Algerienne Democratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministere de l'enseignement superieur et de la recherche scientifique

UIVERSITE BISKRA
FACULTE- SCIENCES ET TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT GENIE CIVIL ETHYDRAULIQUE
REFERENCE:.....



كلية العلوم والتكنولوجيا
الهندسة المدنية والري
.....:

THÈSE PRESENTE EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME:

DOCTORAT EN SCIENCES

Génie Civil

**MODÉLISATION NUMÉRIQUE DE L'EFFET DES
VIEILLISSEMENTS DE POUTRE EN BÉTON ARMÉ
SOUS CHARGE MÉCANIQUE**

PAR:

BOUSSOUAR AISSA

À 10/04/2025

DEVANT LE JURY:

Dr M.O. BELARBI	MCA	PRESIDENT	Université de Biskra
Pr TAALLAH BACHIR	PROFESSEUR	Encadreur	Université de Biskra
Dr ATTIA BACHIRI	MCA	Examineur	Université de Laghouat
Dr HAMZA DIF	MCA	Examineur	Université de Djelfa



محضر المداولات رقم: 2025/ 09
ليوم: الخميس 2025/04/10 في الساعة: 16:00
Du
Filière : هندسة مدنية
الشعبة :
دكتوراه علوم في: هندسة مدنية
التخصص: /
Nom et prénom d'étudiant: بوصوار عيسى
لقب و اسم الطالب:
Date de naissance: 1985/04/10
تاريخ الميلاد:
Lieu: Wilaya : ولاية: الجلفة
ب: الجلفة

L'intitulé de la thèse : **Modélisation numérique de l'effet des vieillissements de poutre en béton armé sous charge mécanique**

Les membres du jury:
بناء على مقرة ترخيص رقم: 2025/18 المؤرخ في: 2025/03/19

الإمضاء	الصفة	المؤسسة	الرتبة	الإسم و اللقب
	رئيسا	جامعة بسكرة	أستاذ محاضر أ	بلعربي محمد وجدي
	مشرفا	جامعة بسكرة	أستاذ	طاح الله بشير
	مناقشا	جامعة الاغواط	أستاذ محاضر أ	بشير عطية
	مناقشا	جامعة الجلفة	أستاذ محاضر أ	ضيف حمزة

Décision et recommandations du jury : قرار و توصيات لجنة المداولات:

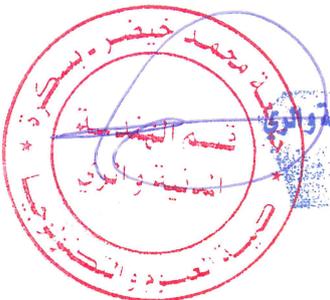
Le sujet est d'actualité. la thèse est bien rédigée et le candidat a pu répondre à la majorité des questions. la présentation est claire et bien présentée. Le jury a proposé l'ajuster le titre de la thèse comme suit : "Modélisation numérique des poutres composites sous chargement mécanique ". par conséquent, le jury décerne le diplôme doctorat science en Génie Civil avec la mention très honorable.

التقدير	La mention
	Très Honorable

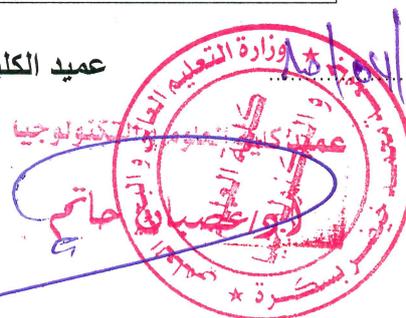
رئيس القسم

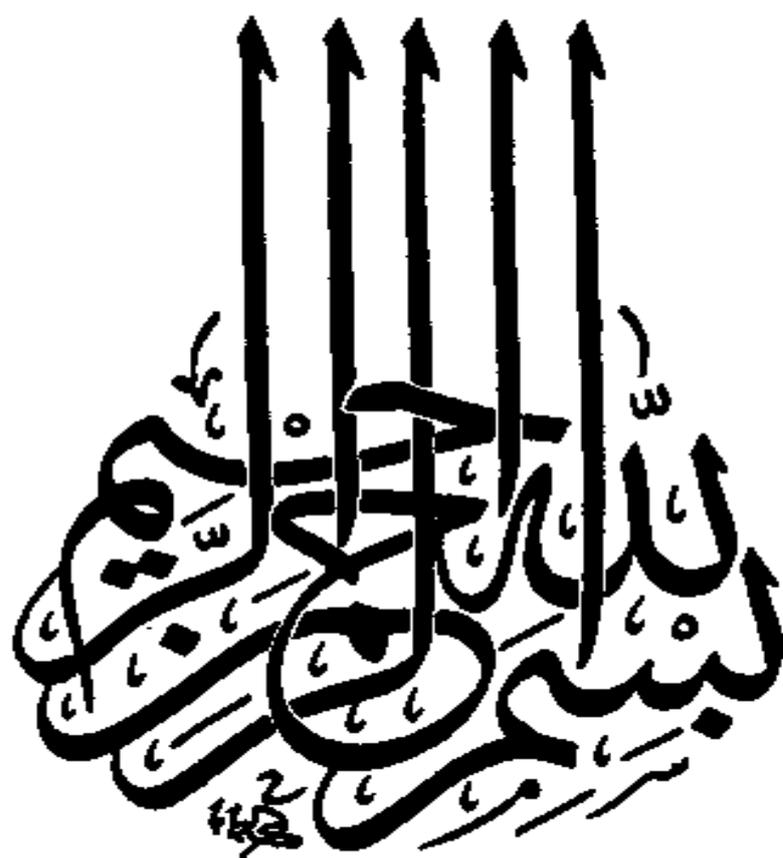
عميد الكلية

التاريخ: 2025/04/10



رئيس قسم مكلف بتسيير قسم الهندسة المدنية والري
د/بوريش فوزي





DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

A mes parents

A mes frères et mes sœurs

A mes proches familles

A tous mes amis

A mes professeurs.

Aux administrateurs.

Et à vous.

BOUSSOUAR AISSA

REMERCIEMENTS

J'ai l'honneur d'être dirigé par mon encadreur le **Pr. TAALLAH Bachir**, Professeur à l'université Mohamed Khider – Biskra. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude et mes remerciements. J'ai bénéficié, grâce à lui, le bon accueil, meilleurs informations, meilleurs conseils et contribution scientifique, disponibilité pendant toute la durée des inscriptions, les articles et la réalisation de la thèse de doctorat en sciences. Et aussi le temps précieux qu'il m'a apporté, encouragement, la patience. J'ai senti en lui toutes les qualités d'honnêteté et de haute moralité pour réaliser ce travail de recherche.

J'ai l'honneur de remercier également le **Dr. KHECHAI Abdelhak**, Maître de conférences à l'université Mohamed Khider – Biskra. Je tiens à lui témoigner toute ma gratitude et mes remerciements, dans leur participation et de sa contribution scientifique dans l'article et pendant toute la durée et le temps précieux qu'il m'a apporté.

Je tiens à exprimer mes remerciements au président du jury le **Dr. M.O. BELARBI**, Maître de conférences au département de Génie Civil-Hydraulique à l'université Mohamed Khider – Biskra- d'avoir accepté de présider et juger ce travail de recherche et puis également au **Dr. Dif Hamza**, Maître de conférences à l'université Ziane Achour de Djelfa au Département de Génie Civil d'avoir accepté d'examiner et juger ce travail de recherche et aussi mes remerciements au **Dr BACHIRI Attia** Maître de conférences au département de Génie Civil à l'université AMAR Téliidji-Laghouat d'avoir accepté d'examiner et juger ce travail de recherche.

J'ai l'honneur de remercier mon encadreur au magister le **Pr. ZAIDI ALI**, Professeur à l'université AMAR Téliidji-Laghouat, de sa contribution scientifique, meilleurs conseils, disponibilité pendant toute la durée de réalisation de l'article et le temps précieux qu'il m'a apporté, encouragement, la patience. J'ai senti en lui toutes les qualités d'honnêteté et de haute moralité.

J'ai l'honneur de remercier également le **Pr. Bouziane Med Toufik**, et le **Dr. Karboa Salem** à l'université Mohamed Khider – Biskra. Je tiens à témoigner toute ma gratitude et mes remerciements, dans la première inscription de Doctorat en sciences. J'ai senti toutes les qualités d'honnêteté et de haute moralité.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements au chef de département et à tous les enseignants du département de GENIE CIVIL à l'université Mohamed Khider – Biskra.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à tous mes enseignants durant ma carrière Primaire, CEM, et au Lycé, et à l'université.

Enfin, je remercie tous ceux ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail de recherche.

Merci.

BOUSSOUAR AISSA

RÉSUMÉ:

L'objectif de la présente thèse est d'analyser les poutres en matériaux composites gradués fonctionnellement (FGM) sous la flexion statique, en utilisant la théorie HSDT (la déformation par cisaillement d'ordre supérieur), est considéré. Un modèle mathématique est établi, pour ces poutres composites des différentes conditions aux limites, libres, simplement appuyés et encastres, sous chargement. Nouvelle fonction polynomiale de cisaillement est utilisée. Les conditions aux bords de contraintes nulles dans cette étude. Pas de facteur de correction et prise en compte. Les propriétés des matériaux sont considérés gradués à travers l'épaisseur, une simple loi est prise en compte. Cas illustratifs de poutres à appuis simples et extrémités encastres soumises à une force concentrée au centre de la poutre, et à une charge uniformément répartie pour les poutres à appuis simples, respectivement. Ensuite, les poutres en porte à faux sont soumises à une force de cisaillement concentrée à l'extrémité libre, et également les poutres en porte à faux portent une charge uniformément répartie. Les cas illustratifs présentés précédemment démontrent l'originalité de ce travail dans cette investigation. Le modèle mathématique est établi par des équations différentielles dérivées du principe de travail virtuel. Les équations d'équilibre et les conditions aux limites sont présentées. Basée sur la forme de différentiation pour prédire le champ de déplacement. La solution du modèle analytique est présentée. Le champ de déplacement incluant la rotation, contrainte, déformation prédites à partir du modèle proposé, sont présentés. Enfin, la comparaison entre le modèle actuel et les modèles de solutions existants dans la littérature a montré une meilleure similitude et convergence.

Mots clés: Matériau FGM, Analyse statique en flexion, Nouvelle fonction de cisaillement polynomiale, Déplacement.

ABSTRACT:

The objective of this thesis is to analyze beams made of functionally graded composite materials (FGM) under static bending, using a HSDT theory (higher order shear deformation), is considered. A mathematical model is established, for these composite beams of various limits, free, simple and fully clamped, in bending. New polynomial shear function is used. The edges of the section without stress are used in this study. No correction factor takes into account. The material properties are considered, a simple power law is taken into account. Illustrative cases of beams with simple supports and clamped ends subjected to a concentrated force at the center of the beam, and a uniformly distributed load with simple supports, respectively. Also, the cantilever beams are subjected to a concentrated shear force at the free end, and uniformly distributed load, respectively. The illustrative cases presented previously demonstrate the originality of this work in this investigation. The mathematical model is established by differential equations derived from the virtual work principle. The equilibrium equations and boundary conditions are presented. Based on the variational form to predict displacement fields. The solution of the analytical model is presented. The results in terms of displacement fields including section rotation and stress, deformation predicted from the proposed model are presented. Finally, the comparison between the current model and existing solution models in the literature showed better similarity and convergence.

Keywords: FGM Materials, Static analysis in bending, New polynomial shear function, Displacement.

:

الهدف هذه هو
وذلك باستخدام نظرية التشوه القصي ذات الرتبة
رياضي لهذه
جديدة بدون إجهاد هذه
توزيع بسيط الآسية حيث الحجمية
توضيحية ذات المساند البسيطة
أيضا ذات المساند البسيطة أيضا،
التوضيحية
عرضها هذا هذا التحقيق. يتم الرياضي التفاضلية
. يتم تقديم . يعتمد ()
حقل الانزياح. يتم تقديم التحليلي. حيث
جهد، في الأخير، أظهرت المقارنة بين ال
أنها متشابهة .
تيح: FGM التحليل الجديدة،

TABLE DES MATIÈRES

.Dédicace	i
.Remerciements	ii
.Résumé.....	iii
.Abstract	iv
الملخص.....	v
.Table des matières.....	vi
.Liste des figures.....	x
.Liste des tableaux.....	xii
.Liste des abréviations.....	xiii

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1. Généralités.....	1
2. Problématique.....	1
3. Objectifs.....	2
4. Conception et approche.....	2
5. L'organisation de la thèse	3

Chapitre1 : Généralités sur les Matériaux à Gradient de Propriétés Fonctionnel (FGM)

1.1 Introduction.....	5
1.1.1 Matériau composite.....	6
1.1.1.1 Les matrices.....	7
1.1.1.2 Les fibres.....	8
1.1.2 Matériaux à gradient fonctionnel.....	9
1.1.2.1 Historique sur les FGM.....	9
1.1.2.2 Procédures de fabrications.....	10
1.1.2.3 Avantages des FGM.....	12
1.1.2.4 Inconvénients des FGM.....	12
1.2 Modèles et théories.....	12
1.2.1 Modèle et théorie classique CT (Classic Theory).....	12
1.2.2 Modèle et théorie basé sur cisaillements (Timoshenko).....	14
1.2.3 Modèle et théorie la déformation de cisaillement (HSDT)	16
1.2.4 Modèle tridimensionnel (Élasticité 3D)	18
1.2.5 Modèle quasi-3D.....	19
1.3 Les lois de mélange.....	20
1.3.1 Propriétés matérielles effectives.....	20
1.3.2 Loi de puissance.....	20
1.3.3 Loi- sigmoïde.....	22
1.3.4 Loi exponentielle (E-FGM)	23
1.4 Revue des travaux antérieurs sur les poutres FGM en flexion	24
1.4.1 Etude statique portant sur des structures fonctionnellement graduées (FGM)	24

1.5	Conclusion.....	29
-----	-----------------	----

**Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux
fonctionnellement gradués (FGM)**

2.1	Introduction.....	30
2.2	Propriétés Matérielles de la poutre FGM	31
	2.2.1 Modèles micromécaniques	31
2.3	Équations d'élasticité.....	33
	2. 3.1 Champ de déplacement.....	33
	2. 3.2 Équations de compatibilités.....	35
	2. 3.3 État plan de contraintes.....	36
	2. 3.4 État plan de déformations.....	37
	2. 3.5 Équations d'équilibre.....	37
	2. 3.6 Tenseur des déformations.....	37
2.4	Loi de comportement de matériaux (Isotropes).....	38
2.5	Principe des travaux virtuels.....	42
2.6	Champ de déplacement des poutres FGM.....	43
2.7	Hypothèses et conditions aux limites.....	44
	2.7.1 Hypothèses de calcul.....	45
	2.7.2 Conditions aux limites.....	45
2.8	Conclusion.....	46

Chapitre 3 :Présentation le modèle analytique pour l’analyse de la flexion des poutres FGM

3.1	Introduction.....	47
3.2	Formulation thèorique.....	48
3.2.1	Équation différentielle d’une poutre type d’Euler- Bernouilli.....	48
3.2.2	Analyse statique de poutres.....	50
3.3	Modèles analytiques.....	52
3.3.1	Cas1.....	53
3.3.2	Cas2.....	54
3.3.3	Cas3.....	56
3.3.4	Cas4.....	57
3.3.5	Cas5.....	58
3.4	Analyse des poutres FGM en flexion.....	59
3.4.1	Modèle mathématique.....	59
3.4.1.1	Champ de déplacement.....	63
3.4.1.2	Nouvelle fonction de cisaillement polynomiale.....	60
3.4.1.3	Propriétés matérielles en FGM.....	60
3.4.1.4	Propriétés de la coupe transversale.....	61
3.4.1.5	Equations différentielles en statique.....	62
3.4.1.6	Poutre FGM en flexion.....	63
3.4.1.6.1	Cas de la poutre composite bi-encastées.....	63
3.4.1.6.2	Cas de la poutre composite en porte à-faux.....	64
3.5	Contraintes et déformations.....	66
3.5.1	Contraintes.....	66
3.5.2	Composantes de déformations.....	66
3.6	Conclusion.....	67

Chapitre 4 : Résultats et validation numérique du présent modèle analytique

4.1	Introduction.....	68
4.2	Fonctions de cisaillements.....	69
4.3	Comparaison des déplacements.....	71
4.4	Comparaison des contraintes axiales.....	79

4.5	Comparaison des contraintes de cisaillements.....	84
4.6	Conclusion	89
	Conclusion générale.....	91
	REFERENCES	100

Liste des figures

Figure 1.1.	Catégories	6
Figure 1.2.	Organigramme différentes familles matrices.....	7
Figure 1.3.	Type de renfort.....	8
Figure 1.4.	Matériau FGM.....	9
Figure 1.5.	Organigramme FGM.....	10
Figure 1.6.	Procédures coulage en bande.....	10
Figure 1.7.	Procédures chimiques et pulvérisation et métallurgie des poudres à l'état gazeux et liquide ou solide.....	11
Figure 1.8.	Procédé de dépôt d'énergie dirigé par laser.....	11
Figure 1.9.	Théorie (CPT) (Reddy et al, 2007).....	13
Figure 1.10.	Théorie (FSDT) (Reddy et al, 2007).....	15
Figure 1.11.	Théorie (HSDT) (Reddy et al, 2007).....	17
Figure 1.12.	Propriétés variation P-FGM [Chi et al; 2003].....	21
Figure 1.13.	Propriétés variation S-FGM [Chi et al; 2003].....	22
Figure 1.14.	Propriétés E-FGM [Narottam ; 2011].....	23
Figure 2.1.	Déplacement modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT).....	33
Figure 2.2.	Position M_0 vers M_t	34
Figure 3.1.	Géométrie de la poutre	48
Figure 3.2.	Poutre en statique.....	50
Figure 3.2-a	Poutre simplement appuyée sous charge concentré (P)	51
Figure 3.2-b	Poutre bi-encastres sous charge concentré (P)	51
Figure 3.2-c	Poutre simplement appuyée sous charge uniforme(q).....	52
Figure 3.2-d	Poutre en porte à faux sous charge concentré à l'extrémité libre (P).....	52
Figure 3.2-e	Poutre en porte à faux sous charge uniforme(q)	52
Figure 3.3a.	Poutre simplement appuyée avec charge concentrée à mi-portée.....	53
Figure 3.3b.	Poutre bi-encastres avec charge concentrée à mi-portée.....	54
Figure 3.4.	Poutre simplement appuyée avec charge uniformément répartie.....	56
Figure 3.5.	Poutre Encastree-libre avec charge concentrée.....	57
Figure 3.6.	Poutre Encastree-libre à charge uniformément répartie	58
Figure 3.7.	Variation (V_c) versus (z/h) en fonction l'indice de puissance (P).....	61
Figure 4.1.	Courbe solutions des points racine carrée de la fonction analytique de Reddy et al.....	70
Figure 4.2.	Courbe solutions des points racine carrée de la fonction analytique de Guenfoud et al	70

Figure 4.3.	Courbe solutions des points racine carrée de la fonction analytique proposée (Présent)	71
Figure 4.4.	Comparaison de la répartition du déplacement maximum du modèle analytique à celle (Ghugal et al, 2011) en fonction de (x/L) de la poutre composite simplement appuyées sous charge concentrée à la flexion.....	72
Figure 4.5.	Comparaison du déplacement maximum avec Celle de (Guenfoud et al, 2016) à la flexion	73
Figure 4.6.	Comparaison la poutre composite simplement appuyée de (Benatta et al, 2008) et la poutre bi-encastree (présent) à la flexion.....	75
Figure 4.7.	Comparaison du déplacement maximum de modèle analytique et celle de (Ghugal et al, 2011) vs (x/L) de la poutre composite Encastree-libre avec charge concentrée.....	77
Figure 4.8.	Comparaison du déplacement maximum de modèle analytique et celle de (Ghugal et al, 2011) vs (x/L) de la poutre composite en porte-à-faux sous charge uniforme répartie à la flexion.....	78
Figure 4.9.	Comparaison de la répartition de la contrainte axiale du modèle analytique à celle (Reddy et al, 2000) en fonction (z/h) de la poutre composite simplement appuyées sous charge concentrée à la flexion.....	80
Figure 4.10.	Comparaison et répartition de la contrainte axiale de modèle analytique à celle de (Benatta et al, 2008) et de Timoshenko vs toute l'épaisseur de la poutre à des extrémités bi-encastree sous charge mécanique concentré à mi-travée.....	81
Figure4.11.	Comparaison de la répartition de la contrainte axiale du modèle analytique à celle (Genfoud et al, 2016) en fonction (z/h) de la poutre composite simplement appuyées sous charge mécanique uniforme répartie à la flexion.....	83
Figure4.12.	Comparaison de la contrainte axiale de modèle présent et modèle (Reddy et al, 2000) vs (z/h) sur toute l'épaisseur de la poutre composite en porte à faux sous charge mécanique concentré à l'extrémité libre à la flexion ...	84
Figure4.13.	Comparaison de la contrainte axiale de modèle présent et modèle (Reddy et al, 2000) vs (z/h) sur toute l'épaisseur de la poutre composite en porte à faux sous charge mécanique uniforme répartie à la flexion.....	84
Figure4.14.	Comparaison (τ_{xz}) de modèle présent et (Guenfoud et al, 2000, noté Réf-13) vs (z/h) de la poutre composite simplement appuyée sous charge concentrée à mi-travée.....	85
Figure 4.15.	Comparaison (τ_{xz}) de modèle présent et (Genfoud et al, 2016) vs (z/h) de la poutre composite simplement appuyée sous charge uniforme répartie	85
Figure 4.16.	Comparaison (τ_{xz}) de modèle présent et (Benatta et al, 2008) vs (z/h) de la poutre composite simplement appuyée et bi-encastrees sous charge concentrée à mi-travée.....	87
Figure 4.17.	Comparaison (τ_{xz}) de modèle présent et (Reddy et al, 2000) vs (z/h) de la poutre composite en porte à faux sous charge concentrée à l'extrémité libre.....	88
Figure 4.18.	Comparaison (τ_{xz}) de modèle présent et (Reddy et al, 2000) vs (z/h) de la poutre composite en porte à faux sous charge uniforme répartie..	88

Liste des tableaux

Tableau 4.1.	Caractéristiques numériques en FGM.....	72
Tableau 4.2.	Propriétés de la poutre en acier.....	73
Tableau 4.3.	Validation de déplacement de la poutre composite simplement appuyée à la flexion sous charge.....	75
Tableau 4.4.	Propriétés numériques de la composite.....	76
Tableau 4.5.	Caractéristiques numériques de la poutre en acier.....	76
Tableau 4.6.	Validation de déplacement de la poutre composite Encasturé-libre la flexion sous charge en fonction des paramètres de matériau.....	79
Tableau 4.7.	Validation de contraintes axiales de la poutre composite simplement appuyée pour différents paramètres du matériau	82
Tableau 4.8.	Validation de contrainte transverse de cisaille et de déformation transverse de la poutre composite simplement appuyée à la flexion sous charge en fonction des paramètres de matériau.....	86
Tableau 4.9.	Validation des contraintes de cisaillement de la poutre composite en porte à faux pour différents paramètres du matériau.....	89

Liste des symboles

h: Epaisseur, m
L: Longueur de poutre, m
I: Moment d'inertie, m^4
p: Paramètre du matériau
 E_x : Module d'élasticité, MPa
 G_{xz} : Module Cisaillement transversal, MPa
P: Charge mécanique, KN
q: charge uniforme repartee, KN /m
 $\rho(z)$: Densité, kg/m^3
 $\nu(z)$: Coefficient de poisson
 P_m ; P_c : Propriétés
 $M(x)$: Fonction d'expression de moment, KN.m
N: Force axiale normale, KN
 $N(x)$: Fonction d'expression de force normale, KN
 δW_{ext} : Le travail extérieur
 δW_{int} : Le travail intérieur
 $\phi(z)$: Fonction de cisaillement
 $\phi(z)\psi_x$: Fonction de gauchissement
 w_0 : Déplacement transversal dû au flexion, m
 (u_0, v_0, w_0) : Composants de déplacements
: Rotation
 $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{xy})$: Composants de contraintes
 $(\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy})$: Composants des déformations
 δ : variation
 $\partial / \partial x; \partial / \partial z; \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \frac{\partial^2}{\partial z^2}$: Première. Deuxième dérivation par opérateur de dérivation dans les directions x, z, respectivement.
 $M(x)$: Fonction d'expression de moment, KN.m
N: Force axiale normale, KN
 $N(x)$: Fonction d'expression de force normale, KN
T: Force de cisaillement, KN
 $T(x)$: Fonction d'expression de la force de cisaillement, KN
FGM: Matériau à Gradient Fonctionnel (en anglais : Functionally Graded Materials)

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1. Généralités :

Dans les dernières décennies, de nouveaux matériaux avancés composites offrent des caractéristiques mécaniques et thermiques supérieures .

Le domaine en matériau des propriétés (FGM) en général donne large possibilité au recherche et l'industrie.

En effet l'un des problèmes actuels est le cisaillement transversal à travers l'épaisseur.

Le domaine en matériau des propriétés (FGM) pour la flexion, vibration libre, et aussi dans le flambage, ont utilisés dans leur calcul des théories HSDT(prenant la fonction de gauchissement dans les champs de déplacement qui n'ont pas été pris en compte par les théories classiques; En effet, la théorie d'Euler-Bernoulli conduit à une expression très connue sans cisaillement, théorie de Timoshenko est permet de prendre en compte le cisaillement en tant que fonction de forme linéaire).

La modélisation des paramètres de durabilités, des poutres par une analyse statique pour établir un modèle mathématique déterministe efficace.

2. Problématique:

Pour les poutres FGM et les plaques FGM, l'un des problèmes actuels est l' effet de cisaillement transversal par deformation à travers l'épaisseur en flexion, vibration et flambement. L' analyse statique en flexion permet d'établir un modèle mathématique utilisant des théories de cisaillement d'ordre supérieur(HSDT) prenant en compte les déformations de cisaillement (l'effet de gauchissement) dans le champ de déplacement et ses dérivées (contraintes, déformations), qui n'ont pas été prises en compte par les théories classiques (la théorie d'Euler-Bernoulli conduit à une expression simple de la flexion sans cisaillement. En effet, la théorie de Timoshenko (la plus réaliste) permet de prendre en compte le cisaillement comme fonction de forme linéaire. Ceci confirme cette inférence et conduit à s'intéresser à la stabilité du modèle). Plusieurs modèles des fonctions de cisaillement issus de la littérature sont proposés. Dans ce travail, une nouvelle fonction de cisaillement polynomiale satisfaisant les conditions aux limites sans contrainte est requise pour l'effet de gauchissement. Ces théories ne nécessitent pas de facteur de correction de cisaillement et considèrent une fonction de forme hyperbolique. À partir la définition précédente et donc, à la

flexion pure, un modèle mathématique pour des cas illustratifs qui n'ont pas été suffisamment analysés par des travaux de recherche antérieurs, de poutres FGM à des conditions aux limites différentes de simplement appuyées, et en porte-à-faux (encastré-libre), ainsi que bi-encastrées, sont présentés respectivement leur déplacements, contraintes et déformations, permet également de fournir aux ingénieurs des règles utiles pour la conception dans ce domaine.

3. Objectifs:

L'objectif de cette thèse est d'analyser des poutres en matériaux composites à gradient fonctionnel (FGM) en flexion statique, en utilisant la théorie HSDT (la déformation par cisaillement d'ordre supérieur). Les poutres composites de différentes conditions aux limites, libres, simplement appuyées et encastrées, sous chargement. Les conditions aux bords de contraintes nulles dans cette étude. Pas de facteur de correction de déformation. Cela inclut:

-Développer et établir un modèle mathématique où l'effet de cisaillement est pris en compte dans le champ de déplacement, et aussi prend en compte la rotation, ainsi que de la fonction de gauchissement (inclut nouvelle fonction polynomiale de cisaillement est utilisée).

-Contrainte axiale et transversale.

-Déformation axiale et transversale.

Ces poutres composites de différentes conditions aux limites, libres, simplement appuyées et encastrées, sous chargement. Les conditions limites de contrainte nulle dans cette étude. Aucun facteur de correction de déformation.

4. Conception et approche :

Les poutres sont de section prismatique ($b \times h$). Le modèle mathématique est établi par des équations différentielles dérivées du principe du travail virtuel. Solution est basé sur une approche de variation (intégrales) pour prédire la composante champ des déplacements par (pas constant correction cisaillement) sans contrainte aux limites section pour obtenir les solutions à la flexion statique et les lois de comportement de base permettant d'améliorer la solution du modèle analytique. Les résultats en termes de champs de déplacement incluant la rotation de la section et les contraintes de cisaillement sont devenus plus efficaces.

L'exactitude de la théorie actuelle est vérifiée en comparant les résultats d'autres théories raffinées et la théorie exacte.

5. L'organisation de la thèse:

La thèse est dévisée en quatre chapitres, sont les suivantes:

- Généralités sur les FGM:

Généralités aux FGM, présentent poutres FGM (CBT, FSDT, HSDT), citent les différentes lois de mélange. Ce présente aussi, principaux travaux antérieurs réalisés sur l'effet du cisaillement transversal dans les poutres en matériaux à gradient fonctionnel (FGM).

- Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM):

Chapitre 2 permet de dessiné une démarche à aux axes:

Rappel sur les lois constitutives de base (l'élasticité générale) ,

Les propriétés matérielles de la poutre ; Hypothèses; CAL (conditions aux limites); PTV (principe des travaux virtuels). Les méthodes analytiques résolutions, fini par conclusion.

- Présentation de modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM:

Le modèle mathématique est établi par des équations différentielles dérivées du principe du travail virtuel. Des équations d'équilibre et des conditions aux limites sont introduites, solution est basé sur une approche de variation (intégrale) pour prédire la composante champ des déplacements et les lois de comportement de base. La solution du modèle analytique, a été présenté. Les résultats en termes de champs de déplacement incluant la rotation section () ; (xz), prédits du modèle proposé.

En résumé, fait le point sur le modèle analytique utilisé, en se base sur la théorie d'élasticité linéaire permettant de prédire en brief les points suivantes :

- La formulation thèorique de poutres en matériaux à gradient fonctionnel (équation différentielle d'une poutre, analyse statique, conditions aux limites en détail exhaustifs) , et modèles analytiques des cas illustratifs de poutres composites en flexion (cas1, cas2, cas3, cas4, cas5) ont présenté l'originalité de ce travail , dans cette enquête.- L'analyse thèorique d'une poutre (modèle mathématique, champ de déplacement, établi une nouvelle fonction de cisaillement polynomiale).

- Les contraintes ainsi les déformations; conclusion.

- **Résultats et validation numérique du présent modèle analytique:** En bref, ce chapitre 4 sera exposé des études comparatives réalisées; des autres modèles issus de la littérature et les commentaires, une conclusion se termine l'ensemble de résultats importants de ce travail, et les perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur les Matériaux à Gradient de Propriétés Fonctionnel (FGM)

1.1 Introduction:

Les produits en composites en qualité des fibres, leur forme, leur orientation, leur adhésion à la matrice, le rapport volumique des mélanges en constituants de base, et les procédés de fabrication (propriétés mécaniques).

Les matériaux à gradient fonctionnel font partie du domaine des matériaux intelligents, les matériaux FGM présentent des caractéristiques intéressantes, complexes et parfois opposées.

Les matériaux FGM présentent des caractéristiques aux exigences environnementales extrêmes, les qualités techniques aux besoins d'allègement, adapté aux solutions technologiques, ainsi que touchent toutes les disciplines industrielles.

Les matériaux FGM présentent propriétés matérielles effectives, de comportements isotropes.

Les poutres et aussi les plaques en FGM sont supposées leur propriétés mécaniques et propriétés matérielles effectives, à travers loi des constituants, expose généralités sur les matériaux composites, qui semble être aperçu général présentent leur catégories qui sont divisés en composites comme stratifiés, sandwichs...etc. Une étape cruciale, l'analyse s'intéresse aux conditions limites pour poutres et plaques en FGM.

Ce travail est consacré à présente et explique les modèles et les théories utilisés pour les plaques et les poutres (CT, FSDT, HSDT) en littérature.

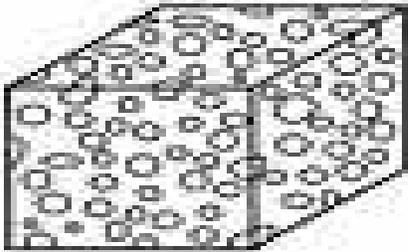
En fin sur les poutres en FGM, présentons des travaux littéraires antérieurs.

1.1.1 Matériau composite :

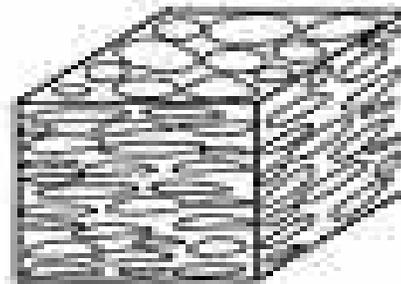
En général, différents base, basant sur les matrices et les fibres. Plus, sont effectives leurs propriétés, à travers loi des constituants.

Leurs catégories qui sont divisés:

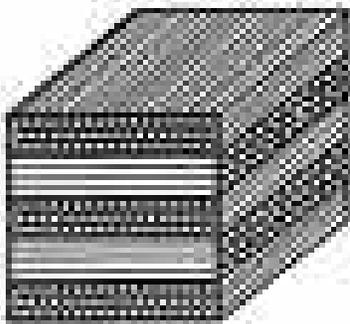
- ❖ Milieu pore: L'ensemble des volumes des solides et les volumes des vides dans le volume total.
- ❖ Feuilles en tailles: Couple formé par sa largeur et sa longueur de taille occupe le volume élémentaire par fois prend la forme des feuilles.
- ❖ Stratifiés : Sont constituées sous la forme de plis réguliers ou non, empilement de monocouches et des couches, et sandwiches (peau et cœur).
- ❖ Composites: Assemblage entre des matrices et fibres de renforts.



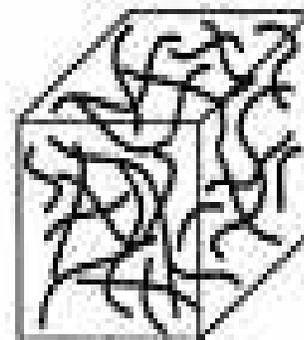
- Milieu pore



- Feuilles en tailles.



- stratifiés.



- Composites (renforts et fibres).

Figure 1.1. Catégories (ZIOU et al, 2017)

1.1.1.1 Les matrices:

Les matrices et les fibres sont les constituants de base qui permettent de :

- Cohésion des fibres renforcés.
- Répartir les charges mécaniques.
- Tissu de produits et la protection.
- La tenue chimique et thermique désirée. -Usage dans l'industrie.

La figure 1.2 présente l'organigramme de la matrice comme suivant:

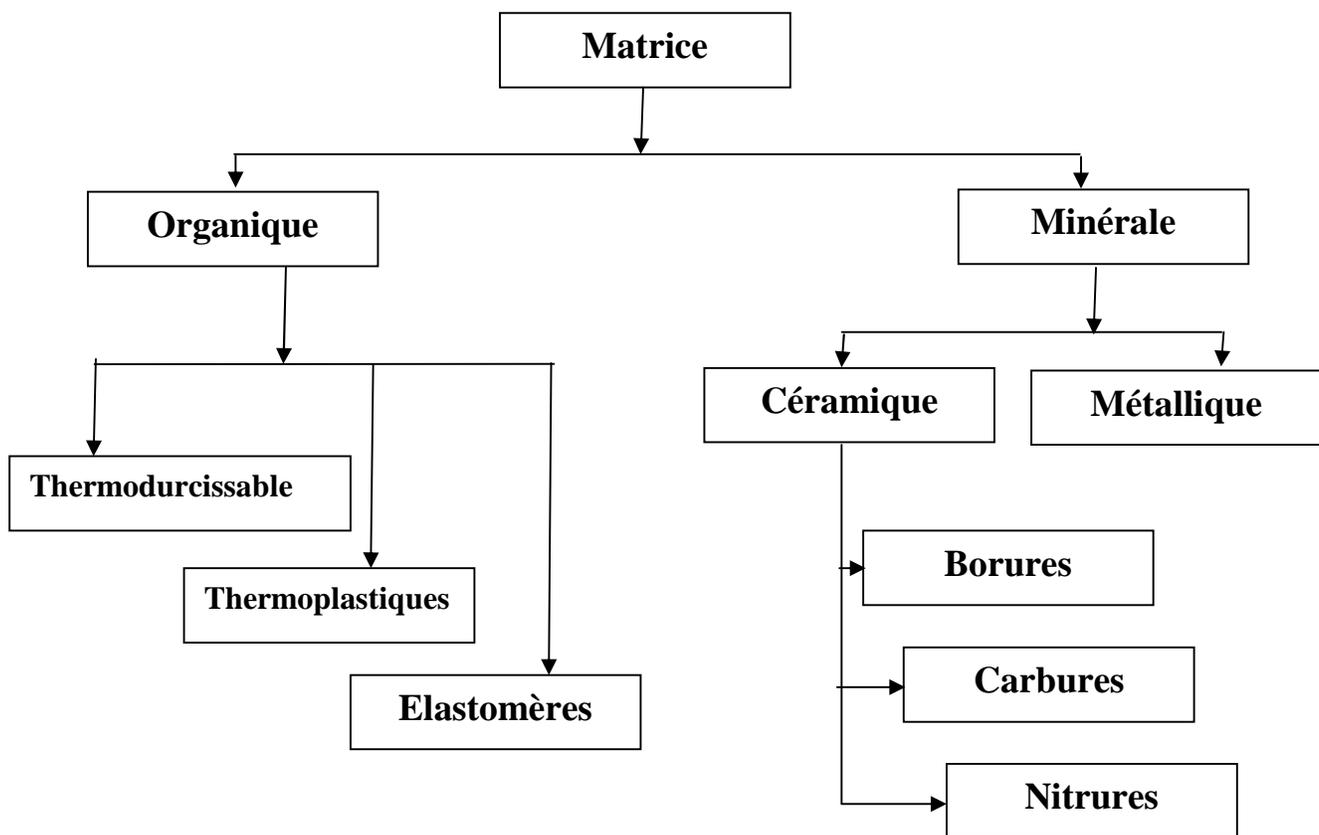


Figure 1.2. Organigramme différentes familles des matrices
(Elmeiche, 2013; Elmoossoues, 2013)

1.1.1.2 Les fibres:

Les fibres sont des constituants de base et une partie indispensable de matériaux composites, permettre de:

- Grande résistance mécanique.
- Tenue à la température élevée.
- Plus légers et rigidité élevé.
- Contre les agents agressifs (PRF).
- Couvrant toutes les spécialités industrielles en produits secondaires ou principaux.
- Pour, le renfort de fibre composite, sous forme filamentaire ou autres formes.

La figure 1.3 ci-dessous présente l'organigramme de renfort.

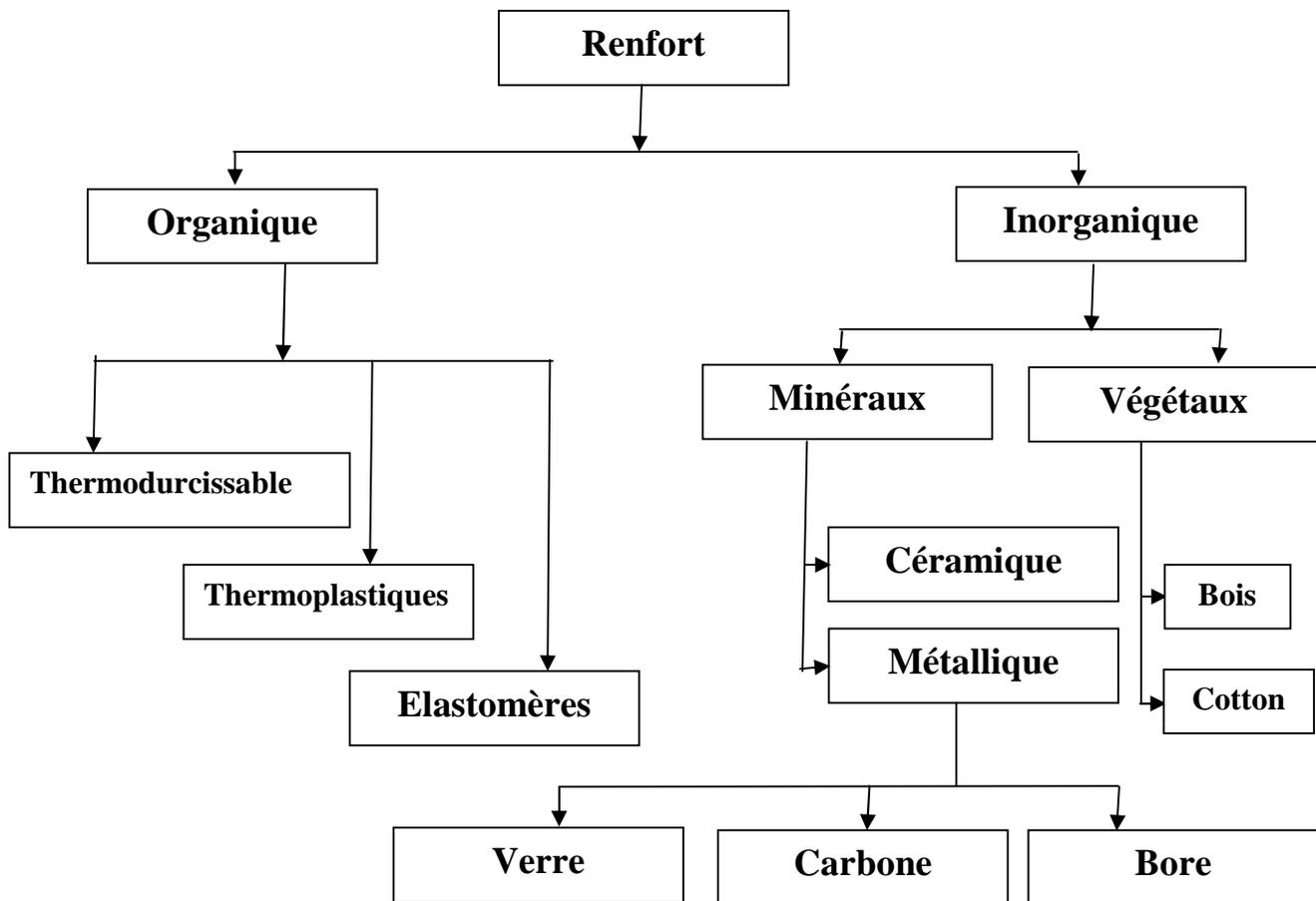
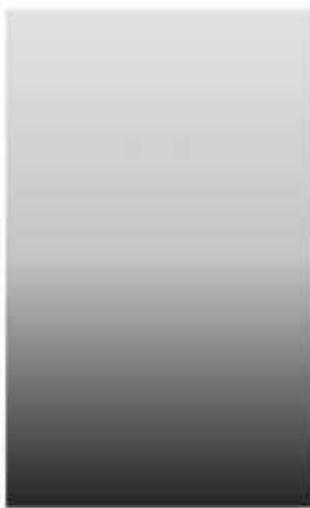


Figure 1.3. Organigramme type de renfort
(Elmeiche, 2013; Elmossoues, 2013)

1.1.2 Matériaux à gradient fonctionnel

1.1.2.1 Historique sur les FGM:

Les matériaux FGM du domaine des matériaux intelligents (ténacité, résistance, relaxation) sont des matériaux où les propriétés effectives diffèrent, généralement graduée dans le sens de l'épaisseur. Figure 1.4 présente un matériau FGM d'une variation continue (loi continue) des propriétés selon la fonction dépendante de l'axe- z (épaisseur) de la (figure 1.4-a) et la variation discrète (loi discrète) est assumé des propriétés par couches quasi homogènes de fraction volume (figure 1.4-b).



(a)-Variation continue des propriétés



(b)- Variation discrète des propriétés

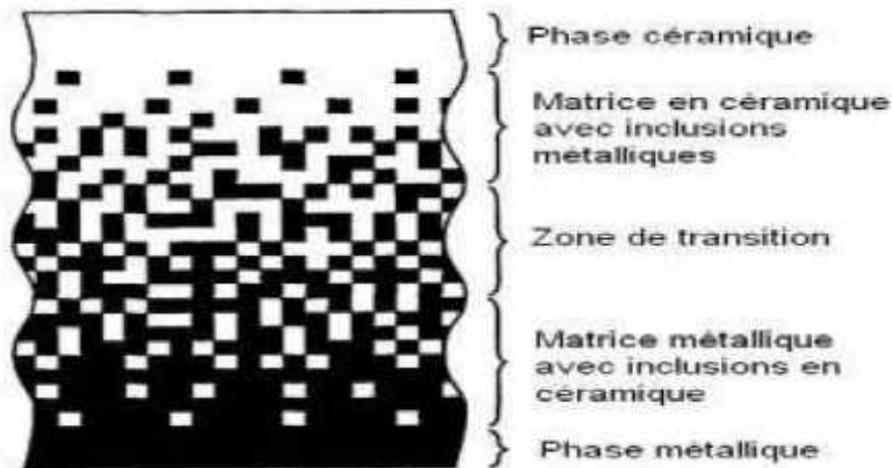


Figure 1.4. Matériau FGM (Zhong et al, 2007)

1.1.2.2 Procédures de fabrications:

En général la figure 1.5 présente les modes de fabrications ou sont résumé et montré par l'organigramme suivant:

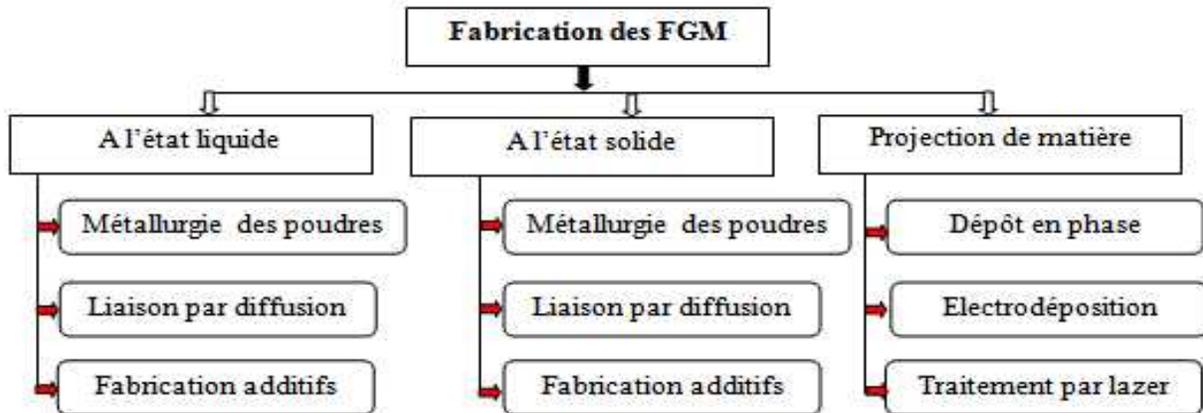


Figure 1.5. Organigramme FGM (El-Galy ; 2019)

Ces méthodes sont les plus utilisées dans l'industrie à cause moins chères que la troisième de projection de matière et au sens technique.

Figure 1.6 montre le mélange, coulage en bande, produit FGM.

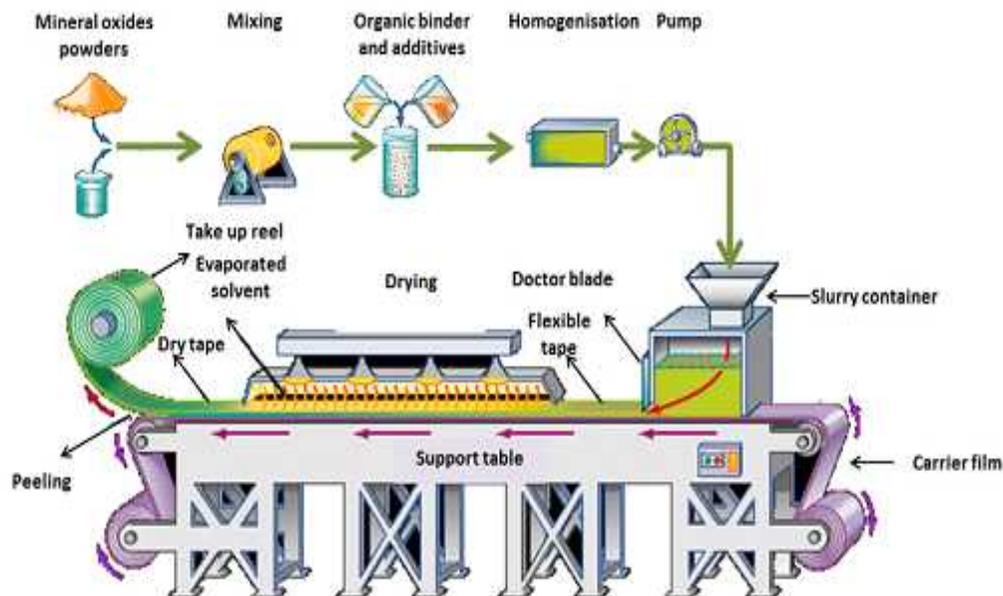


Figure 1.6. Procédures coulage en bande (Faddoul, 2012)

Procédures chimiques et pulvérisation et métallurgie des poudres (Figure 1.7).

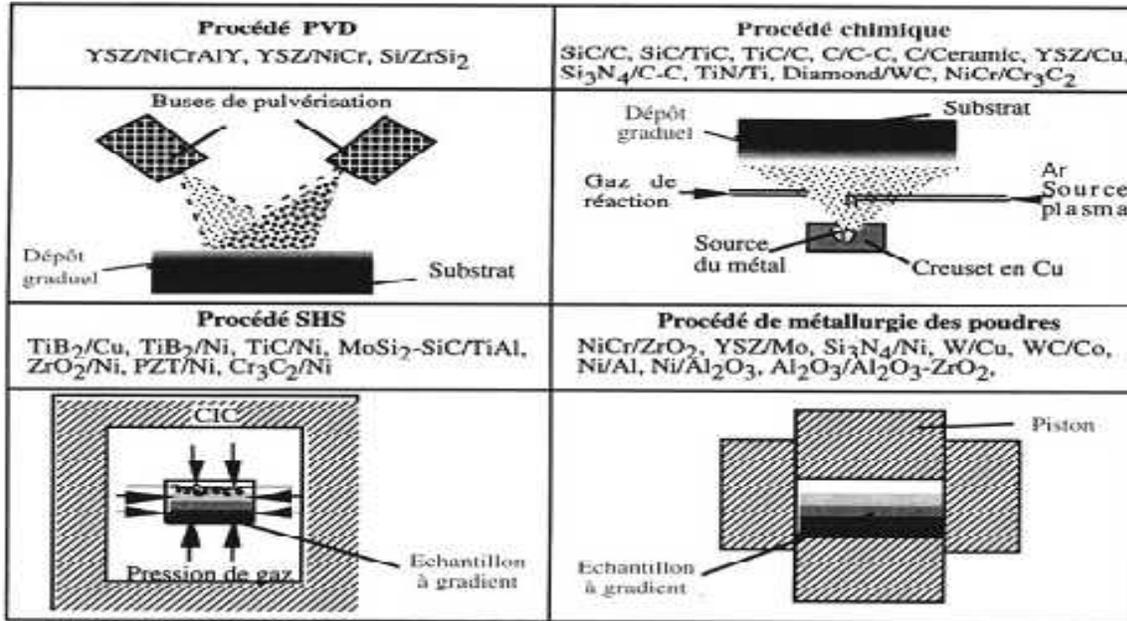


Figure 1.7. Procédures chimiques et pulvérisation et métallurgie des poudres (Ilschner, B. 1994)

Figure 1.8 montre le mélange des poudres par projection de matière à traitement par lazer à haute énergie comme source de chaleur et une poudre comme matière de production, empilant les matériaux à des couches jusqu'à former des pièces complètes (poutres, plaques,...).

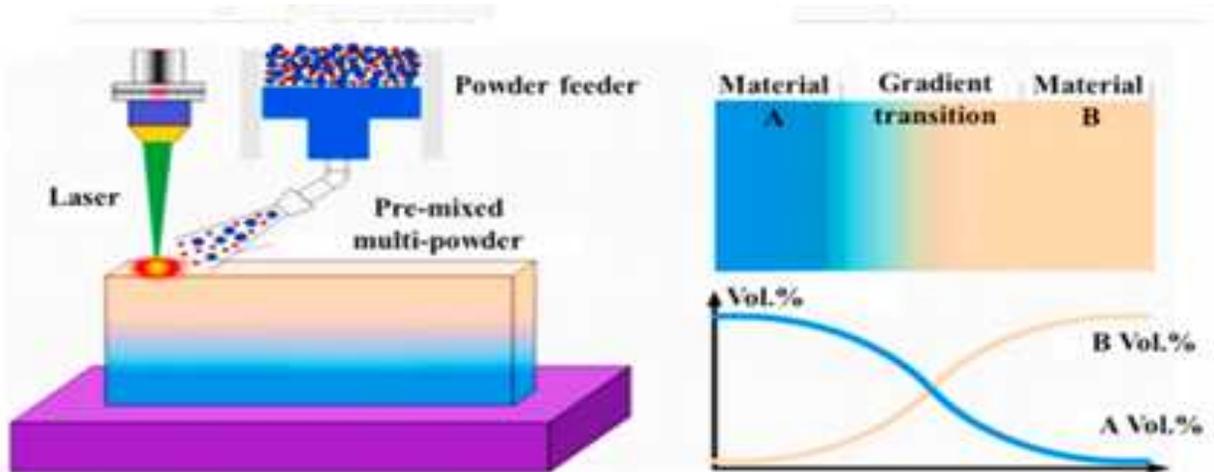


Figure 1.8. Procédé de dépôt d'énergie dirigé par laser (Li et al, 2017)

1.1.2.3 Avantages des FGM:

Citent quelques points comme avantages des FGM à savoir:

- Les matériaux FGM parmi leurs avantages présentent propriétés matérielles effectives.
- Plus utilisées dans l'industrie à cause moins chères, projection de matière et au sens technique.
- Caractéristiques aux exigences environnementales extrêmes.
- Grande résistance mécanique.
- Tenue à la température élevée.
- Utilisables.
- Couvrant toutes les spécialités industrielles en produits secondaires ou principaux.

1.1.2.4 Inconvénients des FGM:

Citent quelques points comme inconvénients des FGM à savoir:

- L'application est leur fabrication compliquée en raison de l'inadéquation des propriétés différentes à cause de la température de fusion.
- Structure FGM présente une grande porosité.
- Les matériaux technologies sont très coûteux.
- Les matériaux composites leur assemblage sont généralement plus fragiles que les matériaux métalliques conventionnels dans leur assemblage.

1.2 Modèles et théories:

Dans cette partie de ce travail, une formulation basée sur modèles et théories des plaques classique (CT), du premier ordre (FSDT), et supérieur (HSDT) ont été mise en place permettant de décrire le comportement en flexion.

1.2.1 Modèle et théorie classique CT (Classic Theory):

Ce sont Leonhard Euler et Jacques Bernoulli qui émirent la première théorie utile vers 1750, sont abouti à l'équation différentielle pour l'analyse vibratoire. (Lagrange, J.L. 1828) à présenter l'équation générale des plaques.

Chapitre 1: Généralités sur les Matériaux à Gradient de Propriétés Fonctionnel (FGM)

Cauchy (Cauchy, A.L. 1828) et Poisson (Poisson, S.D. 1829) ont été formulé le problème de flexion des plaques sur la base des équations générales de la théorie de l'élasticité. En 1829, Poisson étendit avec succès l'équation Germain-Lagrange à la solution d'une plaque sous chargement statique. Cependant, dans cette solution la rigidité flexionnelle était prise égale à un terme constant, la théorie satisfaisante de la flexion des plaques est associée à Navier (Navier. 1823), qui a considéré l'épaisseur de la plaque dans l'équation générale comme une fonction de rigidité. 1888, Love ; Gustav Kirchhoff (En 1850 publié la théorie des plaques minces, a énoncé la base des indépendantes).

Généralement sont désigné pour les matériaux anisotropes du modèle de Love-Kirchhoff (Plaques minces), Euler-Bernoulli(Poutres).

Figure 1.9 présente CPT- (Classical Plate Theory) est basée sur les hypothèses de Love-Kirchhoff (1850):

- La plaque est d'épaisseur faible devant les autres dimensions.
- Pas de déformation au plan de l'axe neutre ($\epsilon_x = \epsilon_z = \epsilon_y = 0$).
- La considération de déplacement transversal w .
- Les sections à rester droites.
- Les contraintes dans le sens de l'épaisseur sont supposées nulles ($\sigma_z = 0$).

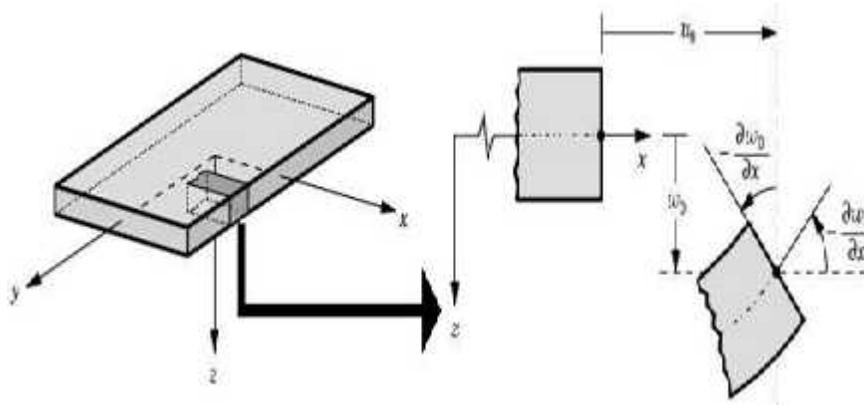


Figure 1.9. Théorie (CPT) (Reddy et al, 2007)

Le champ de déplacement de la plaque ainsi que la poutre s'écrit sous la forme:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (1.2)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (1.3)$$

le cisaillement est négligé pour la théorie d'Euler-Bernoulli donc le champ de déplacement pour quel point M situé à (x, z) s'écrit :

$$U(M) \begin{cases} U(x, z) = u_0(x, y) - z\theta(x) & (1.1-a) \\ w(x, z) = w_0(x, y) & (1.3-b) \end{cases}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (1.3-c)$$

$$\Rightarrow \theta(x) = \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.3-d)$$

1.2.2 Modèle et théorie basé sur cisaillements (Timoshenko):

La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Raymond Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Stephen Timoshenko (1915-1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948).

Figure 1.10 présente les études sur la (FSDT) par Reissner- Mindlin au modèle de plaque, se base sur les hypothèses:

- Pas de déformation dans le plan moyen de la plaque.
- Contrainte normale est négligeable.
- L'effet de l'inertie.

Les travaux sont référé aussi au Timoshenko et Woinowsky-Krieger sont aussi considéré, ainsi que Reddy dans les champs de plaques ainsi que les poutres.

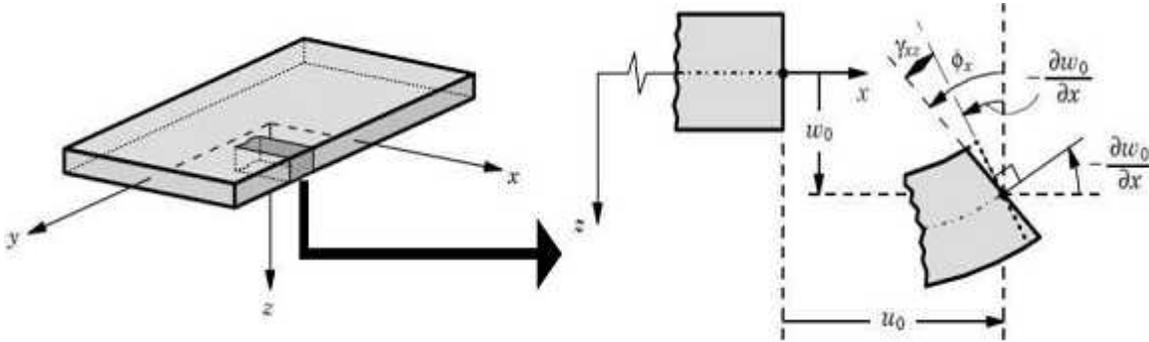


Figure 1.10. Théorie (FSDT) (Reddy et al, 2007)

Le champ de déplacement est le suivant:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{u}_0(x, y) + z\Phi_x(x, y) \quad (1.4)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z\Phi_y(x, y) \quad (1.5)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (1.6)$$

(u, v, w) présentent les déplacements en membrane et $\phi_x(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial x}$; $\phi_y(x, y) = -\frac{\partial w_0}{\partial y}$ sont les rotations autour des axes x et y, respectivement. À cette théorie ce qui nécessite l'introduction d'un facteur de correction appliquer pour la contrainte de cisaillement.

Le déplacement d'un point M(x,y) de la poutre d'après la théorie de Timoshenko est donné par les deux composantes suivantes:

$$U_x(x, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + z \gamma_{xz}^0(x) \quad (1.4-a)$$

$$U_z(x, z) = w_0(x, y) \quad (1.6-b)$$

Avec, le déplacement dans le plan (u_x) et le déplacement transverse ($u_z=w_0$).

Et,
$$\gamma_{xz}^0(x) = \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} - \phi_0(x) ; \quad (z)=z ;$$

$\phi_0(x)$: Etant la rotation totale de la section mesurée sur la ligne moyenne de la poutre Timoshenko.

(z): Etant la fonction de cisaillement par déformation de forme lineaire dite de .

1.2.3 Modèle et théorie la déformation de cisaillement (HSDT):

A cause de l'insuffisance la théorie classique(CPT) des plaques qui perd en précision lors de l'augmentation du rapport (h/a) et (h/b), et les limitations liées aux théories de déformation en cisaillement du premier ordre (FSDT) qui considèrent une variation constante de la déformation transverse à travers l'épaisseur de la plaque, et qui nécessitent un facteur arbitraire de correction, les théories d'ordre supérieur ont été développées, à la différence de la théorie (CT) et la théorie (FSDT) avec les acceptations de la distribution linéaire du déplacement par l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs dans l'épaisseur par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et / ou de la déformation normale transversale.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction. Le champ cinématique de la théorie de cisaillement d'ordre élevé a été développé par les références sur les modèles ont contribué, peuvent être trouvées plusieurs chercheurs ont modifié la fonction de cisaillement sur la base des théories précédents à savoir, Hildebrand et al. (1949), Naghdi (1957), Kaczkowski (1968), Panc(1975) et Reissner (1975), Nelson et Lorch (1977), Levinson (1980), Murthy(1981) et Reddy (1984), Levy 1877, Stein (1986) et Touratier (1991), Soldatos (1992), Karama et al. (2003), Shimpi.R.P et al (2002), Kant et al (2002),CUGNONI (2004), Ferreira et al (2005), Zheng et al(2007) ,Aydogdu.M et al (2009), im ek, M. et al(2009), Mantari et al (2011), Grover et al (2013) , Sahoo et Singh (2013), Zenkour et al(2015) , Tounsi et al(2015), Nguyen et al(2015) , Guenfoud et al (2016), G. R. Gandhe et al(2018) et autres ont proposé des modèles au littérature (voir l'annexe). Ces chercheurs ont contribué à ce développé le champ cinématique de la théorie de cisaillement d'ordre élevé.

Figure 1.11 présente la théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur(HSDT), des champs de déplacements utilisent un développement en série de Taylor de la forme:

$$U_i(x_1, x_2, x_3) = U_0(x_1, x_2) + z\Phi_i^{(1)}(x_1, x_2) + z^2\Phi_i^{(2)}(x_1, x_2) + z^3\Phi_i^{(3)}(x_1, x_2) + \dots, \quad (1.7)$$

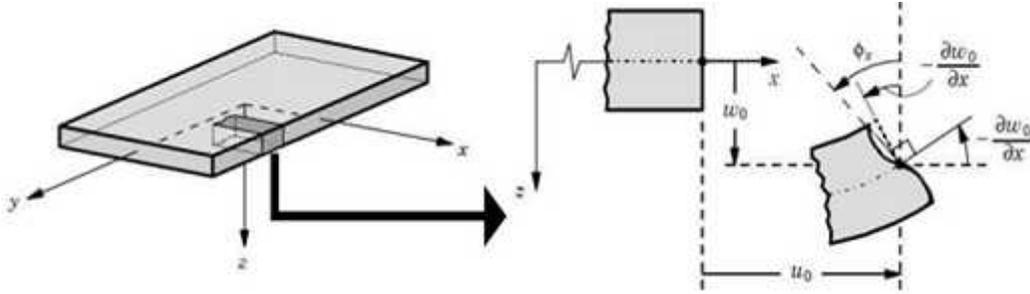


Figure 1.11. Théorie (HSDT) (Reddy et al, 2007)

un niveau minimum de complexité la valeur $\Phi_i^{(i)}$ détermine la nature de la théorie.

Le champ de déplacement est donné comme le suivant:

$$\mathbf{u}(x, z) = \mathbf{u}_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \varphi(z) \psi_x(x, y) \quad (1.8)$$

$$v(x, z) = \mathbf{v}_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \varphi(z) \psi_y(x, y) \quad (1.9)$$

$$w(x, z) = w_0(x, y) \quad (1.10)$$

u_0, v_0, w_0 , et ψ_x, ψ_y sont les déplacements en membrane et les rotations autour des axes

x et y respectivement à savoir $\psi_x(x, y) = \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \Phi_x$, $\psi_y(x, y) = \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \Phi_y$ et $\varphi(z)$ représente la fonction de cisaillement déterminant la distribution typique des contraintes et des déformations transversales suivant l'épaisseur.

Pour n'importe quel point M(x,z), le champ de déplacement de la poutre s'écrit :

$$U(M) \begin{cases} U_x(x, z) = \mathbf{u}_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \varphi(z) \psi_x(x, y) & (1.8-a) \\ U_z(x, z) = w_0(x, y) & (1.10-b) \end{cases}$$

Avec, le déplacement dans le plan (u_x) et le déplacement transverse ($u_z=w_0$).

En plus, la théorie des déformations du troisième ordre (the third-order shear deformation theory ou TSDT) Reddy (1984) est obtenu par:

$$\varphi(z) = z\left(1 - \frac{4z^2}{3h^2}\right) \quad (1.11)$$

Touratier (1991) présente un modèle d'une fonction trigonométrique sinusoïdale (SSDT), la fonction de cisaillement transverse s'écrit sous la forme:

$$\varphi(z) = \frac{z}{h} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (1.12)$$

Karama et al. (2003) ont exploité la théorie déformation en cisaillement d'ordre élevé, proposent une fonction exponentiel:

$$\varphi(z) = ze^{-\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (1.13)$$

1.2.4 Modèle tridimensionnel (Élasticité 3D):

En élasticité 3D, Les expressions analytiques exactes:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_1 = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_2 = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_3 = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (1.16)$$

f_1, f_2, f_3 : Sont les forces des volumes. ρ : est la masse volumique.

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$; $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$: Sont les composantes vecteur accélération, respectivement.

les plaques FG et les composites laminées sont étudié par Spencer (1998) proposant des solutions exactes.

Les plaques elliptiques FG sont étudiées par Cheng et Batra (2000) à la flexion 3D à des conditions aux limites (encastées) sous chargements.

Reddy et Cheng (2001) ont adopté la méthode de développement asymptotique, pour obtenir des solutions exactes pour l'analyse de la flexion 3D des plaques FG simplement appuyées, sous chargements thermiques. Au lieu d'utiliser la méthode de développement asymptotique, Vel et Batra (2004) ont adopté une méthode des séries de puissance pour

dériver les solutions exactes de l'analyse de la flexion 3D des plaques FG simplement appuyées soumises à des charges thermiques.

1.2.5 Modèle quasi-3D:

À ce modèle quasi-3D, prendre la forme:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial x} + \varphi(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial x} \quad (1.17)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b(x, y)}{\partial y} + \varphi(z) \frac{\partial w_s(x, y)}{\partial y} \quad (1.18)$$

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad (1.19)$$

Où: $g(z) = 1 - \psi'(z)$; avec $\psi'(z)$ est la dérivée de la fonction de cisaillement.

Zenkour (2007) a utilisé la fonction sinusoidale théorie quasi-3D qui tient en compte les effets de cisaillement et de déformation normale pour les plaques FG. Mantari et Guedes Soares (2014) a optimisé la théorie sinusoidale quasi 3D pour l'analyse de la flexion des plaques FG.

Une nouvelle théorie quasi-3D de déformation de cisaillement. Le modèle mathématique utilisé propose seulement 5 variables comme dans le cas de la théorie de la déformation au cisaillement du premier ordre (FSDT).

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + k_1 \varphi(z) \int \theta(x, y) dx \quad (1.17-a)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + k_2 \varphi(z) \int \theta(x, y) dy \quad (1.18-b)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) + g(z)\varphi_z(x, y) \quad (1.19-c)$$

Avec ; $k_1 = \lambda^2$; $k_2 = \mu^2$; $\lambda = m/a$; $\mu = n\pi/b$

Où: u_0 ; v_0 ; w_0 et φ_z sont les déplacements inconnus du plan médian.

$$g(z) = \partial\varphi(z)/\partial z$$

Contrairement aux théories d'ordres élevés (HSDT) cette théorie présente un nouveau champ de déplacement qui comprend des variables intégrales indéterminées.

1.3 Les lois de mélange:

1.3.1 Propriétés matérielles effectives:

Basant sur la loi des mélanges ou modèle de Voigt Woldemar, cité dans l'équation (1.20):

$$P = \sum_{i=1} P_i V_{Fi} \quad (1.20)$$

Où P_i et V_{Fi} sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif i avec la somme des fractions volumiques.

Ainsi que la somme de tous les fractions volumiques:

$$\sum_{i=1} V_{Fi} = 1 \quad (1.21-a)$$

En réduit, les propriétés du matériau métallique et de céramique:

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (1.21-b)$$

Les chercheurs emploient la fonction de puissance polynômiale(P-FGM), ainsi que la fonction sigmoïde (S-FGM) , et aussi la fonction exponentielle (E-FGM) pour décrire les fractions de volume dans ces travaux.

1.3.2 Loi de puissance :

Les équations (1.22) et (1.23) représentent le mélange constitutif entre la fraction volumique de céramique V_c et la fraction volumique de métal V_m obéit à une simple loi de puissance, comme suit :

$$V_c = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^p \quad (1.22)$$

$$V_m = 1 - V_c \quad (1.23)$$

L'équation 1.22 précédente est présentée dans la figure 1.12.

Les coefficients de rigidité effectifs $E_{eff}(z)$ et $G_{eff}(z)$ obtenus sur la base de la règle de mélange des constituants, peuvent s'écrire comme suit :

$$E_{\text{eff}}(z) = (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^P + E_m \quad (1.24)$$

$$G_{\text{eff}}(z) = (G_c - G_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^P + G_m \quad (1.25)$$

De plus, le coefficient de Poisson effectif ν_{eff} est présenté ci-dessous:

$$\nu_{\text{eff}}(z) = (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^P + \nu_m \quad (1.26)$$

Le coefficient de Poisson en général inférieur ou égale à 0.5 (le cas de matériaux en caoutchouc) et le présent cas est effective varie de 0,25 à 0,3.

P : Est l'indice de puissance qui décrit la variation de matériau en fonction de l'épaisseur.

La figure 1.12 présente à travers une fonction en loi de puissance, la fraction volumique de la propriété du matériau P-FGM en fonction de l'épaisseur.

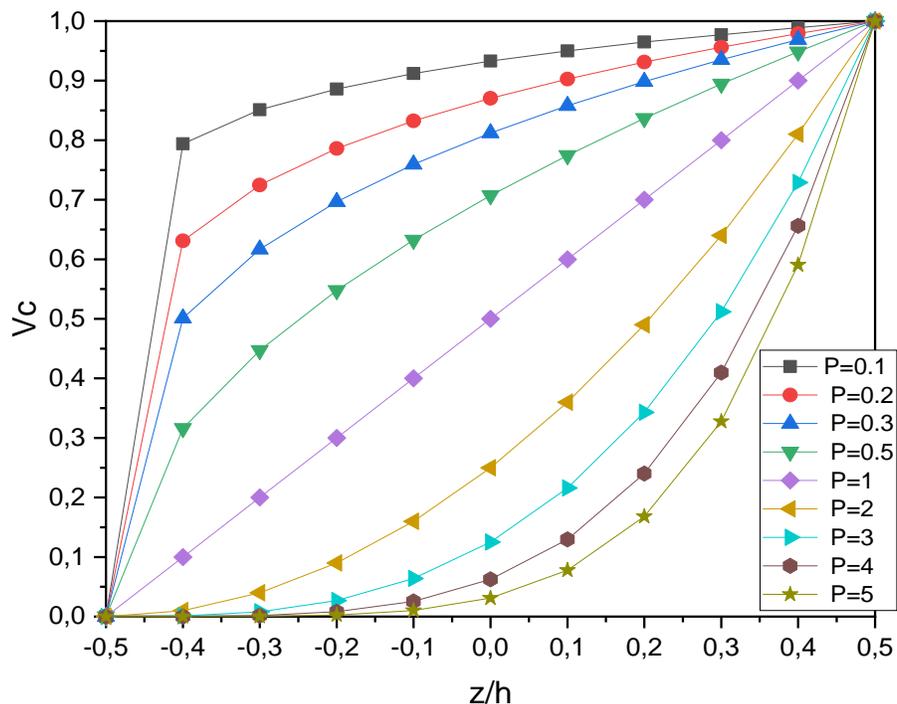


Figure 1.12. Propriétés P-FGM [Chi et al ;2003]

1.3.3 Loi sigmoïde :

Chung et Chi [8] ont défini la fraction de volume de la poutre S- FGM en utilisant deux fonctions de loi de puissance pour assurer une bonne distribution des contraintes parmi toutes les interfaces.

$$V_c = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^P \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq 0 \quad (1.27)$$

$$V_c = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{h}{2} + z}{\frac{h}{2}} \right)^P \quad 0 \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (1.28)$$

P : Est l'indice de puissance qui décrit la variation de matériau en fonction de l'épaisseur.

La figure 1.13 présente à travers une fonction en loi de puissance(1.27) , la fraction volumique de la propriété du matériau S-FGM en fonction de l'épaisseur.

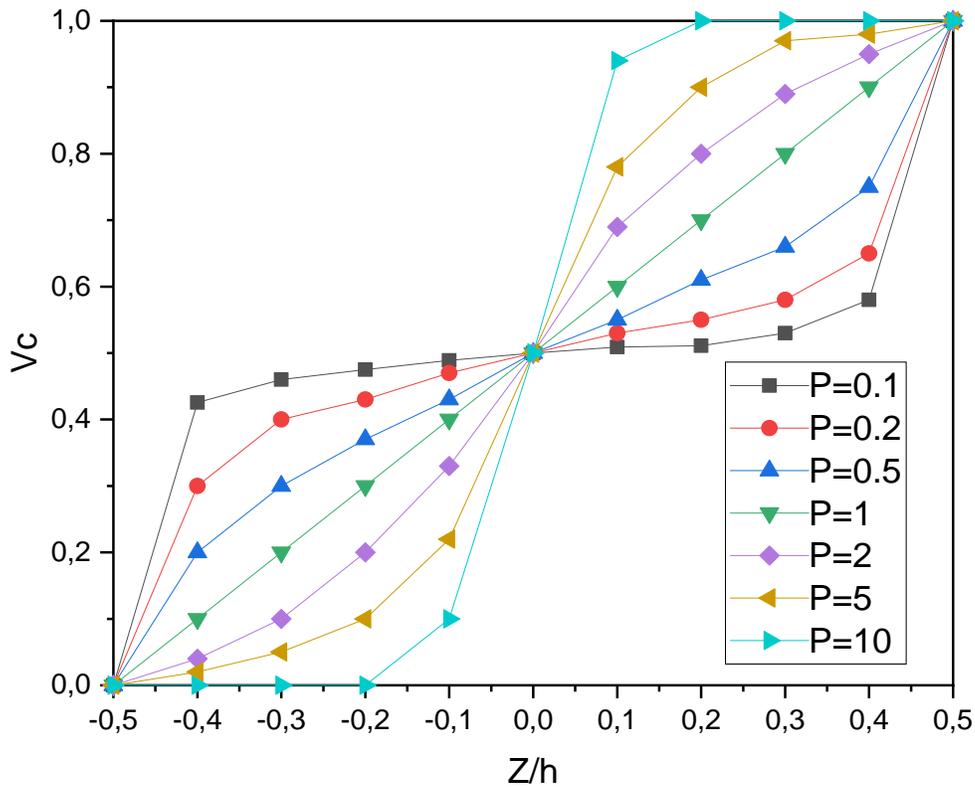


Figure 1.13. Propriétés S-FGM [Chi et al ;2003]

1.3.4 Loi exponentielle (E-FGM):

Pour une loi de distribution exponentielle (E-FGM) telle que rapportée par [Mantari et Guedes Soares] dans les équations suivantes:

$$V_c = E_m \exp \left[B \left(z + \frac{h}{2} \right) \right] \quad (1.29)$$

$$B = \frac{1}{h} \left(\frac{E_c}{E_m} \right) \quad (1.29-a)$$

Leur forme est présentée sur la figure 1.14, où la variation de la fraction volumique à travers l'épaisseur-FGM.

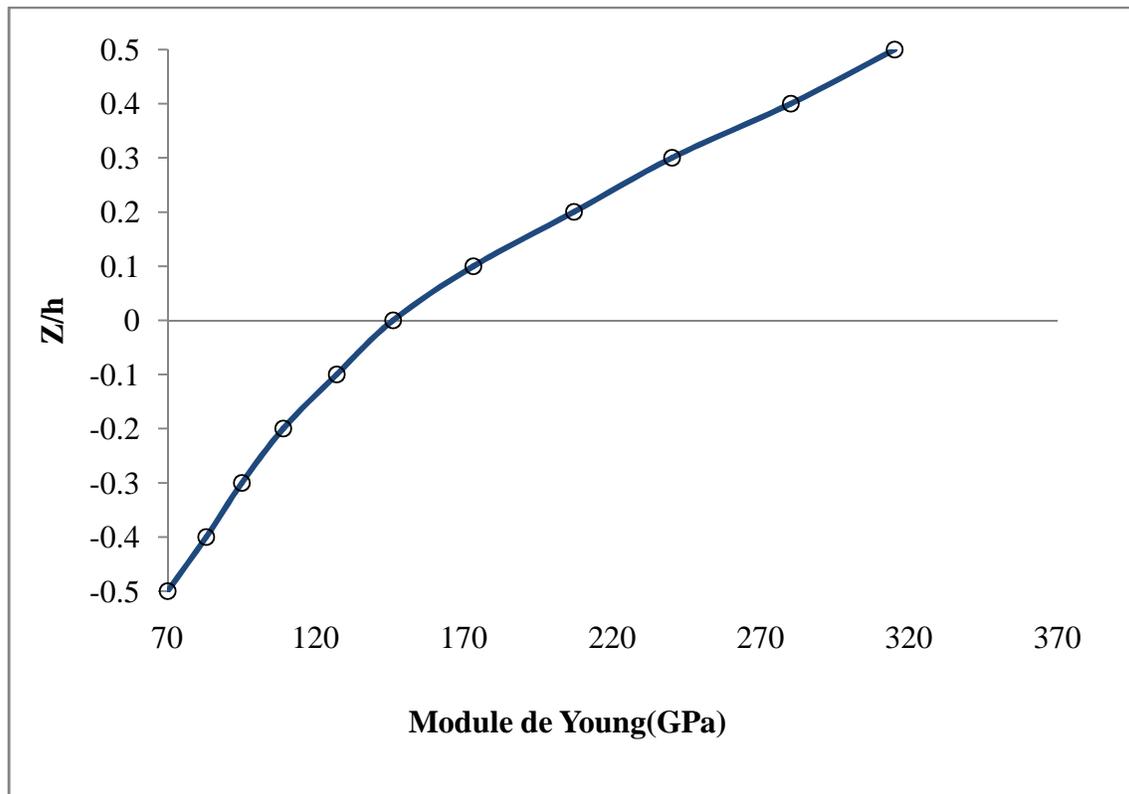


Figure 1.14. Propriétés E-FGM [Narottam;2011]

1.4 Revue des travaux antérieurs sur les poutres FGM en flexion:

En outre, la théorie classique (CT), (FSDT), (HSDT), analyse du comportement des poutres qui sont modélisées à l'aide d'un champ de déplacement qui contient des termes intégraux avec réductions des inconnus vers un inconnu principal. Les travaux antérieurs sur les poutres FGM.

1.4.1 Etude statique portant sur des structures fonctionnellement graduées (FGM):

Euler-Bernoulli leur théories classique ne pas faire une considération à l'effet transverse de cisaillement.

Timochenko a montré l'effet du cisaillement transversal est bien supérieur à celui de l'inertie rotatoire sur la réponse de vibration transversale des barres prismatiques.

Récemment, en 2000 Reddy a analysé et proposé une nouvelle fonction de cisaillement polynomiale pour les plaques composites stratifiées en utilisant une théorie simple d'ordre supérieur. La théorie actuelle prédit les déformations et les contraintes avec plus de précision que la théorie du premier ordre. Dans les travaux de recherche de Shi (Shi et al., 2000), les déformations de cisaillement des poutres avec des équations différentielles du sixième ordre dans différentes conditions aux limites ont pour objectif principal de présenter une nouvelle théorie pour résoudre analytiquement les équations d'équilibre différentiel du sixième ordre de trois poutres déformables par cisaillement typiques, car la théorie du quatrième ordre de la théorie des poutres de Timoshenko (TBT) pourrait générer certains problèmes sur les conditions aux limites de déplacement. Les solutions sont plus précises que celles données par les équations différentielles du quatrième ordre de TBT, et s'accordent bien avec les solutions d'élasticité.

M. Aydogdu et al (2007) a présenté une étude dans laquelle il a comparé les différentes théories d'ordre supérieur (Théorie de la déformation par cisaillement parabolique (PSDT), Théorie de déformation par cisaillement trigonométrique (TSDT) et Déformation par cisaillement exponentiel (ESDT) avec la théorie de l'élasticité tridimensionnelle. L'auteur a

montré que le déplacement transversal et les contraintes sont mieux prédit par l'ESDPT par rapport à d'autres théories.

Kadoli et al (2008) ont mené une enquête sur l'analyse statique de poutres fonctionnellement classées composées d'une combinaison métal-céramique sous une charge uniformément répartie en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur. La forme par éléments finis de l'équation d'équilibre statique pour une poutre FGM a été développée, en utilisant le principe de l'énergie potentielle stationnaire, pour déterminer la déflexion transversale, les contraintes axiales et de cisaillement dans une poutre FGM d'épaisseur modérée, sur la base d'une théorie de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Les résultats numériques ont montré que les flèches, les contraintes et la localisation de la surface neutre dépendaient principalement de l'indice de la loi de puissance.

Lu et al (2008) ont étudié des poutres fonctionnellement graduées et ont également proposé dans diverses conditions finales des solutions d'élasticité semi-analytique pour les cas. À partir des remarques finales, l'utilisation d'une méthode hybride de quadrature déférente (DQM) basée sur l'espace d'états est appliquée au modèle approximatif et à la méthode de l'espace d'états (SSM). Comme résultat principal, la sélection appropriée des propriétés des matériaux par rapport à la charge thermique est capable de réduire les contraintes thermiques. La distribution des contraintes de cisaillement axiales normales et transversales obtenues à l'aide de la méthode semi-analytique et MEF, les effets des indices de gradient sur la déformation et la distribution des contraintes, sont présentés.

X.-F. Li (2008) analysé les comportements statiques et dynamiques de poutres fonctionnellement classées avec prise l'effet de l'inertie, cisaillement. L'auteur a montré que pour les deux cas (statique et dynamique), les théories des poutres de Rayleigh et d'Euler-Bernoulli pouvaient être analytiquement réduites à partir de la théorie des poutres de Timoshenko. Un rapport en termes de solution de déflexion entre la théorie des poutres de Timoshenko et les théories des poutres de Rayleigh et d'Euler-Bernoulli par rapport à l'indice proposé et une comparaison de trois modes de vibration d'une poutre en porte-à-faux soumise à des charges uniformes et concentrées ont été étudiés.

Chapitre 1: Généralités sur les Matériaux à Gradient de Propriétés Fonctionnel (FGM)

Simsek et al(2009) analysé une poutre à support simple et fonctionnellement graduée soumise à une charge uniformément répartie à l'aide de la méthode Ritz. Les déplacements axiaux et transversaux ainsi que la rotation des sections transversales de la poutre FGM ont été exprimés dans les fonctions trigonométriques. Les propriétés matérielles de la poutre ont été considérées comme variables dans l'épaisseur selon la forme de la loi de puissance. Les résultats numériques ont montré que le module d'élasticité jouait un rôle majeur sur les déplacements et les distributions de contraintes de la poutre FGM. De plus, les distributions de contraintes de cisaillement étaient plus affectées par l'exposant de la loi de puissance choisi.

Ghugal et al. (2011) ont proposé une théorie de déformation par cisaillement, prenant en compte les effets de déformation par cisaillement transversal, pour l'analyse de flexion statique de poutres isotropes épaisses de section rectangulaire avec diverses limites et conditions de chargement (concentrées et uniformes). Les auteurs ont comparé le champ de déplacement des cas illustratifs à ceux de Timochenko et d'autres solutions. De plus, les poutres ont été soumises à des charges paraboliques et cosinus. Les variations de déplacement axial, de contrainte axiale, de contrainte de cisaillement transversal, ont été validées.

Guenfoud et al (2015) ont proposé une nouvelle fonction de cisaillement polynomiale utilisée qui satisfait les conditions aux limites sans contrainte, alors que cette théorie présente de fortes similitudes avec la théorie des poutres de Timoshenko dans certains concepts tels que les équations de mouvement, les conditions aux limites et les expressions résultantes des contraintes. Pour utilisée sur les poutres en matériaux fonctionnellement classés FGM, la nouvelle fonction de cisaillement polynomiale est présentée et comparée et utilisant un code d'éléments finis pour vérifier et valider par rapport à celles existantes dans la littérature.

Benatta et al (2008) ont étudié la réponse à la flexion de poutres composites hybrides courtes en faisant varier l'espacement des fibres. Les auteurs ont prouvé que la poutre hybride en matériau à gradation fonctionnelle (FGM) avec une variation de la fraction volumique de fibres pouvait améliorer les performances de la poutre.

Chapitre 1: Généralités sur les Matériaux à Gradient de Propriétés Fonctionnel (FGM)

Gandhe et al (2018) ont étudié par analyse de flexion statique de poutres épaisses en utilisant la théorie de la déformation par cisaillement hyperbolique. Le principe du travail virtuel a été utilisé pour dériver les équations régissant les poutres. Les déplacements et les contraintes obtenus pour les poutres sous charges variables ont été comparés à ceux prédits par Timoshenko et les théories d'ordre supérieur.

Sayyad et al(2019) ont suggéré une nouvelle déformation de cisaillement hyperbolique pour la flexion statique de la poutre isotrope épaisse satisfaisant les conditions de surface sans contrainte de cisaillement au sommet et au bas de la théorie de la poutre.

Un modèle analytique a été développé par des équations différentielles obtenues à partir du principe de travail virtuel et des conditions aux limites. Trois exemples illustratifs, soumis à une charge sinusoïdale unique, une charge uniformément répartie, une charge linéairement variable pour déterminer les déplacements et les contraintes, ont été analysés. Il est important de noter que la théorie suggérée par les auteurs ne nécessitait pas le facteur de correction du cisaillement.

Gao et al (2007) ont concentrés sur les conditions aux limites dans le problème de flexion des poutres en utilisant le théorème de réciprocity et la solution de Papkovitch-Neuber pour obtenir la contrainte appropriée et les conditions aux limites mixtes précises. Un ensemble de conditions nécessaires sur les données de bord pour l'existence d'une solution à décomposition rapide a été établi, généralisant la méthode proposée par Gregory et Wan.

Elshorbagy et al. (2011) ont étudié les caractéristiques des poutres Euler-Bernoulli pour le sens axiale et transversale à travers l'épaisseur de la poutre, par la méthode de Ritz. Xiang et al. (2011) ont proposé une théorie de déformation par cisaillement, pour l'analyse des vibrations libres des plaques sandwich FG et composites. La théorie a été obtenu en modifiant le champ des déplacements de la TSDT pour tenir en compte des termes polynomiaux d'ordre n .

Chapitre 1: Généralités sur les Matériaux à Gradient de Propriétés Fonctionnel (FGM)

Ziou et al (2016) analysé poutre en porte-à-faux en matériau fonctionnellement classé (FGM) pour différents rapports (longueur/épaisseur) choisis. Les résultats numériques ont prouvé que les déflexions étaient plus élevées pour les poutres riches en métal que celles des poutres riches en céramique.

Pour cette raison, une nouvelle fonction de cisaillement polynomiale est développée, dans cette étude, pour les déformations en cisaillement dans le champ de déplacement. Ce modèle analytique développé est une nouvelle contribution non utilisée ailleurs.

Les résultats numériques, en termes de champ de déplacement, de contraintes et de déformations, prédits à partir du modèle développé sont comparés à ceux publiés dans la littérature pour des poutres simplement appuyées.

Zaoui (2017) présenté fonction hyperbolique raffinée, de poutres fonctionnellement classées incluant les effets d'étirement. Les équations ont été dérivées (P-Hamilton), solutions (Navier). Plus, les auteurs ont analysé l'effet gradient de matériau (gauchissement), les fréquences propres aux extrémités, ont prouvé que avait tendance à être plus important lorsque les faisceaux devenaient plus courts.

Les plaques composites, a été étudié par Zankour et al (2006) ont étudié des plaques en FGM épaisses basant sur les solutions de l'élasticité tridimensionnelle avec une variation exponentielle de propriétés matérielles à travers l'épaisseur (utilisant un modèle exponentiel).

Aydogdu et al. (2007) ont examiné sous différentes conditions aux limites l'influence de rapport de la géométrie (a/h) et (a/b) et de l'indice de la fraction volumique sur les fréquences naturelles des plaques FGM minces et épaisses, ont proposé une solution approchée par une série des études en utilisant la méthode de Ritz.

Tounsi et al (2013) mettre en évidences : -Théories HSDT (Flexion ; Vibration; Flambage) pour plaque ; poutres FGM.

1.5 Conclusion:

Ces généralités peuvent mettre en évidence que :

- Les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) sont une nouvelle classe de matériaux composites, ces matériaux possèdent des propriétés effectives, des modes de fabrication, des avantages qui peuvent les rendre attractifs du point de vue de leur potentiel d'application.

- La variation progressive des propriétés des matériaux à gradient de propriétés permet de créer des structures innovantes qui peuvent être exploitées dans de nombreux domaines d'application.

- Les théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé sont applicables sur les matériaux fonctionnellement gradués (FGM) de 2D et 3D pour les poutres ainsi que les plaques, ces théories considèrent des distributions paraboliques des déformations de cisaillement à travers l'épaisseur, tout en assurant la nullité des contraintes de cisaillement sur les bords libres de sections, ces théories ont amélioré les théories classiques d'Euler-Bernoulli, ainsi que de Timoshenko.

Le cisaillement par déformation à une nouvelle fonction polynomiale de déformation et le gauchissement (ajouter l'effet de cisaillement au champ de déplacement) par théorie d'ordre supérieure en flexion qu'améliore les théories classiques d'Euler-Bernoulli et la théorie de Timoshenko, respectivement.

Chapitre 2

Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

2. Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

2.1 Introduction:

Des théories nouvelles ont amélioré les théories classiques d'Euler-Bernoulli, ainsi que de Timoshenko.

L'analyse de la poutre FGM se base sur la détermination des propriétés effectives.

Contrairement aux microstructures traditionnelles, dans les FGM les propriétés matérielles varient dans l'espace.

La présente étude vise à améliorer la théorie classique, à des conditions aux limites variables.

Le gauchissement (ajouter l'effet de cisaillement au champ de déplacement) par théorie d'ordre supérieure en flexion.

Différents modèles micromécaniques, sont considérées. Les lois constitutives et le comportement d'élasticité sont applicables.

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

2.2 Propriétés Matérielles de la poutre FGM :

Étant donné qu'ils sont utilisés dans des environnements à conditions severes et élevées, les constituants des FGM peuvent avoir des propriétés dépendantes de la charge (Reddy et Chin, 1998). Par conséquent, les propriétés des matériaux incluant à savoir comportement constitutives sont supposées être en fonction des lois et sont exprimées comme suit symbolise les propriétés effectives des matériaux constitutifs.

2.2.1 Modèles micromécaniques :

Contrairement aux microstructures traditionnelles, dans les FGM les propriétés matérielles varient dans l'espace, ce qui n'est pas négligeable pour le modèle micromécanique (Jaesang et Addis 2014). L'analyse du comportement thermomécanique de la poutre FGM se base pour la détermination des propriétés effectives.

2.1.1.1 Modèle Voigt :

Un modèle dans la plupart des analyses utiliser pour évaluer les propriétés des FGM (Mishnaevsky, 2007, Zimmerman, 1994):

$$P(z) = P_c(z) [1 - v(z)] + P_m(z) v(z) \quad (2-1)$$

2.1.1.2 Modèle Reuss :

Reuss déterminé leur modèle suivant la formule (Mishnaevsky, 2007, Zimmerman, 1994) à savoir :

$$P(z) = \frac{P_c(z) P_m(z)}{P_c(z) [1 - v(z)] + P_m(z) v(z)} \quad (2-2)$$

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

2.1.1.3 Loi de mélange Tamura :

loi de mélange linéaire peut être permet de transféré contrainte-déformation (Gasik, 1995, Zuiker, 1995) avec:

$$q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad (2-3-a)$$

Pour une valeur de $q = 0$, le modèle de Tamura correspond à celui de Reuss.

Pour une valeur de $q = +\infty$, coïncide au modèle de Voigt.

Les propriétés effectives $P(z)$ sont données par :

$$P(z) = \frac{[1 - v(z)] P_m(z) [q - P_c(z)] + v(z) P_c(z) [q - P_m(z)]}{[1 - v(z)] [q - P_c(z)] + v(z) [q - P_m(z)]} \quad (2-3-b)$$

2.1.1.4 Modèle LRVE (élément de volume représentatif) :

Pour LRVE est développée en partant de l'hypothèse que la microstructure du matériau hétérogène est connue. La propriété effective est exprimée par la LRVE comme suit (Akbarzadeh et al. 2015):

$$P(z) = P_m(z) \left[1 + \frac{v(z)}{FE - \sqrt[3]{v(z)}} \right] \quad (2-4-a)$$

Avec :

$$FE = \frac{1}{1 - \frac{P_m}{P_c}} \quad (2-4-b)$$

La méthode utilisée par la LRVE pour la détermination de la structure micromécanique est d'une façon générale la moyenne du volume ou la moyenne de l'ensemble des descripteurs de la microstructure.

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

2.1.1.5 Modèle Mori-Tanaka:

Propriétés effective est donné par l'équation (2-5) :

$$P(z) = P_m(z) + [P_c(z) - P_m(z)] \left[\frac{V_c}{1 + (1 - V_c) \left(\frac{P_c}{P_m} - 1 \right) \left(\frac{1 + \nu}{3 - 3\nu} \right)} \right] \quad (2-5)$$

2.3 Equations d'élasticité:

2.3.1. Champ de déplacement:

Dans la figure 2.1, Le vecteur joignant les positions dans la configuration non déformée et la configuration déformée est appelé le vecteur déplacement modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT).

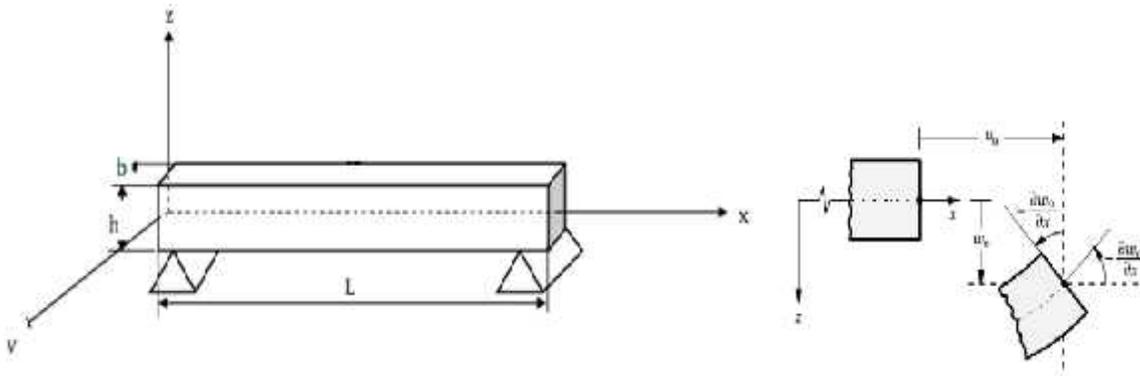


Figure 2.1. Déplacement modèle de la poutre d'Euler-Bernoulli (CBT)

comme le montre dans la figure 2.2. Le vecteur initial des coordonnées $X_0 \rightarrow (x, y, z)$ d'un point matériel M_0 de domaine Ω_0 , se déplace par un vecteur de déplacement note $U \rightarrow$ et sa position est devenue :

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

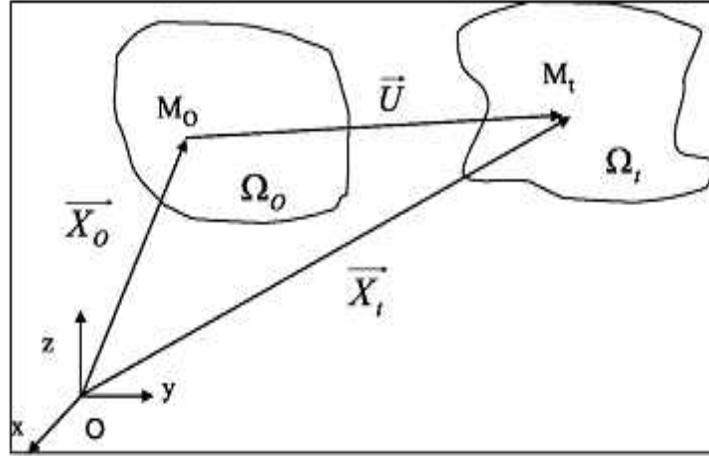


Figure 2.2. Position M_0 vers M_t - [Ziou, 2017]

Une description lagrangienne:

$$X_t^{\rightarrow} = X_0^{\rightarrow} + M_0 M_t^{\rightarrow} = X_0^{\rightarrow} + U^{\rightarrow} \quad (2.6)$$

vecteur U^{\rightarrow} on peut identifier comme tenseur de déplacement leur tenseur gradient $[L_0]$ présente par l'équation 2.7 ci-après:

$$\nabla u^{\rightarrow} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{\partial u}{\partial y_0} & \frac{\partial u}{\partial z_0} \\ \frac{\partial v}{\partial x_0} & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{\partial v}{\partial z_0} \\ \frac{\partial w}{\partial x_0} & \frac{\partial w}{\partial y_0} & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} = [L_0] \quad (2.7)$$

On peut décomposer le tenseur gradient $[L_0]$ de l'équation (2.7), en deux tenseurs de déformations (ϵ_0) ; rotations (θ_0), respectivement.

$$[L_0] = [\epsilon_0] + [\theta_0] = \frac{1}{2} ([L_0] + [L_0]^t) + \frac{1}{2} ([L_0] - [L_0]^t) \quad (2.8)$$

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Avec:

$$[\varepsilon_0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_0} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y_0} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) \\ \text{sym} & & \frac{\partial w}{\partial z_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.8-a)$$

Et:

$$[\theta_0] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y_0} - \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z_0} - \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial y_0} + \frac{\partial v}{\partial x_0} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z_0} - \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) \\ \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial u}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial x_0} \right) & \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial v}{\partial z_0} + \frac{\partial w}{\partial y_0} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8-b)$$

2.3.2 Équations de compatibilités:

En état tridimensionnel, les équations de compatibilités sont des équations différentielles les suivantes:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.9-a)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \quad (2.9-b)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 \quad (2.9-c)$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.9-d)$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.9-e)$$

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.9-f)$$

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

2.3.3 État plan de contraintes:

En général, sur un repère de référence (O, x, y, z) :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

En symétrie :

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. En qualité que le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique.

En brief, sur un plan de référence (O, x, y), les contraintes à la normale et à l'axe tangentielle de cisaillement hors plan(x, y) sont nulles, $\sigma_{zz} = 0$; $\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0$, respectivement.

La composante de déformation par rapport l'épaisseur à l'axe z est non nul et leur équation (2.11) ci-après:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.11)$$

Les autres composantes de déformations, on peut affirmer qu'elles sont nulles, à savoir $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$.

Pour les équations de compatibilités dans le cas de l'état plan de contraintes, trois équations doivent être en plus vérifiées:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.12)$$

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

2.3.4 État plan de déformations:

En brief, sur un plan de référence (O, x, y), les déformations hors plan(x, y) sont nulles, à savoir $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$. La composante de contrainte par rapport l'épaisseur à l'axe z est non nul et leur équation (2.13) ci-après:

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (2.13)$$

Pour les équations de compatibilités, la condition qui doit être en plus vérifiée est:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.14)$$

2.3.5 Équations d'équilibre:

L'équilibre du système s'écrit en mécanique des milieux continus:

$$\begin{cases} \text{div} \vec{\sigma} + \vec{f}_v = 0 & (2.15\text{-a}) \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{n} = \vec{f}_s & (2.15\text{-b}) \\ \vec{u}(M) = \vec{u}_d & (2.15\text{-c}) \end{cases}$$

Les forces surfaciques f_s appliquent sur domaine surfacique(); et forces de volumes f_v appliquent sur un domaine ().

Remarque: Voir pour plus détails (Réf- Alfio Quarteroni,2007) ; (CHATEAUNEUF, 2005) ; (Dhatt. G et al ,1981), ZIENCKIEWICZ, 1989).

2.3.6 Tenseur des déformations:

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange linéarités est exprimé sous la forme matricielle par:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \text{sym} & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Où, sous la forme vectorielle:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.16-a)$$

2.4 Loi de comportement de matériaux (Isotropes) :

Les FGM ont de comportements isotropes. Un milieu est dit isotrope transverse pour une propriété donnée si cette propriété est invariante par changement de direction obtenue par rotation autour d'un axe privilégié. Dans ce cas, tout plan passant par l'axe privilégié est un plan de symétrie. Un matériau isotrope transverse est un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution et admet le plan (2,3) comme plan d'isotropie. D'où un matériau composite unidirectionnel qui peut considérer comme un matériau isotrope transverse, ce qui implique permettre d'utilisation les lois constitutives de base (l'élasticité générale) et la loi de Hooke généralisée.

La relation d'élasticité linéaire dans un milieu isotrope exprimée en fonction des constantes de lamé par:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.17)$$

D'où la dilatation volumique : $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$;

Et le tenseur de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ pour $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Les contraintes normales ($i=j$) s'obtiennent :

$$\sigma_{ii} = \lambda \delta_{ii} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ii} \quad (2.17-aa)$$

Et les contraintes tangentielles de cisaillement sont :

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.17-bb)$$

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Nous déduisons que :

$$\sigma_{kk} = (3\lambda + 2\mu)\varepsilon_{kk} \quad (2.17-cc)$$

Les déformations en fonction les contraintes sont donné par la relation :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) \quad (2.18)$$

Pour (i=j), les déformations normales sont :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ii} - \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu} \delta_{ii} \sigma_{kk} \right) \quad (2.18-aa)$$

Et les déformations tangentielles sont :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad ; \quad (2.18-bb)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} \quad (2.18-cc)$$

Une comportement en élasticité tridimensionnelle, l'expression des contraintes et les déformations s'écrit sous la forme matricielle à partir loi de Hooke à l'état initial en absence de l'effet thermique:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \quad (2.17-d)$$

Sous forme matrice:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{21} & Q_{31} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{32} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.17-a)$$

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9.

Avec:

$$Q_{11} = Q_{22} = Q_{33} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.17-b)$$

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

Coefficients de rigidité de l'effet de Poisson par symétrie sont donnés par:

$$Q_{12} = Q_{13} = Q_{21} = Q_{31} = Q_{32} = Q_{23} = \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.17-c)$$

Et aussi:

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad (2.17-d)$$

Avec, $\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ sont les composantes de vecteur des contraintes et des déformations, respectivement. Où, $[C]$ est la matrice des coefficients de propriétés de matériaux qui peuvent s'écrire comme suit:

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ sym & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.17-f)$$

Remarques: Voir pour plus détails (Réf- Alfio Quarteroni,2007) ; (CHATEAUNEUF, 2005) ; (Dhatt. G et al ,1981), ZIENCKIEWICZ, 1989).

1- On peut inverser la matrice des coefficients de propriétés de matériaux $[C]$ lorsque l'équation (2.17) devenue:

$$\{\varepsilon\} = [H]\{\sigma\} \quad (2.18)$$

Donc, $[H]$ est la matrice inverse de matrice des propriétés de matériaux.

Où $[H]=[C]^{-1}$.

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \quad (2.18-a)$$

sym

2- Pour un comportement à l'état plan:

-Etat plan de contraintes (2D) la matrice de propriétés, est la suivante:

$$[C] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{et leur inverse: } [H] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \quad (2.18-b)$$

- Etat plan de déformations (2D) la matrice de propriétés, est la suivante:

$$[C] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.18-c)$$

$$\text{Et leur inverse: } [H] = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.18-d)$$

3- Le coefficient de Poisson en général est inférieur ou égal de 0.5 pour les matériaux en MMC.

4- Un matériau est dit isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix de ses axes de référence.

5- Les coefficients (coefficient de Poisson et l'inverse de module de Young) en fonction des coefficients de Lamé (λ ; μ) :

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} ; \quad \frac{1}{E} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}$$

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

2.5 Principe des travaux virtuels:

Sur la notion fondamentale ($\delta W_{ext} = \delta W_{int}$), le principe de travaux virtuels (PTV) (Forme faible).

L'équilibre s'exprime par:

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma \, dV = \int_V \delta u^T f_V \, dV + \int_A \delta u^T f_S \, dS \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{int} = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma \, dV = \int_V [& \left(E(z) \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) + \left(z^2 E(z) \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \left(z E(z) \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \\ & - \left(z E(z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \right)] dV \end{aligned} \quad (2.19-a)$$

La rigidité membranaire $\left(E(z) \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)$ et la rigidité flexionnelle $\left(z^2 E(z) \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right)$ ainsi que la rigidité de couplage $\left(z E(z) \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) - \left(z E(z) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} \right)$.

Le cas de l'analyse modale pour les dimensions $0 \leq x \leq L$; $-h/2 \leq y \leq h/2$,

inertie et le travail intérieur donc le champ de déplacement virtuel peut s'écrire:

$$\delta W_{int} + \delta W_{ine} = 0 \quad (2.20)$$

Avec,

$$\delta W_{int} = \int_V \delta \varepsilon^T \sigma \, dV \quad (2.20-a)$$

$$\delta W_{int} = b \int_0^L \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right\} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} E(z) & -zE(z) \\ -zE(z) & z^2 E(z) \end{bmatrix} dz \right] \delta \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \end{pmatrix} dx \quad (2.20-b)$$

Ainsi que,

$$\delta W_{ine} = - \int_V \rho(z) \ddot{u}_0 \delta u_0 \, dV \quad (2.20-c)$$

$$\delta W_{ine} = b \int_0^L \left\{ \ddot{u}_0 \quad \ddot{w}_0 \quad \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right\} \left[\int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \rho(z) & 0 & -z\rho(z) \\ 0 & \rho(z) & 0 \\ -z\rho(z) & 0 & z^2 \rho(z) \end{bmatrix} dz \right] \delta \begin{pmatrix} u_0 \\ w_0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{pmatrix} dx \quad (2.20-d)$$

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

2.6 Champ de déplacement des poutres FGM:

Le champ de déplacement virtuel peut être:

$$U_i(M, t) = U_i(M_0, t) + zw_i^{(1)}(M_0, t) + z^2w_i^{(2)}(M_0, t) + z^3w_i^{(3)}(M_0, t) + \dots, \quad (2.26)$$

où z est la coordonnée normale, a été développé (2.26-a).

$$u(x, z) = u_0(x) + zu_1(x) + z^2u_2(x) + z^3u_3(x) \quad (2.26-a)$$

Parce que la contrainte de cisaillement est nulle sur les deux fibres de la poutre ($\pm h/2$), la relation entre la déformation de cisaillement et la contrainte doit disparaître la déformation de cisaillement, ainsi, $u_2(x)=0$.

Par conséquent, l'équation précédente est devenir:

$$u(x, z) = u_0(x) + zu_1(x) + z^3u_3(x) \quad (2.26-b)$$

La forme du mouvement proposé à travers l'épaisseur de composantes (u, v, w) est la suivante:

$$u(x, z) = u_0(x) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi(z)\theta_x(x) \quad (2.27-a)$$

$$V(x, z) = 0 \quad (2.27-b)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (2.27-c)$$

Avec, $\varphi(z) = 0$ pour la forme Euler-Bernoulli, $\varphi(z) = z$, pour la forme de Timoshenko.

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

2.7 Hypothèses et conditions aux limites:

2.7.1 Hypothèses de calcul:

La théorie d'ordre élevé (HSDT) est basée sur les hypothèses cinématiques suivantes pour la formulation mathématique de problème à la flexion des poutres:

- Déplacement est très petit par rapport à l'épaisseur h de la poutre.
 - Déplacement axial u dans la direction x se compose d'un déplacement en membrane, d'un déplacement en flexion et d'un déplacement dû au cisaillement.
 - Déplacement transversal dans la direction z est constitué d'une seule composante de déformation en flexion.
 - Composante dû au cisaillement à une variation parabolique de contrainte de cisaillement τ_{xz} à travers l'épaisseur de la poutre, de plus la présente théorie satisfait les conditions aux limites de telle sorte que la contrainte de cisaillement est nulle aux facettes (supérieure, inférieure) de la poutre.
 - Théorie comprend seulement trois variables inconnues indépendantes.
 - Déformation normale transversale ($\epsilon_z=0$) est négligé.
 - Les lois constitutives et le comportement d'élasticité sont applicables.
- Rien peut à faire sans hypothèses de calcul aux champs des poutres en FGM.

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

2.7.2 Conditions aux limites:

Les conditions aux limites essentielles et naturelles s'expliquent comme suit :

2.7.2.1 Conditions aux limites essentielles de Neumann:

Une condition aux limites de Neumann (nommée par Carl Neumann) est imposée à une équation différentielle ou une équation aux dérivées partielles lorsque l'on précise les valeurs des dérivées que la solution doit satisfaire sur les frontières/limites du domaine.

Condition aux limites de Neumann sur l'intervalle $[0,L]$ est: $y'(0)=0$; $y'(L)=0$. $x=L/2$,
 $w(x=L/2)/ x=0$

2.7.2.2 Conditions aux limites naturelles de Dirichlet:

Une condition aux limites de Dirichlet (nommée par Johann Dirichlet) est imposée à une équation différentielle ou une équation aux dérivées partielles lorsque l'on précise les valeurs (inconnue principale par exemple le déplacement w) que la solution doit satisfaire sur les frontières/limites du domaine. Condition aux limites de Dirichlet sur l'intervalle $[0,L]$ est: $y(0)=0$; $y(L)=0$. à $x = 0$, le déplacement est empêché selon z . À $x = L/2$, la rotation de la section est nulle en raison de la symétrie : $w_o(x=0) = 0$, $(x=L/2)=0$.

Chapitre2 : Étude du comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM)

2.8 Conclusion:

Le comportement mécanique des poutres en matériaux fonctionnellement gradués (FGM), obéit aux lois constitutives de base. Les solutions mathématiques aux équations différentielles nécessitent des conditions initiales et des conditions aux limites, ainsi que des hypothèses pour que les solutions soient correctes et précises.

Après avoir comparé ses résultats avec les solutions disponibles précédentes. Différentes solutions peuvent être produites dans les différents modèles proposés pour même problèmes à cause des différences des fonctions utilisées.

Ainsi que, l'erreur sur le choix du modèle de la solution, qui représente le comportement réel(EDP), la différence entre la solution exacte (modèle mathématique) et la solution avec des algorithmes basant sur (forme faible), l'on compare résultats des logiciels commerciaux.

Chapitre 3

Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

3. Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

3.1 Introduction:

En bref, ce chapitre 3 est organisé par la description de la théorie d'équation différentielle d'une poutre de type d'Euler-Bernoulli en flexion simple sans cisaillement.

En effet, la théorie de Timoshenko est permet d' amélioré le modèle d'Euler-Bernoulli et la prise en compte le cisaillement de forme linéaire.

Les théories d'ordre supérieur incluent également la déformation transversale (effet de déformation par cisaillement) ajoutée aux champs de déplacement avec une fonction de forme non linéaire.

Les théories (HSDT) considèrent une fonction de forme hyperbolique.

Une formulation et analyse théorique en statique de poutres, équations d'équilibres dérivées à partir le principe de travail virtuel.

Par l'application des conditions aux limites essentielles (Neumann) et naturelles (Dirichlet) sur les cas étudiées, et expose les expressions de modèle analytique de cas illustratives en flexion, à savoir les cas ou la poutre simplement appuyée soumise à une charge concentré au milieu et de conditions aux limites bi-encastrées, ainsi que d'autre poutre simplement appuyée supporte charge uniformément répartie sur sa travé, respectivement. Aussi, une poutre en porte-à-faux avec charge concentré à l'extrémité libre, et une autre soumise à une charge uniformément répartie.

Par l'application des nouvelles théories de déformations de cisaillement d'ordre supérieur que sont utilisées, incluent des fonctions de forme non linéaires et assurant nullités de contrainte sur les faces inférieures et supérieures de la section à travers l'épaisseur de la poutre, portant améliore le modèle de Timoshenko.

Plus, l'analyse statique de poutres composites fonctionnellement classées en flexion à l'aide modèle mathématique comporte les composantes de déplacement, sont définies.

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

Une nouvelle fonction de cisaillement polynomiale de déformation satisfaisant les conditions aux limites sans contrainte est présenté à cette section.

Les propriétés des matériaux sont supposées varier dans le sens de l'épaisseur, une simple distribution de loi de puissance en termes de fractions volumiques des constituants est considérée .

Le modèle mathématique est établi par des équations différentielles dérivées du principe du travail virtuel. CE, CAL, CI sont introduites.

Le modèle de solution est basé sur une approche de variationnelle (intégrales) pour prédire la composante champ de déplacement et les lois de comportement de base presentent. La solution du modèle analytique est présentée. Les résultats en termes de champs de déplacement incluant la rotation de la section et les contraintes de cisaillement, prédits à partir du modèle proposé, sont présentés. A la fin, une fructueuse conclusion, est présenté.

3.2 Formulation théorique:

3.2.1 Équation différentielle d'une poutre type d'Euler- Bernouilli:

On compte tenu des dimensions géométriques de la poutre ci-dessous, comme ayant longueur portée (L), la largeur (b) est l'épaisseur totale (h).

Où x, y, z - sont les coordonnées cartésiennes avec intervalles citées ci-dessous pour les intervalles $0 \leq x \leq L$; $-\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$; $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$.

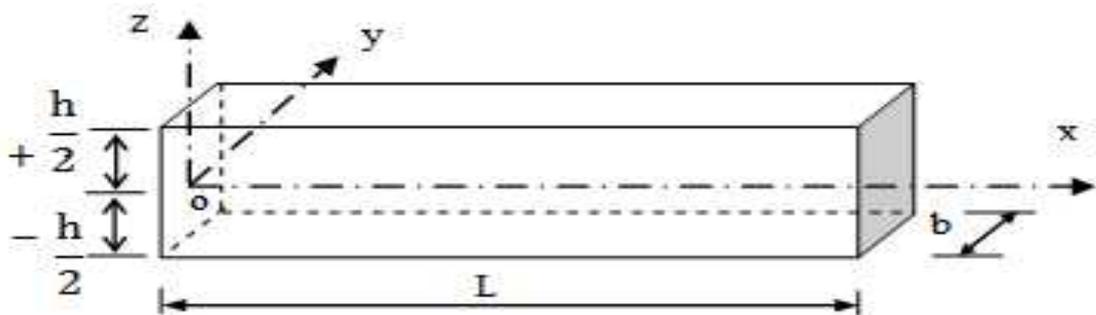


Figure 3.1. Géométrie de la poutre
(Source Auteurs)

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

l'équation différentielle en flexion lors l'absence de cisaillement transverse pour la poutre qui vérifiant les conditions de Euler- Bernouilli peut s'écrire sous la forme:

$$\rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \omega_0^2 a^4 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} = 0 \quad (3.1)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D_{11}}{\rho_s}} \quad (3.1-a)$$

où :

ω_0 : Est la pulsation propre.

($a=L$) est la distance entre les appuis de la poutre.

ρ_s : Est la densité de la poutre.

Et donc, la rigidité à la flexion : $D_{11} = E_x I$

Dans l'équation précédente, le déplacement transversal est de la forme:

$$W_0(x,t) = X_i(x) [A_i \cos w_i t + B_i \sin w_i t] \quad (3.2)$$

Par substitution de l'équation (3.2) dans l'équation (3.1) donc la forme finale de l'équation différentielle s'écrit en superposition sous la forme ci-dessous:

$$\frac{\partial^4 X_i}{\partial x^4} + \frac{1}{a^4 \omega_0^2} X_i = 0 \quad (3.3)$$

La forme générale de la solution homogène (sans chargement) :

$$X_i(x) = C_i \cos \kappa_i \frac{x}{L} + D_i \sin \kappa_i \frac{x}{L} + E_i \cosh \kappa_i \frac{x}{L} + F_i \sinh \kappa_i \frac{x}{L} \quad (3.4)$$

Où, $X_i(x)$: Est déformé modale de mode (i) et leur fréquence angulaire (w_i).

Le paramètre (κ_i) et les constantes C_i ; D_i ; E_i ; et F_i sont déterminées en fonction des conditions initiales et aux limites.

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

3.2.2 Analyse statique de poutres:

Considérant les dimensions géométriques de la poutre en statique de la figure 3.2 ci-après:

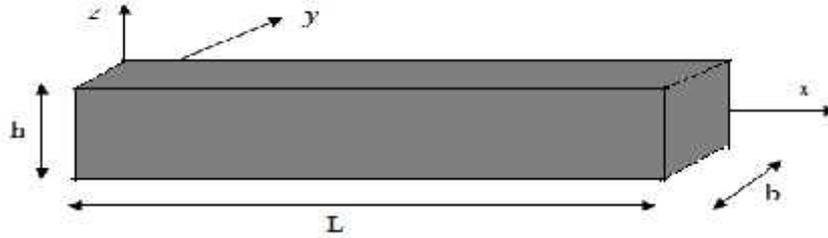


Figure 3.2. Poutre en statique

Où x, y, z sont les coordonnées cartésiennes, (L) est la longueur, (b) est la largeur et (h) est la hauteur. Le principe de travail virtuel peut défini par l'équation (3.5) comme suit:

$$b \int_{x=0}^{x=L} (N \frac{\delta \delta u_0}{\delta x} - M_b \frac{\delta^2 \delta w_0}{\delta x^2} + M_s \frac{\delta \delta \psi_x}{\delta x} + Q \delta \psi_x) dx - b \int_{x=0}^{x=L} q \delta w_0 dx = 0 \quad (3.5)$$

3.2. 2.1 Équations d'équilibres:

Les équations (3.6-b) et (3.6-c) présentent respectivement la force résultante normale (N) et la force résultante de cisaillement (Q).

$$N = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad (3.6-b)$$

$$Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \tau_{zx} dz \quad (3.6-c)$$

Où les équations (3.6-d) et (3.6-E) sont respectivement le moment de flexion (M_b) et le moment de flexion en cisaillement (M_s).

$$M_b = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz \quad (3.6-d)$$

$$M_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varphi(z) \sigma_x dz \quad (3.6-e)$$

Les équations des équilibres (3.7) à (3.10) sont dérivés en flexion du l'équation (3.5) par déductions à savoir :

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

$$\frac{\partial N(x)}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial^2 M_b}{\partial x^2} + (q = PL) = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^2 M_s}{\partial x^2} + \frac{\partial Q}{\partial x} + q = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial x} - N(x) = 0 \quad (3.10)$$

3.2. 2.2 Conditions aux limites:

L'application des conditions aux limites essentielles (Neumann) et naturelles (Dirichlet) pour les déplacements et les forces avec une considération des cas suivantes:

- **Cas 1** : Poutre simplement appuyée avec charge concentrée (P) au milieu (figure3.2-a)

$$D_{11} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = D_{11} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = w = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = L \quad (3.11-a)$$

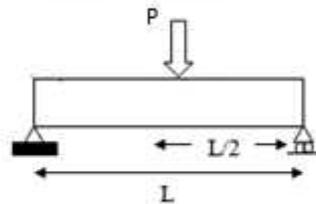


Figure3.2-a. Poutre simplement appuyée sous charge concentré (P)

- **Cas 2** : Poutre bi-encastées avec charge centrale concentrée (P) au milieu (figure3.2-b)

$$D_{11} \frac{\partial w(x)}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = \frac{L}{2}; w = 0 \quad \text{pour } x = 0; x = L \quad (3.11-b)$$

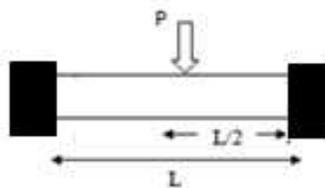


Figure 3.2-b. Poutre bi-encastés sous charge concentré (P)

- **Cas 3** : Poutre simplement appuyée avec charge uniformément répartie (q) (figure3.2-c)

$$D_{11} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = D_{11} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = w = 0 \quad \text{pour } x = 0 \text{ et } x = L \quad (3.12)$$

$$D_{11} \frac{\partial^3 w(x)}{\partial x^3} = D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} = \varphi_x = 0 \quad \text{pour } x = \frac{L}{2} \quad (3.13)$$

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

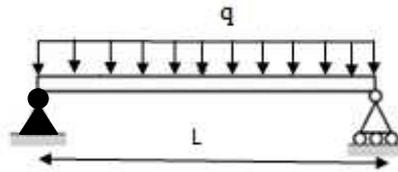


Figure 3.2-c. Poutre simplement appuyée sous charhe uniforme(q)

- **Cas 4 :** Poutre en porte-à-faux avec charge concentrée (P) à l'extrémité libre(figure3.2-d)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x = w = 0 \quad \text{for } x = L \quad (3.14)$$



Figure 3.2-d. Poutre en porte à faux sous charge concentré à l'extrémité libre (P)

- **Cas 5:** Poutre en porte-à-faux avec charge uniformément répartie (q) (figure3.2-e)

$$D_{11} \frac{\partial^3 w(x)}{\partial x^3} = D_{11} \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} = D_{11} \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} = D_{11} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } x = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x = w = 0 \quad \text{pour } x = L \quad (3.16)$$

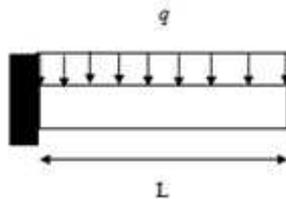


Figure 3.2-e. Poutre en porte à faux sous charge uniforme(q)

3.3 Modèles analytiques:

Quatre cas sont présentés en flexion leur démonstrations de champ de déplacement incluent l'effet de cisaillement à savoir pour les cas de poutre simplement appuyés à charge concentrée à mi-travée(P) ainsi que supporte une charge répartie(q). Plus, poutre en porte-à-faux avec charge concentrée (P) à l'extrémité libre et autre à charge uniforme distribuée(q). Ces cas par modélisation de paramètres intrinsèques en flexion sont présentés l'originalité de ce travail de recherche, dans cette enquête.

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

3.3.1 Cas1:

La figure 3.3-a présente une poutre simplement appuyées de section rectangulaire (bxh) soumise à une charge concentrée en flexion simple.

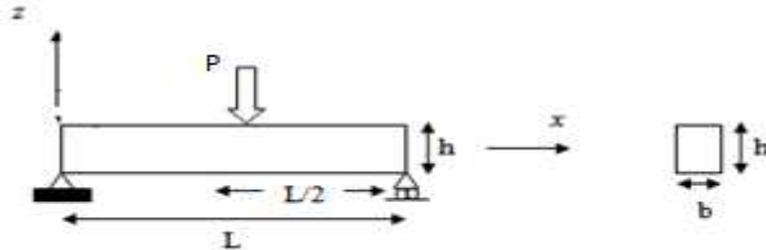


Figure 3.3-a. Poutre simplement appuyée avec charge concentrée à mi-portée

On note que, le déplacement transversal (w) est indépendant de la variable (z); ainsi que les fonctions (φ_x) et (w_0) sont indépendantes de la variable (y).

par l'équation(3.17) ci-dessous:

$$\frac{M(x)}{E_x I} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \quad (3.17)$$

Avec, la coupure à mi-travée l'expression du moment $M(x)$ devient:

$$\text{Pour } 0 \leq x \leq L/2: \quad M(x) = -P \frac{x}{2} \quad (3.17-a)$$

L'intégration de la courbure:

$$\varphi_x(x) = -P \frac{x^2}{4E_x I} + c_1 \quad (3.17-b)$$

La symétrie de la déformée impose :

$$\varphi_x\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \Rightarrow \varphi_x(x) = -P \frac{L^3}{16E_x I} \left(1 - 4 \frac{x^2}{L^2}\right) \quad (3.17-c)$$

La pente de la déformée ne s'annule pas au centre de la poutre:

$$\frac{\partial w\left(\frac{L}{2}\right)}{\partial x} = -\left[\varphi_x\left(\frac{L}{2}\right) + \frac{P}{2bh G_{xz}}\right] \quad (3.17-d)$$

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

$$w_0(x) = P \frac{L^2}{6E_x I} \int_0^{x=\frac{L}{2}} \left(1 - 4 \frac{x^2}{L^2} + \frac{P}{2bh G_{xz}}\right) dx \quad (3.17- e)$$

D'après substitue les conditions initiaux et aux limites à l'équation (3. 4), la solution homogène de cas étudiant est la suivante:

$$w(x) = -\frac{P}{5GA} \left(-x + \frac{\sinh(\Omega_\theta x)}{\Omega_\theta \cosh(\Omega_\theta \frac{L}{2})}\right) \quad (3.17-g)$$

L'expression final du déplacement pour la poutre simplement appuyés à charge concentré au milieu est la suivante:

$$w(x) = \frac{PL^3}{48E_x I} \left(-4 \frac{x^3}{L^3} + 3 \frac{x}{L}\right) + \frac{PL}{G_x A} \left(\frac{x}{L} - \left(\frac{\sinh(\Omega_\theta x)}{L \Omega_\theta \cosh(\Omega_\theta \frac{L}{2})}\right)\right) \quad (3. 18)$$

avec, pulsation propre(angle).

Après la simplification de l'intégrale de l'équation (3.17-e), le déplacement maximum (w_c) au centre de la poutre devient :

$$w_c \left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{PL^3}{48E_x I} \left[1 + \frac{E_x}{G_x} \left(\frac{h}{L}\right)^2\right] \quad (3. 18- a)$$

3. 3.2 Cas2:

La figure 3.3-b présente une poutre à des extrémités bi-encastrées de section rectangulaire ($b \times h$) soumise à une charge concentré à la flexion simple.

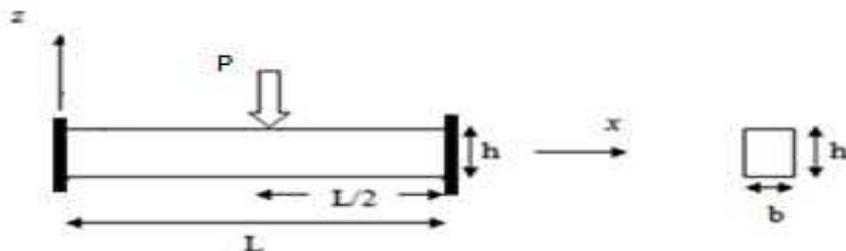


Figure 3.3-b. Poutre bi-encastrées avec charge concentrée à mi-portée

On peut noter que seule une flexion pure est rapportée. L'expression de déplacement transversal (w) est de la forme:

**Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion
des poutres FGM**

$$w(x) = \frac{PL^2x}{16 E_x I} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{x^2}{L^2} + \frac{16}{24} S \right) \quad (3. 19)$$

Avec, la solution homogène de cas de la figure 3.3-b, est la suivante:

$$w(x) = \frac{\frac{p}{6} G_x A}{\Omega_\theta} \left(x + \frac{1}{\Omega_\theta} [\cosh(\Omega_\theta x) - \sinh(\Omega_\theta x) - 1] \right) \quad (3. 19-a)$$

ou note que le coefficient de cisaillement $S = \frac{E_x}{G_x} \left(\frac{h}{L} \right)^2$; et en peut déduire la valeur maximum à mi-porté ($x=L/2$):

$$w_c \left(x = \frac{L}{2} \right) = - \frac{PL^3}{192 E_x I} \left(\frac{23}{24} + 4 \frac{E_x}{G_x} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right) \quad (3. 19-b)$$

La démonstration de(Eq.3.19), est la suivante, pour la coupure $0 < x < L/2$, le moment de flexion est le suivant :

$$M(x) = \frac{P}{2} x - \frac{P}{8} L \quad (3. 19- c)$$

Après de l'intégration de l'équation précédente, l'expression de φ_x est la suivante:

$$E_x I \varphi_x(x) = \frac{P}{4} x^2 - \frac{P}{8} L x + c_1 \quad (3. 19- d)$$

La symétrie de la déformation nécessite que $\varphi_x \left(x = \frac{L}{2} \right) = 0$. Equation (3. 19- d) peut être écrit avec ($c_1=0$):

$$\varphi_x = \frac{PL^2x}{16 E_x I} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^2} \right) \quad (3. 19- e)$$

La première dérivation de l'expression de déplacement peut être considérée comme la suivante :

$$\frac{\partial w(\frac{L}{2})}{\partial x} = - \left[\varphi_x \left(\frac{L}{2} \right) + \frac{P}{2bh G_{xz}} \right] \quad (3. 19- f)$$

L'expression de l'intégration finale est :

$$w_0(x) = - \int_0^{x=\frac{L}{2}} P \frac{L^2}{6E_x I} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^2} + \frac{P}{2bh G_{xz}} \right) dx \quad (3.17- e)$$

Le déplacement finale est reporté par (Eq. 3. 19).

La valeur maximum à mi-porté ($x=L/2$) de déplacement est réporté dans(Eq. 3. 19-b).

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

3. 3.3 Cas3:

Le déplacement de la poutre de la figure 3.4 ci-dessous, prévue simplement appuyée, supporte une charge uniformément répartie sur leur portée.

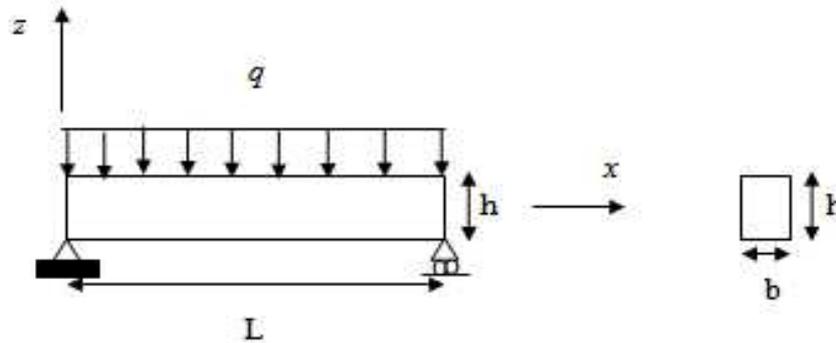


Figure 3.4. Poutre simplement appuyée avec charge uniformément répartie

L'expression du déplacement transversal prend la forme suivante :

$$w(x) = \frac{qL^4}{48E_x I} \left(2 \frac{x^4}{L^4} - 4 \frac{x^3}{L^3} + 2 \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{qL^2}{G_{xz} A} \left[\left(-\frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right) - \frac{2}{(L\Omega_\theta)^2} \left(1 - \frac{\cosh(\Omega_\theta x - \frac{L\Omega_\theta}{2})}{\cosh(\Omega_\theta \frac{L}{2})} \right) \right] \quad (3.20)$$

La valeur maximum à mi-portée ($x=L/2$) de déplacement est:

$$w(x) = -\frac{qL^4}{4E_x b h^3} \left[\frac{5}{8} + \frac{E_x}{G_{xz}} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (3.20-a)$$

En flexion pure, la démonstration de l'expression précédente 3.20, où les fonctions (φ_x) et (w) sont indépendantes de la variable (y):

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \frac{\partial M(x)}{E_x I} = D_{11}^* M_x \quad (3.21)$$

D'après les coupures sur la poutre:

$$\text{Pour } 0 \leq x \leq L/2: \quad M(x) = -q \frac{x^2}{2} \quad ; \quad \varphi_x(x) = -q \frac{x^3}{6E_x I} + c_1 \quad (3.21- a)$$

La symétrie des déformés impose :

$$\varphi_x \left(\frac{L}{2} \right) = 0 \Rightarrow c_1 = \frac{q}{6E_x I} x^3 \text{ for } x = L/2 \quad (3.21- b)$$

$$\text{Ainsi, } \varphi_x(x) = -q \frac{L^3}{48E_x I} \left(1 - 8 \frac{x^3}{L^3} \right) \quad (3.21- c)$$

En rapportant l'expression du moment de flexion $M(x)$ dans l'équation:

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = \frac{1}{F_{55}} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = bhG_{xz} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (3.21-d)$$

on obtient:

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = - \left(\varphi_x + \frac{\frac{qL}{2}}{bhG_{xz}} \right) \quad (3.21-e)$$

La pente de la déformée à mi-portée de la poutre est:

$$\text{au } x = \frac{L}{2}, \varphi_x \left(\frac{L}{2} \right) = 0 \quad (3.21-f)$$

$$\text{Ainsi, } \frac{\partial w_0}{\partial x} \left(\frac{L}{2} \right) = - \frac{qL}{2bhG_{xz}} \quad (3.21-g)$$

En substituant l'expression de φ_x ci-dessous dans l'équation suivante et après intégration on obtient l'expression finale du déplacement:

$$w_0(x) = \int_0^{\frac{L}{2}} - \left(\varphi_x + \frac{qL}{2bhG_{xz}} \right) dx = - \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{qL^3}{48E_x I} \left[1 - 8 \frac{x^2}{L^2} \right] + \frac{qL}{2bhG_{xz}} \right) dx \quad (3.21-h)$$

$$\varphi_x(x) = - \frac{qL^3}{48E_x I} \left[1 - 8 \frac{x^3}{L^3} \right] = - \frac{qL^3}{48b} D_{11}^* \left[1 - 8 \frac{x^3}{L^3} \right] \quad (3.21-k)$$

L'expression finale est présentée par l'équation (3.20).

Ainsi que, après substitution de conditions initiaux et aux limites, l'expression de la solution homogène dérive (3.4), est forme:

$$w(x) = \frac{qL}{6GA} \left(- \frac{2L}{(\Omega_e L)^2} \right) \left(1 - \frac{\cosh \Omega_e \left(x - \frac{L}{2} \right)}{\cosh \left(\Omega_e \frac{L}{2} \right)} \right) \quad (3.22)$$

3.3.4 Cas4:

La poutre en porte-à-faux avec charge concentrée (P) à l'extrémité libre de la figure 3.5 ci-après,

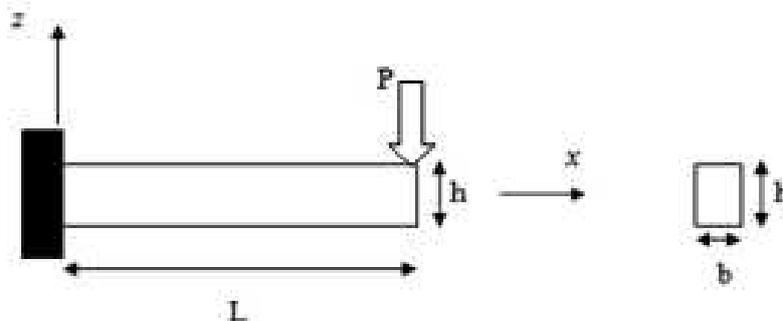


Figure 3.5. Poutre Encasté-libre avec charge concentrée

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

leur déplacement est de la forme ci-dessous:

$$w(x) = \frac{PL^3}{48E_x I} \left(-8 \frac{x^3}{L^3} + 24 \frac{x^2}{L^2} \right) + \frac{PL}{G_{xz} A} \left(\frac{\cosh(\Omega_\theta x) - \sinh(\Omega_\theta x) - 1}{L \Omega_\theta} \right) \quad (3.23)$$

La valeur maximum de déplacement à (x=L) est:

$$w(x=L) = -\frac{PL^3}{3E_x I} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{E_x}{G_{xz}} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (3.23-a)$$

3.3.5 Cas5:

Figure 3.6 présente une poutre en porte-à-faux avec charge uniformément répartie (q),

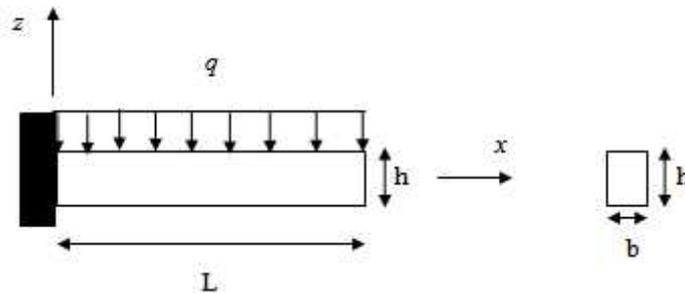


Figure 3.6. Poutre Encasté-libre à charge uniformément répartie

L'expression de déplacement est ci-dessous:

$$w(x) = \frac{qL^4}{48E_x I} \left(2 \frac{x^4}{L^4} - 8 \frac{x^3}{L^3} + 6 \right) + \frac{qL^2}{2G_{xz} A} \left(-\frac{x^2}{L^2} + 1 + \left[\frac{2 \cosh \Omega_\theta (L-x) - \sinh(\Omega_\theta x) - 1}{(L \Omega_\theta)^2 \cosh(L \Omega_\theta)} - \frac{2[\sinh(\Omega_\theta L) - \sinh(\Omega_\theta x)]}{L \Omega_\theta \cosh(L \Omega_\theta)} \right] \right) \quad (3.24)$$

La valeur maximum de déplacement à (x=L) est:

$$w(x=L) = \frac{qL^4}{8E_x I} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{E_x}{G_{xz}} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (3.24-a)$$

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

3.4 Analyse des poutres FGM en flexion:

3.4.1 Modèle mathématique:

Le modèle mathématique est établi à partir des théories de flexion d'ordre élevé pour des poutres symétriques courtes et fonctionnellement graduées sous flexion, sont présentées.

La formulation permet une déformation de la section transversale de la poutre et élimine le besoin d'utiliser des coefficients de correction de cisaillement arbitraires comme dans d'autres théories. Basées sur des théories de déformation par cisaillement d'ordre supérieur, les équations directrices sont obtenues en utilisant le principe du travail virtuel (PVW).

3.4.1. 1 Champ de déplacement:

Les composantes de déplacement sont définies à partir des équations (3.11) à (3.13) de la figure (3.4) le long des directions x et z de la poutre composite à la flexion simple, comme ci-dessous:

$$\mathbf{u}(x, z) = \mathbf{u}_0(x) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi(z) \psi_x \quad (3.11)$$

$$\mathbf{v}(x, z) = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (3.13)$$

Les théories d'ordre supérieur incluent également la déformation transversale (effet de déformation par cisaillement) ajoutée aux champs de déplacement avec une fonction de forme non linéaire $\varphi(z)$.

Lorsque, le produit $\varphi(z) \psi_x$ est présenter la fonction de gauchissement.

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

3.4.1. 2 Nouvelle fonction de cisaillement polynomiale:

La fonction de cisaillement polynomiale proposée une nouvelle contribution à cette section lorsqu'elle est présentée par les équations (3.14), (3.14- a) et (3.14- b) comme ci-dessous:

$$\varphi(z) = z\left(\frac{13}{12} - \frac{13z^2}{9h^2}\right) \quad (3.14)$$

Au niveau des fibres supérieure et inférieure ($z = \pm \frac{h}{2}$) pour la première dérivée de la fonction de cisaillement polynomiale $\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z} = 0$.

De plus, on peut confirmer la nullité de la contrainte de cisaillement au niveau de ces fibres.

$$\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z} = \frac{13}{12} - \frac{13z^2}{3h^2} \quad (3.14-a)$$

La seconde dérivée pour ($z=0$) peut dire que la contrainte de cisaillement est maximale au niveau de la fibre médiane, lorsque $\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2} = 0$.

$$\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z^2} = -\frac{26z}{3h^2} \quad (3.14-b)$$

La nouvelle fonction de cisaillement est comparée aux théories de poutres de déformation par cisaillement parabolique (PSDBT) suggérées respectivement par Reddy et Guenfoud *et al.*

(Voir le chapitre 4).

La fonction de cisaillement est impaire en point de vue mathématique car présente la propriété mathématique où $\varphi(-z) = -\varphi(z)$.

3.4.1. 3 Propriétés matérielles en FGM:

le mélange constitutif entre la fraction volumique de céramique V_c et métal V_m lorsqu'il est représenté sur la figure 3. 3. Les coefficients de rigidité effectifs $E_{\text{eff}}(z)$ et $G_{\text{eff}}(z)$ obtenus sur la base de la règle de mélange des constituants. De plus, pour coefficient de Poisson effective (ν_{eff}) est leur valeur variant de 0,25 à 0,3. L'indice (P) est l'indice de puissance qui décrit la variation du profil des matériaux en fonction de l'épaisseur.

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

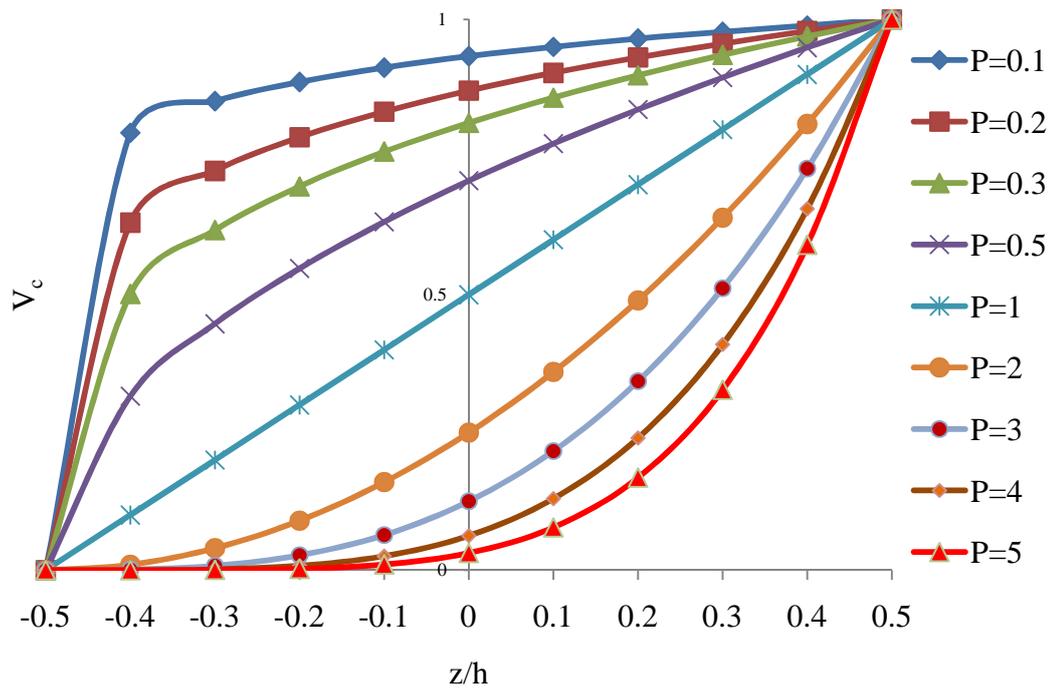


Figure 3.7. Variation (V_c) versus (z/h) en fonction l'indice de puissance (P)

La figure 3. 7, ou la variation a travers l'épaisseur dans le sens de l'axe-z de la fraction volumique en fonction de (z/h) et de l'indice de puissance (P).

3.4.1. 4 Propriétés de la coupe transversale:

L'équation (3.15) illustre les coefficients de rigidité des poutres A_{11} , B_{11} et D_{11} qui sont respectivement des coefficients d'extension, de couplage flexion-extension et de rigidité en flexion ; son expression sous intégrales entre les demi-hauteurs de la section est donnée par :

$$\{A_{11}, B_{11}, D_{11}\} = b \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} E(z) \{1, z, z^2\} dz \quad (3.15)$$

Cependant, B^a_{11} , D^a_{11} , F^a_{11} qui représentent les coefficients de couplage supplémentaires et la rigidité en flexion en fonction de la fonction de forme (z), sont présentés sous les intégrales suivantes :

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

$$\{B_{11}^a, D_{11}^a, F_{11}^a\} = b \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} E(z) \varphi(z) \{1, z, \varphi(z)\} dz \quad (3.15-a)$$

L'équation (3.16) présente la position de l'axe neutre à partir de l'épaisseur de la poutre donnée par :

$$h_0 = \frac{D_{ab}}{D_{aa}} = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) z dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz} \quad (3.16)$$

De plus, le coefficient de rigidité transversale supplémentaire en cisaillement transversal est :

$$A_{55}^a = b \int_{z=-\frac{h}{2}}^{z=\frac{h}{2}} G(z) \left(\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \right)^2 dz \quad (3.17)$$

3.4.1.5 Équations différentielles en statique:

L'équation d'équilibre en termes de déplacement et de cisaillement peut s'écrire comme ci-dessous :

$$\frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial x^2} - \frac{D_{11}}{F_{55}} \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0(x)}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.18)$$

Aussi,

$$\frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + F_{55} q = 0 \quad (3.18-a)$$

Où, $D_{11} = \frac{b}{E_x I}$, $F_{55} = \frac{1}{h G_{xz}}$, la constante de rigidité en flexion et la constante de rigidité en cisaillement de la poutre, respectivement.

**Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion
des poutres FGM**

3.4.1. 6 Poutre FGM en flexion:

3.4.1. 6.1 Cas de la poutre FGM bi-encastées:

La poutre composite bi-encastée soumise à une charge concentrée à mi-portée à la flexion, les équations (3.19) à (3.19-e) présentent des déplacements et des déformations de (3.19-f) et (3.24-g), le long de l'axe z et $[0, L/2]$.

On peut écrire l'équation suivante :

$$v(x) = -v(x) = x(4x^2 - 3Lx) \quad (3.19)$$

Lorsque le phénomène de cisaillement est pris en compte, le coefficient adimensionnel est le suivant :

$$S_\theta = \frac{48 D_{11}^a L^2}{l^2 A_{55} D_{11}} \quad (3.19-a)$$

La fonction $\varphi_\theta(z)$ qui dérive de la solution peut être définie par l'expression suivante :

$$\varphi_\theta(x) = x + \frac{1}{\Omega_\theta} (\cosh(\Omega_\theta x) - \sinh(\Omega_\theta x) - 1) \quad (3.19-b)$$

Finalement, les composantes du déplacement sont les suivantes :

$$u(x, z) = -z \frac{F_z L^2}{192bD_{11}} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} + 2S_\theta \frac{\partial \varphi_\theta(x)}{\partial x} \right) + \varphi(z) \frac{F_z}{2bD_{11}^a} \left(\frac{L^2}{48} S_\theta \frac{\partial \varphi_\theta(x)}{\partial x} \right) \quad (3.19-c)$$

$$V(x, z) = 0 \quad (3.19-d)$$

$$w(x) = \frac{F_z L^2}{192bD_{11}} [v(x) + 2S_\theta \varphi_\theta(x)] \quad (3.19-e)$$

Cependant, les composantes de déformation le long des directions x et z de la poutre sont données comme suit :

$$\varepsilon(x, z) = -z \frac{F_z L^2}{192bL_{11}} \left(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + 2S_\theta \frac{\partial^2 \varphi_\theta(x)}{\partial x^2} \right) + \varphi(z) \frac{F_z}{2bD_{11}^a} \left(\frac{L^2}{48} S_\theta \frac{\partial^2 \varphi_\theta(x)}{\partial x^2} \right) \quad (3.19-f)$$

De plus, la déformation transversale en cisaillement s'écrit :

$$\gamma_{xz}^0(x, z) = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{F_z L^2}{96bD_{11}^a} S_\theta \frac{\partial \varphi_\theta(x)}{\partial x} \quad (3.19-g)$$

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

3.4.1. 6.2 Cas de la poutre FGM en porte à-faux:

En statique, l'équation (3.20) présente l'expression de déplacement selon la théorie classique d'une poutre en porte-à-faux avec une charge concentrée P à l'extrémité libre, est donnée par ce qui suit:

$$v(x) = -x(x^2 - 3Lx) \quad (3.20)$$

Les équations 3.21 et 3.22 sont respectivement le coefficient de cisaillement sans dimension et la fonction $\varphi_\theta(z)$ qui est dérivée de la solution, sont prises comme suit :

$$S_\theta = \frac{3}{4L^2} \frac{D_{11}^{\alpha} L^2}{A_{55}^{\alpha} E_{11}} \quad (3.21)$$

$$\varphi_\theta(x) = x + \frac{1}{\Omega_\theta} (\cosh(\Omega_\theta x) - \sinh(\Omega_\theta x) - 1) \quad (3.22)$$

Finalement, les composantes du déplacement sont les suivantes :

$$u(x, z) = -z \frac{F_z L^2}{3bD_{11}} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} + 2S_\theta \frac{\partial \varphi_\theta(x)}{\partial x} \right) + \varphi(z) \frac{F_z}{bD_{11}^{\alpha}} \left(\frac{4L^2}{3} S_\theta \frac{\partial \varphi_\theta(x)}{\partial x} \right) \quad (3.23)$$

$$V(x, z) = 0 \quad (3.24)$$

$$w(x) = \frac{F_z L^2}{3bD_{11}} [v(x) + 2S_\theta \varphi_\theta(x)] \quad (3.25)$$

Ainsi, les composantes de déformation sont données comme suit :

$$\varepsilon(x, z) = -z \frac{F_z L^2}{3bD_{11}} \left(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + 2S_\theta \frac{\partial^2 \varphi_\theta(x)}{\partial x^2} \right) + \varphi(z) \frac{F_z}{bD_{11}^{\alpha}} \left(\frac{4L^2}{3} S_\theta \frac{\partial^2 \varphi_\theta(x)}{\partial x^2} \right) \quad (3.26)$$

De plus, la déformation en cisaillement transversal s'écrit :

$$\gamma_{xz}^0(x, z) = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{4F_z L^2}{3bD_{11}^{\alpha}} S_\theta \frac{\partial \varphi_\theta(x)}{\partial x} \quad (3.27)$$

La poutre en porte-à-faux supporte une charge (q) uniformément répartie, leur déplacement est dérivé de la théorie classique des poutres, pour l'intervalle (0 x L), l'expression analytique est :

$$v(x) = -x^2(x^2 - 4Lx + 6L^3) \quad (3.28)$$

En tenant compte du cisaillement, le coefficient sans dimension peut être exprimé sous la forme :

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

$$S_{\theta} = \frac{2 D_{11}^{\alpha} L^2}{L^2 A_{55}^{\alpha} D_{11}} \quad (3.29)$$

La fonction $\varphi(z)$ qui dérive de la solution peut être définie par l'expression suivante :

$$\varphi_{\theta}(x) = 1 - \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \frac{2 \Omega_{\theta} L [\sinh(\Omega_{\theta} L) - \sinh(\Omega_{\theta} x)]}{(L \Omega_{\theta})^2 \cosh(L \Omega_{\theta})} + \frac{2 \cosh \Omega_{\theta} (L-x)}{(L \Omega_{\theta})^2 \cosh(L \Omega_{\theta})} \quad (3.30)$$

Les solutions analytiques des composantes de déplacement s'écrivent comme illustré par les équations (3.36) à (3.38) :

$$u(x, z) = -z \frac{F_z L^2}{8bD_{11}} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x} + 2S_{\theta} \frac{\partial \varphi_{\theta}(x)}{\partial x} \right) + \varphi(z) \frac{(F_z = qL)}{bD_{11}} \left(\frac{L^2}{2} S_{\theta} \frac{\partial \varphi_{\theta}(x)}{\partial x} \right) \quad (3.31)$$

$$V(x, z) = 0 \quad (3.32)$$

$$w(x) = \frac{F_z L^2}{8bD_{11}} [v(x) + 2S_{\theta} \varphi_{\theta}(x)] \quad (3.33)$$

Cependant, les composantes de déformation le long des directions x et z de la poutre sont données comme suit:

$$\varepsilon(x, z) = -z \frac{F_z L^2}{8bD_{11}} \left(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} + 2S_{\theta} \frac{\partial^2 \varphi_{\theta}(x)}{\partial x^2} \right) + \varphi(z) \frac{F_z}{bD_{11}} \left(\frac{L^2}{2} S_{\theta} \frac{\partial^2 \varphi_{\theta}(x)}{\partial x^2} \right) \quad (3.34)$$

De plus, la déformation transversale en cisaillement s'écrit:

$$\gamma_{xz}^0(x, z) = \frac{\partial \varphi(z)}{\partial z} \frac{(F_z = qL) L^2}{4bD_{11}} S_{\theta} \frac{\partial \varphi_{\theta}(x)}{\partial x} \quad (3.35)$$

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

3.5 Contraintes et déformations:

3.5.1 Contraintes:

Tandis que les équations (3.36) et (3.37) présentent respectivement la contrainte axiale et

la contrainte de cisaillement de la loi constitutive de base de Hooke, ces lois sont applicable pour tous les cas étudiées:

$$\sigma_{xx}(x) = E(z)\epsilon_{xx} \quad (3.36)$$

$$\tau_{xz}(x) = G(z)\gamma_{xz} \quad (3.37)$$

3.5.2 Composantes de déformations:

Pour tous les cas à cette étude, on obtient la déformation normale exprimée dans l'équation (3.38) ci-dessous :

$$\epsilon_x(x, z) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{13}{12} z - \frac{13z^3}{9h^2} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{13}{12} z - \frac{13z^3}{9h^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.38)$$

De plus, l'équation de la déformation par cisaillement $\gamma_{x,z}(x,z)$ est prend la forme:

$$\gamma_{xz}(x, z) = \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} \psi_x = \left(\frac{13}{12} - \frac{13z^2}{3h^2} \right) \psi_x \quad (3.39)$$

Sur la ligne médiane, où ψ_x représente les déformations de cisaillement de la poutre.

Alors que le cisaillement se déforme, pour $z = 0$, l'angle de rotation de la section transversale perpendiculaire à la ligne médiane sous la forme $\theta = \frac{\partial u}{\partial z}$, et donc est présenté comme ci-dessous :

$$\psi_x(x) = \left[\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.40)$$

Chapitre 3 : Présentation le modèle analytique pour l'analyse de la flexion des poutres FGM

3.6 Conclusion :

La réponse statique d'une poutre en FGM est étudiée à l'aide des théories généralisées de déformation par cisaillement d'ordre élevé.

Ces théories ont été utilisées pour étudier les composantes du champ de déplacement statique.

La distribution des contraintes axiales et des contraintes de cisaillement dans les poutres en FGM, sont présentés.

Les résultats sont présentés clairement démontrent la capacité de théories d'ordre supérieur à améliorer les prédictions fournies par les théories classiques.

L'amélioration la plus significative concerne la répartition du cisaillement puisque la prise en compte du gauchissement des sections est établie de manière très rigoureuse.

Enfin, on peut conclure qu'en créant un FGM sous la forme d'un composite symétrique dont la fraction volumique de fibres varie dans l'épaisseur, on peut améliorer la conception de telles poutres. On peut tirer les conclusions suivantes:

- La nouvelle fonction de cisaillement polynomiale présente une bonne convergence avec celles des autres théories de poutres de déformation par cisaillement d'ordre supérieur. Ainsi que, la fonction de cisaillement proposée pourra être utilisée par les études futures.
- Le modèle mathématique est établi leur efficacité et leur validité pour tous les cas présentés.
- L'augmentation de l'épaisseur de la poutre doit entraîner une augmentation de la contrainte de cisaillement transversal. De plus, le fait que la nouvelle fonction de cisaillement polynomiale satisfasse aux conditions aux limites sans contrainte.
- Sur l'axe neutre, on peut voir que la contrainte de cisaillement sur l'épaisseur de la poutre est symétrique.

Chapitre 4

Résultats et validation numérique du présent modèle analytique

4. Résultats et validation numérique du présent modèle analytique

4.1 Introduction:

Le présent chapitre est consacré à la comparaison de nouveau modèle analytique proposé à ceux de la littérature prise en compte des conditions aux limites avec des différents conditions aux limites en flexion des poutres composites à gradient fonctionnel, est présenté.

La comparaison des résultats en termes de champs de déplacement, y compris les contraintes de cisaillement et la rotation de la section, les contraintes et les contraintes de cisaillement ainsi que les déformations, sont présentés.

Une comparaison numérique fructueuse est effectuée, outre la nouveau fonction de cisaillement proposée avec d'autres ont été comparées ensemble dans des mêmes conditions.

En plus, pour comparer les résultats prédits à partir du modèle proposé pour les poutres à extrémités diverses à ceux obtenus dans la littérature pour les poutres composites en matériaux à gradient fonctionnel, en termes de déplacements, de déformations, de contraintes axiales et de cisaillement, sont présentés.

4.2 Fonctions de cisaillements:

La fonction de cisaillement est indispensable d'après le critère de choix de modèle de calcul étudié, alors les hypothèses nécessaires sont les suivantes:

- La contribution de la fonction dépend uniquement de la variable (z).
- La fonction de cisaillement existe déjà, sous la forme de séries polynomiales qui prennent la forme parabolique du cisaillement (cas réel) dans la section efficace prismatique selon (FSDT) (ajouter gauchissement et modifier la théorie d'Euler-Benoulli).
- Les travaux de recherches auparavant de: Ambartsumyan (1958), Kaczkowski(1968), Panc(1975), Reissner(1975), Levinson(1980)...., et Reddy(1984), modifié la fonction de cisaillement en fonction des travaux précédents.

Le champ déplacement axial sous la forme:

$$u(x, z) = u_0(x) + zu_1(x) + z^2u_2(x) + z^3u_3(x) \quad (4.1)$$

Puisque la contrainte de cisaillement est nulle sur les deux fibres de la poutre ($\pm h/2$) la relation entre la déformation de cisaillement et la contrainte doit faire disparaître la déformation de cisaillement, donc $u_2(x)=0$. En conséquence on obtient:

$$u(x, z) = u_0(x) + zu_1(x) + z^3u_3(x) \quad (4.2)$$

- La fonction de cisaillement proposée (z) inspirée des travaux précédents (par exemple Reddy(1984)) a été améliorée).

À la littérature, plusieurs sont les modèles de fonctions de cisaillements qui sont utilisés qui satisfont aux conditions aux limites sans contrainte (conditions aux limites exactes sur la contrainte).

Figures 4.1, 4.2 et 4.3 sont présentées les courbes des fonctions de cisaillement, les trois fonctions ont été comparées ensemble dans des mêmes conditions (Reddy et al, Guenfoud et al, Présent). D'après ces courbes, les fonctions analytiques sont présentées des bons accords pour les solutions de

points des racines carrées. En plus, la vérification et la validité de la fonction de cisailment nouvelle et présente une forte convergence.

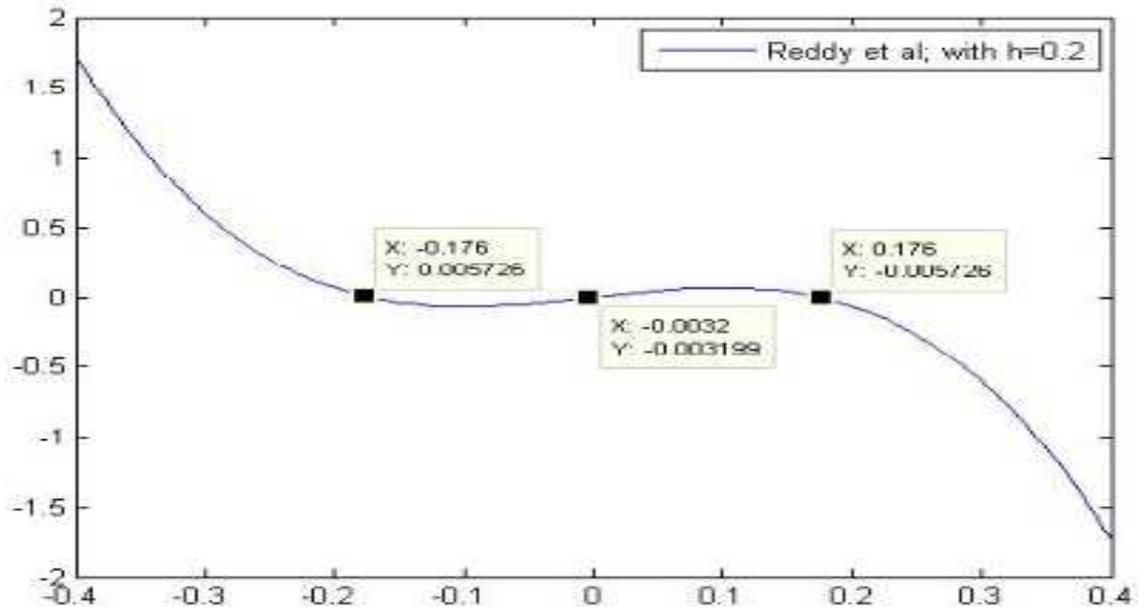


Figure 4.1. Courbe solutions points racine carrée de la fonction analytique de Reddy *et al*

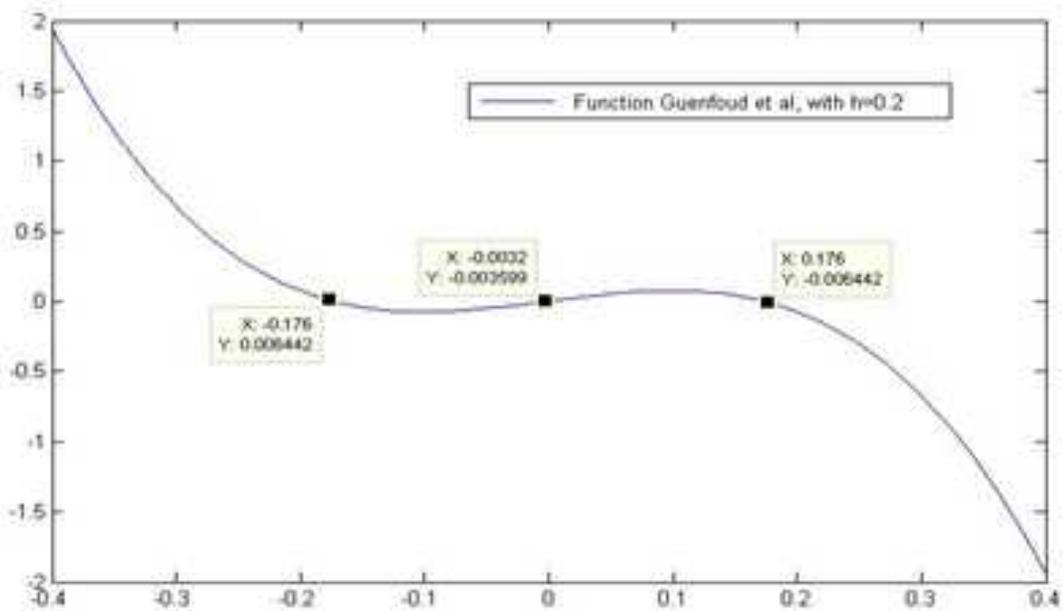


Figure 4.2. Courbe solutions des points racine carrée de la fonction analytique de Guenfoud *et al*

(HSDT) justifiant changement résultats pour champs de déplacements (incluent l'effet de cisaillement par déformations) par les variétés des types des fonctions de cisaillements citées à la littérature.

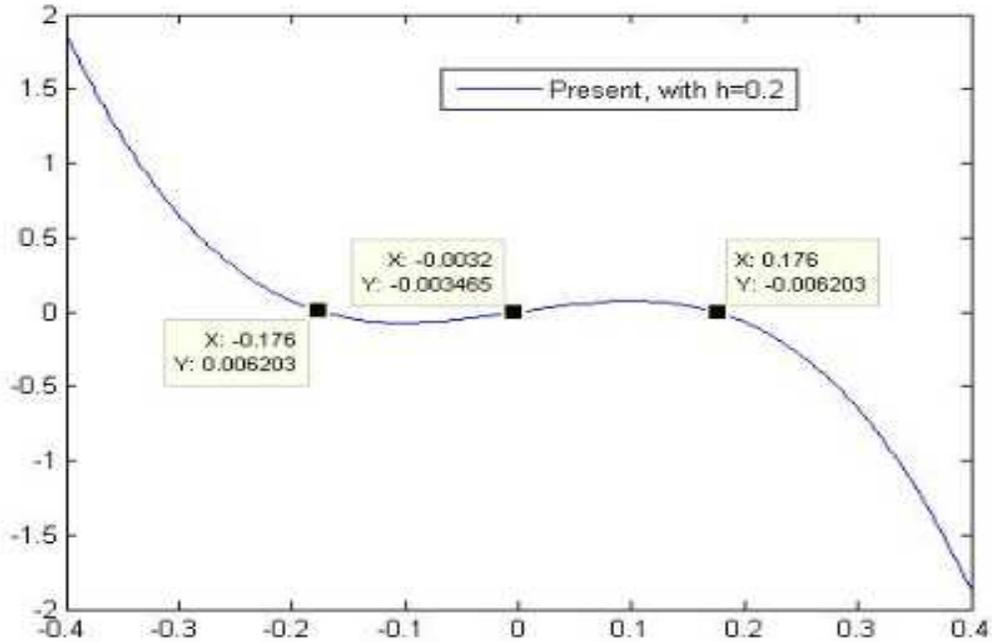


Figure 4.3. Courbe solutions des points racine carrée de la fonction analytique proposée (Présent)

4.3 Comparaison des déplacements:

Les figures 4.4 et 4.5 à 4.8 montrent les courbes de la répartition du déplacement maximum pour les poutres en matériaux à gradient fonctionnel des sections prismatiques ($b \times h$) à la flexion statique sous chargement mécanique.

On remarque que le déplacement est généralement augmente. Bien qu'atteindre leur valeur maximum au milieu des poutres composites.

On observe que le déplacement transverse augmente en général et ces déplacements transversaux sont atteindre leur valeur maximum au milieu des poutres composites en matériaux à gradient fonctionnel pour des conditions aux limites simplement appuyées et bien aussi encastées à la flexion comme le montre dans les figures 4.4 ;4.5 et 4.6, respectivement.

La courbe de déplacement sur l'axe des (x/L) présente cubique, les résultats obtenus dans cette section ci-dessous sont comparés à ceux des poutres sous charge concentré à des appuysés simplement cités dans la littérature [Ghugal et al-2011] et sont indiqués un bon accord.

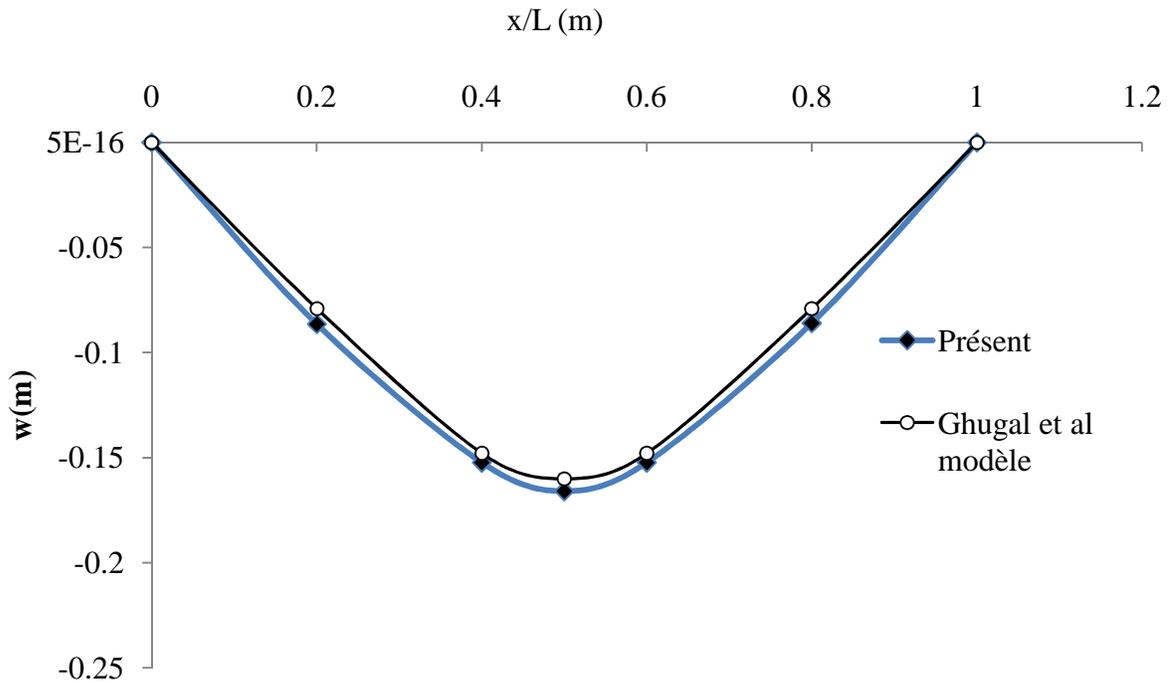


Figure 4.4. Comparaison de la répartition du déplacement maximum du modèle analytique à celle (Ghugal et al, 2011) en fonction de (x/L) de la poutre composite simplement appuyées sous charge concentrée à la flexion

Dans la figure 4.5, sont similaire et converge lors comparés à ceux des poutres à appui simple soumises à une charge uniforme répartie à la flexion cités dans la littérature [Benatta et al-2008], d'après les caractéristiques numériques reportent ci-après :

Tableau 4.1. Caractéristiques numériques en FGM

Propriétés	b(m)	h(m)	q(Pa)	E_m (GPa)	E_c (GPa)	
Valeurs	0.001	0.1	1	10000	1000	0.25

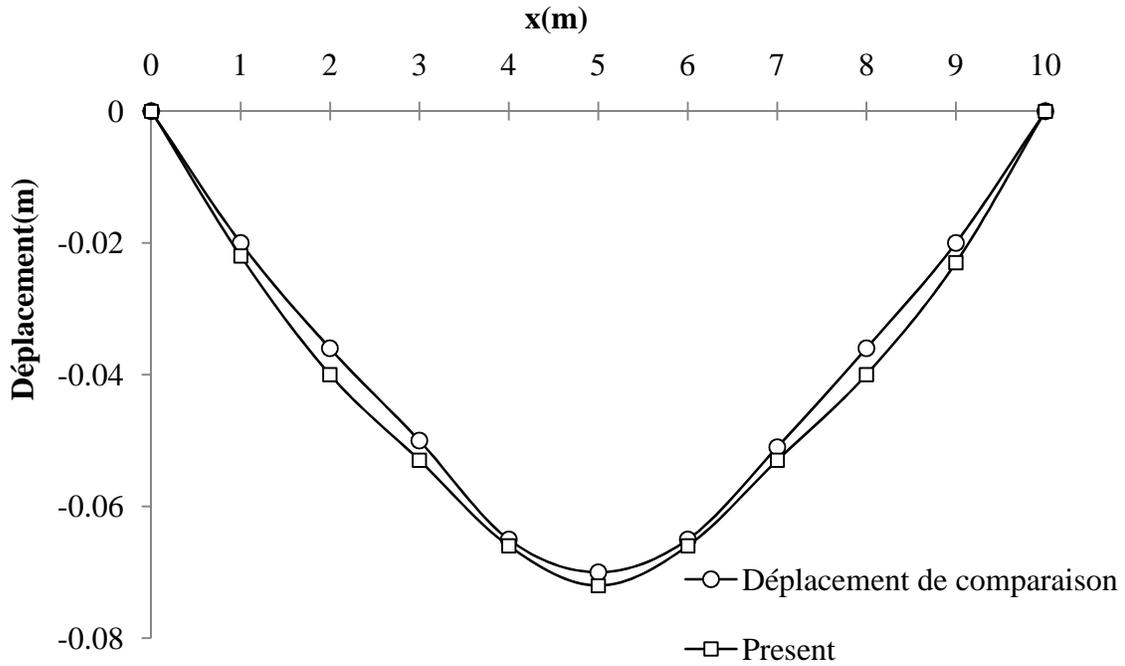


Figure 4.5. Comparaison du déplacement maximum avec Celle de (Guenfoud et al, 2016) à la flexion

Il est à souligner que le déplacement transversal de la poutre augmente jusqu'à atteindre la valeur maximum à mi-travée. Considérons un autre exemple illustratif d'une poutre IPE300 en acier simplement supportée soumise à une charge uniforme distribuée (q), à des caractéristiques numériques citent au Tableau 4.2 .La poutre en acier (IPE 300) de longueur, $L = 10$ m ; Charge répartie $q = 5$ kN/m(y compris le poids propre de

la poutre et la charge piétonne); Type de poutre en acier : S275. Où les propriétés de la poutre en acier (IPE 300) sont citées au Tableau 4.2.

Tableau 4.2. Propriétés de la poutre en acier

	b(mm)	h(mm)	G(kg/m³)	I_y(cm⁴)	I_z(cm⁴)		E(GPa)	G_{xz}(GPa)
IPE300	150	300	42.2	8356	603.8	0.3	210	78.95

D'après l'équation ci-dessous proposée par (Ghugal, Y.M. and Sharma, R, 2011). Le déplacement transversal maximal à mi-portée ($x=L/2$) pour la flexion des poutres épaisses, est donné par l'expression suivante:

$$w_{c2}\left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{5qL^4}{384E_x I} \left(1 + 1.92(1 + \mu) \frac{h^2}{L^2}\right) \quad (4.3)$$

Où μ : Coefficient de Poisson du matériau de la poutre.

Les résultats montrent que la valeur de déplacement à mi-portée obtenu à partir de (Eq.4.3) ($w_{c1} = 0.3718\text{mm}$), est similaire à celui prédit par le modèle proposé de l'équation (Eq.4.4)

$$w_c\left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{qL^4}{4E_x b h^3} \left(\frac{5}{8} + S\right) \quad (4.4)$$

($w_{c2} = 0.3724\text{mm}$), on peut observer 0,2 %, ce qui implique la validité du modèle proposé et son utilisation efficace dans les poutres FGM et les constructions en acier. Le modèle mathématique proposé est efficace et fournit par conséquent une bonne précision des solutions prédites pour les poutres FGM en flexion.

Le tableau 4.3 présente la validation de déplacement de la poutre composite simplement appuyée à la flexion sous charge concentrée et uniforme répartie en fonction des paramètres de matériau, ces résultats obtenus ont été comparés avec ceux des solutions analytiques de références, d'une poutre FGM.

Cette nouvelle théorie à ordre élevé a été proposée prend en considération l'effet de cisaillement transverse afin d'analyser le comportement en flexion des poutres FGM, elle a une forte similitude avec la théorie classique des poutres à travers l'épaisseur tout en assurant la condition de contrainte de cisaillement nulle sur les bords limites de la poutre, avec une différence inférieure ou égale à 5%.

Tableau 4.3. Validation de déplacement de la poutre composite simplement appuyée à la flexion sous charge

Théorie	L/h	P=1	P=3	P=5
Present	5	0.0	$5.5 \cdot 10^{-4}$	0.0012
Ghugal et al, 2011		0.0	$5.3 \cdot 10^{-4}$	0.0011
% Diff		-	5%	8.3%
Present	100	0.0	0.1002	0.1660
Ghugal et al, 2011		0.0	0.0983	0.1600
% Diff		-	2%	5%
Poutre composite sous charge uniforme répartie				
Present	5	0.0	$4.7 \cdot 10^{-5}$	$6.21 \cdot 10^{-5}$
Guenfoud et al,2016		0.0	$4.5 \cdot 10^{-5}$	$5.68 \cdot 10^{-5}$
% Diff		-	4.25	8.5
Present	100	0.001	0.0068	0.072
Guenfoud et al,2016		0.001	0.0066	0.07
% Diff		-	2.5	3%

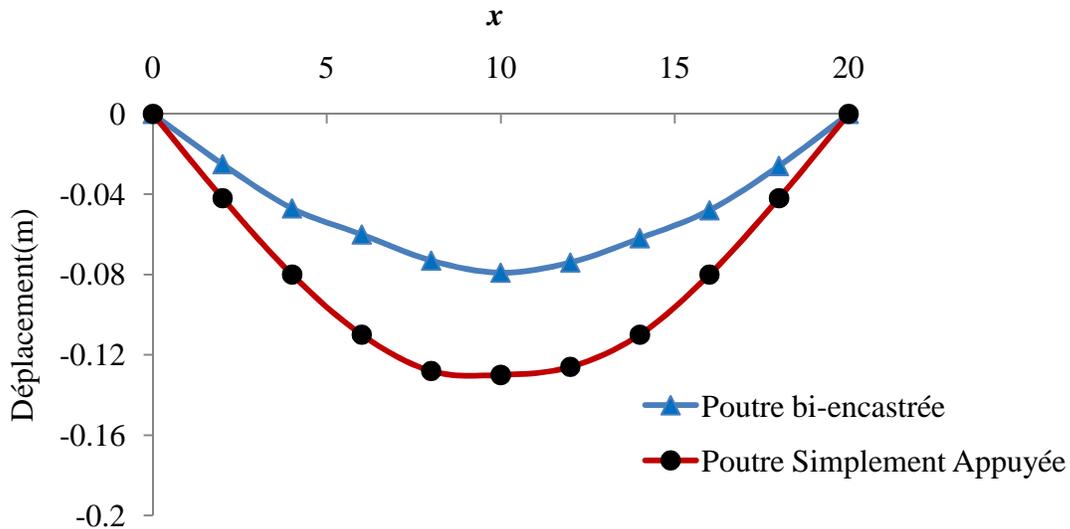


Figure 4.6. Comparaison la poutre composite simplement appuyée de (Benatta et al, 2008) et la poutre bi-encastée (présent) à la flexion

Tableau 4.4. Propriétés numériques de la composite

Propriétés	b(mm)	h(mm)	Fz(kn)	E _f (GPa)	G _f (GPa)	E _m (GPa)	G _m (GPa)	V ₁	V ₂
Valeurs	20	30	5	138	12	3.5	1.6	0.6	0.4

La figure 4.6 montre la comparaison des résultats ou les caractéristiques numériques reportent au Tableau 4.3, cette comparaison en termes de déplacements prédits à partir du modèle analytique proposé de la poutre composite bi-encastée (présent) et ceux obtenus à partir du modèle de la littérature (Benatta et al, 2008) de la poutre composite simplement appuyée.

On peut observer qu'il y a une diminution significative d'un quart, aux bords encastés par l'axe z,

On peut Considéré un autre exemple illustratif d'une poutre IPE300 en acier bi-encastée soumise à une charge concentrée (F_z), à des caractéristiques numériques citent au Tableau 4.2. La poutre en acier (IPE 330) de longueur, L = 10 m ; Charge répartie F_z = 5 kN/m(y compris le poids propre de la poutre et la charge piétonne); Type de poutre en acier : S275. Où les propriétés de la poutre en acier (IPE 330) sont citées au Tableau 4.5.

Tableau 4.5. Caractéristiques numériques de la poutre en acier

	b(mm)	h(mm)	G(kg/m ³)	I _y (cm ⁴)	I _z (cm ⁴)		E _x (GPa)	G _{xz} (GPa)
IPE300	160	330	49.1	11770	788.1	0.3	210	78.95

D'après l'équation ci-dessous proposée par (Ghugal, Y.M. and Sharma, R, 2011). Le déplacement transversal maximal à mi-portée (x=L/2) pour la flexion des poutres épaisses, est donné par l'expression suivante:

$$w_{c2} \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{PL^3}{192E_x I} \left[1 + 9.6(1 + \mu) \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

La valeur du déplacement à mi-portée est obtenue à partir de (Eq.4. 5) (w_{c1}=0,1067mm) est similaire à celui prédit par le modèle proposé(Eq.4.6) (w_{c2}=0,1021mm).

$$w_C \left(x = \frac{L}{2} \right) = \frac{PL^3}{192E_x I} \left[\frac{23}{24} + 4 \frac{E_x}{G_{xz}} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right] \quad (4.6)$$

On peut observer que 5%. Cela implique la validité du modèle proposé.

La figure 4.7 présente la poutre composite en matériaux à gradient fonctionnel en porte à faux sous charge concentré à l'extrémité libre.

On remarque que le déplacement transverse atteindrent leur valeur maximum à l'extrémité libre pour les propriétés géométriques et mécaniques de comparaison suivantes : $L=1\text{m}$; $b=0,1\text{m}$; $h=0,01\text{m}$; $F_z=1\text{kn}$; $E_c=151\text{GPa}$; $E_m=75,5\text{GPa}$; $\nu=0,25$.

On constate aussi que la répartition maximale du déplacement est similaire avec celle du modèle de comparaison (Ghugal et al, 2011).

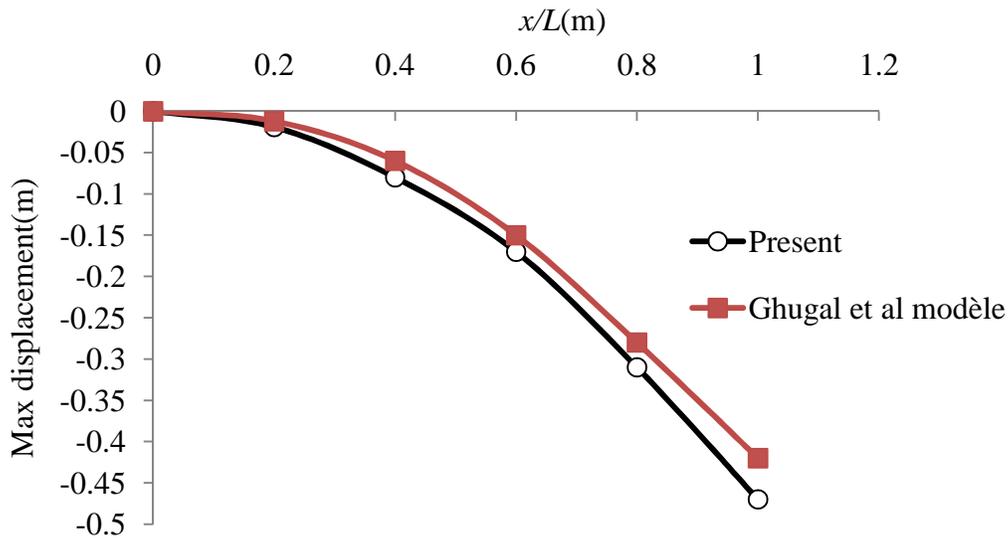


Figure 4.7. Comparaison du déplacement maximum de modèle analytique et celle de (Ghugal et al, 2011) vs (x/L) de la poutre composite Encastree-libre avec charge concentree

La figure 4.8, presente la comparaison du déplacement maximum de modèle analytique et celle de (Ghugal et al, 2011) vs (x/L) de la poutre composite en porte-à-faux sous charge uniforme répartie, à la flexion.

On remarque que le déplacement transverse atteignent leur valeur maximum à l'extrémité libre pour les propriétés géométriques et mécaniques de comparaison suivantes : $L=1\text{m}$; $h=0.01\text{m}$; $b=0.001\text{m}$; $q=1\text{Pa}$; $\nu=0.25$; $E_c=10000\text{GPa}$; $E_m=1000\text{GPa}$;

On observe que la répartition maximale du déplacement des poutres composites en matériaux à gradient fonctionnel en porte à faux sous charge concentré assez élevées par un taux plus de 55% à celle des poutres composite en matériaux à gradient fonctionnel en porte à faux sous charge uniforme répartie, à la flexion.

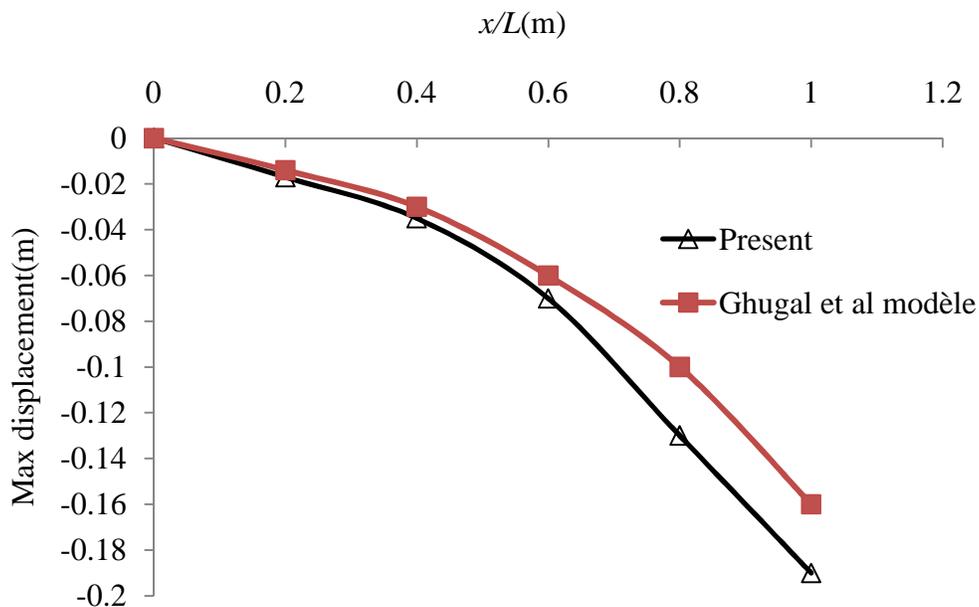


Figure 4.8. Comparaison du déplacement maximum de modèle analytique et celle de (Ghugal et al, 2011) vs (x/L) de la poutre composite en porte-à-faux sous charge uniforme répartie à la flexion

Le tableau 4.6 montre la validation de déplacement de la poutre composite en porte à faux à la flexion sous charge en fonction des paramètres de matériau (P) et (L/h).

Aussi, montrent une convergence par différence inférieure strictement à 10%.

Tableau4.6. Validation de déplacement de la poutre composite Encastré-libre la flexion sous charge en fonction des paramètres de matériau

Théorie	L/h	P=1	P=3	P=5
Poutre composite en porte à faux sous charge concentré				
Present	15	$8*10^{-4}$	0.0011	0.0015
Guhgal et al,2011		$7.7*10^{-4}$	0.0010	0.0014
% Diff		-	5%	6.66
Present	100	0.2701	0.3502	0.4701
Guhgal et al,2011		0.2576	0.3283	0.4289
% Diff		5%	6.25	8.9
Poutre composite en porte à faux sous charge uniforme répartie				
Present	15	0.0007	0.0197	0.0621
Guhgal et al,2011		0.00067	0.0184	0.0568
% Diff		5%	6.6	8.5
Present	100	0.0721	0.1002	0.1901
Guhgal et al,2011		0.0676	0.0930	0.1729
% Diff		5%	7	9

4.4 Comparaison des contraintes axiales:

Les figures 4.9 et 4.10 à 4.13 montrent Comparaison des contraintes axiales en matériau à gradient fonctionnel, diverses conditions aux limites à la flexion.

La comparaison des contraintes axiales a été montré aussi un bon accord de modèle proposé avec celle obtenus à partir de la fonction de comparaison (Reddy et al, 2000), ce qui implique la validation de modèle analytique présent.

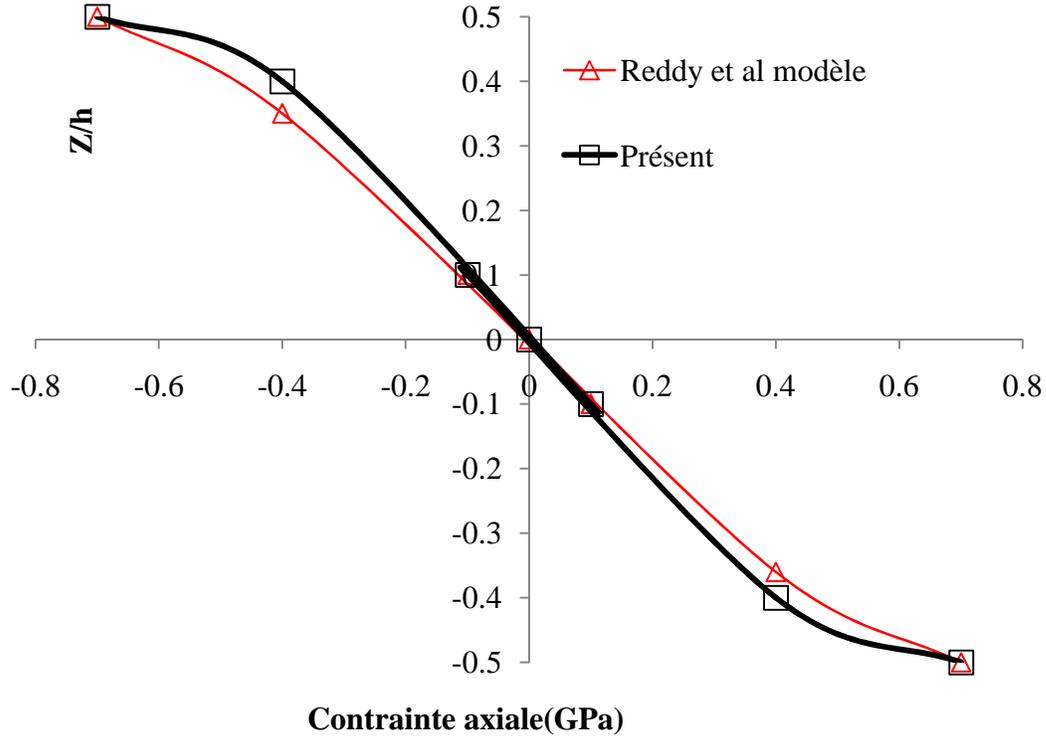


Figure 4.9. Comparaison de la répartition de la contrainte axiale du modèle analytique à celle (Reddy et al, 2000) en fonction (z/h) de la poutre composite simplement appuyées sous charge concentrée à la flexion

D'après la figure 4.10 la comparaison est montrée une distribution cubique des contraintes, pour les théories d'ordre supérieur (PDSBT). Néanmoins, une augmentation de contrainte linéaire (Timoshenko ; $k=5/6$).

Les courbes de contraintes prédites par le modèle sont de comportement non linéaires est similaire avec ceux obtenus par le modèle de comparaison (Benatta et al, 2008).

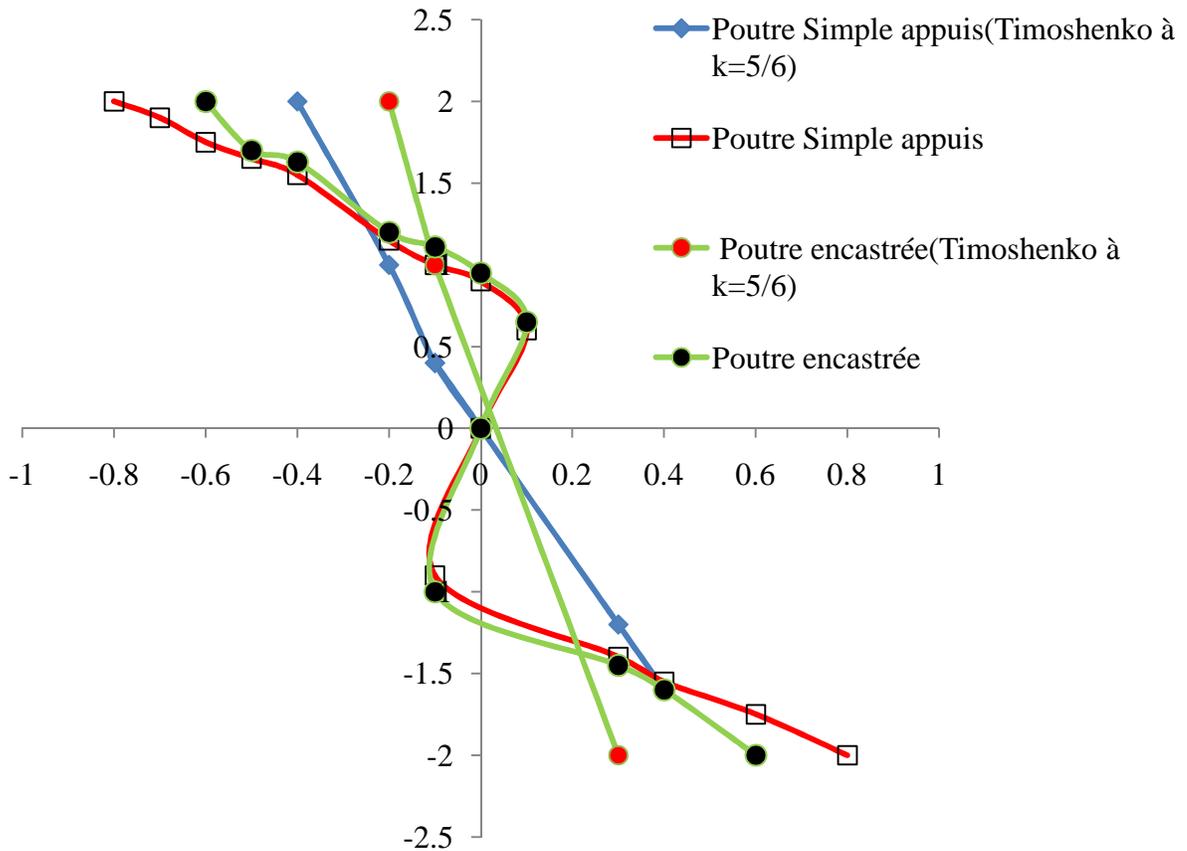


Figure 4.10. Comparaison et répartition de la contrainte axiale de modèle analytique à celle de (Benatta et al, 2008) et de Timoshenko vs toute l'épaisseur de la poutre à des extrémités bi-encastrée sous charge mécanique concentré à mi-travée

Dans la figure 4.11 peut observer que la courbe présente distribution cubique pour les théories d'ordre supérieur (PDSBT).

De plus, les résultats sont en bon accord de contrainte normale prédits à l'aide fonction avec celle obtenus de la fonction de comparaison (Genfoud et al, 2016).

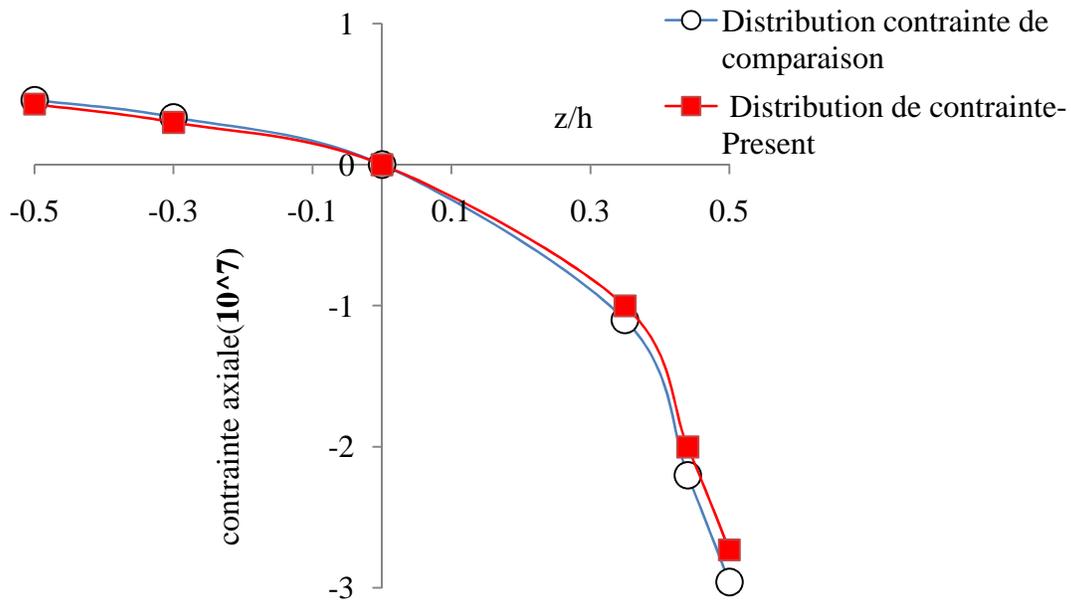


Figure 4.11. Comparaison de la répartition de la contrainte axiale du modèle analytique à celle (Genfoud et al, 2016) en fonction (z/h) de la poutre composite simplement appuyées sous charge mécanique uniforme répartie à la flexion

Le Tableau 4.7 ci-dessous montre la validation de contraintes axiales de la poutre composite simplement appuyée pour différents paramètres du matériau. On remarque que présente bonne similarité avec celles prédites par le modèle de comparaison.

Tableau4.7. Validation de contraintes axiales de la poutre composite simplement appuyée pour différents paramètres du matériau

Théorie	L/h	P=1	P=3	P=5
Poutre composite sous charge concentré au milieu				
Present	5	-	$0.61 \cdot 10^7$	$0.8 \cdot 10^7$
Reddy et al, 2000		-	$0.58 \cdot 10^7$	$0.75 \cdot 10^7$
% Diff		-	5%	6.25%
Present	100	-	$1.00 \cdot 10^7$	$1.25 \cdot 10^7$
Reddy et al, 2000		-	$0.93 \cdot 10^7$	$1.15 \cdot 10^7$
% Diff		-	6%	5%
Poutre composite sous charge uniforme répartie				
Present	100	-	$6.5 \cdot 10^7$	$0.77 \cdot 10^7$
Guenfoud et al,2016		-	$6.3 \cdot 10^7$	$0.73 \cdot 10^7$
% Diff		-	3%	5%

Les figures 4.12 et 4.13 montrent la comparaison de la répartition typique des contraintes axiales à travers l'épaisseur des poutres composites en porte à faux en matériau à gradient fonctionnel (FGM) de modèle analytique présent à ceux de modèle (Reddy et al, 2000), à la flexion.

La comparaison de la répartition de la contrainte axiale du modèle analytique à celle (Reddy et al, 2000, noté Réf-11) montre une distribution cubique, ainsi les courbes passant par les points racines de la solution, et montrent un bon accord.

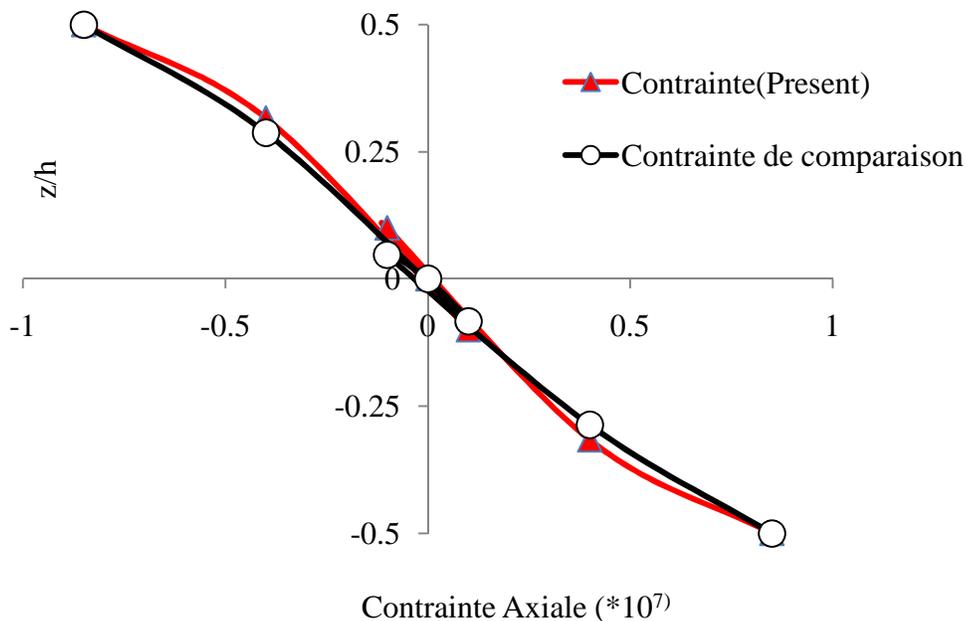


Figure 4.12. Comparaison de la contrainte axiale de modèle présent et modèle (Reddy et al, 2000) vs (z/h) sur toute l'épaisseur de la poutre composite en porte à faux sous charge mécanique concentrée à l'extrémité libre à la flexion

La comparaison de la répartition de la contrainte axiale du modèle analytique à celle (Reddy et al, 2000) montre une distribution similaire à partir desquelles les courbes deviennent non linéaires et atteignent la contrainte maximum.

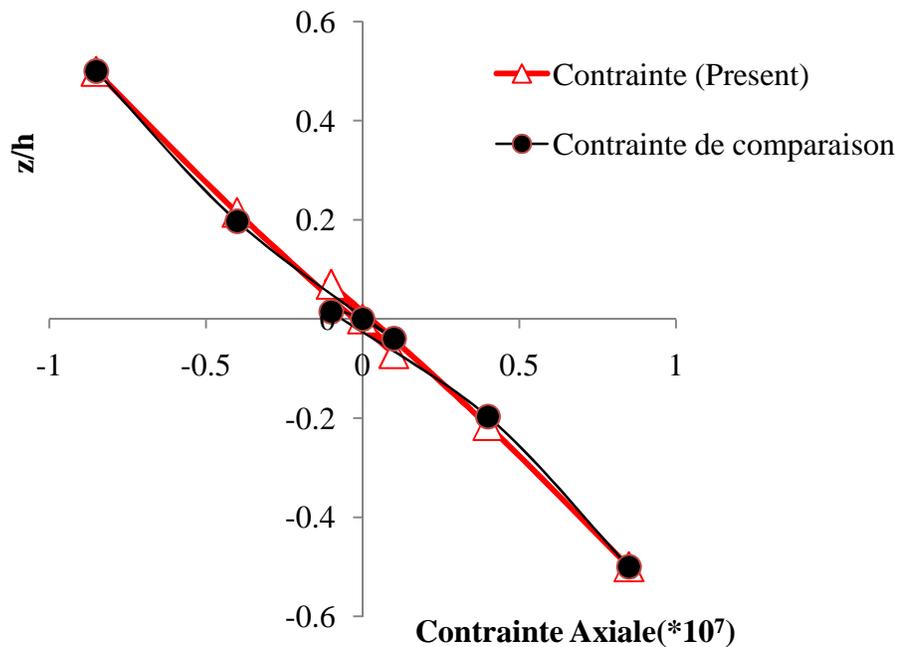


Figure 4.13. Comparaison de la contrainte axiale de modèle présent et modèle (Reddy et al, 2000) vs (z/h) sur toute l'épaisseur de la poutre composite en porte à faux sous charge mécanique uniforme répartie à la flexion

4.5 Comparaison des contraintes de cisaillements:

Figures 4.14 et 4.15 à 4.18 montrent les courbes des contraintes de cisaillement des poutres en matériau à gradient fonctionnel (FGM) de modèle proposé et ceux de comparaison à la littérature.

On remarque que les contraintes de cisaillement le long des axes des poutres sont généralement supposées être paraboliques.

On note Timoshenko donne une valeur constante.

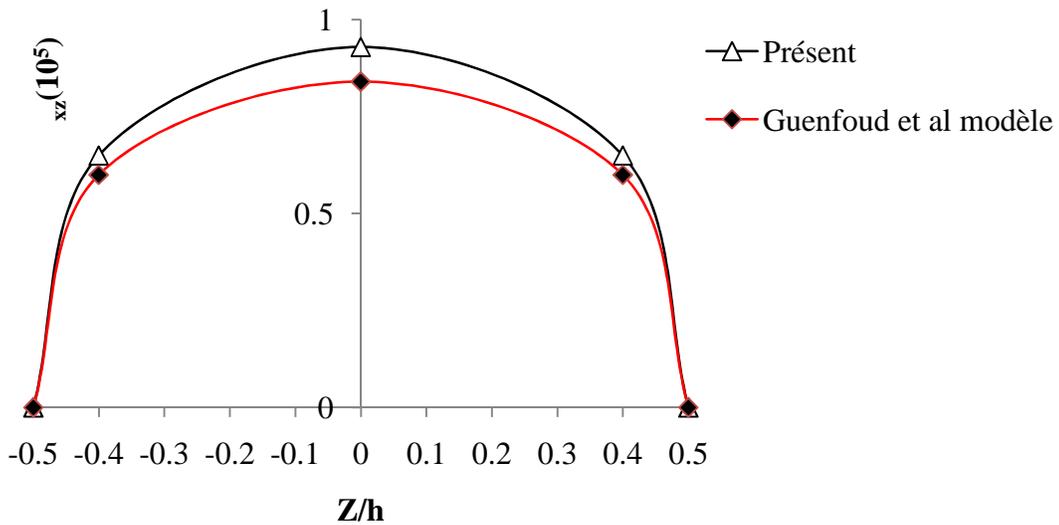


Figure 4.14. Comparaison (w_z) de modèle analytique et (Guenfoud et al, 2016) vs (z/h) de la poutre composite simplement appuyée sous charge concentrée à mi-travée

D'après la figure 4.14, la comparaison est similaire des deux modèles proposés à celle de (Guenfoud et al, 2016) à partir desquelles les courbes deviennent non linéaires et atteignent les limites, sans contrainte.

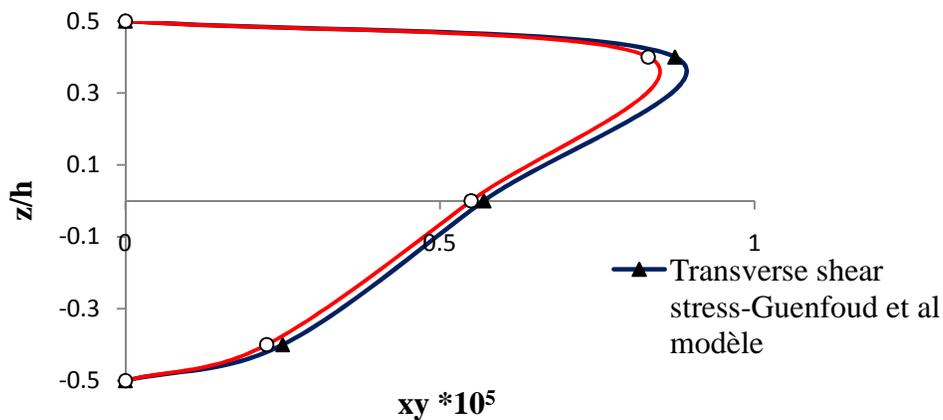


Figure 4.15. Comparaison (τ_{xy}) de modèle analytique et (Guenfoud et al, 2016) vs (z/h) de la poutre composite simplement appuyée sous charge uniforme répartie

Dans la figure 4.15, la comparaison montre une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales utilisant des théories d'ordre supérieur (PDSBT) de (Guenfoud et al, 2016)

Chapitre 4 : Résultats et validation numérique du présent modèle analytique

et le modèle présent sont presque similaires. Cependant, répartition des contraintes à travers l'épaisseur de la poutre composite est constante selon la théorie de Timoshenko.

Le tableau 4.8 présente la validation de contrainte transverse de cisaille et la déformation transverse de la poutre composite simplement appuyée à la flexion sous charge en fonction des paramètres de matériau, sous charge concentré et la charge uniforme, respectivement. On remarque que les valeurs de modèle présent sont en bon accord avec les résultats analytiques de comparaison.

Tableau 4.8. Validation de contrainte transverse de cisaille et de déformation transverse de la poutre composite simplement appuyée à la flexion sous charge en fonction des paramètres de matériau

Théorie	L/h	P=1	P=3	P=5
Poutre composite simplement appuyée sous charge concentré déformation transverse de cisaille (ϵ_{xz})				
Present	100	-	$10300 \cdot 10^{-6}$	$10800 \cdot 10^{-6}$
Benatta et al,2008		-	$11000 \cdot 10^{-6}$	$11700 \cdot 10^{-6}$
% Diff		-	6.36	7.69
Poutre composite simplement appuyée sous charge uniforme répartie contrainte transverse de cisaille (ϵ_{xz})				
Present	4	0.71	0.72	0.74
(Guhgal et al,2011)		0.75	0.77	0.81
% Diff		5.33%	6.49	8.64
Present	16	0.63	0.67	0.75
(Guhgal et al,2011)		0.65	0.70	0.8
% Diff		3%	5%	6.25

La figure 4.16 présente une comparaison (σ_{xz}) de modèle analytique et (Benatta et al, 2008) vs (z/h) de la poutre composite simplement appuyée et bi-encastées sous charge concentrée à mi-travée, on remarque la différence par un quart à cause changement des extrémités des poutres.

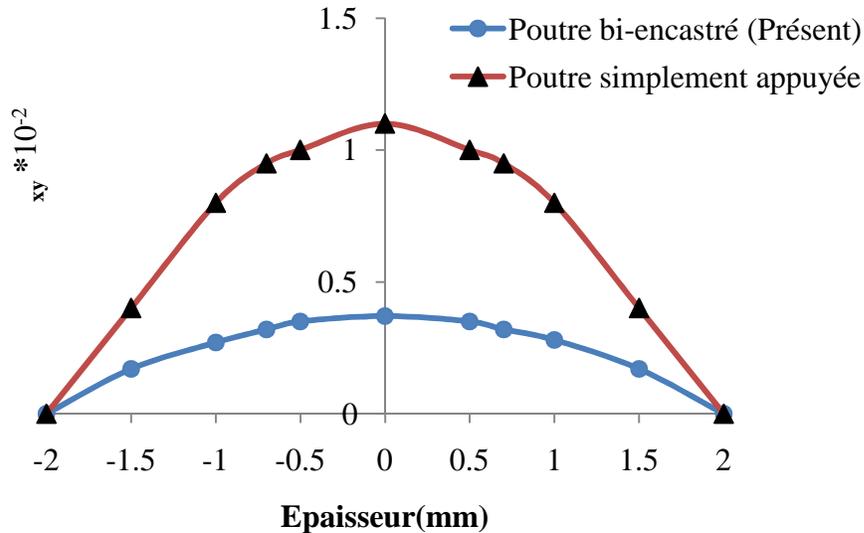


Figure 4.16. Comparaison (σ_{xz}) de modèle analytique et (Benatta et al, 2008) vs (z/h) de la poutre composite simplement appuyée et bi-encastées sous charge concentrée à mi-travée

Les figures 4.17 et 4.18 présentent la comparaison de la contrainte de cisaillement transversale à travers l'épaisseur de la poutre composite à matériau en gradient fonctionnel en porte-à-faux de modèle analytique présent et celle de (Reddy et al, 2000) sous charge concentré et uniforme répartie, respectivement.

Cette comparaison montre une distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversales en utilisant des théories d'ordre supérieur (PDSBT), et présente une bonne convergence avec ces autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (Reddy et al, 2000).

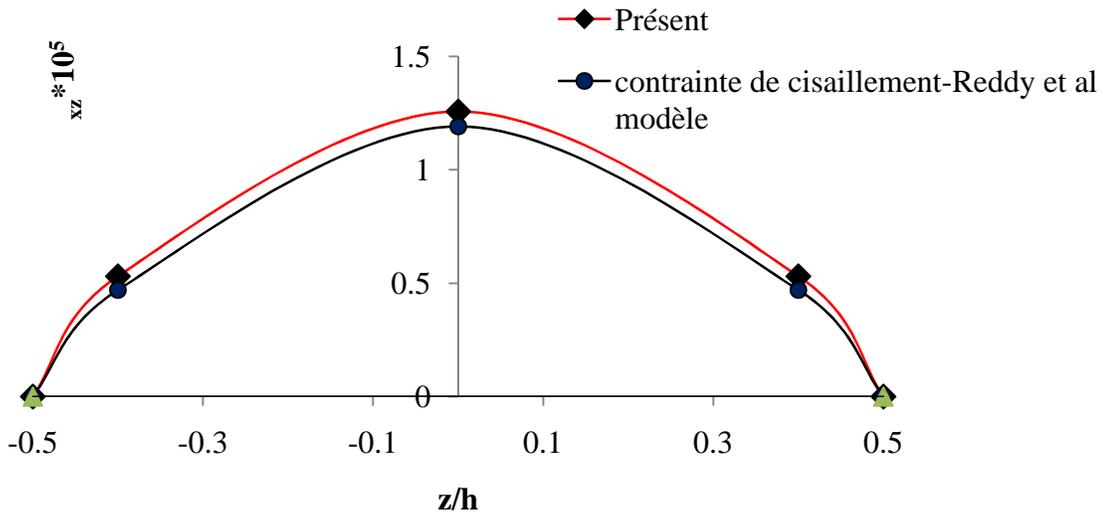


Figure 4.17. Comparaison (τ_{xz}) de modèle analytique et (Reddy et al, 2000) vs (z/h) de la poutre composite en porte à faux sous charge concentrée à l'extrémité libre

En plus, l'augmentation de l'épaisseur de la poutre composite doit entraîner une augmentation de la contrainte de cisailment transversale. En outre, la nouvelle fonction de cisailment polynomiale doit satisfaire aux conditions aux limites sans contrainte.

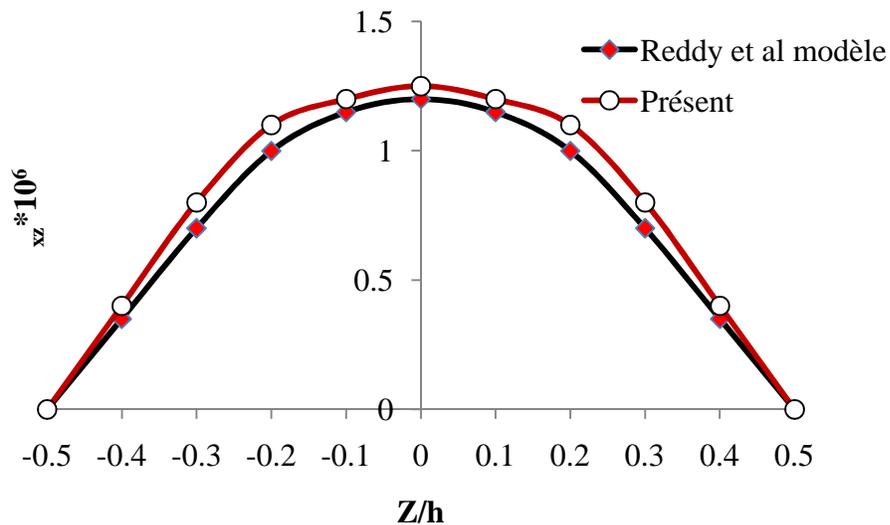


Figure 4.18. Comparaison (τ_{xz}) de modèle présent et (Reddy et al, 2000) vs (z/h) de la poutre composite en porte à faux sous charge uniforme répartie

Le tableau 4.9 montre la validation des contraintes de cisaillement de la poutre composite en porte à faux pour différents paramètres du matériau (P) et (L/h). On peut remarquer que les valeurs prédites par le modèle présent sont relativement proches de celles obtenues par le modèle analytique de référence Reddy et al, par pourcentage d'erreur 10%.

Tableau4.9. Validation des contraintes de cisaillement de la poutre composite en porte à faux pour différents paramètres du matériau

Théorie	L/h	P=1	P=3	P=5
Poutre composite sous charge concentré au milieu				
Present	100	-	$1.0*10^5$	$1.2*10^5$
Reddy et al, 2000		-	$0.93*10^5$	$1.1*10^5$
% Diff		-	7.92%	10%
Poutre composite sous charge uniforme répartie				
Present	100	-	$1.1*10^6$	$1.25*10^6$
Reddy et al, 2000		-	$1.0*10^6$	$1.15*10^6$
% Diff		-	9%	10%

4.6 Conclusion :

En fait, les résultats obtenus dans ce chapitre permettent de tirer les conclusions suivantes:

- La nouvelle fonction de cisaillement polynomiale présente une bonne convergence avec celles des autres théories de déformation de cisaillement d'ordre supérieur, d'après la comparaison.
- La comparaison de modèle d'ordre élevé proposé prenant en compte la contrainte de cisaillement dans les champs de déplacement pour les poutres composites en matériaux gradient fonctionnel (FGM) à extrémités diverses en flexion présente des résultats plus précis (comportement non linéaire) par rapport à ceux prédits par la théorie des poutres de Timoshenko dans laquelle l'effet de contrainte de cisaillement est pris en compte par un coefficient de correction et également par la théorie classique des poutres d'Euler-Bernoulli (CBT) qui néglige les contraintes de cisaillement dans les champs de déplacement.
- Les résultats en termes de déplacements prédits à partir des analyses proposées de modèle et le modèle de la littérature montrent qu'il y a une diminution remarquable d'un quart lorsque

Chapitre 4 : Résultats et validation numérique du présent modèle analytique

les conditions aux limites de la poutre sont modifiées d'extrémités simplement appuyées à des extrémités encastées. D'après la comparaison, les déplacements transversaux maximaux sont déduites à partir des solutions générales augmente et se révèlent identiques à celles de la théorie de la déformation par cisaillement de premier ordre de Timoshenko avec le facteur de correction de cisaillement égal à $5/6$, et identique et similaire aussi avec les résultats des théories existantes à cet domaine.

- La comparaison montre une augmentation linéaire de la contrainte pour la théorie de Timoshenko utilisée avec un coefficient de correction ($k=5/6$). Néanmoins, une distribution cubique des contraintes est observée pour les théories d'ordre supérieur (PDSBT).

- Les contraintes de cisaillement le long des axes des poutres sont généralement supposées être paraboliques à travers l'épaisseur et similaire à ceux de comparaison et que la théorie de la poutre de Timoshenko donne une valeur constante à travers l'épaisseur de la poutre.

- Le modèle mathématique établi validé par rapport au modèle de comparaison par une erreur acceptable inférieure à 10%, ce qui implique leur précision et leur similarité à ceux de comparaison.

**CONCLUSION
GÉNÉRALE
ET PERSPECTIVES**

CONCLUSIONS:

Cette thèse est d'étudié la réponse statique à la flexion statique des poutres FGM.

La théorie HSDT (la déformation par cisaillement d'ordre supérieur), ou l'effet de déformation par cisaillement transversal, est considéré.

Ces théories (HSDT) ont utilisées utilement de manière exhaustive et détaillée en déplacement statique.

Un modèle mathématique est établi, pour ces poutres composites des diverses limites.

Le modèle mathématique est établi par des équations différentielles dérivées du principe du travail virtuel.

La théorie actuelle ne nécessite aucun facteur de correction de cisaillement. L'exactitude de la théorie actuelle est vérifiée en comparant les résultats avec autres théories dans ce domaine.

On peut tirer les conclusions sur l'ensemble de résultats importants de ce travail :

- La nouvelle fonction de cisaillement polynomiale à cette étude montre une bonne convergence. Ainsi, être utilisée dans des études futures, et vérifier leur précision.

- Le modèle mathématique proposé prenant en compte les déformations en cisaillement (effet de gauchissement), dans tous les cas étudiés de poutres FGM, les solutions analytiques obtenus de ce modèle ont prouvé leurs efficacités et validités par rapport à ceux de modèles références de comparaison.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

- Les déplacements transversaux maximaux sont déduits à partir des solutions générales et se révèlent identiques à celles de Timoshenko avec facteur correction égal à $5/6$. Les déplacements transversaux maximaux sont variés en augmentant et vice versa jusqu'à la rupture sous charge.
- Les contraintes axiales et transversales ont démontrés une forte similitude par rapport à ceux de comparaison.
- Déformations ont bon accord à celle de littératures de comparaison.
- L'axe neutre doit être donné, du fait de l'axe neutre n'est plus au milieu du plan. Cependant, il se déplace du milieu-plan sauf dans le cas d'une poutre isotrope. Sur axe neutre, on voit symétrie, matériaux homogènes.
- Augmentation épaisseur, implique une augmentation de cisaille transversale.
- Augmentation de indice de loi de puissance, augmenter le déplacement, donc écart proportionnel de cet indice.
- Fonctions sont gérables et leur utilisation influence les solutions analytiques. Les structures FGM basées sur l'apprentissage automatique et effectuez des optimisations de fiabilité et de coûts à l'aide du modèle proposé. Pour l'amélioration des modèles de calcul bien que très efficaces utiliser:

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES

- Méthodes déterministes: Sont données des résultats optimisés et exactes satisfaisantes.
- Méthodes probabilistes: Ne sont pas encore investiguées suffisamment aux problèmes liés principalement par les champs des matériaux composites et en FGM.

Par conséquent, on conclue que la présence de la modélisation numérique et mathématique est désirable pour les déformations.

Présent modèle mathématique pourrait être utilisé par les concepteurs dans le domaine des matériaux composites (à titre indicatif d'exemple, permettre d'élaboré un logiciel de calcul avec une marque déposé).

Ces conclusions permettent de confirmer que les résultats ont un bon accord sur les différentes caractéristiques physiques et mécaniques des poutres. En général, les résultats obtenus étaient tout à fait satisfaisants.

PERSPECTIVES:

De ce modeste travail de recherche présenté, nous pouvons constater et conseiller l'utilisation:

- Méthodes déterministes. - Méthodes probabilistes, et très efficaces pour ces problèmes liés principalement aux structures composites FGM.

On peut maintenir quelques axes:

- Détermination des charges critiques (poutres, plaques, coques).
- Comportement statique et vibratoire ainsi au flambage des matériaux composites sandwichs.
- Comportement thermiques sur les matériaux.
- Contribution à l'approche mathématique aux problèmes axisymétriques.

Références bibliographiques

-A-

ABDELOUAHAB TATI & Mabrouk Hessini. ANALYSE DU COMPORTEMENT DE FLAMBAGE DES PLAQUES MINCES STRATIFIEES EN MATERIAUX COMPOSITES PAR LA METHODE DES ELEMENTS FINIS. Courrier du Savoir – N°09, Mars 2009, pp.09-15. 2009. <https://revues.univ-biskra.dz/index.php/cds/article/view/489>

Afaq. K.S. Développement d'un nouveau modèle pour les structures composites multicouches et sandwichs avec prise en compte du cisaillement transverse et des effets de bord. PhD thesis, université Toulouse III - Paul Sabatier. 2003. <https://theses.fr/2003TOU30203>

Alshorbagy, A.E., Eltaher, M.A., Mahmoud, F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. Applied Mathematical Modelling. 35, 412- 425. 2011. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.07.006>

A.S. Sayyad , P.V. Avhad. On Static Bending, Elastic Buckling and Free Vibration Analysis of Symmetric Functionally Graded Sandwich Beams. Journal of Solid Mechanics. 11, 166-180. (2019). <https://sanad.iau.ir/Journal/jsm/Article/908507>

A.S. Tounsi, A. Buckling and dynamic behavior of the simply supported CNT-RC beams using an integral-first shear deformation theory. Computer. Concrete, 25(2), 155-166. 2020. <http://www.technopress.org/content/>

Aydogdu, M., Taskin, V . Free vibration analysis of functionally graded beams with simply supported edges. Materials & Design, 28, 1651-1656. 2007. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2006.02.007>

Ali Rachedi Mohamed. Approche mathématique pour l'étude des structures non homogènes reposant sur fondation élastique variable. Thèse Doctorat en sciences, Université de SIDI BEL ABBES. 2021. <https://dspace.univ-sba.dz/items/>

-B-

Bachir Bouiadjra R. Contribution à l'étude de la stabilité des plaques épaisses en composite sur fondations élastiques. Thèse de Doctorat L.M.D 3^{ème} Cycle, Université D'ORAN. 2015.
<https://theses-algerie.com/>

Benatta., M.A, Mechab, I., Tounsi, A., Adda Bedia, E.A. Static analysis of functionally graded short beams including warping and shear deformation effects. J Computational Materials. 44,765-773. 2008.
<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2008.05.020>

Benatta., M.A, Tounsi, A., Mechab, I., Bouiadjra, M.B. Mathematical solution for bending of short hybrid composite beams with variable fibers spacing. Applied Mathematics and Computation. 212, 337-348. 2009.

<https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.02.030>

BENABDERRAHMANE Ismail. Elaboration d'une démarche mathématique pour l'analyse du comportement des poutres en matériaux composites avancés. Thèse Doctorat.U SIDI BEL ABBES. 2022. <https://dspace.univ-sba.dz/items/>

Bodaghi, M. et Saidi, A.R. Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory. Applied Mathematical Modelling, 3659–3673. 2010.

<https://doi.org/10.1016/j.apm.2010.03.016>
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/>

Bouazza, M., Tounsi, A., Adda-Bedia, E.A., Megueni, A. . Thermo elastic stability analysis of functionally graded plates: An analytical approach , Computational Materials Science, 49, 865–870. 2010.

<https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2010.06.038>
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/>

-C-

Chi. Shyang-ho., Chung Yen-Ling. Cracking in coating-substrate composites of multi-layered and sigmoid FGM coatings. Engineering Fracture Mechanics; 70 (10), 1227–1243. 2003.

[https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(02\)00114-5](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(02)00114-5)

Cheng, Z.Q. and Batra, R.C. Deflection relationships between the homogeneous Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theories. Arch. Mech., 52, 143-158. 2000.

<https://am.ippt.pan.pl/am/article/view/v52p143>

C.F, Lu, , Chen, W.Q., Xu, R.Q., Lim, C.W. Semi-Analytical Elasticity Solutions for Bi-Directional Functionally Graded Beams. International Journal of Solids and Structures, 45(1), 258-275. 2008.

<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.07.018>

CHATEAUNEUF Alla . Comprendre les éléments finis : Principes, Formulation et exercices corrigés, Ellipses. 2005. <https://www.editions-ellipses.fr/>

-D-

Dhatt. G ,J.I. Batoz. Modélisation des structures par éléments finis. 2005.

Dhatt. G , Touzot.Git , Lefrancois. E . Méthode des éléments finis. Québec les presses de l'université Laval.1981.

-E-

Elmeiche Abbas . Vibrations libres des structures en FGM. Thèse de Magister. Université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbès. 2013.

<https://theses-algerie.com/8106609955519308/memoire-de-magister/universite-djillali-liabes---sidi-bel-abbes/vibrations-libres-des-structures-en-fgm->

Elmossouess Bouchra .Étude de la stabilité des plaques en matériaux fonctionnellement gradués en utilisant des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé. Thèse Doctorat. USTO. 2018. <https://www.univ-usto.dz>

-F-

Fahsi,A . Analyse Du Flambement Des Plaques FGM Sous Différents Chargements. Thèse Doctorat en sciences, Université de SIDI BEL ABBES. 2018.

Ferreira, A., Batra, R., Roque, C., Qian, L. and Jorge , R . Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method. Composite Structures, 75, 593–600. 2006.

[http://www.sites.beam.vt.edu/batra/pdf/pdfpapers/composites2006\(593-600\).pdf](http://www.sites.beam.vt.edu/batra/pdf/pdfpapers/composites2006(593-600).pdf)

-I-

Ilschner , B, Delfosse D. Synthesis of multiphase powder systems with a composition gradient. Solid State Phenomena, 8-9, 61-70. 1989.

<https://scholar.google.com/scholar>

Ilschner , B . Structural and compositional gradients: basic idea, preparation, applications .Proc, of Euro Materials, Paris, p. 763-772. 1994.

<https://scholar.google.com/scholar>

-G-

Gao, Y., Xu, S.P., Zhao, B.S. Boundary conditions for elastic beam bending. C.R. Mecanique Journal. 335, 1-6. 2007.

<https://doi.org/10.1016/j.crme.2006.11.001>

Ghugal Y. M., Sharma, R . A Hyperbolic Shear Deformation Theory for Flexure and Vibration of Thick Isotropic Beams. International Journal of Computational Methods. 6, 585-604. 2009.

[doi:10.1142/S0219876209002017](https://doi.org/10.1142/S0219876209002017)

<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219876209002017?srsId=AfmBOor36Rsbhb29GBBfs4KheVBTMJtx2f1SXuFZGU TAU qzbBu5hsO>

Ghugal Y. M. and Sharma, R.. A Refined Shear Deformation Theory for Flexure of Thick Beams, Latin American Journal of Solids and Structures. 8 ,183-193. 2011.<https://www.lajss.org>

G. R. Gandhe , P. M. Pankade , D. H. Tupe , P. G. Taur . Higher Order Computational Method for Static Flexural Analysis of thick beam. Procedia Manufacturing. 20, 493-498. 2018

<https://doi.org/10.1016/j.promfg.2018.02.073>

Guenfoud, H., Ziou, H., Himeur, M., Guenfoud, H. Analyses of a composite functionally graded material beam with a new transverse shear deformation function. Journal applied engineering science technologie,2, 105-113. 2016.

<https://revues.univ-biskra.dz/index.php/jaest/article/view/1898>

GAY, D. Matériaux composites, 4e édition Hermès, Paris, France, 672 p. 1997.

<https://www.amazon.fr/MATERIAUX-COMPOSITES-4%C3%A8me-%C3%A9dition-Daniel/dp/286601>

-K-

KESKAS SALIHA. Etude de l'effet de cisaillement transverse sur le comportement des poutres composites. Thèse Magister en génie civil de l'université Mentouri, Constantine, 2010.

Kadoli, R., Akhtar, K., Ganesan, N. Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory. Applied mathematical modeling, 32(12), 2509–2525. 2008
[.https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.09.015](https://doi.org/10.1016/j.apm.2007.09.015)

Karama. M, K.S. Afaq., S. Mistou, Mechanical behaviour of laminated composite beam by the new multi-layered laminated composite structures model with transverse shear stress continuity . Int. J. Solids Structures; 40 (6): 1525-1546. 2003.
[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00647-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00647-9)

Kiani Y., Bagherizadeh E., Eslami M.R. Thermal buckling of clamped thin rectangular FGM plates resting on Pasternak elastic foundation (Three approximate analytical solutions. J. Appl. Math. Mech., 91(7), 581-593. 2011.

<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/zamm.201000184>

-L-

Li, X.-F. A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams. Journal of sound and vibration, 318, 1210–1229. 2008.

<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.04.056>

Larbi, O., L., Kaci, A., Houari, M.S.A., Tounsi, A. An efficient shear deformation beam theory based on neutral surface position for bending and free vibration of functionally graded beams. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 41, 421-433. 2013.

https://www.researchgate.net/publication/259007459_An_Efficient_Shear_Deformation_Beam_Theory_Based_on_Neutral_Surface_Position_for_Bending_and_Free_Vibration_of_Functionally_Graded_Beams

Levinson, M. An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. Mechanics Research Communications, 7 (6), 343-350. 1980.

-M-

Mahdavian M. Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading. J. Solid Mech. 1 (3), 213–225. 2009.

Mian AM, Spencer AJM. Exact solutions for functionally graded and laminated elastic materials. *J Mech Phys Solids*. 46, 2283-95. 1998.

Mantari J.L., C. Guedes Soares. Generalized hybrid quasi-3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates”. *Compos. Struct.* 94, 2561- 2575. 2012.

Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory. *Composite Structures*, 499-512. 2008.

Matsunaga H. Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory . *Composite Structures*, 90, 76-86. 2009.

-N-

Narottam P. Bansal, Jitendra P. Singh, Jacques Lamon, Sung R. Choi. Processing and Properties of Advanced Ceramics and Composites III: Ceramic Transactions. John Wiley & Sons;page 110. 2011.

Nelson. R.B & D.R.Lorch. A refined theory for laminated orthotropic plates . *Journal of Applied Mechanics*,41,177-183. 1974.

-R-

Reddy .J.N. A simple higher order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*. 51,745-752. 1984.

Reddy, JN. Analysis of functionally graded plates. *International journal for numerical methods in engineering*,47, 663- 84. 2000.

Reddy, JN., Z. Cheng .Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*; 20, 841-855. 2001.

R.D.Mindlin. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates . *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, pages 31-38. 1951.

Rivello, R.M. Theory and analysis of flight structures. Editions McGraw-Hill, New York. 1969

-S-

Sankar, B.V. An elasticity solution for functionally graded beams. Composite science technologie Journal. 61, 689–696. 2001.

[https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(1\)00007-0](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(1)00007-0)

Sayyad, A.S., Ghugal, Y.M. Flexure of thick beams using new hyperbolic shear deformation theory. International Journal of mechanics, 5(3), 113-122. 2011.

<https://www.naun.org/main/NAUN/mechanics/20-015.pdf>

im ek, M. Static analysis of a functionally graded beam under a uniformly distributed load by Ritz method. International Journal of Engineering and Applied Sciences, 1(3), 1-11. 2009. <https://dergipark.org.tr/en/pub/ijeas/issue/23571/251092>

S. P. Timoshenko. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. Philosophical Magazine Series, 6, 742–746, 1921.

Steffens. H.D., M. Dvorak., M. Wewel. Plasma sprayed functionally gradient materials-processing and applications, in Proceeding of The First International Symposium on Functionally Gradient Materials-FGM'90- Sendai-Japan; 139-43. 1990.

Shi.,G., Voyiad. G.Z. A Sixth-Order Theory of Shear Deformable Beams with variational consistent boundary conditions. Applied Mechanics. 78, 1-10. (2011). DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4002594>

-V-

Vel S., R.C. Batra . Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. AIAA J; 40, 1421-1433. 2002.

<https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/2.1805>

Vel S, Batra RC. Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates. Int J Solids Struct .40, 7181-96. 2003.

[http://www.sites.beam.vt.edu/batra/pdf/pdfpapers/solids2003\(7181-7196\).pdf](http://www.sites.beam.vt.edu/batra/pdf/pdfpapers/solids2003(7181-7196).pdf)

Vel S.S, Batra R.C. Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates. J. Sound. Vib. 272,703–30. 2004.

[http://www.sites.beam.vt.edu/batra/pdf/pdfpapers/sound2004\(703-730\).pdf](http://www.sites.beam.vt.edu/batra/pdf/pdfpapers/sound2004(703-730).pdf)

-W-

Weingarten, V.I, Morgan, E.J, and Seide, P. Elastic stability of thin-walled cylindrical and conical Shells under axial Compression. AIAA Journal, 3, 500-505. 1965.

-Z-

Zaoui Fatima Zohra .Contribution à l'étude de la vibration libre des structures fonctionnellement graduées (FGM) par l'intermédiaire des théories de déformation de cisaillement avancées. Thèse DOCTORAT LMD, Université de Mostaganem. 2021.
<http://e-biblio.univ-mosta.dz/handle/123456789/17857>

Zaoui, F.Z., Hanifi, H., Lemya, A., Younsi A., Meradjah, M., Tounsi A., Ouinas, D. Free vibration analysis of functionally graded beams using a higher-order shear. Mathematical Modelling of Engineering Problems, 4, 7-12. 2017

<https://doi.org/10.18280/mmep.040102>

ZIOU Hassina, Guenfoud Mohamed. Contribution à la modélisation des structures en Matériaux à Gradient Fonctionne. Doctorat en Génie Civil, Université de Biskra.Algérie. 2017.
http://thesis.univ-biskra.dz/3104/1/Th%C3%A8se_lmd_2017.pdf

Zhong,Z.,Yu, T. Analytical solution of cantilever functionally graded beams. Composites science technology Journal. 67, 481-488. 2007.
<https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2006.08.023>

Zheng, Zhong, Tao, Yu. Analytical solution of a cantilever functionally graded beam.Journal of Composites Science and Technology, 67, 481-488. 2007.

<https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2006.08.023>

Ziou, H., Guenfoud, H., Guenfoud, M. Numerical modelling of a Timoshenko FGM beam using the finite element method. International Journal of Structural Engineering, 7, 239-261.

2016 . [doi:10.1504/IJSTRUCTE.2016.077719](https://doi.org/10.1504/IJSTRUCTE.2016.077719)

<https://www.inderscienceonline.com/doi/abs/10.1504/IJSTRUCTE.20>

Ziou, H., Guenfoud, M., Guenfoud, H . A simple higher-order shear deformation theory for static bending analysis of functionally graded beams. Jordan Journal of Civil Engineering, 15(2), 209-224. 2021.

ZIENCKIEWICZ O.C. The finite element method. McGraw Hill